

---

---

## Динамические модели процессов

---

---

©Кононова А. И., 2018

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-4-421-434

УДК 004.94

# Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети

Кононова А. И.

получена 16 июля 2018

**Аннотация.** Рассматривается модель распространения файла в пиринговой файлообменной сети, построенная на основе обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены фазовые переменные, описывающие состояние раздачи файла (в первом приближении — это количество пользователей — сидеров и личеров на раздаче), проанализированы факторы, влияющие на распространение файла и изменение количества пользователей, участвующих в обмене. На основе анализа записана система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию раздачи — динамическая модель эволюции раздачи. Рассмотрен жизненный цикл раздачи в файлообменной сети, состоящий из четырёх стадий — создание раздачи, быстрый набор личеров, стабилизация и (для раздач файлов, утрачивающих со временем актуальность) угасание. Каждой стадии соответствует своё соотношение параметров модели, причём со временем параметры изменяются. Описан процесс измерения состояния реальных раздач. Показан пример траектории, соответствующей эволюции реальной раздачи на крупном торрент-трекере. Далее рассматривается этап стабилизации раздачи, характеризующийся постоянными в первом приближении параметрами. Исследованы особые точки динамической модели эволюции раздачи, описано их возможное количество и тип. Описаны все конфигурации общего положения, возможные в модели эволюции раздачи в файлообменной пиринговой сети. Изображены фазовые портреты каждой конфигурации. Проанализировано влияние различных административных мер на запас устойчивости раздачи. Показана неоднозначность влияния системы учёта рейтинга на устойчивость раздач. Также показано положительное влияние системы таймбонусов, обратной связи и поглощения раздач.

**Ключевые слова:** файлообменные сети, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, устойчивость

**Для цитирования:** Кононова А. И., "Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:4** (2018), 421–434.

**Об авторах:**

Кононова Александра Игоревна, [orcid.org/0000-0002-4178-3828](https://orcid.org/0000-0002-4178-3828), канд. техн. наук, доцент,  
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»,  
пл. Шокина, 1, г. Москва, г. Зеленоград, 124498 Россия, e-mail: [illinc@bk.ru](mailto:illinc@bk.ru)

## Введение

В настоящее время невозможно представить себе компьютер общего назначения, не подключённый к сети. Сеть необходима как для устойчивого функционирования

ния самого компьютера (в частности, регулярного получения обновлений безопасности), так и для доступа пользователя к необходимому ему контенту. Причём любая достаточно крупная сеть характеризуется нерегулируемым ростом, описать который можно только статистически. В частности, широкое распространение получили файлообменные пиринговые сети, позволяющие распространять контент между пользователями, не создавая большую нагрузку на сервер [1].

Наиболее часто используемая характеристика любой сети — количество составляющих её узлов. Изменение этой характеристики может быть промоделировано при помощи динамических систем.

## 1. Моделирование раздачи

Рассмотрим распространение (раздачу) одного файла в файлообменной сети.

Узлы сети и, соответственно, пользователи, участвующие в пересылке этого файла, делятся на два вида с качественно разным поведением: обладающие полной копией файла и раздающие его (сидеры) и скачивающие файл (личеры).

Обозначим:

$s$  — количество сидеров, раздающих файл (*seeders*);

$l$  — количество личеров, скачивающих его (*leechers*).

Это и есть минимальный набор фазовых переменных [2, 3], необходимый для моделирования процессов, происходящих в подобной сети.

Нецелые значения  $s$  и  $l$  могут возникнуть в следующих ситуациях: либо ширина канала какого-либо пользователя меньше усреднённой, либо пользователь присутствует на раздаче не круглосуточно, но регулярно появляется по некоторому расписанию. И то и другое встречается довольно часто; во многих торрент-клиентах присутствует как функция расписания, так и ограничение скорости.

Обе величины  $s$  и  $l$  непрерывно изменяются во времени: личеры качают файл и становятся сидерами, к раздаче подключаются новые личеры, кроме того, любой пользователь может в любой момент уйти с раздачи.

### 1.1. Раздача и скачивание файла

Основные процессы в файлообменной сети — раздача файла сидерами и, соответственно, скачивание его личерами. При этом общее количество пользователей  $s + l$  не изменяется. Личер, полностью скачавший файл, переходит в категорию сидеров.

Уравнения, описывающие этот процесс, выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{s} = C(s, l) \\ \dot{l} = -C(s, l) \end{cases}, \quad (1)$$

где точка обозначает производную по времени, а  $C(s, l)$  — количество докачавших в единицу времени при исходных  $s$  сидерах и  $l$  личерах.

Пусть ширина канала связи  $u$  различных личеров и различных сидеров одинакова. Тогда, очевидно,  $C(s, l)$  пропорционально  $s$  — чем больше суммарный канал

раздачи, тем быстрее идёт скачивание. Также  $C(s, l)$  пропорционально  $l$  — чем больше личеров, тем большее их количество станет сидерами. Казалось бы, они должны конкурировать за раздачу, но файлообменные протоколы построены так, что любой личер раздаёт уже скачанную часть файла и, соответственно, не только создаёт нагрузку на сидеров, но и берёт её часть на себя.

Таким образом, в первом приближении эту величину можно представить как

$$C(s, l) = \gamma \cdot s \cdot l, \quad (2)$$

где  $\gamma > 0$  характеризует пропускную способность каналов раздачи-скачивания.

## 1.2. Подключение к раздаче новых пользователей

Новые пользователи, только включающиеся в раздачу, ещё не имеют копии файла и становятся личерами. Их количество пропорционально количеству пользователей ресурса, заинтересованных в получении этого файла, но ещё не участвующих в раздаче, а также привлекательности самой раздачи.

Привлекательность раздачи определяется содержанием раздаваемого файла (обозначим эту зависимость коэффициентом  $\alpha$ ), а также количеством сидеров  $s$  на ней (из нескольких раздач одного файла в сопоставимом качестве выбирается та, где больше пользователей уже раздают файл).

Если обозначить общее количество пользователей, заинтересованных в данный момент в получении этого файла, как  $N$  (в первом приближении эту величину можно считать постоянной), то количество новых заинтересованных пользователей равно  $N - l - s$ , а подключение новых пользователей к раздаче можно выразить уравнением:

$$\dot{l} = \alpha \cdot s \cdot (N - l - s), \quad (3)$$

где  $\alpha > 0$  характеризует привлекательность данной раздачи,  $N > 0$  — общее количество заинтересованных в ней пользователей. Необходимо отметить, что данная оценка притока новых личеров корректна только при  $s < N$ . Действительно, при  $l + s > N$  правая часть (3) отрицательна. При большом значении  $l$  и  $s < N$  отрицательное значение притока личеров можно трактовать как уход с раздачи тех, кто не входит в целевую аудиторию раздачи и начал скачивание по ошибке, но при  $s > N$  и малом  $l$  это не так (отрицательная величина добавляется к  $l$ , хотя превышает размер аудитории  $s$ ).

## 1.3. Отток пользователей с раздачи

Кроме подключения к раздаче новых пользователей присутствует и отток уже участвующих в раздаче. Сидеры уходят с раздачи, если считают, что её уже не обязательно поддерживать, то есть если личеров мало, а сидеров достаточно много. Личеры отключаются от раздачи, если не могут скачать файл, то есть в раздаче участвует мало пользователей (здесь рассматривается общее количество пользователей  $s + l$ , а не только сидеров; множество личеров при малом количестве сидеров нормально для новых раздач, так что такая ситуация не приводит к оттоку личеров).

Так как каждый пользователь принимает решение об уходе с раздачи независимо от других, общий отток пользователей пропорционален их количеству ( $s$  и  $l$  соответственно). Введём коэффициенты  $\beta_1, \mu_1$  и  $\beta_2, \mu_2$ , характеризующие скорости оттока сидеров и личеров с раздачи, тогда отток может быть описан уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta_1 \cdot s \cdot e^{-\mu_1 l} \\ \dot{l} = -\beta_2 \cdot l \cdot e^{-\mu_2(s+l)} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $\mu_{1,2} > 0$  характеризует то, при насколько малом количестве соответственно личеров и всех пользователей раздача признаётся неактивной;  $\beta_{1,2} > 0$  — скорость оттока с неактивной раздачи соответственно сидеров и личеров.

Таким образом, модель оттока пользователей эквивалентна мягкой [4] модели радиоактивного распада, где период полураспада определяется активностью раздачи.

#### 1.4. Модель, учитывающая все рассмотренные процессы

В реальной файлообменной сети одновременно происходит как скачивание (1), так и приток новых пользователей (3) и отток старых (4), так что её динамика описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{s} = C(s, l) - \beta_1 \cdot s \cdot e^{-\mu_1 l} \\ \dot{l} = \alpha \cdot s \cdot (N - l - s) - C(s, l) - \beta_2 \cdot l \cdot e^{-\mu_2(s+l)} \end{cases}, \quad (5)$$

где

$$C(s, l) = \gamma \cdot s \cdot l.$$

Параметры системы (5):

$\gamma > 0$  характеризует пропускную способность каналов раздачи-скачивания;

$\alpha > 0$  и  $N > 0$  — параметры притока новых личеров ( $N$  — общее число пользователей ресурса, заинтересованных в файле,  $\alpha$  характеризует привлекательность раздачи);

$\beta_1, \mu_1$  и  $\beta_2, \mu_2$  — параметры оттока сидеров и личеров соответственно.

Выбором единиц измерения  $s$  и  $l$  можно любой из этих параметров сделать единицей, поэтому примем  $\gamma = 1$  и далее будем рассматривать систему в виде

$$\begin{cases} \dot{s} = s \cdot l - \beta_1 \cdot s \cdot e^{-\mu_1 l} \\ \dot{l} = \alpha \cdot s \cdot (N - l - s) - s \cdot l - \beta_2 \cdot l \cdot e^{-\mu_2(s+l)} \end{cases}, \quad (6)$$

где

$$\alpha > 0, N > 0, \beta_{1,2} > 0, \mu_{1,2} > 0.$$

Эта модель в некотором приближении описывает распространение файла в пиринговой сети. Она может быть заменена на «мягкую» модель, учитывающую изменение во времени её коэффициентов  $\alpha, N, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ .

Необходимо помнить, что, кроме детерминированных воздействий, на реальную раздачу действуют также случайные возмущения, которые влияют как на смещение текущего состояния раздачи на фазовой плоскости, так и на мгновенные значения параметров  $\alpha, N, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ .

## 2. Жизненный цикл раздачи

Жизненный цикл раздачи можно разделить на четыре основных этапа:

- создание;
- быстрый набор личеров;
- стабилизация;
- угасание.

Первые три присутствуют в жизненном цикле любой раздачи, последний — в раздаче файлов, актуальность которых падает со временем (новости, текущие номера периодических изданий, анонсы и т. п.).

Рассмотрим их подробнее.

1. При создании раздачи её сидирует только автор, а личеров нет. После создания ссылка на раздачу попадает в новости трекера, и начинается этап набора личеров.
2. После анонсирования раздачи в новостях к ней активно подключаются личеры, заинтересованные в раздаваемом файле и следящие за новостями. Этот процесс идёт быстрее раздачи-скачивания, особенно при большом размере файла и относительно узком канале автора. Отток пользователей на этом этапе вообще отсутствует.

Таким образом, этап быстрого набора личеров характеризуется  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (новая раздача, постоянно сидируемая автором, активна независимо от количества других пользователей) и высоким  $\alpha$  (новости трекера привлекают повышенное внимание).

3. По мере того как ссылка на раздачу вытесняется с верхних строк новостей, приток новых личеров плавно снижается. Через какое-то время личеры узнают о раздаче из поиска, а не из новостей.

Возникает отток. Через какое-то время, если сидеров достаточно, раздачу может покинуть автор.

Характеристики притока и оттока определяются объёмом и настроением пользователей и в первом приближении могут считаться постоянными. Начинается этап стабилизации.

Именно этот этап описывается моделью (6).

4. Если раздаваемый файл теряет актуальность, приток личеров ( $\alpha$  и  $N$ ) снижается до нуля, так что раздача под действием постоянного или усиливающегося оттока постепенно приходит к  $s = l = 0$ , даже если ранее было достигнуто стабильное ненулевое состояние (6).

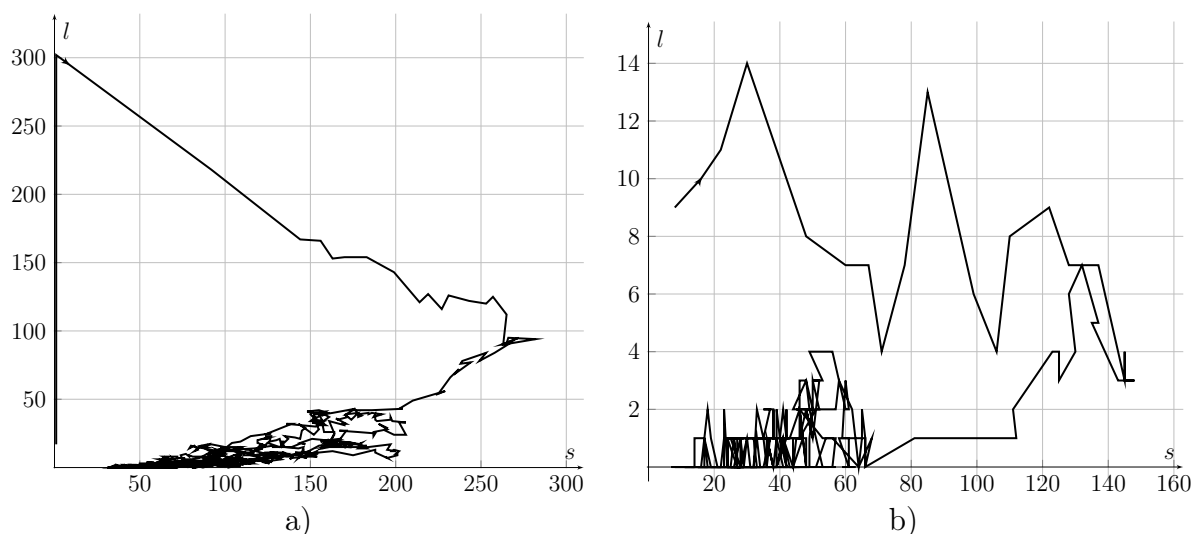


Рис. 1. Траектории раздач  
 Fig. 1. Experimental trajectories

Это хорошо прослеживается для экспериментальных данных. В частности, типичная траектория эволюции популярной раздачи на фазовой плоскости  $sl$  показана на рис. 1, а). Пример эволюции менее популярной — на рис. 1, б) (траектории таких раздач более разнообразны по форме, так как на них большее влияние оказывают случайные возмущения).

Измерения были начаты вскоре после создания раздачи, для рис. 1, а) — в точке  $(1, 17)$ . Отчётливо виден этап быстрого набора личеров (движение вдоль оси  $l$  до точки  $(1, 302)$ , после чего следует быстрый переход в  $(92, 218)$ , когда личеры, подключившиеся в начале раздачи, почти одновременно докачали файл и превратились в сидеров). После этого начинается этап стабилизации. Вначале преобладают процессы раздачи, на которые накладываются случайные возмущения и суточные колебания (многие пользователи появляются на раздаче по расписанию, что в модели отражено дробными значениями, а при измерениях — колебаниями). В точке  $(260, 100)$  начинает активно проявляться отток сидеров. Направление траектории меняется. Движение замедляется, поэтому влияние суточных колебаний заметнее (на рис. 1, а) эти колебания приводят к тому, что измеренная траектория идёт плотным зигзагом).

В конце состояние раздачи колеблется от около  $(30, 1)$  днём до около  $(70, 3)$  ночью, то есть среднесуточное количество составляет около  $(50, 2)$  (привести точное значение невозможно из-за постоянных случайных возмущений).

Набор личеров на рис. 1, б) происходит более плавно. Кроме того, на рис. 1, б) в самого начала чётко видны суточные колебания численности.

Некоторые раздачи через какое-то время после создания теряют всех пользователей и приходят в состояние  $(0, 0)$ , после чего уже не покидают этого состояния (вымирают). Иногда администрации трекера удаётся вернуть сидеров на вымершую раздачу; чаще через какое-то время подобная раздача удаляется из базы торрент-трекера (закрывается).

Далее рассматривается жёсткая модель (6), описывающая этап стабилизации раздачи. Соответственно начальное состояние раздачи имеет вид  $(s_0, l_0)$ , где  $s_0 \geq 0, l_0 \geq 0$  — значения, сформировавшиеся на этапе быстрого набора личеров.

### 3. Особые точки модели

Анализ особых точек динамической системы — ключевой момент её исследования [2, 5]. Особые точки системы (6) можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} s \cdot l - \beta_1 \cdot s \cdot e^{-\mu_1 l} & = 0 \\ \alpha \cdot s \cdot (N - l - s) - s \cdot l - \beta_2 \cdot l \cdot e^{-\mu_2(s+l)} & = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При любых значениях параметров решением (7) и, соответственно, особой точкой системы (6), очевидно, будет точка  $s = l = 0$ . Других вещественных решений при  $s = 0$  система (7) не имеет (при  $s = 0$  и  $l \neq 0$  второе уравнение не обращается в верное равенство).

Если  $s \neq 0$ , из первого уравнения получаем  $l - \beta_1 \cdot e^{-\mu_1 l} = 0$ , или

$$\frac{l}{\beta_1} = e^{-\mu_1 l}. \quad (8)$$

Это трансцендентное уравнение при любых положительных параметрах  $\beta_1$  и  $\mu_1$  имеет единственное решение  $l^*$ , лежащее в интервале  $(0, \beta_1)$ .

Подставляя  $l^*$  во второе уравнение системы (7), получаем

$$\alpha \cdot s \cdot (N - l^* - s) - s \cdot l^* - \beta_2 \cdot l^* \cdot e^{-\mu_2(s+l^*)} = 0, \quad (9)$$

что можно преобразовать в

$$-\frac{\alpha}{\beta_2 l^* e^{-\mu_2 l^*}} \cdot s \left( s - \left( N - l^* \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right) \right) = e^{-\mu_2 s}. \quad (10)$$

Обозначим для краткости  $q = \frac{N - l^* \frac{\alpha + 1}{\alpha}}{2}$  и  $\kappa = \frac{\alpha}{l^* e^{-\mu_2 l^*}}$ . Ни одна из величин  $q, \kappa$  не зависит от  $\beta_2$ . Тогда уравнение (10) примет вид:

$$-\frac{\kappa}{\beta_2} \cdot s(s - 2q) = e^{-\mu_2 s}. \quad (11)$$

При  $q = 0$  уравнение (11) не имеет корней, а система (6), соответственно, не имеет ненулевых особых точек.

При  $q \neq 0$  левая часть этого уравнения представляет собой параболу ветвями вниз (при положительных параметрах  $\kappa > 0$ ), которая, в зависимости от соотношения  $\beta_2$  и других параметров, может не пересекать график правой части, касаться его или пересекать в двух местах. Можно показать, что касание происходит при  $\beta_2 = \beta_2^*$ :

$$\beta_2^* = \frac{2\alpha}{l^*} \cdot \frac{\left( \sqrt{\mu_2^2 q^2 + 1} - 1 \right) \cdot e^{\mu_2 q + \sqrt{\mu_2^2 q^2 + 1}}}{\mu_2^2} \cdot e^{\mu_2 l^* - 1}. \quad (12)$$

Соответственно, при  $\beta_2 < \beta_2^*$  уравнение (11) имеет два решения  $s_1^*$  и  $s_2^*$ , причём они оба лежат в интервале от 0 до  $2q < N$ , при  $\beta_2 = \beta_2^*$  — одно решение  $s_1^* = s_2^* = s^*$ , при  $\beta_2 > \beta_2^*$  оно не имеет ни одного вещественного решения.

Таким образом, система (6) может иметь от одной до трёх особых точек. Философия общего положения [6] описывает устойчивые к малому изменению параметров случаи одной особой точки  $(0, 0)$  и трёх особых точек  $(0, 0)$ ,  $(s_1^*, l^*)$ ,  $(s_2^*, l^*)$ . Переходный случай с двумя особыми точками  $(0, 0)$ ,  $(s^*, l^*)$  неустойчив и при малом изменении параметров переходит в один из случаев общего положения. Соответственно, сама точка  $(s^*, l^*)$  в таком случае вырождена.

Можно показать, что начало координат  $(0, 0)$  всегда является притягивающим узлом. При наличии ещё двух особых точек  $(s_1^*, l^*)$ ,  $(s_2^*, l^*)$ ,  $s_1^* < s_2^*$  и расположении их в первой четверти координатной плоскости (это возможно при  $q > 0$ ) точка  $(s_1^*, l^*)$  — седло,  $(s_2^*, l^*)$  — притягивающий обобщённый узел (классический узел или фокус). При  $q < 0$ , то есть расположении ненулевых особых точек во второй четверти  $(s_1^*, l^*)$  — отталкивающий обобщённый узел,  $(s_2^*, l^*)$  — седло (то есть ближайшая к началу координат ненулевая особая точка — всегда седло).

#### 4. Фазовый портрет модели

Рассмотрим фазовый портрет системы уравнения (6).

Хотя физически реализуемы только неотрицательные значения  $s$  и  $l$  (а модель адекватна при  $s < N$ ), уравнения (6) определены для любых вещественных значений. Соответственно, для полноты анализа рассчитано и отображено множество траекторий, включающих как положительные, так и отрицательные  $s$  и  $l$ .

На рис. 2 показаны траектории системы (6), которые качественно не различаются для разных значений параметров. Это траектории в значительном отдалении от особых точек, а также траектории, целиком лежащие на оси  $0l$ .

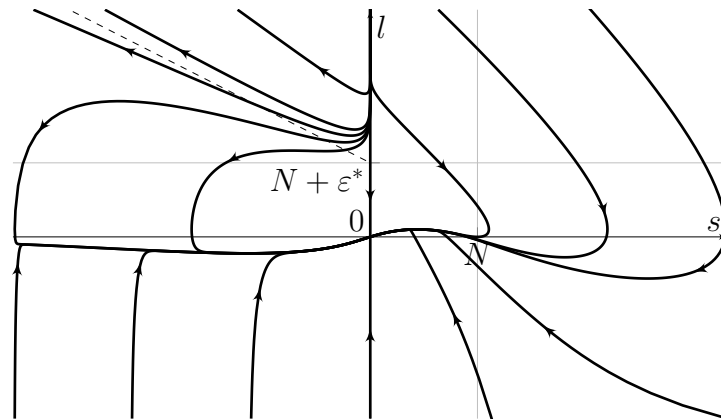


Рис. 2. Фазовый портрет модели вдали от особых точек  
 Fig. 2. Phase portrait of model far from equilibrium points

Так, если начальное состояние системы (6) находится на оси  $0l$ , когда нет сидеров, а есть только личеры, отсутствуют как раздача-скачивание, так и приток новых пользователей, так что на систему влияют только процессы оттока и траектория лежит строго на оси  $0l$  и направлена в начало координат.



Для  $s \gg 0$ ,  $l \gg 0$  (первая четверть координатной плоскости, физически реализуемый случай) отток относительно мал. Траектории начинаются вблизи оси  $0l$  (много личеров, а сидеров мало, но они есть). Вначале преобладает раздачка-скачивание, и траектория отходит от оси  $0l$  почти по прямой и подходит так к оси  $0s$ . Вблизи оси  $0s$ , когда большинство пользователей уже скачали файл, существенную роль начинает играть отток сидеров, и траектория искривляется, а движение по ней замедляется. Большинство траекторий развития реальных раздач имеют именно такую (с поправкой на случайные возмущения и суточные колебания) форму.

В случае  $s \ll 0$  и  $l \ll 0$  (третья четверть координатной плоскости) преобладает экспоненциальный отток, так что траектории вначале прижимаются к оси  $0s$  (отток личеров пропорционален  $e^{|s|+|l|}$  и происходит активнее), а затем двигаются вправо к началу координат.

В случае, когда  $s + l \ll 0$  и  $l \ll 0$ , но  $s > 0$  (четвёртая четверть) ситуация схожа с предыдущим случаем (траектории направлены к началу координат), но форма траекторий разнообразнее, так как на динамику влияют и другие процессы.

В случае, когда  $s + l \ll 0$  при  $l \gg 0$  и  $s \ll 0$  (часть второй четверти, прилежащая к оси  $0s$ ) для  $l$  преобладает экспоненциальный отток, прижимающий траекторию к оси  $0s$ , так что траектории, отойдя от оси  $0l$ , описывают петли и возвращаются к началу координат.

Если же при  $l \gg 0$  и  $s \ll 0$  получается  $s + l \gg 0$  (верхне-правая часть второй четверти, прилежащая к оси  $0l$ ), отток по обоим переменным мал, так что траектории, удалившись от оси  $0l$ , делаются почти прямыми и расходятся веером. Ближайшие к оси  $0l$  части этого веера со временем приближаются к оси  $0l$  ещё сильнее и продолжают в бесконечность; ближайшие к линии  $l = -s$  рано или поздно описывают большие петли, прижимаются к оси  $0s$  и попадают в начало координат. Можно показать, что сепаратриса, разделяющая бассейны бесконечности и начала координат, при увеличении  $l$  и  $|s|$  асимптотически приближается к линии  $l = -s + N + \varepsilon^*$ , где  $\varepsilon^* > 0$  — решение трансцендентного уравнения

$$\frac{\alpha\varepsilon}{\beta_2 e^{-\mu_2(N+\varepsilon)}} = 1. \quad (13)$$

На рис. 2 предельная линия  $l = -s + N + \varepsilon^*$  показана пунктиром.

Поведение траекторий вблизи начала координат различается в зависимости от наличия и типа ненулевых особых точек, то есть значений величины  $q$  и параметра  $\beta_2$ . Это можно увидеть на рис. 3, а), б), в) и д), где представлен фазовый портрет (6) вблизи начала координат при различных соотношениях параметров (параметры рис. 2 соответствуют рис. 3, б).

Если ненулевых особых точек нет, любая траектория не из бассейна бесконечности рано или поздно придёт в начало координат  $(0, 0)$  (рис. 3, б) и д).

При наличии седла  $(s_1^*, l^*)$  и притягивающего обобщённого узла  $(s_2^*, l^*)$  в первой четверти координатной плоскости (рис. 3, а), траектории, подходящие к началу координат справа, могут закончиться в  $(s_2^*, l^*)$ . Бассейны притяжения начала координат  $(0, 0)$  и ненулевого притягивающего обобщённого узла  $(s_2^*, l^*)$  разделяют сепаратрисы седла  $(s_1^*, l^*)$ .

При наличии отталкивающего обобщённого узла  $(s_1^*, l^*)$  и седла  $(s_2^*, l^*)$  во второй четверти (рис. 3, в) любая траектория не из бассейна бесконечности рано или

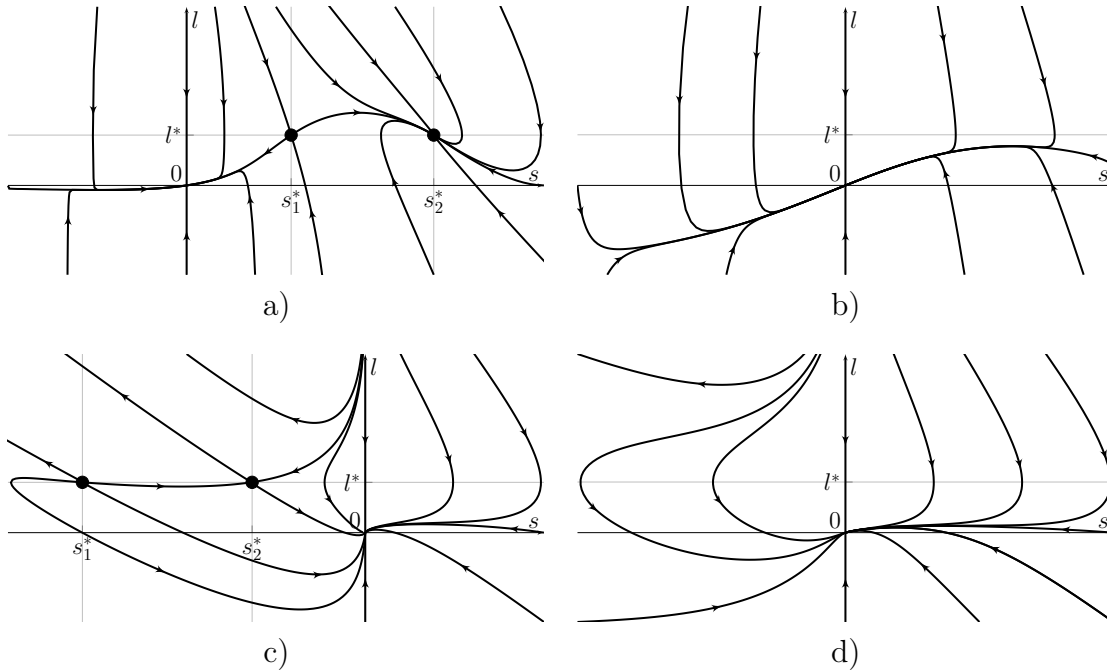


Рис. 3. Фазовый портрет модели вблизи особых точек: а) при  $q > 0, \beta_2 < \beta_2^*$ , б) при  $q > 0, \beta_2 > \beta_2^*$ , в) при  $q < 0, \beta_2 < \beta_2^*$ , д) при  $q < 0, \beta_2 > \beta_2^*$   
 Fig. 3. Phase portrait of model far from equilibrium points: а) at  $q > 0, \beta_2 < \beta_2^*$ , б) at  $q > 0, \beta_2 > \beta_2^*$ , в) at  $q < 0, \beta_2 < \beta_2^*$ , д) at  $q < 0, \beta_2 > \beta_2^*$

поздно придёт в начало координат  $(0, 0)$ , так же, как и при отсутствии ненулевых особых точек. Сепаратрисы седла отделяют относительно короткие траектории от описывающих большие петли вокруг обеих ненулевых особых точек.

Таким образом, стабилизация системы (6) в конечной ненулевой точке  $(s_2^*, l^*)$  возможна только при  $q > 0$  и  $\beta_2 < \beta_2^*$  (рис. 3, а). Во всех прочих случаях задача из всех физически реализуемых начальных состояний достаточно быстро приходит в устойчивое нулевое состояние — вымирает (рис. 3, б), в), д).

## 5. Управление раздачами

Так как раздача всегда подвержена случайным внешним воздействиям, даже в случае, когда система (6) имеет две ненулевые особые точки  $(s_1^*, l^*)$ ,  $(s_2^*, l^*)$  в первом квадранте (то есть  $q > 0, \beta_2 < \beta_2^*$ ), но расстояние между ними невелико, всегда есть возможность перескока из устойчивого состояния  $(s_2^*, l^*)$  в бассейн начала координат и дальнейшее исчезновение всех пользователей с раздачи.

Запасом устойчивости системы (6) будет расстояние  $h_{21}$  от устойчивого ненулевого состояния  $(s_2^*, l^*)$  до сепаратрисы, разделяющей бассейны ненулевого устойчивого состояния и начала координат [7, 8]. Эта сепаратриса соответствует притягивающему собственному направлению седла  $(s_1^*, l^*)$ , а расстояние  $h_{21}$  тем больше, чем больше расстояние между ненулевыми особыми точками  $s_2^* - s_1^*$ .

Таким образом, для увеличения бассейна ненулевого притягивающего узла  $(s_2^*, l^*)$ , и, соответственно, повышения устойчивости к внешним сбоям, необходимо как мож-

но больше увеличить расстояние  $s_2^* - s_1^*$  между особыми точками системы, а для этого — увеличить как  $q$ , так и разницу  $\beta_2^* - \beta_2$  (для краткости обозначим её  $b$ ).

Можно показать, что повышения запаса устойчивости  $h_{21}$  раздачи (увеличения  $q$  и  $b$ ) можно добиться, увеличивая  $\mu_2$ ,  $\alpha$  и  $N$  либо снижая  $\beta_2$ . Уменьшение  $\mu_2$ ,  $\alpha$  и  $N$ , как и рост  $\beta_2$ , приводят к снижению устойчивости.

Рассмотрим различные меры, принимаемые администрацией торрент-трекера, и их влияние на параметры системы (6) [9].

## 5.1. Рейтинг

На многих трекерах используется система рейтинга. Рейтинг пользователя равен отношению объёмов розданных и скачанных данных, причём пользователи с рейтингом больше единицы поощряются, с меньшим — штрафуются. Такая система двояко влияет на поведение сидеров — она уменьшает отток на популярных раздачах, сидирование которых позволяет быстро увеличить объём розданных данных и, соответственно, поднять рейтинг, но увеличивает отток сидеров с неактивных в данный момент раздач. Кроме того, так как скачивание файла уменьшает рейтинг, уменьшается и количество личеров, особенно на непопулярных раздачах.

Таким образом, учёт рейтинга приводит к увеличению  $N$  и  $\alpha$  и снижению  $\beta_1$  и  $\beta_2$  для наиболее активных раздач (что сильно повышает их устойчивость), но при этом для малоактивных раздач эти параметры снижаются по сравнению с неконтролируемым файлообменом. Кроме того, снижаются параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

Всё это приводит к существенному повышению  $q$  и  $b$  для немногих популярных раздач и к снижению их для всех остальных.

Также недобросовестные пользователи могут искусственно увеличивать (накручивать) свой рейтинг с помощью различных манипуляций.

Таким образом, хотя система рейтинга призвана поощрять сидирование, она уменьшает запас устойчивости непопулярных раздач по сравнению с отсутствием регулирования.

При этом задача может быть непопулярной не только из-за плохого качества раздаваемого файла, но и из-за того, что целевая аудитория данного конкретного файла мала (в частности, узкоспециализированная техническая и научная литература, оцифровки старых фильмов и радиопередач) — так называемые редкие раздачи. При этом, хотя на каждой отдельной раздаче пользователей очень мало, общее количество людей, интересующихся редкими файлами, как правило, огромно; соответственно, вымирание редких раздач может существенно снизить привлекательность трекера в целом.

## 5.2. Таймбонус и обратная связь

Администрация крупных современных торрент-трекеров поощряет как увеличение времени непрерывного сидирования в принципе (таймбонус), что соответствует уменьшению  $\beta_1$ , так и сидирование редких раздач, что эквивалентно увеличению  $\mu_1$ . Всё это, как показано выше, приводит к уменьшению  $l^*$  и увеличению  $q$  и  $b$ .

Таймбонус, так же как и рейтинг, может быть накручен. В частности, если недобросовестный сидер сильно ограничивает канал отдачи, он может заработать тайм-

бонус практически без затрат исходящего трафика. Тем не менее, в этих условиях личер всё же может докачать файл, так что раздача остаётся активной.

Кроме того, в случае наличия на раздаче только личеров без сидеров администрация часто обращается с просьбой вернуться на раздачу к тем пользователям, которые ранее скачали файл и ушли с раздачи. С одной стороны, это смещает начальное состояние системы дальше от начала координат, с другой — знание о подобных мерах заставляет личеров дольше ждать и, соответственно, уменьшает  $\beta_2$ , что, в свою очередь, ещё больше увеличивает величину  $b$  и, следовательно, запас устойчивости системы.

Таким образом, система таймбонусов и обратной связи с пользователями увеличивает запас устойчивости раздач, в том числе непопулярных, по сравнению с отсутствием регулирования.

### 5.3. Поглощение раздач

Для популярных файлов зачастую возникает две или более раздачи, где раздаётся один и тот же материал в сопоставимом качестве и схожего объёма. В этом случае множество заинтересованных в этом файле пользователей дробится соответственно на несколько меньших групп объёмами  $N_1$ ,  $N_2$  и т. д., каждая из которых предпочитает одну из раздач.

Чем меньше отдельные  $N_i$ , тем менее устойчивы соответствующие раздачи, так что возможна ситуация, когда даже при большом суммарном количестве заинтересованных пользователей все раздачи файла придут в нулевое состояние.

Чтобы этого избежать, в подобных случаях администрация трекера закрывает все эквивалентные раздачи, кроме одной (лучшая раздача поглощает худшие). В этом случае количество заинтересованных пользователей оставшейся раздачи увеличивается до  $N = \sum N_i$ , вследствие чего её запас устойчивости возрастает.

## Заключение

На основе анализа факторов, влияющих на количество пользователей раздачи в файлообменной сети, была построена динамическая модель (6), описывающая этап стабилизации раздачи после быстрого набора личеров.

Фазовые траектории системы (6) с учётом случайных возмущений и суточных колебаний хорошо соответствуют экспериментально полученным. Таким образом, выводы, полученные при анализе данной модели, могут быть использованы при администрировании торрент-трекера.

Исследование модели показало, что запас устойчивости каждой отдельной раздачи файлообменной сети можно повысить, используя систему таймбонусов. Также эффективна связь администрации с ранее скачивавшими файл пользователями и поглощение раздач-дубликатов. Система рейтинга повышает устойчивость некоторого количества наиболее популярных раздач, но отрицательно сказывается на всех остальных.

## Список литературы / References

- [1] Семенов Ю. А., *Телекоммуникационные технологии*, ИТЭФ-МФТИ, М., 2014; [Semenov Yu., *Telecommunication technologies*, ИТЕР-МИРТ, М., 2014, (in Russian).]
- [2] Андронов А. А. и др., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966; [Andronov A. A. et al., *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo porjadka*, Nauka, M., 1966, (in Russian).]
- [3] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., *Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1990; [Bautin N. N., Leontovich E. A., *Metody i priyomy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Nauka, M., 1990, (in Russian).]
- [4] Арнольд В. И., «Жёсткие» и «мягкие» математические модели, МЦНМО, М., 2008; In English: Arnold V.I., ““Hard” and “soft” mathematical models”, *Butl. Soc. Catalana Mat.*, **13**:1 (1998), 7–26.
- [5] Кононова А. И., “Исследование эволюции нелинейных динамических систем”, *Сборник научных трудов победителей всероссийского конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук в рамках Всероссийского фестиваля науки*, 2011, 111–127; [Kononova A. I., “Issledovanie evolyucii nelinejnyh dinamicheskikh sistem”, *Sbornik nauchnyh trudov pobeditelej vserossijskogo konkursa nauchno-issledovatel'skikh rabot studentov i aspirantov v oblasti matematicheskikh nauk v ramkah Vserossijskogo festivalya nauki*, 2011, 111–127, (in Russian).]
- [6] Ильяшенко Ю. С., “Аттракторы динамических систем и философия общего положения”, *Матем. просв.*, сер. 3, **12**, Изд-во МЦНМО, М., 2008, 13–22; [Ilyashenko Yu. I., “Attractors of dynamical systems and philosophy of generic position”, *Images de Mathematique*, **18**, 2006, 58–63, France.]
- [7] Макаров И. М., Менский Б. М., *Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал)*, Машиностроение, М., 1982; [Makarov I. M., Menskij B. M., *Linejnye avtomaticheskie sistemy (elementy teorii, metody rascheta i spravochnyj material)*, Mashinostroenie, M., 1982, (in Russian).]
- [8] Gagarina L. G. et al., “Method for increasing reliability for transmission state of power equipment energy”, *2015 IEEE global conference on signal and information processing (GLOBALSIP 2015)*, 2015, 433–437.
- [9] Гагарина Л. Г. и др., “Моделирование процесса принятия управленческих решений”, *Твердые бытовые отходы*, 2013, № 1(79), 30–33; [Gagarina L. G. et al., “Modelirovanie processa prinyatiya upravlencheskih reshenij”, *Tverdye bytovye othody*, 2013, № 1(79), 30–33, (in Russian).]

---

**Kononova A. I.**, "Dynamic Model of Single Torrent with File-Sharing P2P Network", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:4 (2018), 421–434.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2018-4-421-434

**Abstract.** In this work, a model of distribution of the file in P2P file-sharing network constructed on the basis of ordinary differential equations is considered. The phase variables which describe a condition of distribution of the file (as a first approximation is the number of users – seeder and leecher on distribution) are defined, the factors which influence the file distribution and the change of the number of users participating in exchange are analysed. On the basis of the analysis the system of the differential equations describing distribution evolution – dynamic model of evolution of distribution is written down. The life cycle of distribution in file-sharing network consisting of four stages – distribution creation, a fast gain leechers, stabilization and (for distributions of the files losing over time relevance) fading is considered. To each stage there corresponds the ratio of model parameters, and parameters change over time. The process of measuring the condition of real distributions is described. An example of the trajectory corresponding to the evolution of real distribution at a large torrent tracker is shown.

Further, the distribution stabilization stage which is characterized by constants as a first approximation parameters is considered. Equilibrium points of the dynamic model of distribution evolution are investigated, their possible quantity and type are described. All configurations of the general position, possible in the model of distribution evolution in a file-sharing P2P network are described. Phase portraits of each configuration are represented. The influence of various administrative measures on a stock of distribution stability is analysed. Ambiguity of the influence of a rating accounting system on the stability of distributions is shown. The positive influence of a system of timebonus, feedback and absorption of distributions is also shown.

**Keywords:** file-sharing network, ODEs, dynamical systems, stability

**On the authors:**

Alexandra I. Kononova, [orcid.org/0000-0002-4178-3828](https://orcid.org/0000-0002-4178-3828), PhD,  
National Research University of Electronic Technology,  
1 Shokin sq., Moscow, Zelenograd, 124498, Russia, e-mail: [illinc@bk.ru](mailto:illinc@bk.ru)