

УДК 621.926

Уравнение кинетики измельчения с произвольным законом распределения времени ожидания

Королев Л. В., Бытев Д. О.

Ярославский государственный технический университет

e-mail: korolevlv@mail.ru

получена 29 ноября 2011 года

Ключевые слова: измельчение, распределение, кинетика, время ожидания

Получено обобщенное кинетическое уравнение процесса измельчения для любого заданного закона распределения времени ожидания разрушения. Найденное уравнение позволяет моделировать процесс разрушения со степенным распределением времени ожидания и исследовать влияние зависимости показателя степени от размера частиц на кинетику процесса.

1. Постановка задачи

Для описания кинетики процессов измельчения обычно применяют интегральное уравнение вида [1]:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -S(x)n(x, t) + \int_x^{x_{max}} B(x, y)S(y)n(y, t)dy, \quad (1)$$

где $n(x, t)$ — дифференциальная функция распределения массы частиц по размерам x в момент времени t , x_{max} — размер частицы наиболее крупной фракции, $S(x)$ — селективная функция, определяющая скорость разрушения частиц размера x , $B(x, y)$ — распределительная функция, устанавливающая закон распределения по размерам осколков разрушения частицы размера y . В качестве величины x , характеризующей размер частицы, будем рассматривать ее объем. Уравнение (1) предполагает, что для каждой частицы вероятность подвергнуться разрушающему воздействию в интервале $[t, t + \Delta t]$ не зависит от времени t , прошедшего после предыдущего воздействия, и, следовательно, плотность распределения времени ожидания разрушения $f(t, x)$ определяется экспоненциальным законом Пуассона:

$$f(t, x) = f_{exp}(t, x) = \frac{1}{\bar{t}(x)} \exp\left(-\frac{t}{\bar{t}(x)}\right), \quad (2)$$

где $\bar{t}(x)$ — среднее время ожидания разрушения, определяемое природой изучаемого процесса и зависящее от размера частицы. В реальных условиях процесс измельчения может замедляться за счет диссипативных эффектов, неоднородности распределения фракций в рабочем объеме, образования «застойных зон», при попадании в которые частица практически не подвергается разрушающему воздействию. С математической точки зрения это означает, что скорость изменения распределения $\partial n(x, t)/\partial t$ должна определяться не только состоянием системы в текущий момент времени, но и ее предшествующей эволюцией, что, в свою очередь, приводит к необходимости рассмотрения функций $f(t, x)$, спадающих при $t \rightarrow \infty$ более медленно по сравнению с экспоненциальным законом (2). В работе [2] было предложено уравнение кинетики измельчения с дробной производной по времени для частного случая степенной функции распределения $f \propto t^{-(1+\gamma)}$, $0 < \gamma < 1$, не содержащей зависимости от размера частицы x . Для адекватного описания процессов измельчения необходимо учитывать зависимость функции f от x : для крупных частиц среднее время ожидания разрушающего воздействия должно быть конечным, а для мелких — стремиться к бесконечности, что приводит к формированию квазистационарного распределения на больших временах после разрушения крупных фракций.

2. Вывод обобщенного уравнения кинетики измельчения

Кинетическое уравнение процесса измельчения с произвольной плотностью распределения времен ожидания $f(t, x)$ может быть получено следующим образом. Представим функцию $n(x, t)$ в виде суммы

$$n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} n^{(k)}(x, t), \quad (3)$$

где $n^{(k)}(x, t)$ — доля частиц размера x , вновь возникших или сохранившихся к моменту времени t после начала процесса в результате k разрушающих воздействий. Первые слагаемые суммы (3) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} n^{(0)}(x, t) &= F(t, x)n_0(x), \\ n^{(1)}(x, t) &= \int_0^t d\tau F(t - \tau, x) \int_x^{x_{max}} dy K(x, y) f(\tau, y) n_0(y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(t, x) = 1 - \int_0^t f(\tau, x) d\tau$ — вероятность того, что в течение времени t частица не подвергается разрушающему воздействию, $n_0(x) = n(x, t = 0)$ — начальное распределение частиц по размерам. Ядро $K(x, y)$ определяется выражением

$$K(x, y) = (1 - P(x))\delta(x - y) + P(y)B(x, y), \quad (5)$$

где $P(x)$ — вероятность того, что частица размера x будет разрушена при очередном воздействии, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Функция $P(x)$ определяется механическими свойствами частиц и мощностью разрушающего воздействия. В рамках

предлагаемой модели она считается заданной. Для записи членов высокого порядка в (3) удобно ввести интегральные операторы, действующие на произвольную функцию $q(x, t)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}q &= \int_0^t f(t - \tau, x)q(x, \tau)d\tau, \\ \hat{F}q &= \int_0^t F(t - \tau, x)q(x, \tau)d\tau, \\ \hat{K}q &= \int_x^{x_{max}} K(x, y)q(y, t)dy.\end{aligned}\quad (6)$$

Тогда сумма (3) принимает вид

$$n(x, t) = (\hat{F} + \hat{F}\hat{K}\hat{f} + \hat{F}\hat{K}\hat{f}\hat{K}\hat{f} + \hat{F}\hat{K}\hat{f}\hat{K}\hat{f}\hat{K}\hat{f} + \dots)n_0(x)\delta(t), \quad (7)$$

где первые два слагаемых соответствуют (4). Для функции $n(x, t)$, представленной рядом (7), справедливо следующее уравнение:

$$n(x, t) = \hat{F}n_0(x)\delta(t) + \hat{F}\hat{K}\hat{f}\hat{F}^{-1}n(x, t), \quad (8)$$

где \hat{F}^{-1} — оператор, обратный оператору \hat{F} . В этом легко убедиться, решая уравнение (8) с помощью итерационной процедуры, в которой в качестве нулевого приближения берется первое слагаемое из правой части (8), а первое и последующие приближения получаются подстановкой предыдущего приближения в правую часть (8) на место $n(x, t)$. Описанная процедура дает формальное решение уравнения (8) в виде бесконечного ряда (7). Полученное уравнение (8) описывает кинетику процесса измельчения и позволяет для заданных произвольных функций $f(t, x)$, $P(x)$, $B(x, y)$ и $n_0(x)$ найти распределение $n(x, t)$ в любой момент времени.

Если функция f не зависит от размера частицы x , то операторы \hat{F} и \hat{K} коммутативны и уравнение (8) может быть записано в упрощенном виде

$$n(x, t) = \hat{F}n_0(x)\delta(t) + \hat{K}\hat{f}n(x, t). \quad (9)$$

В общем случае обратный оператор \hat{F}^{-1} в правой части (8) нетрудно исключить, если ввести дополнительную неизвестную функцию $\tilde{n}(x, t)$ и заменить уравнение (8) на эквивалентную систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{n}(x, t) = n_0(x)\delta(t) + \hat{K}\hat{f}\tilde{n}(x, t) \\ n(x, t) = \hat{F}\tilde{n}(x, t) \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (8) — (10) являются линейными интегральными уравнениями и могут решаться различными аналитическими и численными методами. Другую форму кинетического уравнения измельчения можно получить, применяя преобразование Лапласа по переменной t к левой и правой частям уравнения (8). Эта операция приводит к следующему соотношению:

$$n(x, p) = F(p, x)n_0(x) + F(p, x) \int_x^{x_{max}} dy \frac{K(x, y)f(p, y)n(y, p)}{F(p, y)}, \quad (11)$$

где $n(x, p)$, $f(p, x)$, $F(p, x)$ — Лаплас-образы функций $n(x, t)$, $f(t, x)$, и $F(t, x)$, соответственно, p — переменная преобразования Лапласа. Представляя ядро полученного интегрального уравнения в виде $K(x, y) = \delta(x - y) + \tilde{K}(x, y)$ и учитывая, что, согласно определению функции $F(t, x)$, $F(p, x) = p^{-1}(1 - f(p, x))$, уравнение (11) можно записать в форме

$$pn(x, p) - n_0(x) = p \int_x^{x_{max}} dy \frac{\tilde{K}(x, y) f(p, y) n(y, p)}{1 - f(p, y)}, \quad (12)$$

или, производя обращение преобразования Лапласа,

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_x^{x_{max}} dy \tilde{K}(x, y) G(t - \tau, y) n(y, \tau), \quad (13)$$

где

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp \frac{f(p, x) \exp(pt)}{1 - f(p, x)}, \quad (14)$$

$$\tilde{K}(x, y) = -P(x)\delta(x - y) + P(y)B(x, y).$$

Интегро-дифференциальное уравнение (13) с начальным условием $n(x, t = 0) = n_0(x)$ эквивалентно интегральному уравнению (8), но более удобно для качественного анализа.

3. Частные случаи уравнения кинетики измельчения

Если время ожидания разрушения распределено по закону Пуассона (2), то $f(p, x) = (1 + p\bar{t}(x))^{-1}$, выражение (14) дает $G(t, x) = \bar{t}(x)^{-1}$ и уравнение (13) принимает вид (1) с селективной функцией $S(x) = P(x)/\bar{t}(x)$, которая полностью определяет динамику процесса разрушения. Такое объединение двух разнородных факторов $P(x)$ и $\bar{t}(x)$ в один комплекс снижает эффективность применения уравнения (1) для моделирования реальных процессов измельчения. Действительно, из приведенного выражения для $S(x)$ следует, что при изменении одного из этих факторов динамика процесса останется прежней, если пропорционально изменить другой. Это означает, например, что при увеличении прочности частиц, приводящем к уменьшению функции $P(x)$ в k раз, скорость их разрушения $S(x)$ сохраняется, если в k раз уменьшить период разрушающего воздействия, определяемый функцией $\bar{t}(x)$, что не всегда наблюдается на практике.

Если время ожидания распределено по степенному закону

$$f(t, x) = f_{pow}(t, x) = \frac{\gamma(x)}{t_0 (1 + t/t_0)^{1+\gamma(x)}}, \quad (15)$$

где t_0 — параметр размерности времени, $\gamma(x) > 0$, то найти точное аналитическое выражение для функции $G(t, x)$ не представляется возможным. Как показывает

анализ, кинетика разрушения при $t > t_0$ определяется в основном асимптотическим выражением функции $G(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$. Это асимптотическое выражение имеет разный вид в зависимости от значения параметра $\gamma(x)$. При $\gamma(x) > 1$ среднее время ожидания $\bar{t}(x) = \int_0^\infty t f_{pow}(t, x) dt$ конечно и равно $t_0/(\gamma(x) - 1)$, поэтому при $t \rightarrow \infty$ $G(t, x) \approx \bar{t}(x)^{-1}$, как и в случае экспоненциального распределения. При $\gamma(x) < 1$ среднее время ожидания бесконечно и в ядре интегрального уравнения (13) появляется степенная зависимость от времени $G(t, x) \approx (\pi t_0)^{-1} \sin(\pi \gamma(x)) (t_0/t)^{(1-\gamma(x))}$, характерная для процессов с «памятью» [3]. С учетом проведенного анализа, кинетическое уравнение (13) со степенным распределением времени ожидания (15) может быть приближенно записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{t_0} \int_x^{x_{max}} dy \theta(\gamma(y) - 1) \tilde{K}(x, y) (\gamma(y) - 1) n(y, t) + \\ & + \frac{1}{\pi t_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_x^{x_{max}} dy \theta(1 - \gamma(y)) \tilde{K}(x, y) \frac{\sin(\pi \gamma(y)) t_0^{(1-\gamma(y))}}{(t - \tau)^{(1-\gamma(y))}} n(y, \tau), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\theta(x) = 0$ при $x < 1$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 1$.

Из уравнения (16) видно, что для моделирования реальных процессов измельчения с помощью уравнений (8), (10), (13) с распределением времени ожидания (15) следует выбирать зависимость $\gamma(x)$ таким образом, чтобы для крупных частиц, время пребывания которых в рабочем объеме невелико, величина γ была больше 1. Тогда скорость их разрушения будет определяться первым слагаемым в правой части (16), обеспечивающим их полное разрушение за конечное время порядка $\bar{t}(x)$. Для мелких частиц величина γ должна быть меньше 1. Тогда скорость их разрушения будет определяться вторым слагаемым в правой части (16), учитывающим изменение кинетики процесса вследствие долгого пребывания частиц в рабочем объеме, обеспечивая квазистационарное распределение $n(x, t)$, устанавливающееся после разрушения крупных фракций.

4. Результаты численного решения

Численное решение уравнения кинетики измельчения (10) со степенным распределением времени ожидания (15) проводилось методом замены интегралов квадратными суммами [4] в пакете Mathematica. Расчет выполнялся при $x_{max} = 1$ и $t_0 = 1$ с начальным распределением $n_0(x) = \delta(1 - x)$. Вероятность разрушения при единичном воздействии принималась пропорциональной линейному размеру частицы $P(x) = x^{1/3}$, а распределительная функция моделировалась выражением $B(x, y) = 2x/y^2$ [1]. Вычисления проводились для трех показателей γ , моделирующих различные сценарии процесса измельчения.

При $\gamma(x) = 2$ (рис. 1) среднее время ожидания разрушающего воздействия конечно и равно t_0 для частиц всех размеров. За это время разрушаются крупные частицы $x \geq 0.5$ и достигается максимальный разброс частиц по размерам (кривая 1 на рис. 5), после чего распределение смещается в сторону мелких фракций (кривая 1 на рис. 4 и 5), где скорость разрушения ограничивается только уменьшением

значений функции $P(x)$. Такой сценарий характерен для процессов измельчения, описываемых уравнением (1).

При $\gamma(x) = 0.5$ (рис. 2) имеет место противоположная ситуация: среднее время ожидания разрушающего воздействия бесконечно для всех частиц. Процесс замедляется настолько, что крупные фракции не успевают полностью разрушиться за все время наблюдения, что приводит к постоянному росту разброса частиц по размерам и незначительному уменьшению среднего размера частиц (кривая 2 на рис. 4 и 5).

При $\gamma(x) = 2x$ (рис. 3) наблюдается некоторый промежуточный сценарий (кривая 3 на рис. 4 и 5), который, вероятно, реализуется на практике. Крупные фракции $x \geq 0.5$, для которых $\gamma(x) > 1$, разрушаются за время порядка t_0 , после чего процесс разрушения затормаживается как вследствие снижения эффективности разрушающего воздействия (уменьшение $P(x)$), так и за счет перехода к бесконечным средним временам ожидания (при $x < 0.5$ $\gamma(x) < 1$).

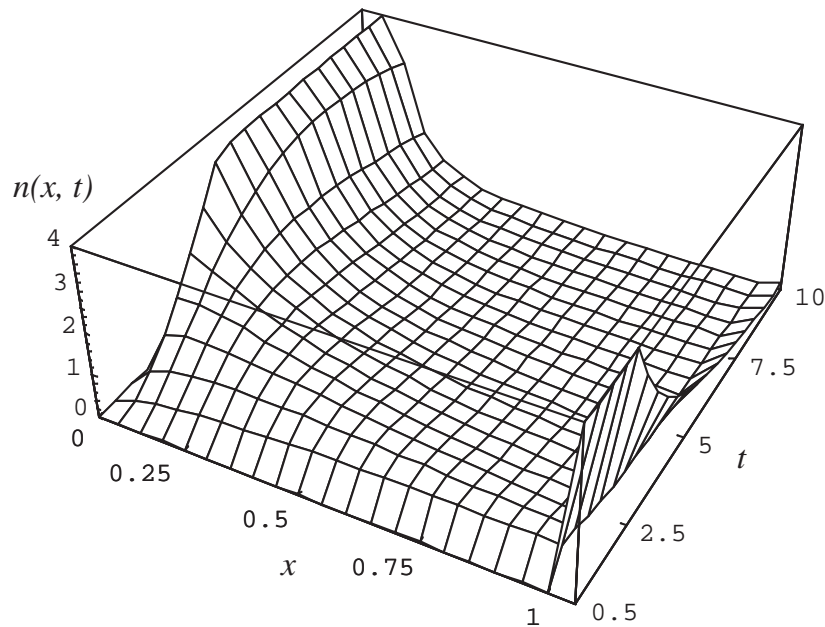
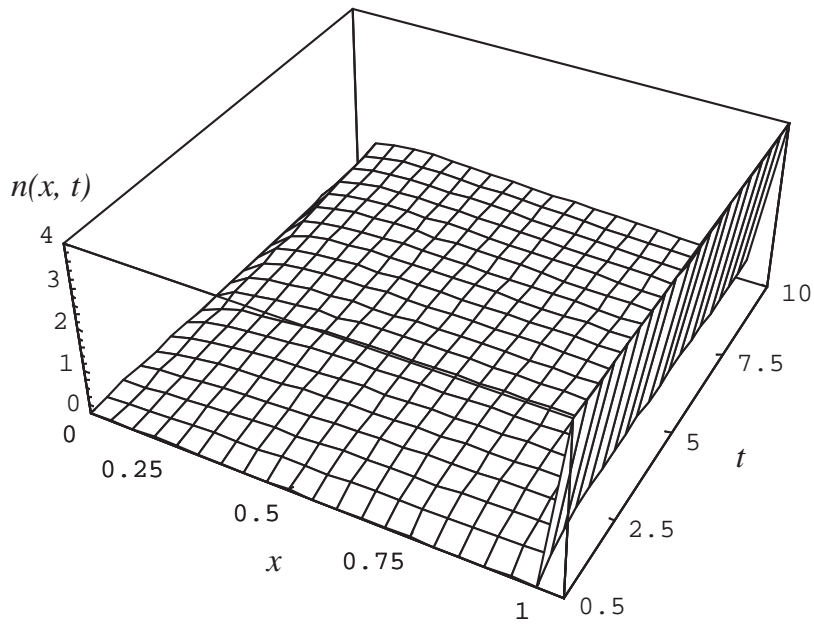
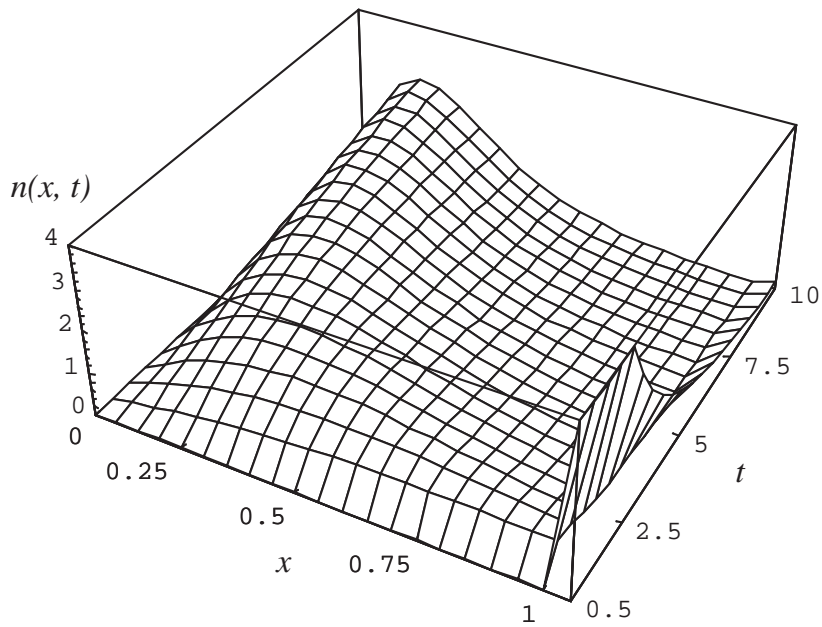


Рис. 1. Распределение массы частиц по размерам при $\gamma(x) = 2$

Рис. 2. Распределение массы частиц по размерам при $\gamma(x) = 0.5$ Рис. 3. Распределение массы частиц по размерам при $\gamma(x) = 2x$

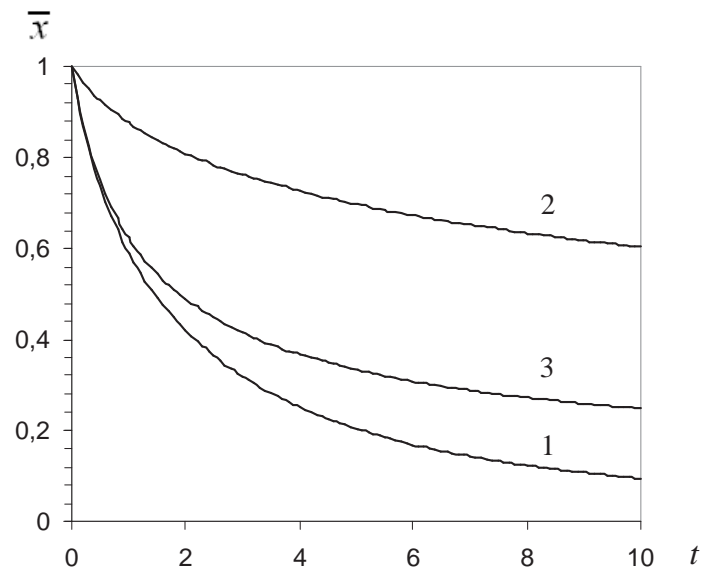


Рис. 4. Средний размер частиц $\bar{x}(t)$. 1 — $\gamma(x) = 2$, 2 — $\gamma(x) = 0.5$, 3 — $\gamma(x) = 2x$

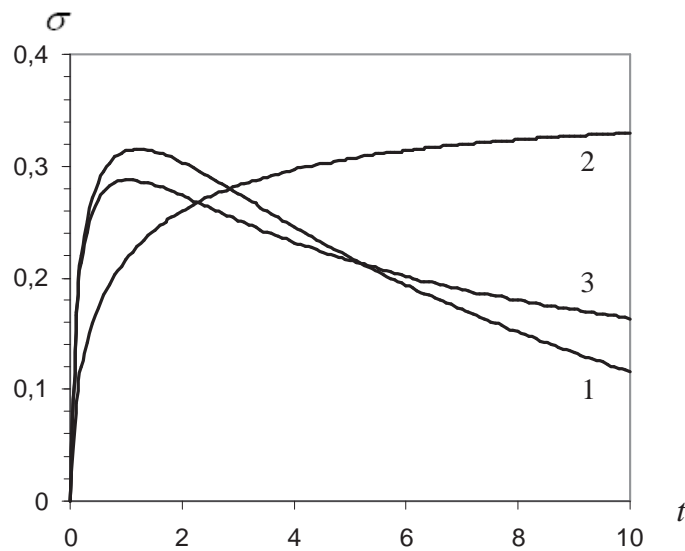


Рис. 5. Среднеквадратическое отклонение размера частиц $\sigma(t)$. 1 — $\gamma(x) = 2$, 2 — $\gamma(x) = 0.5$, 3 — $\gamma(x) = 2x$

5. Заключение

В работе получено обобщенное кинетическое уравнение процесса измельчения для любого заданного закона распределения времени ожидания разрушения. Найденное уравнение позволяет моделировать процесс разрушения со степенным распределением времени ожидания (15) и исследовать влияние показателя $\gamma(x)$ на кинетику процесса. Численное решение полученного уравнения позволило выявить три качественно различных сценария развития процесса измельчения, которые могут применяться для моделирования работы реальных устройств.

Список литературы

1. Падохин В. А., Зуева Г. А. Стохастические модели измельчения дисперсных материалов // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43. № 5. С. 586 – 594.
2. Королев Л. В., Бытев Д. О. Кинетика процессов измельчения со степенным распределением времени разрушения // Сб. тр. МНК ММТТ - 23. Т. 11. Саратов: СГТУ, 2010. С. 6 – 7.
3. Чукбар К. В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. №5. С. 1875 – 1884.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином; Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

Grinding Kinetic Equation with an Arbitrary Law of Waiting Time Distribution

Korolev L.V., Bytev D. O.

Keywords: grinding, distribution, kinetics, waiting time

A generalized kinetic equation of a grinding process is obtained. The equation is valid for arbitrary distribution of particle destruction waiting time. In terms of the equation a grinding process model with the power law of waiting time distribution is proposed. The particle size dependence of the power index is taken into account and its influence on grinding process kinetics is investigated.

Сведения об авторах: Королев Леонид Владимирович, Ярославский государственный технический университет, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и вычислительная техника»;
Бытев Донат Олегович, Ярославский государственный технический университет, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и вычислительная техника»