

© Голубенец В. О., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-711-722

УДК 517.9

## Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции

Голубенец В. О.

получена 15 мая 2015

В работе рассматривается уравнение первого порядка с запаздыванием, зависящим от искомой функции, с нелинейной правой частью. Для этого уравнения предполагаются выполненными условия существования и единственности решения начальной задачи. Ставится задача исследования поведения решений рассматриваемого уравнения в малой окрестности его нулевого положения равновесия. Изучение локальной динамики проводится в зависимости от вещественных параметров — коэффициентов тейлоровского разложения правой части. Параметр, являющийся коэффициентом при линейном члене, имеет два критических значения, определяющих область устойчивости нулевого положения равновесия. Чтобы исследовать изменение локальной динамики уравнения при переходе данного параметра через критические значения, вводится малый параметр и применяется асимптотический метод нормальных форм. Показывается, что для первого случая в уравнении имеет место бифуркация обмена устойчивостью, а для второго случая — суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа (при выполнении достаточного условия). Для каждого из устойчивых режимов получены их асимптотические разложения по соответствующим малым параметрам. Затем в качестве примера рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции. Для этого уравнения бифуркационный параметр имеет единственное критическое значение. С помощью метода нормальных форм устанавливается простое достаточное условие возникновения суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в уравнении при переходе параметра через критическое значение.

**Ключевые слова:** динамические системы, уравнения с запаздыванием, непостоянное запаздывание, локальная динамика, устойчивость, бифуркация обмена устойчивостью, бифуркация Андронова – Хопфа, логистическое уравнение

**Для цитирования:** Голубенец В. О., "Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:5** (2015), 711–722.

### Об авторах:

Голубенец Вячеслав Олегович, [orcid.org/0000-0002-6996-3943](https://orcid.org/0000-0002-6996-3943), магистрант,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: [golubenets2010@yandex.ru](mailto:golubenets2010@yandex.ru)

## Введение

Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции:

$$\dot{u} + u = F(u(t - T(u))), \quad u \in R. \quad (1)$$

Функция  $F$  достаточно гладкая в окрестности точки  $u = 0$ ,  $T$  — аналитическая в окрестности этой же точки, причем  $F(0) = 0$ , а  $T(u) > 0$  при всех значениях аргумента. Уравнение такого вида возникает в ряде приложений (см., например, [1–6]).

Разработано много методов исследования динамики уравнений, в которых запаздывание является постоянной величиной. Но в прикладных задачах нередко возникают уравнения с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции. В ряде работ установлено, что для анализа динамики и свойств таких уравнений во многих случаях применимы методы теории уравнений с постоянным запаздыванием (см., например, [7–10]). Вопросы существования и устойчивости решений рассматривались, например, в [5, 11–13]. Локальная динамика уравнения (1) при условии большого запаздывания изучена в [14].

Априори предполагаем, что для решений уравнения (1) выполняется  $|u(t)| \leq M \forall t \geq 0$  для некоторого положительного  $M$ . Тогда для непрерывной функции  $T(u)$  можно гарантировать ее ограниченность:  $T(u) \leq T_1$ ,  $T_1 > 0$ . Положим  $X = [-T_1, 0]$  и дополним (1) начальным условием:

$$u = \psi(t) \in C(X), \quad |\psi| \leq M.$$

Таким образом, пространство  $C_M(X)$  функций, непрерывных на  $X$ , абсолютная величина которых ограничена константой  $M$ , будет фазовым пространством уравнения (1).

Поставим задачу исследовать поведение решений (1) в малой окрестности нулевого положения равновесия этого уравнения. Т.к.  $u$  предполагается малым, функции  $F(u)$  и  $T(u)$  удобно разложить по формуле Тейлора:

$$F(u) = au + f_2u^2 + f_3u^3 + o(u^3), \quad (2)$$

$$T(u) = T_0 - \alpha u - \beta u^2 + o(u^2), \quad T_0 > 0. \quad (3)$$

Условие  $T_0 > 0$  выполняется в силу требования положительности  $T(u)$  во всей области определения.

Структура работы такова. В пункте 1 приведен линейный анализ уравнения (1), а в пунктах 2 и 3 изучается локальная динамика этого уравнения в зависимости от входящих в него параметров. В пункте 4 в качестве примера рассмотрено логистическое уравнение с непостоянным запаздыванием (уравнение Хатчинсона) и найдено условие реализации бифуркации Андронова – Хопфа. Подробно динамика уравнения Хатчинсона с запаздыванием, не зависящим от искомой функции, изучена в работе [15]. В качестве метода исследования динамики во всех случаях применяется метод нормальных форм.

## 1. Линейный анализ

Для исследования динамики уравнения (1) построим линейризованное на нулевом состоянии равновесия уравнение

$$\dot{u} + u = au(t - T_0). \quad (4)$$

Это уравнение с постоянным запаздыванием. Хорошо известно (см., например, [16]), что его характеристический квазиполином  $\lambda + 1 = ae^{-\lambda T_0}$  имеет чисто мнимые корни  $\lambda = 0$  при  $a = 1$  и  $\lambda = \pm i\omega_0$  при  $a = a_0$ , где  $\omega_0$  – наименьший положительный корень уравнения  $\omega_0 = -tg(\omega_0 T_0)$  и  $a_0 = -\sqrt{1 + \omega_0^2}$ . При  $a > 1$  и при  $a < a_0$  у него существуют корни с положительной вещественной частью, а при  $a_0 < a < 1$  все корни расположены слева от мнимой оси. Таким образом, уравнение (4) экспоненциально устойчиво при  $a \in (a_0, 1)$  и экспоненциально неустойчиво при  $a < a_0$  или  $a > 1$ . Справедливо следующее утверждение

**Теорема 1.** *Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво при  $a \in (a_0, 1)$  и неустойчиво при  $a < a_0$  или  $a > 1$ .*

Таким образом, значения  $a = a_0$  и  $a = 1$  являются точками бифуркации нулевого состояния равновесия уравнения (1). Изучим, как происходит потеря устойчивости при переходе параметра  $a$  через эти значения.

## 2. Бифуркация обмена устойчивостью

Изучим сначала случай, когда  $a = 1 + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Воспользуемся методом нормальных форм (см., например, [17–19]) и сделаем в уравнении (1) асимптотическую замену

$$u(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (5)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon^2 z'(\tau) + o(\varepsilon^2), \\ u(t - T_0) &= \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 (x_2(\tau) - T_0 z'(\tau)) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Учитывая малость  $u$ , запишем уравнение (1) в ином виде. Для этого, воспользовавшись равенством (3), формально напишем тейлоровское разложение для  $u(t - T(u))$ :

$$u(t - T(u)) = u(t - T_0) + \dot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2) + \frac{\ddot{u}(t - T_0)}{2} (\alpha u + \beta u^2)^2 + \dots$$

и подставим это разложение в (1):

$$\begin{aligned} \dot{u} + u &= (1 + \varepsilon)u(t - T_0) + (1 + \varepsilon)\dot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2) + \\ &+ \frac{(1 + \varepsilon)}{2} \ddot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2)^2 + \\ &+ f_2 [u^2(t - T_0) + 2\alpha \dot{u}(t - T_0) u u(t - T_0)] + f_3 u^3(t - T_0) + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

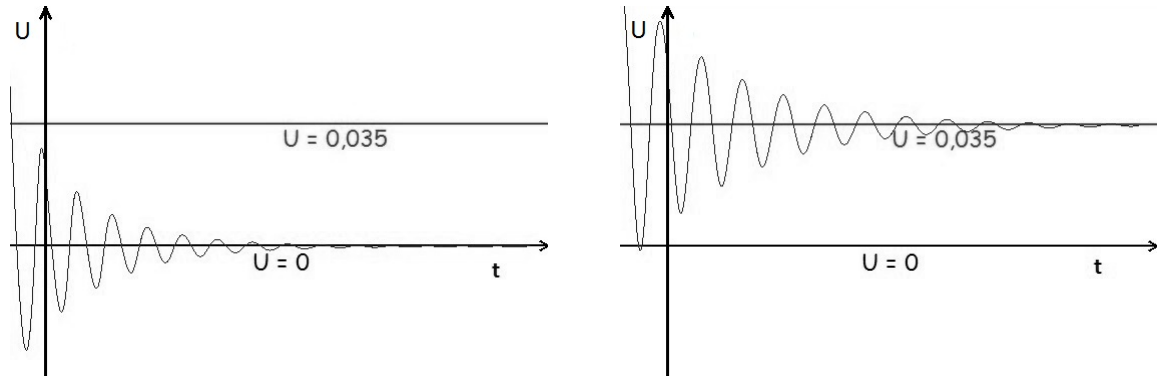


Рис. 1. Графики решений уравнения (1) при  $a = 0.93$  (слева) и  $a = 1.07$  (справа)  
 Fig. 1. Graphs of solutions of equation (1) at  $a = 0.93$  (left) and at  $a = 1.07$  (right)

Порядок слагаемых в правой части (6), содержащих производную функции  $u$ , будет выше  $\varepsilon^2$ . После подстановки (5) в (6) получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^2 z' + \varepsilon z + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \varepsilon z - \varepsilon^2 T_0 z' + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^2 z + f_2 \varepsilon^2 z^2 + \dots$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. При  $\varepsilon$  получаем тождество, а при  $\varepsilon^2$  имеем

$$(1 + T_0)z' = z + f_2 z^2. \quad (7)$$

Получившееся уравнение (7) является нормальной формой для (1) в окрестности нуля при условии близости параметра  $a$  к 1.

**Теорема 2.** Уравнение (7) имеет неустойчивое состояние равновесия  $z_0 = 0$  и устойчивое при всех  $f_2 \neq 0$  состояние равновесия  $z_1 = -1/f_2$ , которому соответствует асимптотически устойчивое при всех  $T_0 > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_2 \neq 0$ ,  $f_3$  состояние равновесия  $u_1$  уравнения (1) со следующей асимптотикой:

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{f_2} + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, в уравнении (1) при  $a = 1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) происходит следующая бифуркация: если  $\varepsilon < 0$ , то нулевое состояние равновесия этого уравнения (локально) асимптотически устойчиво; если  $\varepsilon > 0$ , то нулевое состояние равновесия неустойчиво, но состояние равновесия  $u_1$  становится (локально) асимптотически устойчивым при всех  $T_0 > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_2 \neq 0$ ,  $f_3$ . Рис. 1 иллюстрирует эту ситуацию.

### 3. Бифуркация Андронова – Хопфа

#### 3.1. Построение нормальной формы

Здесь изучим изменение поведения решений уравнения (1) в окрестности нуля при переходе  $a$  через  $a_0$ . Положим в (1)  $a = a_0(1 + \varepsilon)$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Согласно идеологии метода нормальных форм сделаем в (1) асимптотическую замену

$$u = \sqrt{\varepsilon} (e^{i\omega_0 t} z(\tau) + e^{-i\omega_0 t} \bar{z}(\tau)) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (8)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а  $u_i(t, \tau)$  ( $i = 2, 3$ ) — периодические по  $t$  функции с периодом  $2\pi/\omega_0$ .

После подстановки получится равенство, в левой и правой частях которого стоят ряды по степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ . Начнем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях.

При  $\sqrt{\varepsilon}$  будет тождество, а при  $\varepsilon$  получим линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным запаздыванием относительно функции  $u_2$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - a_0 u_2(t - T_0, \tau) = |z|^2 [2f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha] + e^{2i\omega_0 t} z^2 [e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha] + e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 [e^{2i\omega_0 T_0} f_2 - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha]. \quad (9)$$

В правой части этого уравнения нет резонансных слагаемых, поэтому его решение ищем в виде  $u_2 = d_1 e^{2i\omega_0 t} z^2 + \bar{d}_1 e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 + d_2 |z|^2$ . Подставляя это в (9), определяем  $d_1, d_2$ :

$$d_1 = \frac{e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha}{1 + 2i\omega_0 - a_0 e^{-2i\omega_0 T_0}}, \quad d_2 = \frac{2f_2 - 2\omega_0^2 \alpha}{1 - a_0}. \quad (10)$$

При  $\varepsilon^{3/2}$  опять получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным запаздыванием относительно функции  $u_3$ :

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 - a_0 u_3(t - T_0, \tau) = e^{3i\omega_0 t} z^3 k + e^{-3i\omega_0 t} \bar{z}^3 \bar{k} + e^{i\omega_0 t} (-r z' + \mu z + \nu z |z|^2) + e^{-i\omega_0 t} (-\bar{r} \bar{z}' + \bar{\mu} \bar{z} + \bar{\nu} \bar{z} |z|^2), \quad (11)$$

где

$$r = 1 + T_0 + i\omega_0 T_0, \quad \mu = 1 + i\omega_0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \nu = \omega_0 \left[ -3\omega_0 \left( \beta + \frac{\alpha^2}{2} \right) + i \left( \beta - \frac{\omega_0^2 \alpha^2}{2} \right) \right] + 3f_3 \frac{1 + i\omega_0}{a_0} + \\ + \frac{d_1}{a_0} [2f_2 - 4\omega_0^2 \alpha - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 (2f_2 + 2(1 - \omega_0^2) \alpha - a_0 \alpha)] + \\ + \frac{d_2}{a_0} [2f_2 - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 (2f_2 + a_0 \alpha)] - 2\omega_0 f_2 \alpha \frac{2\omega_0 - i(1 - \omega_0^2)}{a_0^2}, \end{aligned}$$

а числа  $d_1$  и  $d_2$  определены формулами (10). Точное значение константы  $k$  нам не важно. Уравнение (11) содержит в правой части резонансные слагаемые, т.к. характеристическое уравнение для уравнения (4) при  $a = a_0$  имеет пару чисто мнимых корней  $\pm i\omega_0$ . Из условия разрешимости уравнения (11) в классе ограниченных функций получаем нормальную форму для уравнения (1)

$$r z' = \mu z + \nu z |z|^2. \quad (13)$$

### 3.2. Анализ нормальной формы

Переходя в (13) к полярным координатам с помощью замены  $z(\tau) = \rho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}$  ( $\rho(\tau) > 0$ ) и вводя обозначения

$$\eta = \operatorname{Re} \frac{\mu}{r}, \quad \xi = \operatorname{Im} \frac{\mu}{r}, \quad d = \operatorname{Re} \frac{\nu}{r}, \quad c = \operatorname{Im} \frac{\nu}{r},$$

получим:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \eta\rho + d\rho^3 \\ \dot{\varphi} = \xi + c\rho^2. \end{cases} \quad (14)$$

В случае  $\eta > 0$ ,  $d < 0$  у первого уравнения все решения  $\rho(\tau)$  стремятся к состоянию равновесия  $\rho_0 = (-\eta/d)^{1/2}$ , т.е. все решения  $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$  притягиваются к циклу радиуса  $\rho_0$ ; а при  $\eta > 0$ ,  $d > 0$  все решения (кроме нулевого) монотонно стремятся к бесконечности. Формула (8) связывает периодическое решение системы (14) с периодическим решением уравнения (1) для поставленной задачи. Таким образом, для исследования локальной динамики уравнения (1) необходимо определить знаки вещественных чисел  $\eta$  и  $d$ .

Имеем  $\eta = (1 + T_0 + \omega_0^2 T_0)|r|^{-2} > 0$  в силу равенств (12) и неравенства  $T_0 > 0$ , поэтому осталось лишь определить знак  $d$ .

После выполнения стандартных действий получим для  $d$  следующее выражение:

$$d = \frac{V(a_0)}{a_0^2(a_0 - 1)(5a_0 + 4)|r|^2}. \quad (15)$$

Здесь  $V(a_0)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} V(a_0) = & \frac{\alpha^2}{2} a_0^2 (a_0^2 - 1) [p_1(a_0) + T_0 p_2(a_0)] - 2f_2^2 [p_3(a_0) + T_0 p_4(a_0)] + \\ & + f_2 \alpha a_0 (a_0^2 - 1) [p_5(a_0) + T_0 p_6(a_0)] + 3f_3 a_0 (a_0 - 1)(5a_0 + 4)(1 + T_0 a_0^2) - \\ & - \beta a_0^2 (a_0^2 - 1) (a_0 - 1)(5a_0 + 4)(3 + 2T_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_1(a_0) &= 10a_0^3 + a_0^2 - 33a_0 - 20, & p_2(a_0) &= -5a_0^4 + 15a_0^3 + 10a_0^2 - 38a_0 - 24, \\ p_3(a_0) &= 2a_0^3 + 13a_0^2 + 4a_0 - 4, & p_4(a_0) &= a_0^2 (11a_0^2 + 6a_0 - 2), \\ p_5(a_0) &= 11a_0^2 + 12a_0 + 4, & p_6(a_0) &= 2a_0^2(4a_0 + 5). \end{aligned}$$

Так как знаменатель в правой части (15) положителен, то знак  $d$  определяется знаком  $V(a_0)$ .

То есть, если параметры  $T_0 > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  таковы, что  $V(a_0) < 0$ , то в системе (14) у первого уравнения все решения  $\rho(\tau)$  стремятся к состоянию равновесия  $\rho_0$ . Если  $V(a_0) > 0$ , то все решения этого уравнения монотонно стремятся к бесконечности.

### 3.3. Вывод

Сформулируем основной результат.

**Теорема 3.** Пусть в уравнении (1)  $a = a_0(1 + \varepsilon)$ . Пусть при этом параметры  $T_0 > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  таковы, что  $V(a_0) < 0$ . Тогда при  $\varepsilon < 0$  нулевое положение равновесия уравнения (1) устойчиво; при  $0 < \varepsilon \ll 1$  оно неустойчиво, а единственным устойчивым режимом в его некоторой малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности является периодическое решение со следующей асимптотикой:

$$u = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos((\omega_0 + o(1))t) + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Отметим, что если  $V(a_0) > 0$ , то задача исследования динамики уравнения (1) становится нелокальной: в окрестности нулевого состояния равновесия нет устойчивых режимов. Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 в уравнении (1) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Эта ситуация изображена на Рис. 2. В левой части изображен график решения уравнения (1) в случае, когда  $\varepsilon < 0$ ; как видно, нулевое состояние равновесия устойчиво. Правая часть демонстрирует случай, когда  $\varepsilon > 0$ ; видно, что траектория, изображенная на этом рисунке, приближается к периодической траектории.

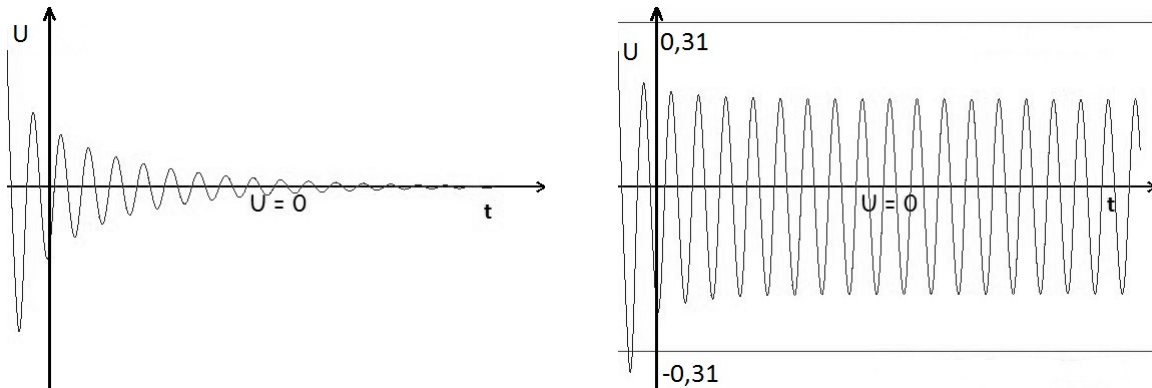


Рис. 2. Графики решений уравнения (1) при  $\varepsilon = -0.1$  (слева) и  $\varepsilon = 0.1$  (справа)  
Fig. 2. Graphs of solutions of equation (1) at  $\varepsilon = 0.93$  (left) and at  $\varepsilon = 1.07$  (right)

#### 4. Локальная динамика логистического уравнения с переменным запаздыванием

Уравнение Хатчинсона

$$\dot{N} = \lambda N (1 - N(t - T))$$

принадлежит к числу фундаментальных уравнений математической экологии (см., например, [20]). Здесь мы рассмотрим это уравнение в случае, когда запаздывание зависит от искомой функции:

$$\dot{N} = \lambda N [1 - N(t - T(N(t)))], \tag{16}$$

$\lambda > 0$  – параметр. Предположим ограниченность решения  $N(t)$  при  $t \geq 0$  некоторой константой  $M > 0$ , положительность и ограниченность сверху константой  $T_1 > 0$  во всей области определения аналитической функции  $T(N)$ . Также без ограничения общности предположим, что  $T(1) = 1$ .

Поставим задачу исследовать локальную динамику (16) в малой окрестности  $N = 1$ .

Для этого рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\dot{N} = -\lambda N(t - 1).$$

Про его характеристическое уравнение  $\mu = -\lambda e^{-\mu}$  известно, что при  $\lambda < \pi/2$  все корни этого уравнения лежат слева от мнимой оси, при  $\lambda > \pi/2$  существует корень с

положительной вещественной частью, а при  $\lambda = \pi/2$  характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Это означает, что при  $\lambda \in (0, \pi/2)$  решение  $N = 1$  асимптотически устойчиво, при  $\lambda > \pi/2$  оно неустойчиво, а при  $\lambda = \pi/2$  реализуется критический случай. Также известно, что это стационарное решение теряет устойчивость в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Делая в (16) замену  $N(t) = 1 + u(t)$  с  $u(t)$  близкой к нулю и раскладывая  $T(1 + u)$  по формуле Тейлора

$$T(1 + u) = 1 - \alpha u - \beta u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\dot{u} = -\lambda(1 + u)u(t - 1 + \alpha u + \beta u^2 + \dots). \quad (17)$$

Положим  $\lambda = \pi/2 + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Аналогично пункту 3 используем метод нормальных форм, делая в (17) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon} (z(\tau)e^{i\pi t/2} + \bar{z}(\tau)e^{-i\pi t/2}) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а функции  $u_i(t, \tau)$  ( $i = 2, 3$ ) 4-периодические по  $t$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$ , при  $\varepsilon^{3/2}$  из условия выбора функции  $u_3(t, \tau)$  ограниченной получаем, что нормальная форма уравнения (16) задается уравнением

$$rz' = \mu z + \nu z|z|^2, \quad (18)$$

где

$$r = 1 + i\frac{\pi}{2}, \quad \mu = i, \\ \nu = \frac{9\alpha^2\pi^3(2 - i)}{80} - \frac{8\alpha\pi^2(1 + 2i)}{40} - \frac{30\beta\pi^2}{40} + \frac{(1 - 3i)\pi}{10}.$$

Сохраняя обозначения пункта 3.2, сделаем в (18) замену  $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$  и получим систему вида (14), где  $\eta = \operatorname{Re}(\mu/r) = 2\pi(4 + \pi^2)^{-1} > 0$ , а первая ляпуновская величина

$$d = \operatorname{Re}\left(\frac{\nu}{r}\right) = \frac{\pi}{40(4 + \pi^2)} [9\pi^2(4 - \pi)\alpha^2 - 32\pi(1 + \pi)\alpha - 120\beta\pi - 24\pi + 16].$$

Выполнение условия  $d < 0$  говорит о том, что в уравнении (16) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Неравенство  $d < 0$  эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} \beta_0 < \beta, \\ \alpha_-(\beta) < \alpha < \alpha_+(\beta). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь

$$\beta_0 = \frac{1}{135\pi(4 - \pi)} [9(\pi - 4)(3\pi - 2) - 32(1 + \pi)^2],$$

$$\alpha_{\pm}(\beta) = \frac{16(1 + \pi) \pm 2\sqrt{2D(\beta)}}{9\pi(4 - \pi)},$$

$$D(\beta) = 32(1 + \pi)^2 + 135\beta\pi(4 - \pi) + 9(4 - \pi)(3\pi - 2).$$

Приближенные значения для  $\beta_0, \alpha_{\pm}$  таковы:

$$\beta_0 \approx -1.67, \\ \alpha_{\pm} \approx 2.7 \pm 0.1\sqrt{364\beta + 606}.$$

На Рис. 3 изображена область (19).



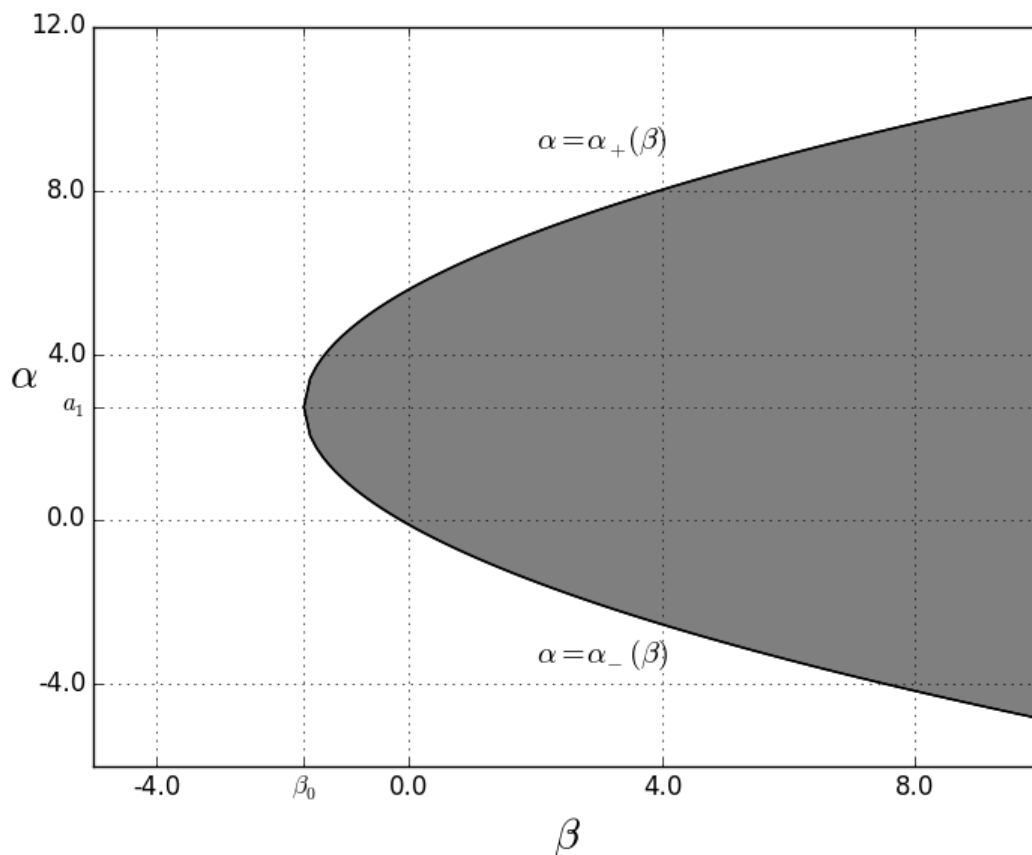


Рис. 3. Область значений параметров  $\alpha, \beta$ , при которых происходит бифуркация  
Fig. 3. Domain of values of parameters  $\alpha, \beta$ , at which bifurcation occurs

## Заключение

В работе для уравнения (1) были изучены способы потери устойчивости нулевым положением равновесия при переходе параметра  $a$  через значения 1 и  $a_0$ . А именно: в первом случае установлено возникновение бифуркации обмена устойчивостью, а во втором случае найдено достаточное условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. В обоих случаях получены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркации. Полученные результаты применены к исследованию локальной динамики уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием.

Автор выражает благодарность Кашенко И.С. за постановку задачи, содержательные обсуждения и важные замечания.

## Список литературы / References

- [1] Валентайн Р. С., “Экономичность, устойчивость и работоспособность ЖРД”, *Вопросы ракетной техники*, **1**:217 (1973); [Valentaĭn R. S., “Ekonomichnost, ustoychivost i rabotosposobnost ZhRD”, *Voprosy raketnoy tekhniki*, **1**:217 (1973), (in Russian).]
- [2] Sabersky R. H., “Effect of wave propagation in feed lines on low frequency rocket instability”, *Jet Propulsion*, **24**:172 (1964).
- [3] Crocco L., Harrje D. T., Reardon F. H., “Transverse combustion instability in liquid propellant rocket motors”, *ARS Journal*, **32**:3 (1962).
- [4] Reardon F. H., Crocco L., Harrje D. T., “Velocity effects in transverse mode liquid propellant rocket combustion instability”, *AIAA Journal*, **2**:9 (1964).
- [5] Колесов Ю. С., Швитра Д. И., “Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя”, *Литовский математический сборник*, **15**:4 (1975); [Kolesov Yu. S., Shvitra D. I., “Matematicheskoe modelirovanie protsesssa gorenĭya v kamere zhidkostnogo raketnogo dvigatelya”, *Litovskiy matematicheskiy sbornik*, **15**:4 (1975), (in Russian).]
- [6] Zager M. G., Schlosser P. M., Tran H. T., “A delayed nonlinear PBPK model for genistein dosimetry in rats”, *Bulletin of Mathematical Biology*, **69** (2007), 93–117.
- [7] Hu Q., Wu J., “Global Hopf bifurcation for differential equations with state-dependent delay”, *Journal of Differential Equations*, **248**:12 (2010), 2801–2840.
- [8] Brokate M., Colonius F., “Linearizing equations with state-dependent delays”, *Appl. Math. Optim.*, **21** (1990), 45–52.
- [9] Cooke K. L., Huang W. Z., “On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:5 (1996), 1417–1426.
- [10] Hartung F., Turi J., “On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations”, *J. Differential Equations*, **135** (1997), 192–237.
- [11] Driver R. D., “Existence theory for a delay-differential system”, *Contrib. Different. Equat.*, **1**:3 (1963).
- [12] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971; English transl.: Elsgolts L. E., Norkin S. B., *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, 1973.
- [13] Halanay A., Yorke J., “Some new results and problems in the theory of differential-delay equations”, *SIAM Rev.*, **13**:1 (1971).
- [14] Кащенко И. С., Кащенко С. А., “Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием, зависящим от искомой функции”, *Доклады академии наук*, **464**:5 (2015), 521–524; English transl.: Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., “Local Dynamics of an Equation with a Large State Dependent Delay”, *Doklady Mathematics*, **92**:2 (2015), 1–4.
- [15] Кащенко С. А., “Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 32; English transl.: Kashchenko S. A., “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 470–494.
- [16] Кащенко Д. С., Кащенко И. С., *Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие*, Ярославль, 2006; [Kashchenko D. S., Kashchenko I. S., *Dinamika uravneniy pervogo poruyadka s zapazdyvaniem: uchebnoe posobie*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]
- [17] Брюно А. Д., *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979; English transl.: Bryuno A. D., *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer, 1989.
- [18] Marsden Dzh., Mak-Kraken M., *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*, Mir, М., 1980.

- [19] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [20] Yang Kuang, *Delay Differential Equations, With Applications in Population Dynamics*, Academic Press, 1993.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-711-722

## Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation

Golubenets V. O.

*Received May 15, 2015*

In this paper, a first-order equation with state-dependent delay and with a nonlinear right-hand side is considered. Conditions of existence and uniqueness of the solution of initial value problem are supposed to be executed. The task is to study the behavior of solutions of the considered equation in a small neighborhood of its zero equilibrium. Local dynamics depends on real parameters which are coefficients of equation right-hand side decomposition in a Taylor series. The parameter which is a coefficient at the linear part of this decomposition has two critical values which determine a stability domain of zero equilibrium. We introduce a small positive parameter and use the asymptotic method of normal forms in order to investigate local dynamics modifications of the equation near each two critical values. We show that the stability exchange bifurcation occurs in the considered equation near the first of these critical values, and the supercritical Andronov – Hopf bifurcation occurs near the second of them (if the sufficient condition is executed). Asymptotic decompositions according to correspondent small parameters are obtained for each stable solution. Next, a logistic equation with state-dependent delay is considered as an example. The bifurcation parameter of this equation has one critical value. A simple sufficient condition of Andronov – Hopf bifurcation occurrence in the considered equation near a critical value is obtained as a result of applying the method of normal forms.

**Keywords:** dynamical systems, equations with delay, state-dependent delay, local dynamics, stability, stability exchange bifurcation, Andronov – Hopf bifurcation, logistic equation

**For citation:** Golubenets V. O., "Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 711–722.

**On the authors:**

Golubenets Vyacheslav Olegovich, [orcid.org/0000-0002-6996-3943](https://orcid.org/0000-0002-6996-3943), undergraduate student,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: [golubenets2010@yandex.ru](mailto:golubenets2010@yandex.ru)