

УДК 517.9

## Локальная динамика лазера с быстро осциллирующими параметрами

Кащенко С. А., Григорьева Е. В.

*Белорусский государственный экономический университет,  
220070 Минск, Республика Беларусь, Партизанский проспект, 26  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*e-mail: grigorieva@tut.by, kasch@uniyar.ac.ru*

*получена 10 мая 2013*

**Ключевые слова:** лазерная динамика, обратная связь, бифуркационный анализ

Рассматривается динамика лазеров класса В с некогерентной оптической обратной связью, образованной быстро вибрирующими внешними зеркалами. С этой целью изучена задача об устойчивости состояния равновесия в модельной системе с быстро осциллирующими коэффициентами. Получена усредненная система с распределенным запаздыванием. Установлено, что в присутствии быстрых осцилляций запаздывания граница неустойчивости состояния равновесия сдвигается в сторону существенно больших значений коэффициента обратной связи. Зависимость величины смещения при возрастании амплитуды модуляции имеет зонную структуру, поэтому быстрые осцилляции запаздывания могут стабилизировать или дестабилизировать состояние равновесия. Построены нормальные формы, которые показывают изменения знака ляпуновской величины вдоль границы и описывают характеристики периодических и квазипериодических режимов вблизи состояния равновесия.

### 1. Введение

Запаздывающая обратная связь (ОС) в нелинейных системах может быть использована как для стабилизации состояния равновесия, так и для установления осциллирующих режимов с заданными характеристиками, включая высокоразмерный динамический хаос [1, 2]. С целью расширения области эффективного управления в многомерных системах предлагались различные модификации ОС [3, 4], учет многократного запаздывания [5], дополнительная периодическая модуляция уровня ОС [6], периодическая и стохастическая модуляция времени задержки [7–9]. В последнем случае, по аналогии с классическими результатами в задаче о динамике маятника с вибрирующим подвесом [10, 11], можно ожидать стабилизации неустойчивого равновесия при высокочастотной модуляции параметров ОС. В системах с запаздыванием эти эффекты обсуждались в работе [12].

Сложные режимы, индуцированные дополнительными факторами, также могут иметь самостоятельное практическое значение. Так, в задачах об измерении расстояния до вибрирующей поверхности, формирующей внешний резонатор, необходимо учитывать периодические изменения времени задержки оптической ОС [13]. Изменения характеристик ОС в пределах диапазона, обеспечивающего хаотический режим генерации, предлагались для кодирования информации [14, 15].

В настоящей работе изучаются особенности локальной динамики систем с осциллирующим запаздыванием в окрестности состояния равновесия на примере математической модели лазера с некогерентной оптической ОС [16]. При условии достаточно большой частоты колебаний исходная система с запаздыванием будет сведена к специальному ОДУ, которое описывает в главном динамические свойства рассматриваемой системы. Здесь используются известные методы интегральных многообразий [17] и метод нормальных форм [18]. Будет показано, что области устойчивости стационарного состояния расширяются, граница устойчивости преобразуется в граничную область, где условия бифуркации меняются при изменении частоты модуляции. При этом сохраняется возможность нелокальных осциллирующих режимов большой амплитуды. Отметим, что динамика релаксационных колебаний при модуляции запаздывания с частотой, сопоставимой с собственной частотой системы, ранее была рассмотрена в [20] с помощью специального метода редукции системы к двумерному отображению. Были получены условия квазипериодических и хаотических пиковых режимов. В лазерных диодах наблюдались аналогичные эффекты "дрожания" импульсов, вызванные чувствительностью к малым вариациям длины резонатора [21].

## 2. Модель

В схеме оптической ОС, предложенной в работе [16], поляризация отраженного от внешнего зеркала света ортогональна к поляризации падающего света, что позволяет не учитывать когерентное взаимодействие встречных волн электрического поля в математической модели. Динамика генерации такого устройства описывается одномерными скоростными уравнениями с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1) \\ \dot{y} &= q - y - y[u + \gamma u(t - \tau)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$  и  $y$  пропорциональны плотностям фотонов и инверсии населенностей соответственно,  $q$  – скорость накачки,  $v$  – отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей, потери резонатора нормированы к единице,  $t$  и  $\tau$  – текущее время и время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированные на время релаксации инверсии населенностей,  $\gamma$  – коэффициент обратной связи. Отметим, что предлагаемая ниже методика может быть использована и для модели Лэнга–Кобаяши [22, 23] с учетом когерентного взаимодействия встречных волн.

Бифуркационный анализ систем, близких к рассматриваемой, выполнен в работах [24, 25] и объясняет образование циклов и торов в окрестности бифуркаций коразмерности два. Аналогичные эффекты имеют место и в системе (1). Рассмотрим их кратко. Система имеет два состояния равновесия. Первое состояние с нулевой

плотностью излучения,  $u(t) = 0$ ,  $y(t) = q$ , становится неустойчивым при достижении накачки порогового значения  $q = 1$ . Далее будем полагать  $q > 1$ . При этом появляется второе состояние равновесия  $u(t) = u_s$ ,  $y(t) = y_s$ , где

$$u_s(\gamma) = \frac{q-1}{1+\gamma}, \quad y_s = 1, \quad (2)$$

устойчивость которого стандартно определяется поведением корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda q + v u_s + \gamma v u_s e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (3)$$

Очевидно, при  $\gamma = 0$  рассматриваемое состояние равновесия устойчиво. Пусть  $\gamma_0 > 0$  – наименьшее положительное значение, при котором уравнение (3) имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm i \mu_0$  ( $\mu_0 > 0$ ) и  $\text{Re } \lambda'_{1,2}(\gamma_0) > 0$ , а все другие корни имеют отрицательные действительные части. Тогда при  $\gamma \in (0, \gamma_0)$  состояние равновесия  $(u_s, y_s)$  системы (1) асимптотически устойчиво, а при  $\gamma > \gamma_0$  – неустойчиво. Бифуркационные значения  $\gamma_0$  и  $\mu_0$  находятся из системы уравнений:

$$\text{tg}(\mu_0 \tau) = \frac{\mu_0 q}{\mu_0^2 - v u_s(\gamma_0)}, \quad (4)$$

$$(v u_s(\gamma_0) \gamma_0)^2 = (\mu_0^2 - v u_s(\gamma_0))^2 + \mu_0^2 q^2. \quad (5)$$

В плоскости параметров ОС  $(\gamma, \tau)$  соответствующие кривые  $\gamma_0(\tau)$  представлены на рис. 1,а) и будут подробнее обсуждаться ниже.

В настоящей работе рассматривается более сложная по сравнению с (1) система, включающая периодическую модуляцию параметров с частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (v + v_1 \sin \omega t) u [y - 1 - b \sin \omega t], \\ \dot{y} &= q + q_1 \sin \omega t - y - y [u + (\gamma + \gamma_1 \sin \omega t) u(t - \tau - a \sin \omega t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $v_1, q_1, \gamma_1, a$  и  $b$  характеризуют амплитуды модуляции соответствующих коэффициентов.

Осцилляции запаздывания могут быть, в частности, следствием вибрации зеркал, образующих внешний резонатор, или организованы оптоэлектронными средствами.

Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, состоит в том, что параметр  $\omega$  является достаточно большим, т.е.

$$\omega \gg 1. \quad (7)$$

При этом условии исследуем вопрос о динамике решений системы (6). В разделах 3–6 остановимся на наиболее интересном случае, когда быстро осциллирующие слагаемые содержатся только в запаздывании, а в разделе 7 будет учтена роль остальных коэффициентов  $(v_1, q_1, \gamma_1, b)$ .

### 3. Усредненная система

Прежде, чем приступить к изучению систем с запаздыванием и быстро осциллирующими коэффициентами, напомним основные результаты, касающиеся принципа

усреднения [26]. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(\omega t, x), \quad (8)$$

где  $\omega \gg 1$ , а вектор-функция  $f(\Gamma, x)$  периодична (почти периодична) по первому аргументу  $\Gamma = \omega t$  и достаточно гладкая по второму аргументу, показано, что при выполнении ряда естественных ограничений поведение решений (8) определяется в главном поведением решений более простой – автономной – системой

$$\dot{x} = f_0(x), \quad \text{где } f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Gamma, x) d\Gamma. \quad (9)$$

Соответствующее обоснование базируется на том, что в результате замены времени  $\omega t = \Gamma$  система (8) принимает вид

$$\frac{dx}{d\Gamma} = \omega^{-1} f(\Gamma, x), \quad (10)$$

т.е. производная  $\frac{dx}{d\Gamma}$  оказывается в некотором смысле достаточно малой. Для систем с запаздыванием такую замену времени выполнять нецелесообразно, поскольку промежуток запаздывания тогда неограниченно возрастает при  $\omega \rightarrow \infty$ . Тем не менее и для систем вида (11) принцип усреднения имеет место [12]. Как будет показано ниже, присутствие запаздывания может приводить к новым динамическим эффектам, которые не встречаются в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее будем рассматривать систему с периодически изменяющимся запаздыванием:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y - y[u + \gamma u(t - \tau - a \sin \omega t)], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a$  – параметр, характеризующий амплитуду модуляции, которую естественно ограничить неравенством:

$$|a| \leq \tau.$$

Фиксируем в произвольный момент  $t_0$  начальные условия  $u(t_0 + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau - a, 0]$  и  $y(t_0)$ , подставим их в правую часть системы (11) и произведем усреднение по быстрому времени  $\Gamma = \omega t$ :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y - y \left[ u + \gamma \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u(t - \tau - a \cos(\omega s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Слагаемое с быстро осциллирующим запаздывающим аргументом при усреднении преобразуем следующим образом. Сделаем замену переменной  $s_1 = \cos(\omega s)$ ,  $ds_1 = -\omega \sin(\omega s) ds$  и учтем, что  $\sin(\omega s) = \pm \sqrt{1 - s_1^2}$  на интервалах  $s \in [0, \pi/\omega]$  и  $s \in [\pi/\omega, 2\pi/\omega]$ , тогда получим:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u(t - \tau - a \cos(\omega s)) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{-1} \frac{u(t - \tau - a s_1) + u(t - \tau + a s_1)}{\sqrt{1 - s_1^2}} ds_1.$$

Окончательно, опуская индекс в формальной переменной интегрирования, приходим к усредненной системе уравнений с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y-1), \\ \dot{y} &= q-y-y \left[ u + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{u(t-\tau-as) + u(t-\tau+as)}{\sqrt{1-s^2}} ds \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Связь между решениями  $u(t, \omega)$ ,  $y(t, \omega)$  системы (11) и решениями  $u(t)$ ,  $y(t)$  усредненной системы (12) с одинаковыми начальными условиями из фазового пространства  $C_{[-\tau-a, 0]} \times R^1$  устанавливают асимптотические формулы

$$u(t, \omega) = u(t) + O(\omega^{-1}), \quad y(t, \omega) = y(t) + O(\omega^{-1})$$

на каждом фиксированном отрезке  $[t_0, t_0 + \tau]$ .

Справедлив также следующий результат о близости режимов этих динамических систем. Пусть (12) имеет грубый цикл  $u_0(t)$ ,  $y_0(t)$  (тор размерности  $k$ ). Тогда при достаточно больших частотах  $\omega$  система (11) имеет 2-мерный тор  $u_0(t, \omega)$ ,  $y_0(t, \omega)$  (тор размерности  $k+1$ ) той же устойчивости, для которого выполнены асимптотические равенства

$$u_0(t, \omega) = u_0\left((1+o(1))t\right) + o(1), \quad y_0(t, \omega) = y_0\left((1+o(1))t\right) + o(1).$$

#### 4. Устойчивость состояния равновесия усредненной системы

Состояния равновесия в системе (11), содержащей осцилляции в запаздывании, и в усредненной системе (12) одни и те же. Будем исследовать далее режимы системы (12) в окрестности ненулевого состояния равновесия  $y = y_s$ ,  $u = u_s$ . Для анализа его устойчивости рассмотрим линеаризованную систему для малых отклонений  $u_1(t) = u(t) - u_s$ ,  $y_1(t) = y(t) - y_s$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= vu_s y_1, \\ \dot{y}_1 &= -qy_1 - u_1 - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{u_1(t-\tau-as) + u_1(t-\tau+as)}{\sqrt{1-s^2}} ds \end{aligned} \quad (13)$$

и ее характеристический квазиполином

$$\lambda^2 + q\lambda + vu_s + \gamma vu_s \ell(\lambda) = 0, \quad (14)$$

где

$$\ell(\lambda) = e^{-\tau\lambda} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 (1-s^2)^{-1/2} \operatorname{ch}(\lambda as) ds.$$

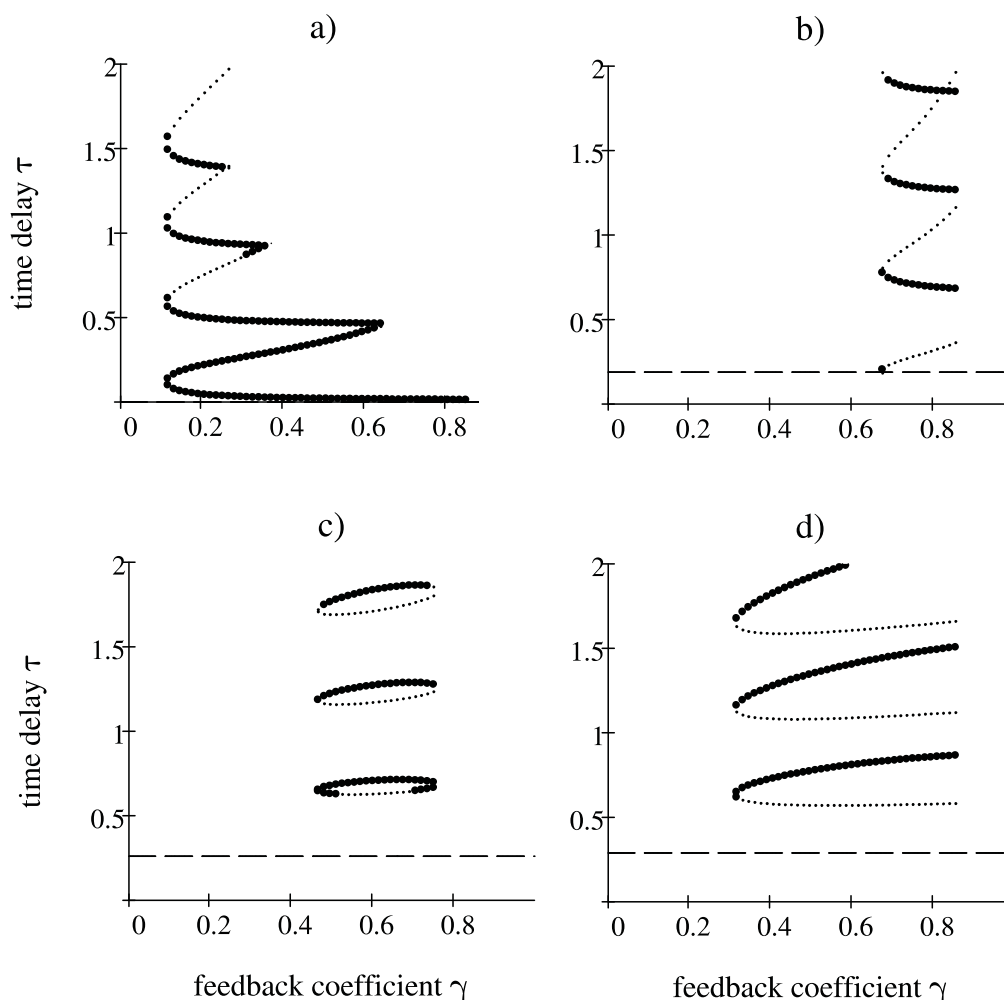


Рис. 1. Границы области устойчивости стационарного состояния в плоскости параметров ОС  $(\gamma, \tau)$  для системы (11) при  $v = 400, q = 1.5$  и в случаях: а) постоянного запаздывания при  $a = 0$  и при высокочастотной модуляции запаздывания с амплитудой; б)  $a = 0.17$ ; в)  $a = 0.26$ ; д)  $a = 0.29$ . Участки бифуркационной кривой, на которых ляпуновская величина положительна (отрицательна), обозначены пунктиром (жирной линией). Горизонтальные штриховые линии отмечают минимальное значение времени задержки  $\tau > a$

Как и для квазиполинома (3), определим условия на параметр  $\gamma$ , при которых корни квазиполинома (14) имеют отрицательные вещественные части. Положим  $\lambda = i\mu_0 \gamma = \gamma_0$ , ( $\mu_0 = \mu_0(a) > 0, \gamma_0(a) > 0$ ) и получим систему:

$$\operatorname{tg}(\mu_0 \tau) = \frac{\mu_0 q}{\mu_0^2 - v u_s(\gamma_0)}, \quad (15)$$

$$[\mu_0^2 - v u_s(\gamma_0)]^2 + q^2 \mu_0^2 = [\gamma_0 v u_s(\gamma_0)]^2 J_0^2(a \mu_0), \quad (16)$$

в которой  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x \sin s) ds.$$

При условии  $0 < \gamma < \gamma_0(a)$  состояние равновесия  $(u_s, y_s)$  системы (12) асимптотически устойчиво, а при  $\gamma > \gamma_0(a)$  – неустойчиво. На основании принципа усреднения заключаем, что для системы (11) имеет место следующее утверждение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Пусть  $\gamma \in (0, \gamma_0(a))$  ( $\gamma > \gamma_0(a)$ ). Тогда найдется такое  $\omega_0 > 0$ , что при всех  $\omega > \omega_0$  состояние равновесия  $(u_s, y_s)$  системы (11) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Обратим внимание, что

$$J_0^2(0) = 1, \quad \left. \frac{dJ_0(a\mu_0)}{da} \right|_{a=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 J_0(a\mu_0)}{da^2} \right|_{a=0} < 0,$$

а значит, при малых положительных значениях параметра  $a$  выполнено неравенство

$$\gamma_0(a) > \gamma_0(0). \tag{17}$$

Отсюда вытекает вывод о том, что быстрые осцилляции (с ненулевым средним) запаздывания могут расширять область  $\gamma \in (0, \gamma_0)$  устойчивости состояния равновесия системы (11) в пространстве параметров и, тем самым, стабилизировать систему.

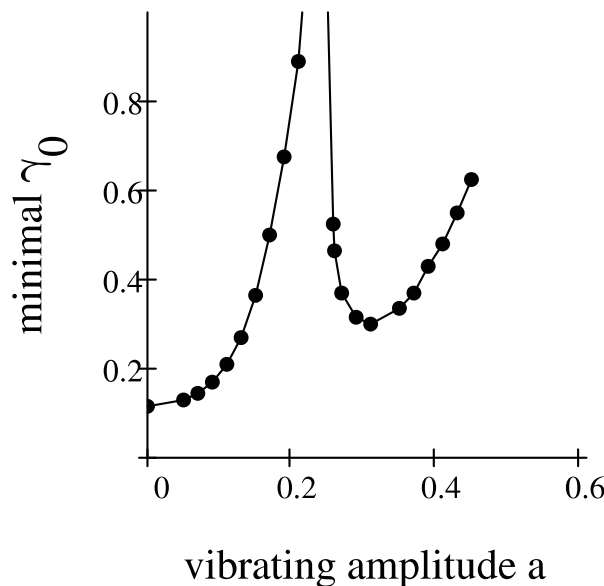


Рис. 2. Зависимость минимального значения коэффициента ОС  $\min \gamma_0(a)$ , при котором возникают области неустойчивости равновесного состояния, от амплитуды модуляции запаздывания  $a$ , другие параметры системы:  $v = 400, q = 1.5$ . На интервале  $a \in [0.22, 0.25]$  значения  $\gamma_0 > 1$

На рис. 1 представлены бифуркационные диаграммы в плоскости параметров обратной связи  $(\gamma, \tau)$ , вычисленные из условий (15), (16), в случае а) постоянного запаздывания при  $a = 0$  и в случаях б)–д) высокочастотной ( $\omega \gg 1$ ) модуляции запаздывания при возрастающих значениях  $a$ . Видно, что для фиксированного  $\tau$  при увеличении амплитуды модуляции  $a$  граница неустойчивости сначала сдвигается вправо. На интервале  $a \in [0.22, 0.25]$  при всех  $\tau > 0$  значения  $\gamma_0 > 1$ , т.е. нет областей неустойчивости при физически допустимых уровнях ОС. Затем при  $a > 0.25$

опять появляются области неустойчивости, которые далее опять сдвигаются вправо. Таким образом, наблюдается зонная структура областей неустойчивости.

График зависимости минимального бифуркационного значения  $\gamma_0(a)$ , при котором возникает неустойчивость, от амплитуды модуляции запаздывания, рассчитанный из системы (15), (16) при  $v = 400$ , представлен на рис. 2. В частности, действительно существует интервал  $a$ , на котором минимальное допустимое значение коэффициента становится  $\gamma_0 > 1$ , т.е. области неустойчивости отсутствуют.

Для объяснения зонной структуры воспользуемся тем фактом, что в полупроводниковых лазерах типично достаточно большое значение параметра  $v \sim 10^3$ . Тогда можно оценить минимальное значение коэффициента ОС  $\gamma_0$ :

$$\min\{\gamma_0(a)\} = \frac{1}{|J_0(a\mu_0)|} \frac{q}{\sqrt{v(q-1)}} (1 + O(v^{-1/2})). \quad (18)$$

Поскольку в отсутствие модуляции запаздывания  $a = 0$  и  $J_0(0) = 1$ , а при  $a > 0$  и  $|J_0(a\mu_0)| < 1$ , то граница неустойчивости сдвигается в сторону больших значений  $\gamma$ . В точках  $a = a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , соответствующих нулям функции Бесселя  $J_0(a_k\mu_0) = 0$ , минимальное критическое значение стремится к бесконечности, следовательно, области неустойчивости равновесного состояния отсутствуют.

## 5. Периодические решения усредненной системы в критическом случае

При условии

$$\gamma = \gamma_0(a)$$

линейная система (13) имеет периодическое решение

$$u_1(t) = U_0 \xi e^{i\mu_0 t} + c.c., \quad y_1(t) = Y_0 \xi e^{i\mu_0 t} + c.c., \quad (19)$$

где  $\xi$  – произвольная комплексная постоянная и

$$U_0 = v u_s, \quad Y_0 = i\mu_0.$$

При этом нелинейная система (12) имеет в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия устойчивое двумерное локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором исходную систему можно представить в виде уравнения для медленно меняющейся во времени комплексной амплитуды  $\xi(t)$ :

$$\frac{d\xi}{dt} = d_0 \xi |\xi|^2 + O(\xi^5). \quad (20)$$

Решения (20) связаны с решениями (12) на многообразии следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_s + u_{11}[\xi e^{i\mu_0 t} + c.c.] + u_{20}|\xi|^2 + [u_{21}e^{i2\mu_0 t}\xi^2 + c.c.] + u_{31}e^{i\mu_0 t}\xi|\xi|^2 + \dots \\ y(t) &= y_s + y_{11}[\xi e^{i\mu_0 t} + c.c.] + y_{20}|\xi|^2 + [y_{21}e^{i2\mu_0 t}\xi^2 + c.c.] + y_{31}e^{i\mu_0 t}\xi|\xi|^2 + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Функция  $\xi(t)$ , играющая роль амплитуды главных гармоник, предполагается достаточно малой. Тем самым из (20) действительно следует, что  $\xi(t)$  меняется медленно



по времени. Для нахождения коэффициента  $d_0$  подставим ряды (21) в систему (12) и будем собирать коэффициенты при одинаковых гармониках и одинаковых степенях  $\xi(t)$ . В результате приходим последовательно к равенствам:

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= i\mu_0, \\
 u_{11} &= vu_s, \\
 y_{20} &= 0, \\
 u_{20} &= -y_{11}u_{11}\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0}(\ell(-i\mu_0) - \ell(i\mu_0)), \\
 u_{21} &= y_{11}u_{11}\frac{(q+2i\mu_0)/u_s - [1+\gamma_0\ell(i\mu_0)]}{2y_{11}(q+2i\mu_0)/u_{11} + [1+\gamma_0\ell(2i\mu_0)]}, \\
 y_{21} &= 2y_{11}u_{21}/u_{11} - y_{11}u_{11}/u_s.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Для определения коэффициентов  $u_{31}, y_{31}$  получаем систему, из условия разрешимости которой приходим к выражению для ляпуновской величины:

$$d_0 = \frac{d}{S}, \tag{23}$$

где

$$d = \frac{i\mu_0 - u_s + q}{u_s}(u_{20}r + u_{21}r^* + y_{21}) - \gamma_0[u_{20}r + u_{21}r^*\ell(2i\mu_0) + y_{21}\ell(-i\mu_0)],$$

$$S = \frac{2i\mu_0 + q}{vu_s} - \gamma_0[\tau\ell(i\mu_0) + a\ell_1(i\mu_0)],$$

и

$$\ell_1(\lambda) = e^{-\lambda\tau} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \sinh(\lambda as) \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds.$$

При условии  $\text{Re } d_0 < 0$  все решения уравнения (20) стремятся к нулю, а при  $\gamma > \gamma_0$  в достаточно малой окрестности неустойчивого состояния равновесия усредненной системы возникает устойчивый предельный цикл малой амплитуды (суперкритическая бифуркация). Если же  $\text{Re } d_0 > 0$  (субкритическая бифуркация) решения покидают окрестность  $\xi(t) = 0$ , что означает отсутствие аттракторов в малой окрестности состояния равновесия. При  $\gamma < \gamma_0$  вокруг устойчивого состояния равновесия усредненной системы имеется неустойчивый предельный цикл.

На рис. 1 участки бифуркационной границы, соответствующие суперкритической (субкритической) бифуркации, выделены жирной (тонкой) линией. Эти участки чередуются вдоль границы, причем изменение знака ляпуновской величины  $\text{Re } d_0$  может происходить в точках бифуркации коразмерности 2 (две пары корней характеристического уравнения имеют чисто мнимые значения). Условия возникновения торов при таких бифуркациях изучены в работах [24, 25]. Далее рассмотрим особенности бифуркационной границы в системе с быстро осциллирующими коэффициентами.

## 6. Локальная динамика системы с быстро осциллирующим запаздыванием в критическом случае

При  $\gamma = \gamma_0$  мультипликаторы системы (11), близкие к единичной окружности при  $\omega \gg 1$ , близки к соответствующим мультипликаторам усредненной системы, а их в свою очередь можно выразить через корни характеристического уравнения (14). Таких мультипликаторов имеется два  $\nu_{1,2}(\omega) = \exp(\lambda_{1,2}(\omega))$ , причем для определения  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  можно использовать представление [27, 28]:

$$\lambda_1(\omega) = i\mu_0 + \omega^{-1}\mu_1(\omega) + \omega^{-2}\mu_2(\omega) + \dots \quad (24)$$

а остальные  $\lambda_k, k = 3, 4, \dots$  имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение для медленной амплитуды принимает вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = \left[ \omega^{-1}\mu_1(\omega) + \omega^{-2}\mu_2(\omega) \right] \xi + \left[ d_0 + \omega^{-1}d_1(\omega) \right] \xi |\xi|^2 + O(|\xi|^5 + \omega^{-3}|\xi|). \quad (25)$$

Таким образом, быстрые осцилляции запаздывания приводят к появлению линейных по  $\xi$  слагаемых и локальная динамика в окрестности состояния равновесия  $(u_s, y_s)$  определяется знаком действительной части главных членов разложения  $\lambda(\omega)$ . Для вычисления коэффициентов  $\mu_1, \mu_2$  применим специальный алгоритм, разработанный в работе [28].

Линеаризованная на  $(u_s, y_s)$  система (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \nu u_s y, \\ \dot{y} &= -qy - u - \gamma u(t - \tau - a \sin \omega t). \end{aligned} \quad (26)$$

Введем в рассмотрение формальные ряды

$$\begin{aligned} \lambda_0(\omega) &= i\mu_0 + \omega^{-1}\mu_1(\omega) + \omega^{-2}\mu_2(\omega) + \dots, \\ U(t, \Gamma, \omega) &= U_0 + \omega^{-1}(U_1(\Gamma, \omega) + W_1(t, \omega)) + \omega^{-2}(U_2(\Gamma, \omega) + W_2(t, \omega)) + \dots, \\ Y(t, \Gamma, \omega) &= Y_0 + \omega^{-1}(Y_1(\Gamma, \omega) + Z_1(t, \omega)) + \omega^{-2}(Y_2(\Gamma, \omega) + Z_2(t, \omega)) + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

в которых  $\Gamma = \omega t$  и все фигурирующие в (27) функции почти периодичны по каждому аргументу, а  $U(\Gamma, \omega)$  и  $Y(\Gamma, \omega)$  имеют нулевое среднее по первому аргументу.

Положим в (26)

$$\begin{aligned} u &= U(t, \Gamma, \omega) e^{\lambda_0(\omega)t}, \\ y &= Y(t, \Gamma, \omega) e^{\lambda_0(\omega)t} \end{aligned}$$

и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ . Можно показать, что все коэффициенты рядов (27) последовательно определяются. Так, на первом шаге получим систему относительно  $U_1(\Gamma, \omega)$  и  $Y_1(\Gamma, \omega)$ :  $((*)' = \frac{\partial *}{\partial \Gamma})$

$$\begin{aligned} i\mu_0 U_0 + U_1' &= \nu u_0 Y_0, \\ i\mu_0 Y_0 + Y_1' &= -qY_0 - U_0 - \gamma e^{-i\mu_0(\tau + a \sin \Gamma)} U_0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$U_1' = 0, Y_1' = \ell(i\mu_0) - \gamma e^{-i\mu_0(\tau + a \sin \Gamma)}. \quad (28)$$

Из (28)  $U_1$  и  $Y_1$  однозначно определяются, причем  $U_1 \equiv 0$ .

На втором шаге приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 + i\mu_0 W_1 + \mu_1 U_0 + U_2' &= \nu u_0 Y_1, \\ \dot{Z}_1 + i\mu_0 Z_1 + \mu_1 Z_0 + i\mu_0 Y_1 + Y_2' &= -qY_1 - qZ_1 - W_1 + \\ & f(\Gamma) [\mu_1(\tau + a \sin \tau)U_0 + W_1(t - \tau - a \sin \Gamma)], \end{aligned} \quad (29)$$

в которой  $f(\Gamma) = \gamma e^{-i\mu_0(\tau + a \sin \Gamma)}$ . Из (29) приходим к выводу, что

$$U_2' = \nu u_0 Y_1, W_1 = 0, Z_1 = 0, \mu_1 = 0, Y_2' = -(i\mu_0 + q)Y_1. \quad (30)$$

Следующий шаг – анализ слагаемых порядка  $\omega^{-2}$ . Для нахождения величины  $\mu_2$ , которая отвечает за устойчивость решений, достаточно учесть слагаемые, не содержащие аргумент  $\Gamma$ . В итоге получим систему

$$\begin{aligned} \mu_2 U_0 + i\mu_0 W_2 + \dot{W}_2 &= \nu u_0 Z_2, \\ \mu_2 Y_0 + i\mu_0 Z_2 + \dot{Z}_2 &= -qZ_2 - W_2 + \mu_2 U_0 M(f(\Gamma)(\tau + a \sin \Gamma)) - \\ & M(f(\Gamma)U_2(\Gamma - \omega\tau - \omega a \sin \Gamma)) - M(f(\Gamma)W_2(t - \tau - a \sin \Gamma)). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь через  $M(\varphi(\Gamma))$  обозначено среднее по  $\Gamma$  значение функции  $\varphi(\Gamma)$ :

$$M(\varphi(\Gamma)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi(\Gamma) d\Gamma.$$

Условие разрешимости системы (31) в указанном классе функций приводит к равенству для  $\mu_2$ :

$$\mu_2(\omega) = -\frac{M(f(\Gamma)U_2(\Gamma - \omega\tau - \omega a \sin \Gamma))}{q + 2i\mu_0 - \nu u_0 M(f(\Gamma)(\tau + a \sin \Gamma))}. \quad (32)$$

Отсюда и из (30) находим значение  $\text{Re } \mu_2(\omega)$ . Можно показать, что  $\mu_2(\omega)$  осциллирует и стремится к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ , поэтому возможна неограниченная смена знака выражения  $\text{Re } \mu_2(\omega)$ . Ляпуновская величина для системы (11) – та же, (в главном), что и для усредненной системы (12). Тем самым при  $\omega \rightarrow \infty$  свойства устойчивости состояния равновесия  $(u_s, y_s)$  системы (11) чередуются и может происходить неограниченный процесс “рождения” из состояния равновесия  $(u_s, y_s)$  и “гибели”, когда наблюдается влипание в  $(u_s, y_s)$  установившегося режима (тора).

## 7. Устойчивость состояния равновесия системы (6)

В системе (6) произведем усреднение. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \nu u(y - 1) - \frac{1}{2} b v_1 u, \\ \dot{y} &= q - y - y[u + \gamma L(u)], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$L(u) = \pi^{-1} \left( \int_{-1}^0 \frac{u(t - \tau - as) + u(t - \tau + as)}{\sqrt{1 - s^2}} ds - \gamma_1 \int_{-1}^0 \frac{s[u(t - \tau - as) - u(t - \tau + as)]}{\sqrt{1 - s^2}} ds \right).$$

Эта система имеет состояние равновесия

$$u_0 = (1 + \gamma)^{-1} [q - 1 + \frac{1}{2}bv_1v^{-1}], \quad y_0 = 1 - \frac{1}{2}bv_1v^{-1},$$

а характеристический квазиполином линеаризованной на нем системы имеет вид

$$\lambda^2 + \left[ q + bv_1 \left( 1 + \frac{1}{2}v^{-1} \right) \right] \lambda + \nu u_0 \left( 1 - \frac{1}{2}bv_1v^{-1} \right) [1 + \gamma L_0(\lambda)] = 0, \quad (34)$$

в которой

$$L_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \left( e^{-\lambda\tau} \int_{-1}^0 (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(\lambda as) ds + \gamma_1 \int_{-1}^0 s(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}(\lambda as) ds \right).$$

При достаточно больших  $\omega$  система (6) имеет близкое к состоянию равновесия  $(u_s, y_s)$  системы (33) периодическое решение  $u_0(\Gamma, \omega)$ ,  $y_0(\Gamma, \omega)$ , которое представляется асимптотическим рядом

$$\begin{aligned} u_0(\Gamma, \omega) &= u_0 + \omega^{-1}u_1(\Gamma, \omega) + \omega^{-2}u_2(\Gamma, \omega) + \dots, \\ y_0(\Gamma, \omega) &= y_0 + \omega^{-1}y_1(\Gamma, \omega) + \omega^{-2}y_2(\Gamma, \omega) + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

где периодические по  $\Gamma$  функции  $u_j(\Gamma, \omega)$  и  $y_j(\Gamma, \omega)$  почти периодически зависят от параметра  $\omega$ . Для примера приведем формулы для  $u_1(\Gamma, \omega)$  и  $y_1(\Gamma, \omega)$ :

$$\begin{aligned} u_1(\Gamma, \omega) &= \frac{1}{2}bv_1u_0[\sin 2\tau + \nu_1v^{-1} \cos \Gamma], \\ y_1(\Gamma, \omega) &= (\gamma_1u_0y_0 - q) \cos \Gamma. \end{aligned}$$

Устойчивость периодического решения  $u_0(\Gamma, \omega)$ ,  $y_0(\Gamma, \omega)$  при достаточно больших  $\omega$  определяется в главном поведением корней характеристического квазиполинома (34): отрицательность вещественных частей всех корней (34) гарантирует устойчивость этого решения, а присутствие хотя бы одного корня (34) с положительной вещественной частью влечет неустойчивость  $u_0(\Gamma, \omega)$ ,  $y_0(\Gamma, \omega)$ .

Замечание 1. Коэффициент  $q_1$  в главном не влияет на устойчивость (его нет в (34)).

Замечание 2. Пусть  $bv_1 = 0$ . Для определения границы области устойчивости по параметру  $\gamma$  получаем систему, аналогичную (15), (16),

$$\begin{aligned} (\nu u_0 \gamma(a))^2 (A^2(a) + \gamma_1^2 B^2(a)) &= (\mu_0^2 - \nu u_0)^2 + q^2 \mu_0^2, \\ \operatorname{tg}(\mu_0 \tau + \alpha(a, \gamma_1)) &= q \mu_0 (\mu_0^2 - \nu u_0)^{-1}, \end{aligned}$$

в которой

$$A(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(\mu_0 a \sin s) ds, \quad B(a) = \frac{-2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin s \cdot \sin(\mu_0 a \sin s) ds,$$

$$\alpha(a, \gamma_1) = a \operatorname{ctg} (B(a)A^{-1}(a)\gamma_1).$$

Интересно отметить, что  $A(0) = 1$ ,  $B(0) = 0$ ,  $A'(0) = 0$  и  $\left. \frac{d^2(A^2(a) + \gamma_1^2 B^2(a))}{da^2} \right|_{a=0} = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 - 1)$ . Тем самым осцилляции в запаздывании могут стабилизировать систему (6) (при  $b\nu_1 = 0$ ) до тех пор, пока амплитуда  $\gamma_1$  (осцилляций коэффициента перед членом с запаздыванием) относительно невелика, т.е. пока  $\gamma_1^2 < 1$ .

**Критический случай в системе (6).** Пусть характеристическое уравнение (34) имеет пару чисто мнимых корней  $\pm i\mu_0$  ( $\mu_0 > 0$ ), а вещественные части всех остальных корней отрицательны. Линеаризуем систему (6) на решении  $u_0(\Gamma, \omega)$ ,  $y_0(\Gamma, \omega)$ . В результате получим систему

$$\dot{x} = (v + v_1 \sin \Gamma)x(y_0(\Gamma, \omega) - 1 - b \sin \Gamma) + (v + v_1 \sin \Gamma)u_0(\Gamma, \omega)z, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -z[1 + u_0(\Gamma, \omega) + (\gamma + \gamma_1 \sin \Gamma)u_0(\Gamma - \omega\tau - \omega a \sin \Gamma, \omega)] - \\ & - y_0(\Gamma, \omega)[x + (\gamma + \gamma_1 \sin \Gamma)x(t - \tau - a \sin \Gamma)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Введем в рассмотрение формальные ряды

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= i\mu_0 + \omega^{-1}\mu_1(\omega) + \dots, \\ x_0(t, \omega) &= x_0 + \omega^{-1}[x_1(\Gamma, \omega) + X_1(t, \omega)] + \dots, \\ z_0(t, \omega) &= z_0 + \omega^{-1}[z_1(\Gamma, \omega) + Z_1(t, \omega)] + \dots, \end{aligned} \quad (38)$$

в которых зависимость от аргумента  $\omega$  – степенная и (или) почти периодическая, причем  $x_j(\Gamma, \omega)$  и  $z_j(\Gamma, \omega)$  имеют нулевые средние по  $\Gamma$ ,

$$x_0 = \nu u_0, \quad z_0 = i\mu_0 - \nu(y_0 - 1) + \frac{1}{2}b\nu_1.$$

Положим в (36)

$$x = x_0(t, \omega)e^{\mu(\omega)t}, \quad z = z_0(t, \omega)e^{\mu(\omega)t}$$

и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ . При этом можно последовательно определять все коэффициенты рядов (38). Так, на первом шаге получим выражения для  $x_1(\Gamma, \omega)$  и  $z_1(\Gamma, \omega)$ :

$$\begin{aligned} x_1(\Gamma, \omega) &= [vb x_0 - v_1(y_0 - 1)x_0 - v_1 u_0 z_0] \cos \Gamma - \frac{1}{2}v_1 b x_0 \sin \Gamma, \\ z_1(\Gamma, \omega) &= \gamma_1 [z_0 u_0 + y_0 x_0] \cos \Gamma. \end{aligned}$$

Учитывая коэффициенты порядка  $\omega^{-1}$ , получим систему, из которой определяются величины  $x_2(\Gamma, \omega)$ ,  $z_2(\Gamma, \omega)$ ,  $X_1(t, \omega)$ ,  $Z_1(t, \omega)$  и  $\mu_1(\omega)$ . Устойчивость решений системы (6) при достаточно больших  $\omega$  стандартно определяется в главном знаком величины  $\operatorname{Re} \mu_1(\omega)$ . Ограничимся здесь тем, что приведем соответствующую формулу для  $\mu_1(\omega)$ :

$$\mu_1(\omega) = - \left[ q + \frac{1}{2}b\nu_1 v^{-1} + z_0 + \alpha \right]^{-1} [x_0 \beta + z_0 \gamma_1 \Delta(\omega)],$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= M((\gamma + \gamma_1 \sin \Gamma)(\tau + a \sin \Gamma)e^{-i\mu_0(\tau + a \sin \Gamma)}), \\ \beta &= M((\gamma + \gamma_1 \sin \Gamma)(\gamma_1 u_0 y_0 - q_1) \cos \Gamma e^{-i\mu_0(\tau + a \sin \Gamma)}), \\ \Delta(\omega) &= \frac{1}{2} b v_1 u_0 M \left( \sin \Gamma \cdot \sin(2\Gamma - 2\omega\tau - 2\omega a \sin \Gamma) + \frac{v_1}{v} \sin \Gamma \cdot \cos(\Gamma - \omega\tau - \omega a \sin \Gamma) \right).\end{aligned}$$

## 8. Заключение

В работе рассмотрен вопрос об устойчивости состояния равновесия в системе с быстро осциллирующими коэффициентами. Построена усредненная по быстрым осцилляциям система с распределенным запаздыванием, которая определяет локальную динамику в главном.

Для усредненной системы выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что вследствие быстрых осцилляций граница неустойчивости в пространстве параметров  $(\gamma, \tau)$  смещается в сторону больших значений коэффициента ОС  $\gamma$ . Зависимость величины смещения при возрастании амплитуды модуляции имеет зонную структуру, поэтому быстрые осцилляции запаздывания могут стабилизировать или дестабилизировать состояние равновесия.

В критических случаях построены нормальные формы – уравнения для медленной амплитуды  $\xi(t)$  периодических решений. Рассчитана Ляпуновская величина, которая много раз меняет знак вдоль границы устойчивости и определяет разное направление бифуркации (суб- или суперкритическое), вследствие чего в окрестности границы возможно образование устойчивого или неустойчивого циклов.

Показано, что нормальные формы для исходной системы с осциллирующим запаздыванием включают линейный по  $\xi(t)$  член с коэффициентом порядка  $\omega^{-2}$  и зависящим от  $\omega$ , действительная часть которого меняет знак вдоль границы. Тем самым в пространстве параметров  $(\gamma, \tau)$  получаем граничную область (вместо границы  $\gamma_0(\tau)$  в усредненной системе) шириной  $\Delta\gamma \sim \omega^{-2}$ , где условия бифуркации существенно меняются при изменении частоты  $\omega$ .

## Список литературы

1. Ikeda K. and Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Physica D. 1987. V. 29. P. 223–235.
2. Kittel A., Pyragas K., Richter R. Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos // Phys. Rev. 1994. E 50. P. 262–268.
3. Pyragas K. Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller // Phys. Rev. Lett. 2001. Mar 12;86(11): 2265–8.
4. Pyragas K., Pyragas V., Kiss I. Z., Hudson J. L. Stabilizing and Tracking Unknown Steady States of Dynamical Systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Dec 9;89(24):244103. Epub 2002 Nov 22.
5. Ahlborn A., Parlitz U. Controlling dynamical systems using multiple delay feedback control // Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys. 2005. Jul;72(1 Pt 2):016206.

6. *Schuster H.G., Stemmler M. P.* Control of chaos by oscillating feedback // *Phys. Rev.* 1997. E 56, 6410.
7. *Gjurchinovski A., Urumov V.* Stabilization of unstable steady states by variable-delay feedback control // *EPL.* 2008. 84, 40013 // [www.epljournal.org](http://www.epljournal.org) doi: 10.1209/0295-5075/84/40013.
8. *Gjurchinovski A., Urumov V.* Variable-delay feedback control of unstable steady states in retarded time-delayed systems // *Physical Review.* 2010. E 81, 016209.
9. *Jüngling T., Gjurchinovski A., Urumov V.* Experimental time-delayed feedback control with variable and distributed delays // *Physical Review.* 2012. E 86, 046213.
10. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society.* 1908. V. 52, №8. P. 1–10.
11. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сборник трудов ин-та строительной механики АН УССР. 1950. Т. 14, № 2. С. 9–34. (*Bogolyubov N. N.* Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike // *Sbornik trudov in-ta stroitel'noy mekhaniki AN USSR.* 1950. Т. 14, № 2. P. 9–34 [in Russian].)
12. *Колесов Ю. С., Колесов В. С., Федик И. И.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1979. 162 с. (*Kolesov YU. S., Kolesov V. S., Fedik I. I.* Avtokolebaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami. Kiyev: Naukova dumka, 1979. 162 p. [in Russian].)
13. *Skripal A. V., Usanov D. A., Vagarin V. A., Kalinkin M. Yu.* Autodin detection by a semiconductor laser under moving external reflector // *Russian J. Tech. Physics.* 1999. V. 69. №1. P. 72–75.
14. *Yang T., Wu C. W., Chua L. O.* Cryptography based on chaotic systems // *IEEE Trans. Circuits Syst., I: Fundam. Theory Appl.* 1997. V. 44. P. 469–472.
15. *Goedgebuer J.P., Larger L., Porte H.* Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by delayed feedback tunable laser diode // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. 2249.
16. *Chern J.-L., Otsuka K.* Coexistence of two attractors in lasers with delayed incoherent optical feedback // *Opt. Commun.* 1993. V. 96. P. 259–266.
17. *Hale J. K.* *Theory of Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, 1977.
18. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 200 с.
19. *Grigorieva E. V., Kaschenko S. A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1993. V. 3. P. 1515–1528.
20. *Grigorieva E. V.* Instabilities of periodic orbits in lasers with oscillating delayed feedback // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2001. V. 4. P. 333–340.
21. *Martin-Regalado J., van Tartwijk G.H.M., Balle S., San Miguel M.* Mode control and pattern stabilization in broad-area lasers by optical feedback // *Phys. Rev. A.* 1996. V. 54. P. 5386–5393.

22. *Tartwijk G.H.M., Lenstra D.* Semiconductor lasers with optical injection and feedback // *Quantum. Semiclass. Opt.* 1995. V. 7. P. 87–143.
23. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // *IEEE J. Quantum. Electron.* 1980. QE-16. P. 347–355.
24. *Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A.* Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Opt. Commun.* 1999. V. 165. P. 279–292.
25. *Bestehorn M., Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D.* 2000. V. 145. P. 110–129.
26. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. (*Mitropol'skiy YU. A.* Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike. Kiyev: Naukova dumka, 1971 [in Russian].)
27. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Алгоритм исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последствием и быстро осциллирующими почти периодическими коэффициентами // *Исследования по устойчивости и теории колебаний.* Ярославль, 1977. С. 70–82. (*Kaschenko S. A., Mayorov V. V.* Algoritm issledovaniya ustoychivosti resheniy lineynykh differentsial'nykh uravneniy s posledstviyem i bystro ostsilliruyushchimi pochni periodicheskimi koeffitsiyentami // *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy.* Yaroslavl', 1977. S. 70–82 [in Russian].)
28. *Кащенко С. А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // *Тр. семинара им. И.Г. Петровского.* 1991. Вып. 15. С. 128–155. (*Kaschenko S. A.* Issledovaniye ustoychivosti resheniy lineynykh parabolicheskikh uravneniy s blizkimi k postoyannym koeffitsiyentami i maloy diffuziyey // *Tr. seminarra im. I.G. Petrovskogo.* 1991. Vyp. 15. С. 128–155. [in Russian].)



## Local Dynamics of a Laser with Rapidly Oscillating Parameters

Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.

*Belarus State Economical University, Partizanskii av., 26, Minsk, 220070, Belarus;*  
*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** laser dynamics, feedback, bifurcation analysis

The dynamics of class B lasers with the incoherent optical feedback formed by quickly vibrating external mirrors is viewed. The problem of the stability of equilibrium in a model system with rapidly oscillating coefficients is studied. The averaged system with the distributed delay is received. It is determined that in the presence of fast delay oscillation the limit of instability of a balance state moves towards significantly greater values of the feedback coefficient. The dependence of the shift with increasing the amplitude modulation has a band structure, so the rapid oscillations of delay can stabilize or destabilize the equilibrium. Normal forms which show changes of the sign of Lyapunov quantity along border are constructed. They describe characteristics of periodic and quasiperiodic modes close to the balance state.

### Сведения об авторах:

**Григорьева Елена Викторовна,**

Белорусский государственный экономический университет  
доктор физ.-мат. наук, профессор.

**Кащенко Сергей Александрович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
зав. кафедрой математического моделирования.