

©Уваров А. Д., 2018

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-692-710

УДК 517.9

## Особые точки кривых

Уваров А. Д.

*Поступила в редакцию 3 сентября 2018*

*После доработки 30 октября 2018*

*Принята к публикации 10 ноября 2018*

**Аннотация.** В данной работе затрагивается ключевая проблема геометрического моделирования, связанная с построением кривых пересечения поверхностей. Найдены способы построения кривых пересечения в сложных случаях: при касании и при прохождении через особые точки поверхностей. В первой части работы рассматривается проблема определения линии касания двух поверхностей, заданных в параметрическом виде. Анализируются несколько подходов к решению задачи. Выявляются достоинства и недостатки приведенных подходов. Описываются итерационные алгоритмы поиска точки на линии касания. Вторая часть работы посвящена методам преодоления возникающих трудностей решения задачи для сингулярных точек кривых пересечения, в которых нарушается регулярный итерационный процесс. В зависимости от типа поставленной задачи автор останавливается на двух методах. Первый из них предполагает находить особые точки кривых без использования итерационных методов, что уменьшает время работы алгоритма по построению кривой пересечения. Второй метод, рассматриваемый в заключительной части статьи, относится к численным методам. В этой части автор вводит функцию, достигающую глобального минимума только в особых точках кривых пересечения, и решает задачу минимизации этой функции. Применение этого метода является весьма эффективным в некоторых частных случаях, накладывающих ограничения на поверхности и их расположение. В заключение рассматривается использование этого метода в случае, когда функция имеет такой рельеф, что в окрестности точки минимума поверхности уровня являются сильно вытянутыми эллипсоидами. Все изображения, приведенные в данной статье, являются результатом работы алгоритмов по методам, предложенным автором. Изображения получены с помощью авторской программной среды.

**Ключевые слова:** особая точка, пересечение, касание, матрица, градиент

**Для цитирования:** Уваров А. Д., "Особые точки кривых", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:6 (2018), 692–710.

**Об авторах:**

Уваров Артем Дмитриевич, [orcid.org/0000-0002-0624-3877](https://orcid.org/0000-0002-0624-3877), канд. физ.-мат. наук, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, ул. Республиканская, 108, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: [artiom\\_uvarov@inbox.ru](mailto:artiom_uvarov@inbox.ru)

## Введение

Сложные геометрические объекты, например, поверхности, ограниченные контурами, являются результатом некоторых операций над более простыми объектами. Базовыми логическими операциями над геометрическими объектами можно считать их пересечение, объединение и вычитание. Для применения этих операций

требуется определение еще одного геометрического объекта – линии пересечения исходных поверхностей. Алгоритм построения такого объекта хорошо известен и описан в литературе (см., например, [1], [2], [3]). На каждом шаге итерационного процесса требуется информация о точке, лежащей на кривой пересечения, о направлении касательного вектора к этой кривой в этой точке и о величине шага вдоль касательного вектора. Этот вектор определяется как вектор, ортогональный двум нормальям к обеим поверхностям, проведенным из точки, лежащей на кривой пересечения. Частным случаем пересечения поверхностей является их полное или частичное касание (частичное касание предполагает, что поверхности касаются в конечном числе точек). В двух последних случаях невозможно применение традиционных алгоритмов, поскольку в случае касания поверхностей их нормали, построенные в точках касания – коллинеарны. Однако в некоторых специальных случаях касания поверхностей, накладывающих ограничения на их взаимное расположение, можно построить касательную кривую, используя узко направленные алгоритмы. Стоит заметить, что сами поверхности и касательная кривая должны быть гладкими. Первая часть статьи посвящена анализу таких алгоритмов.

В случае частичного касания поверхностей кривая пересечения содержит особенности – точки самопересечения или самокасания. При "подходе" к особой точке кривой пересечения традиционный алгоритм становится мало пригодным, поскольку на каждом шаге итерационного процесса он предполагает численное решение системы линейных уравнений, которая становится плохо обусловленной в особой точке. Общим подходом для решения этой проблемы является применение сингулярного разложения (см. [4], [5]). Однако такой метод требует больших вычислительных затрат. В случае, когда не требуется высокая точность координат особой точки и важна скорость работы алгоритма, возможно определить особую точку как барицентр концов ветвей кривой пересечения, сходящихся в этой точке. Плюсы и минусы этого метода рассматриваются во второй части статьи.

Задачу о пересечении поверхностей можно рассматривать как задачу минимизации. В случае параметрического задания поверхностей она была решена Баттерфильдом (см. [6]), но только для функции трех переменных. Если поверхности обозначить  $\mathbf{r}(u, v)$  и  $\mathbf{s}(a, b)$ , то необходимо найти минимум функции  $|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)|$ . Однако в этом случае один из параметров должен быть фиксирован. Если глобальный минимум последняя функция достигает в особой точке кривой пересечения, то фиксировать какой-либо параметр не представляется возможным. В третьей части статьи вводится функция  $f(u, v, a, b)$  которая достигает глобального минимума только в особых точках кривых пересечения. При этом для некоторых частных случаев минимум функции ищется через решение системы линейных уравнений. В общем случае, не накладывая на поверхности и их расположение дополнительных ограничений, глобальный минимум находится с помощью метода "оврагов" и покоординатного спуска [7].

## 1. Гладкие кривые

В статье [8] для поиска точки пересечения поверхностей авторы предлагают использовать метод градиентного спуска вместо метода, в котором используется закрепле-

ние одной из параметрических координат. Предполагается, что кривая пересечения поверхностей – гладкая.

Пересекающиеся поверхности обозначаются  $\mathbf{r}(u, v)$  и  $\mathbf{s}(a, b)$ . Искомая точка пересечения обозначается  $\mathbf{p}^*$ , при этом

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} u \\ v \\ a \\ b \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Точка пересечения ищется из следующего векторного уравнения:

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b) = 0. \quad (2)$$

Обозначим через

$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} u \\ v \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

некоторую точку исходного параметрического пространства. А через  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_k)$  вектор невязки векторного уравнения (2). Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} F_x(\mathbf{p}_k) \\ F_y(\mathbf{p}_k) \\ F_z(\mathbf{p}_k) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Фиксировав одну из параметрических координат, мы приходим к необходимости решения следующей системы уравнений методом Ньютона:

$$J(\mathbf{p}_k)\Delta_k = -\mathbf{F}(\mathbf{p}_k), \quad (4)$$

где

$$J(\mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} \nabla F_x \\ \nabla F_y \\ \nabla F_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

– матрица Якоби, вычисленная в точке  $\mathbf{p}_k$ . При этом  $\nabla F_x, \nabla F_y, \nabla F_z$  – градиенты функций  $F_x, F_y, F_z$ . При фиксированной координате последние функции есть функции трех переменных, а  $\Delta_k$  – трехкомпонентный вектор. В этом случае вектор приращения  $\Delta_k$  ищется из следующего уравнения:

$$\Delta_k = -J^{-1}(\mathbf{p}_k)\mathbf{F}(\mathbf{p}_k), \quad (6)$$

то есть  $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \Delta_k$ .

Система (4) является вырожденной (плохо согласованной) в том случае, когда

$$\det J(\mathbf{p}_k) = 0. \quad (7)$$

В общем виде матрица Якоби – это прямоугольная матрица размера  $3 \times 4$ , а именно:

$$J(\mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} & -\frac{\partial s}{\partial a} & -\frac{\partial s}{\partial b} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

отсюда следует, что равенство (7) возможно в том случае, когда векторы  $\frac{\partial r}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial b}$  лежат в одной плоскости. Последняя ситуация возможна в предельном случае пересечения – касании поверхностей, например, когда искомая кривая вся состоит из точек касания двух поверхностей. Заметим, что в случае, когда кривая – плоская и нормаль в каждой ее точке параллельна какой-либо координатной оси, равенство (7) возникает из-за того, что один из градиентов  $\nabla F_x, \nabla F_y, \nabla F_z$  становится равным нулю, то есть строка матрицы (5) зануляется. При этом ни один из столбцов этой матрицы не будет равным нулю. Шаг по методу Ньютона в этом случае выполнить нельзя. Также, например, равенство (7) может возникать в точках, принадлежащих параллельным участкам параметрических линий двух семейств, в которых касательные к параметрическим линиям коллинеарны. При этом первый столбец матрицы (5) подобен третьему, а второй подобен четвертому.

В обоих случаях применение метода Ньютона не дает необходимой точности поэтому целесообразней использовать метод градиентного спуска, который является более стабильным по отношению к последним двум случаям.

В случае, когда кривая не содержит особых точек, представим решение уравнения (2) в пространстве новых четырех координат. Три оси направим параллельно векторам градиентов компонент невязки в точке  $\mathbf{p}_k$ . Вектор  $\mathbf{t}$ , задающий направление четвертой оси, выберем ортогональным градиентам. Возможность такого перехода обосновывается в работе [9]. Решение уравнения (2) в новых координатах примет вид

$$\Delta_k = \alpha_k \mathbf{t} + \beta_k \nabla F_x + \gamma_k \nabla F_y + \delta_k \nabla F_z. \quad (9)$$

В окрестности неособой точки  $\mathbf{p}_k$  шаг в направлении  $\mathbf{t}$  приводит к незначительному изменению величины  $\mathbf{F}$ . Поэтому координата  $\alpha_k = 0$ . С учетом последнего равенства имеем

$$\Delta_k = J^T(\mathbf{p}_k) \Delta'_k, \quad (10)$$

где

$$\Delta'_k = \begin{bmatrix} \beta_k \\ \gamma_k \\ \delta_k \end{bmatrix}$$

– шаг в новом пространстве. В формуле (10)  $\Delta_k$  – трехкомпонентный вектор, который может быть найден из уравнения (4). Действительно, подставим равенство (10) в равенство (4) и выразим  $\Delta'_k$ :

$$\Delta'_k = -(J'(\mathbf{p}_k))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{p}_k),$$

где

$$J' = J J^T = \begin{bmatrix} \nabla F_x \nabla F_x & \nabla F_x \nabla F_y & \nabla F_x \nabla F_z \\ \nabla F_y \nabla F_x & \nabla F_y \nabla F_y & \nabla F_y \nabla F_z \\ \nabla F_z \nabla F_x & \nabla F_z \nabla F_y & \nabla F_z \nabla F_z \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим ситуации, в которых матрица  $J'$  вырождается.

1. Один из градиентов  $\nabla F_x, \nabla F_y, \nabla F_z$  становится равным нулю. При этом один из столбцов матрицы (11) также будет равен нулю, поскольку эта матрица симметричная. Вычеркиванием строки и столбца приходим к квадратной матрице, из которой определяется шаг.

2. Подобие строк матрицы  $J'$  влечет за собой подобие столбцов. При этом вычеркивание подобных строк и столбцов снова приводит к квадратной матрице, из которой также определяется шаг.

Далее рассмотрим систему

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= 0 \\ (\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= 0 \\ (\mathbf{s}(a, b) - \mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} &= 0 \\ (\mathbf{s}(a, b) - \mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

приведенную в книге [1] на странице 251. Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}; b = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}; c = \left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \right|^2 + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial a^2}; d = -\left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \right|^2 + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial b^2}; \\ e &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}; f = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}; g = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}; h = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}; \\ i &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}; k = -\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} + \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial a \partial b}, \end{aligned}$$

где  $\rho = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)$ , то шаг  $\Delta_k$  находится из решения системы (4), при этом матрица  $J(\mathbf{p}_k)$  имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} a & e & f & g \\ e & b & h & i \\ f & h & c & k \\ g & i & k & d \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Последняя матрица хорошо подходит для выполнения шага в предельном случае пересечения – касании поверхностей. При этом нужно учитывать, что кривая пересечения – гладкая.

Можно показать, что если кривая содержит особую точку, то в ней матрица (13) вырождается (строки становятся подобными). Поскольку последняя матрица является симметрической, подобие строк приводит к подобию столбцов, а значит, можно вычеркиванием строки и столбца снова прийти к квадратной матрице меньшего ранга и вычислить шаг.

Вывод: если по условию задачи предполагается, что касание поверхностей приводит только к гладкой кривой и при этом нормаль коллинеарна одной из осей координат, то целесообразно выполнять шаг с помощью матрицы (11), поскольку мы приходим к матрице ранга  $\leq 2$ . Если же кривая касания остается гладкой, но нормаль не предполагается коллинеарной какой-либо оси, то можно использовать матрицу (13).

## 2. Кривые с особенностями

В статье [8] в качестве общего подхода для численного решения плохо обусловленных систем предлагается использовать метод сингулярного разложения. В этом случае с помощью итерационного процесса матрицу (8) можно привести к виду

$$J = UOD,$$

где  $U$  – ортогональная матрица размера  $4 \times 4$ ,  $O$  – ортогональная матрица размера  $4 \times 3$ , а  $D$  – диагональная матрица размера  $3 \times 3$ . Однако в случае полного вырождения матрицы  $J$ , то есть когда  $\text{Rank}(J) = 0$ , невозможно получить шаг с помощью сингулярной матрицы. В статье предлагается преодолеть данную ситуацию с помощью малого возмущения начального приближения. Очевидно, что такой метод обладает рядом недостатков. Во-первых, он неточен, во-вторых, он не стабилен.

В качестве альтернативы предлагается использовать следующий подход.

1. Подойти к особой точке достаточно близко. Например, пока  $|\mathbf{t}| \leq \varepsilon$ , где  $\mathbf{t}$  – касательный вектор к кривой в точке  $A(\mathbf{p}^*) = \frac{\mathbf{r}(u^*, v^*) + \mathbf{s}(a^*, b^*)}{2}$ , при этом  $\mathbf{p}^*$  – точка из (1).

1.1. В случае перехода через особую точку отбросить последний сегмент кривой, затем к точке, полученной на предыдущем шаге, прибавить касательный вектор, длина которого уменьшилась в два раза. Переход через особую точку определяется тем, что угол между касательными векторами в текущей и предыдущей точках близок к  $180^\circ$ .

1.2. В том случае, когда при переходе через особую точку угол между касательными векторами в текущей и предыдущей точках больше  $90^\circ$ , необходимо просто отбросить последний сегмент кривой.

На следующих рисунках под буквой (а) изображены кривые пересечения, а под буквой (b) – увеличенная область вокруг особой точки.



Рис. 1:  $z = x^3 - x^2 + y^2 \cap z = 0$   
Fig. 1:  $z = x^3 - x^2 + y^2 \cap z = 0$



Рис. 2:  $z = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 \cap z = 0$   
 Fig. 2:  $z = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 \cap z = 0$



Рис. 3:  $z = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 \cap z = 0$   
 Fig. 3:  $z = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 \cap z = 0$

## 2. Приблизительно вычислить особую точку.

Несложно видеть, что если особая точка алгебраической кривой есть точка самопересечения кратности  $p$  (см. рис. 1), то число ветвей, сходящихся к данной точке, равно  $2p$ . Поэтому характер сходимости решения к особой точке при движении к ней с противоположных сторон должен быть один и тот же, то есть особая точка должна быть равноудалена от последних сегментов противоположных ветвей. В связи с

этим фактом в качестве особой точки можно взять центр симметрии концов каждой ветви, сходящейся к этой точке. В роли центра симметрии выступает барицентр.

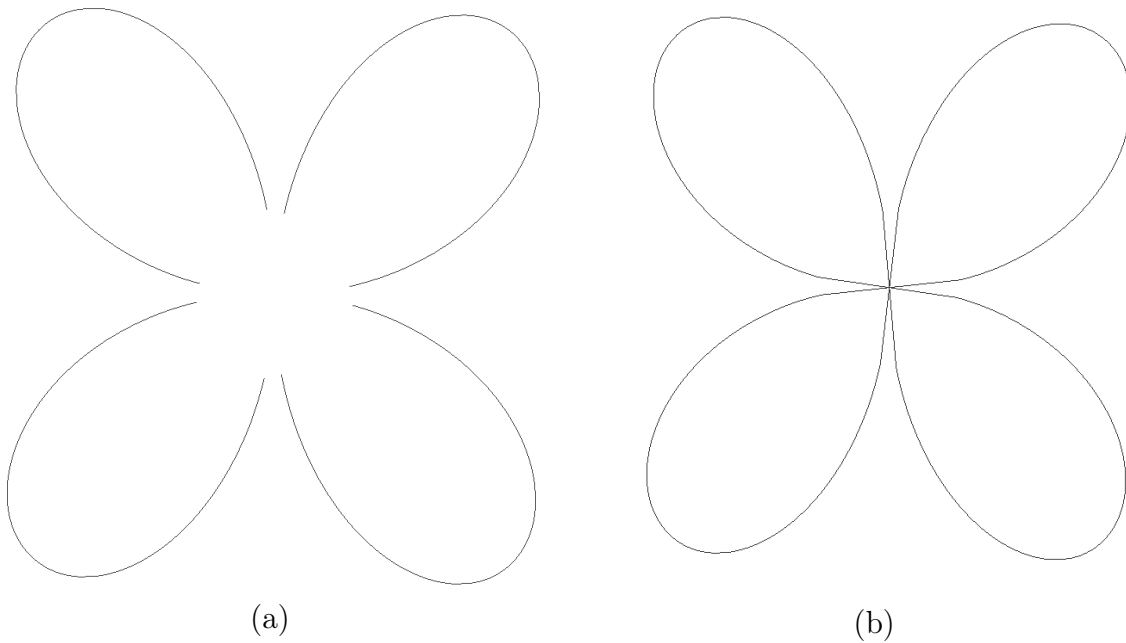


Рис. 4:  $z = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 \cap z = 0$   
Fig. 4:  $z = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 \cap z = 0$

В случае точки самокасания (см. рис. 2) можно поступить так же, как с точкой самопересечения, однако точность будет несколько хуже.

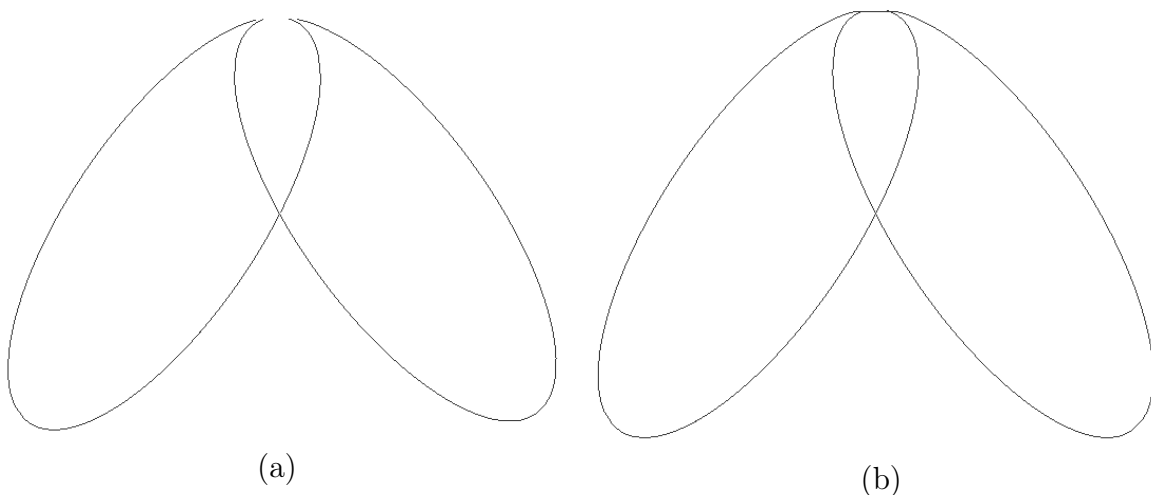


Рис. 5:  $z = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 \cap z = 0$   
Fig. 5:  $z = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 \cap z = 0$

Если предполагается, что кривые используются в качестве наглядного материала или в методических целях, то данной точности будет достаточно.



Вычисление координат особой точки типа "острие" (см. рис. 3) плохо укладывается в рамки предыдущего алгоритма, однако если одна из ветвей подошла к особой точке намного ближе другой ветви, то последний алгоритм тоже применим.

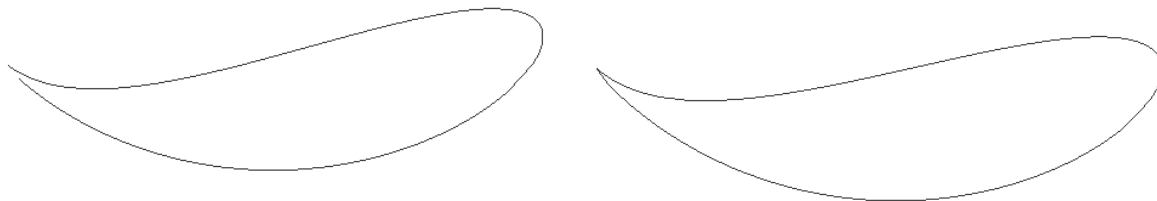


Рис. 6:  $z = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 \cap z = 0$

Fig. 6:  $z = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 \cap z = 0$

Все типы особых точек плоских алгебраических кривых возникают и на пространственных кривых, поскольку локально их можно рассматривать как плоские.

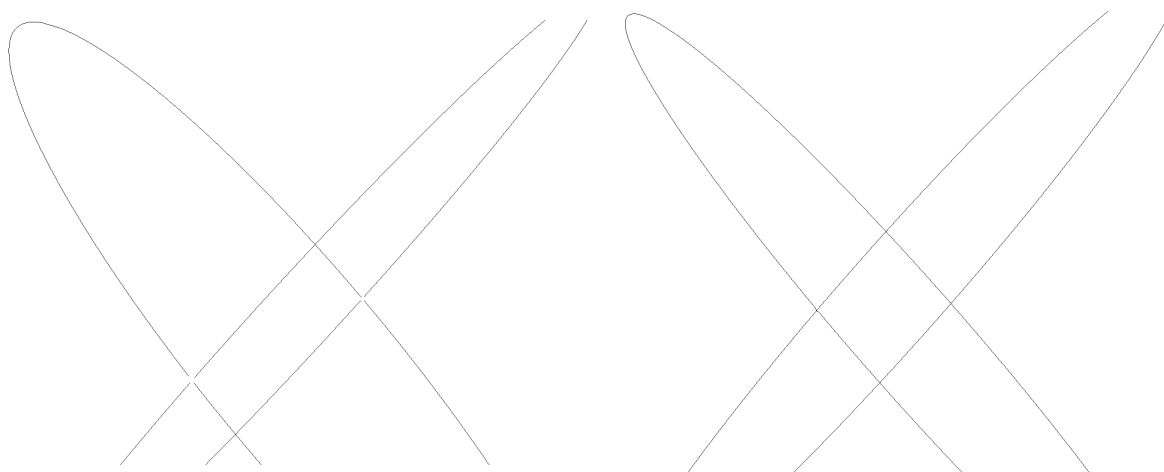


Рис. 7: Пересечение двух цилиндров

Fig. 7: Intersection of two cylinders

Вывод: можно считать, что при решении технических задач метод поиска и вычисления особых точек кривых пересечения, предложенный в статье, не совсем приемлем из-за своей низкой точности. Последний метод хорошо подходит для решения методических задач, связанных с наглядным моделированием.

### 3. Численные методы нахождения особых точек

Система (12) возникает при попытке минимизировать следующую функцию :

$$g(u, v, a, b) = |\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)|^2.$$

Поиск локального минимума функции  $g$  сводится к нахождению нуля градиента функции  $g$ . А именно, к решению уравнения  $\nabla g = 0$ . Если ввести обозначения

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_v \\ \Delta_a \\ \Delta_b \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\Delta_u, \Delta_v, \Delta_a, \Delta_b$  – приращения аргументов функции  $g$  на  $k$ -м шаге итерационного процесса, то

$$\Delta_k = H^{-1} \nabla g,$$

где  $H$  – матрица Гессе функции  $g$ .

Решение последней системы методом Ньютона–Рафсона невозможно, поскольку  $\det H = 0$ . Докажем последнее равенство.

*Доказательство.* Градиент  $\nabla g$  имеет вид:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ 2\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ -2\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \\ -2\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{t} = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{s}(a, b)$ . Обозначим координаты вектора  $\nabla g$  через  $g_u, g_v, g_a, g_b$ . Тогда матрица Гессе  $H(g)$  функции  $g$  примет вид:

$$H(g) = \begin{bmatrix} \nabla g_u \\ \nabla g_v \\ \nabla g_a \\ \nabla g_b \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Покажем, что векторы  $\nabla g_u$  и  $\nabla g_v$  линейно зависят от векторов  $\nabla g_a$  и  $\nabla g_b$ . Действительно, полагая, что  $|\mathbf{t}| \approx 0$ , слагаемым, содержащим  $\mathbf{t}$ , можно пренебречь. Учитывая этот факт и вектор (15), матрицу (16) можно записать так:

$$H(g) = \begin{bmatrix} 2\mathbf{t}'_u \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & 2\mathbf{t}'_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & 2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & 2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ 2\mathbf{t}'_u \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} & 2\mathbf{t}'_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} & 2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} & 2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ -2\mathbf{t}'_u \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} & -2\mathbf{t}'_v \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} & -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} & -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \\ -2\mathbf{t}'_u \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} & -2\mathbf{t}'_v \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} & -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} & -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

В особой точке нормали обеих поверхностей коллинеарны и, соответственно, касательные плоскости этих поверхностей совпадают, то есть векторы  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b}$  линейно зависимы. Отсюда следует, что  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = a_1 * \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} + b_1 * \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b}$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a_2 * \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} + b_2 * \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b}$ , где  $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ . Учитывая последние равенства, билинейность скалярного произведения и матрицу (17), легко видеть, что  $\nabla g_u = a_1 * \nabla g_a + b_1 * \nabla g_b$  и  $\nabla g_v = a_2 * \nabla g_a + b_2 * \nabla g_b$ , то есть  $rank H = 2$  и, соответственно,  $\det H = 0$ .  $\square$

Поставим следующую задачу: какова должна быть функция от переменных  $u, v, a, b$ , чтобы ее глобальный минимум достигался только в особых точках кривых пересечения. Для ее решения рассмотрим следующую функцию:

$$f(u, v, a, b) = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 + 1 - |\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s|, \quad (18)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(a, b)$ , а  $\mathbf{n}_r$  и  $\mathbf{n}_s$  – нормали к поверхностям  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{s}$ . Функция (18) достигает глобального минимума только в особых точках кривых пересечения, при этом  $\min f = 0$ . Отсюда получаем, что из равенства  $\nabla f = 0$  немедленно следует равенство  $f = 0$ , учитывая, что нулевое приближение  $u_0, v_0, a_0, b_0$  является достаточно "хорошим". Последнее словосочетание означает следующее: пусть  $\mathbf{p}_m(u_m, v_m, a_m, b_m)$  – точка глобального минимума, при этом существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $\mathbf{p}_m$  такая, что для любой точки  $\mathbf{p}$ , лежащей внутри этой окрестности, выполняется неравенство  $f(\mathbf{p}_m) - f(\mathbf{p}) \leq 0$ . Полагаем, что  $|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}(u_0, v_0, a_0, b_0)| \leq \varepsilon$ . Несложно показать, что для любой точки  $\mathbf{p}$  такой, что  $|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}| \leq \varepsilon$ , скалярное произведение  $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s$  имеет определенный знак ( $f = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = 0$  и  $|\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s| - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s = \pm 1$ ), поэтому модуль, встречающийся в функции  $f$ , при численном дифференцировании не учитывается. В дальнейшем для определенности будем полагать, что  $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s \geq 0$  и поэтому функция  $f$  приобретает вид

$$f(u, v, a, b) = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 + 1 - \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s. \quad (19)$$

Обозначим через  $f_1(u, v, a, b) = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2$  и через  $f_2(u, v, a, b) = 1 - \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s$ . С учетом введенных обозначений имеем:  $\nabla f = \nabla f_1 + \nabla f_2$  и, соответственно,  $H(f) = H(f_1) + H(f_2)$ . Матрица Гессе  $H(f_1)$  имеет вид (17), а матрица Гессе  $H(f_2)$  может быть получена аналогично матрице  $H(f_1)$ .

Покажем это. Градиент  $\nabla f_2$  имеет вид:

$$\nabla f_2 = - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial u} \\ \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial v} \\ \mathbf{n}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial a} \\ \mathbf{n}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial b} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Пусть в особой точке  $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s = 1$ , то есть  $\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_s$ . С учетом этого факта и того, что вектор градиента  $\nabla f_2$  имеет вид (20), матрица Гессе  $H(f_2)$  примет следующий вид:

$$H(f_2) = - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u^2} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial b} \\ \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial v^2} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial b} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial a} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial a} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_s}{\partial a^2} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_s}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial b} & \frac{\partial \mathbf{n}_r}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}_s}{\partial b} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_s}{\partial a \partial b} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_s}{\partial b^2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Нельзя утверждать, что Гессиан матрицы  $H(f_2)$  всегда равен нулю. Однако в некоторых случаях  $\det H(f_2) = 0$ . Например, когда одна из поверхностей является плоскостью.

Пусть это будет поверхность  $\mathbf{s}(a, b)$ . В этом случае все частные производные от  $\mathbf{n}_s$  равны нулю, и матрица (21) примет вид

$$H(f_2) = - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u^2} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v} & 0 & 0 \\ \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v} & \mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Замечание. Предполагается, что хотя бы один элемент матрицы (22) как в первой, так и во второй строке не равен нулю. Для этого, например, потребуем, чтобы

$$\mathbf{n}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v} \neq 0. \quad (23)$$



Рис. 8: Касание конуса и плоскости

Fig. 8: A cone and a plane touching

Это означает, что вектор  $\frac{\partial^2 \mathbf{nr}}{\partial u \partial v}$  не лежит в касательной плоскости, образованной векторами  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ . Матрицу  $H(f_2)$  с учетом (22) и последнего замечания можно записать следующим образом:

$$H(f_2) = - \begin{bmatrix} \nabla f_{2u} \\ \nabla f_{2v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где  $f_{2u}, f_{2v}, 0, 0$  – координаты вектора  $\nabla f_2$  градиента функции  $f_2$ .

Покажем, что в этом случае  $\det H(f) \neq 0$ , где  $H(f) = H(f_1) + H(f_2)$ . В наших обозначениях  $H(f_1) = H(g)$  и, как мы ранее доказали,  $\det H(f_1) = 0$ , поскольку первая и вторая строки в матрице (17) являются линейными комбинациями третьей и четвертой строки этой матрицы. Таким образом, с учетом равенства (24) остается показать, что векторы  $\nabla f_{2u}$  и  $\nabla f_{2v}$  не являются линейными комбинациями третьей и четвертой строки матрицы (17). Действительно, предположим противное. Пусть, например,  $\nabla f_{2u} = \gamma_1 * \nabla g_a + \varepsilon_1 * \nabla g_b$ , где  $\nabla g_a$  и  $\nabla g_b$  – обозначения, введенные в равенстве (16). Тогда с учетом (17) и (22) получаем следующую систему относительно  $\gamma_1$  и  $\varepsilon_1$ :

$$\begin{cases} \gamma_1 * -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} + \varepsilon_1 * -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} = 0 \\ \gamma_1 * -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} + \varepsilon_1 * -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Ненулевые решения этой системы возможны только в том случае, когда ее определитель равен нулю. То есть

$$\begin{vmatrix} -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} & -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \\ -2\mathbf{t}'_a \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} & -2\mathbf{t}'_b \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \end{vmatrix} = 0.$$

Последний определитель, очевидно, может быть равен нулю только в случае, когда векторы  $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a}$  и  $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b}$  линейно зависимы, что невозможно, поскольку поверхность  $\mathbf{s}(a, b)$  является гладкой в особой точке кривой пересечения. Отсюда получаем, что наше предположение неверно и вектор  $\nabla f_{2u}$  не выражается через векторы  $\nabla g_a$  и  $\nabla g_b$ . Аналогично можно показать, что вектор  $\nabla f_{2v}$  также не выражается через векторы  $\nabla g_a$  и  $\nabla g_b$ . На основе двух последних утверждений можно сделать вывод, что

$\det H(f) \neq 0$  и, соответственно, для поиска глобального минимума функции (18) можно методом Ньютона–Рафсона решить систему

$$\Delta_k = H^{-1}(f)\nabla f, \quad (26)$$

где  $\Delta_k$  – вектор приращений аргументов функции  $f$  на  $k$ -м шаге итерационного процесса. Этот вектор определен в формуле (14).

Недостатком метода, описанного выше, является использование дополнительного условия (23), наложенного на поверхность  $\mathbf{r}(u, v)$ , что сужает разнообразие поверхностей, используемых в пересечении. Однако если предполагается, что  $\mathbf{r}(u, v)$  является графиком явной функции и его пересечение с плоскостью  $z = 0$  есть алгебраическая кривая с особой точкой кратности не менее трех, то условие (23) является излишним.

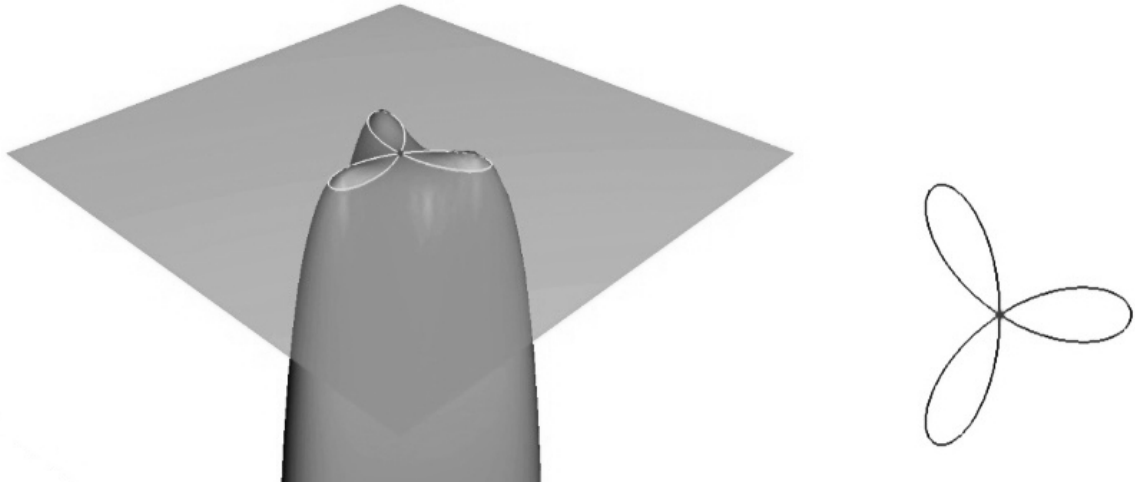


Рис. 9:  $z = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 \cap z = 0$   
 Fig. 9:  $z = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 \cap z = 0$

Действительно, пусть  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , а  $\mathbf{s}(a, b) = (a, b, 0)$ . При этом  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ . С другой стороны,  $\mathbf{n}_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial f^2}{\partial v^2} + 1}}(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, -1) = (0, 0, -1)$  и, соответственно,  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ . С учетом последних замечаний матрица  $H(f_1)$  имеет вид

$$H(f_1) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Матрица  $H(f_2)$  полностью вырождается, а именно:

$$H(f_2) = \begin{bmatrix} (\frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u^2})_z & (\frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v})_z & 0 & 0 \\ (\frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial u \partial v})_z & (\frac{\partial^2 \mathbf{n}_r}{\partial v^2})_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

поскольку все смешанные частные производные второго порядка от функции

$$(\mathbf{n}_r)_z = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial u} + \frac{\partial f^2}{\partial v} + 1}},$$

как несложно видеть, равны нулю в силу следующего условия:  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$ .

В данном случае можно положить, что  $a = u$  и  $b = v$ . Таким образом, матрица  $H(f)$  примет вид

$$H(f) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

и система (26) решается методом Ньютона–Рафсона (как система двух уравнений с двумя неизвестными).

Если на поверхности  $\mathbf{r}(u, v)$  и  $\mathbf{s}(a, b)$  не накладываются дополнительные условия, то задача о поиске особых точек кривой пересечения поверхностей может быть решена одним из следующих способов.

Первый способ предполагает использование псевдообратной матрицы  $H(f)^+$  для матрицы  $H(f)$ , где  $f$  – функция, определенная в (18). Соответственно, наилучшее приближенное решение  $\widetilde{\Delta}_k$  имеет вид

$$\widetilde{\Delta}_k = H(f)^+ \nabla f.$$

Однако и этот метод не лишен недостатков. Во-первых, если  $\text{rank} H(f) = 0$ , то псевдообратная матрица  $H(f)^+$  не определена. Во-вторых, если  $\text{rank} H(f) > 0$ , то матрицу  $H(f)$  можно представить в виде  $H(f) = U \Lambda V^T$ , где  $U$  и  $V$  – ортогональные матрицы, а  $\Lambda$  – диагональная матрица, состоящая из собственных чисел матрицы  $H(f)$ . При этом  $H(f)^+ = V \Lambda^{-1} U^T$ . Для поиска диагональной матрицы  $\Lambda$  используется спектральное разложение, которое строится итерационными методами. В случае, когда  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  – график явной функции, а  $\mathbf{s}(a, b) = (a, b, 0)$  – координатная плоскость  $z = 0$ , вместо функции  $f$  можно рассматривать функцию  $\widetilde{f}$ :

$$\widetilde{f}(u, v, a, b) = 1 - |\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s|. \quad (30)$$

Последняя функция является упрощенным вариантом функции (18). Как уже говорилось, функция (18) достигает глобального минимума только в особых точках кривых пересечения, при этом  $\min f = 0$ . Функция (30) также достигает глобального минимума в особых точках кривых пересечения и при этом  $\min \widetilde{f} = 0$ . Однако  $\widetilde{f}$  может достигать глобального минимума и в других точках из области определения (в случае, когда  $\mathbf{r}(u, v)$  – график функции, а  $\mathbf{s}(a, b)$  – плоскость, множество таких точек – конечно). Пусть  $(u_s, v_s, a_s, b_s)$  – особая точка кривой пересечения и  $(u_0, v_0, a_0, b_0)$  – точка нулевого приближения. Обозначим через

$$\varepsilon = \sqrt{(u_0 - u_s)^2 + (v_0 - v_s)^2 + (a_0 - a_s)^2 + (b_0 - b_s)^2}$$

расстояние между этими точками. Тогда, если полагать, что точка нулевого приближения  $(u_0, v_0, a_0, b_0)$  выбрана достаточно близко к особой точке кривой пересечения, то можно быть уверенным, что  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(u_s, v_s, a_s, b_s)$  не содержит других точек глобального минимума. Соответственно, при решении задачи минимизации вместо функции (18) можно использовать функцию (30). В качестве нулевого

приближения можно использовать точку барицентра, о которой подробно написано во второй части статьи.

Второй способ также основан на использовании псевдообратной матрицы. Пусть  $f$  – функция, определенная равенством (19). Тогда

$$f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = 0 \\ 1 - \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{r}_x - \mathbf{s}_x = 0 \\ \mathbf{r}_y - \mathbf{s}_y = 0 \\ \mathbf{r}_z - \mathbf{s}_z = 0 \\ 1 - \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s = 0 \end{cases}. \quad (31)$$

Решение последней системы находится с помощью матрицы  $A_f$ , где

$$A_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}_x}{\partial v} & -\frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial a} & -\frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial b} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial v} & -\frac{\partial \mathbf{s}_y}{\partial a} & -\frac{\partial \mathbf{s}_y}{\partial b} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial v} & -\frac{\partial \mathbf{s}_z}{\partial a} & -\frac{\partial \mathbf{s}_z}{\partial b} \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial p}{\partial a} & \frac{\partial p}{\partial b} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где  $p = p(u, v, a, b) = 1 - \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_s$ . Нельзя утверждать, что  $\text{rank} A_f = 4$  (например, когда совпавшие касательные плоскости в особой точке кривой пересечения параллельны координатным плоскостям).

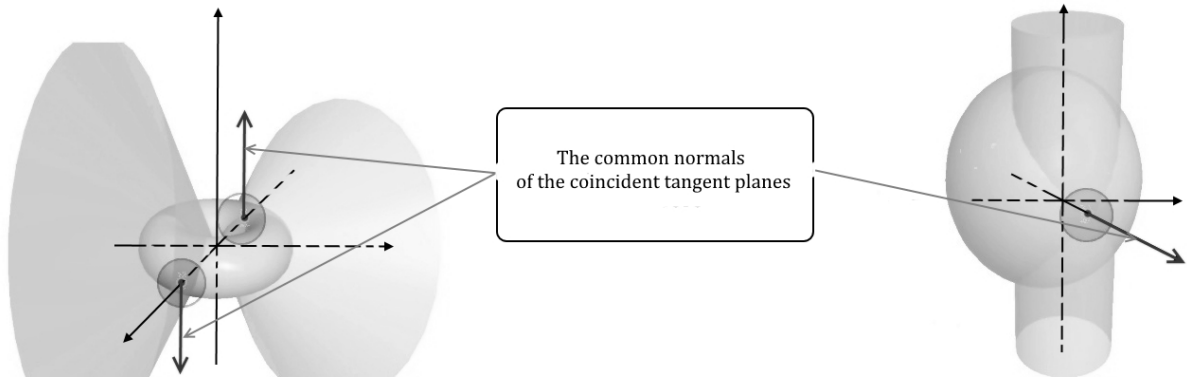


Рис. 10: Параллельность нормалей осей координат  
 Fig. 10: The normals parallel to the coordinate axes

В этом случае какая-то из первых трех строк матрицы (32) становится нулевой. Также  $\text{rank} A_f < 4$  в случае, когда  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  – график явной функции, а  $\mathbf{s}(a, b) = (a, b, 0)$  – координатная плоскость  $z = 0$ . В этом случае матрица  $A_f$  примет вид

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & 0 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Очевидно, однако, что  $\text{rank} A_f > 0$ , поскольку в противном случае  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} = 0$ , что невозможно в силу гладкости поверхностей. Отсюда следует, что псевдообратная матрица  $A_f^+$  существует. По своей структуре матрица (32) проще

матрицы  $H(f)$ , поэтому при компьютерной реализации алгоритма поиска особой точки кривой пересечения ее использование более предпочтительно.

К недостатком первого и второго способа можно отнести тот факт, что они не являются универсальными. Третий способ поиска глобального минимума функции (18) основан на комбинировании методов покоординатного спуска и оврагов. Этот способ вполне можно считать универсальным, поскольку он применим к любым гладким поверхностям.

Будем предполагать, что  $rankH(f) > 0$ , в противном случае для решения задачи минимизации рационально применить второй способ, описанный выше. В силу последнего допущения, функция  $f$ , определенная в формуле (18), в окрестности глобального минимума раскладывается в ряд Тейлора следующим образом:

$$f(u, v, a, b) = f(\mathbf{p}_m) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \Delta u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \Delta v^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \Delta a^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \Delta b^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \Delta a \Delta b + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial v} \Delta a \Delta v + \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial v} \Delta b \Delta v + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial u} \Delta a \Delta u + \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial u} \Delta b \Delta u + \dots, \quad (34)$$

где  $\mathbf{p}_m(u_m, v_m, a_m, b_m)$  – точка глобального минимума. Коэффициенты ряда Тейлора (34) при вторых степенях переменных есть в точности элементы матрицы  $H(f)$ , которая в окрестности точки  $\mathbf{p}_m$  является положительно определенной ( $\mathbf{p}_m$  – точка минимума). Пользуясь положительной определенностью матрицы  $H(f)$ , пренебрегая членами порядка  $\geq 3$  и учитывая, что  $rankH(f) > 0$ , можно сделать вывод, что поверхности уровня функции  $f$  в окрестности точки  $\mathbf{p}_m$  есть трехмерные эллипсоиды. Поверхности уровня определяют рельеф функции в окрестности точки  $\mathbf{p}_m$ . Рельеф является овражным, если эллипсоиды сильно вытянуты вдоль какой-то полуоси. Поскольку  $rankH(f) > 0$  матрицу  $H(f)$  можно перевести в диагональную матрицу  $\Lambda$ , составленную из собственных чисел матрицы  $H(f)$ . Тогда в базисе, составленном из собственных векторов матрицы  $H(f)$ , разложение (34) примет вид

$$f(u', v', a', b') = f(\mathbf{p}'_m) + \frac{\partial^2 f}{\partial u'^2} \Delta u'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} \Delta v'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a'^2} \Delta a'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial b'^2} \Delta b'^2 + \dots, \quad (35)$$

где  $u', v', a', b'$  – координаты точек в новом базисе, а  $\mathbf{p}'_m$  – точка глобального минимума. Разложение (35) задает канонические представления эллипсоидов. При этом, если  $rankH(f) < 4$ , как минимум один из коэффициентов разложения (35) равен нулю и, тем самым, эллипсоиды вырождаются, определяя овражный рельеф вблизи точки глобального минимума. В связи с этим в случае, когда  $0 < rankH(f) \leq 4$ , для минимизации функции  $f$  можно использовать метод "оврагов".

Суть метода заключается в следующем. Выбирается точка  $\mathbf{p}_0(u_0, v_0, a_0, b_0)$ , достаточно близкая к глобальному минимуму (например точка барицентра (см. вторую часть статьи)). Из нее производится покоординатный спуск. То есть решается задача одномерной минимизации функции  $f(\mathbf{p}(t)) = f(u(t), v_0, a_0, b_0)$  с помощью метода Ньютона. Пусть  $t_0$  – найденное решение. Далее решается задача, аналогичная предыдущей, но для второй координаты, а именно,  $f(\mathbf{p}(t)) = f(u(t_0), v(t), a_0, b_0)$ . После поочередного прохождения всех координат точка  $\mathbf{p}_0$  имеет координаты  $(u(t_0), v(t_1), a(t_2), b(t_3))$  и расположена на дне оврага. Следует заметить, что если поверхности уровня ориентированы по осям координат, то покоординатный спуск



за четыре шага дает достаточно "хорошее" приближение к точке глобального минимума.

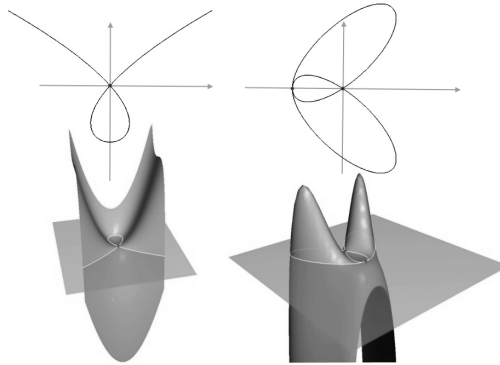


Рис. 11: Кривые уровня ориентированы по осям координат  
 Fig. 11: The level curves are oriented along the coordinate axes

Однако заранее неизвестна ориентация эллипсоидов, поэтому выполняется еще один покоординатный спуск из точки  $\mathbf{p}_1(u_1, v_1, a_1, b_1)$ . В качестве точки  $\mathbf{p}_1$  можно взять конец одной из ветвей кривой пересечения вблизи особой точки (см. вторую часть статьи). Наконец, для того чтобы продвинуться по дну оврага к точке глобального минимума, решается задача одномерной минимизации для функции

$$f(\mathbf{p}_1 \pm (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)h) \quad (36)$$

как функции от параметра  $h$  с помощью метода Ньютона. В формуле (36) ставится знак плюс, если  $f(\mathbf{p}_1) < f(\mathbf{p}_0)$ , и минус в противном случае.

Два покоординатных спуска из точек  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_1$  вместе с минимизацией функции (36) составляют один цикл работы алгоритма. Приближение определяется как достаточно "хорошее", если число циклов  $\geq c$ , где  $c$  – некоторая константа (например  $c = 20$ ) или  $|f(\mathbf{p}_1) - f(\mathbf{p}_0)| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – также некоторая константа (например  $\varepsilon = 10^{-6}$ ).

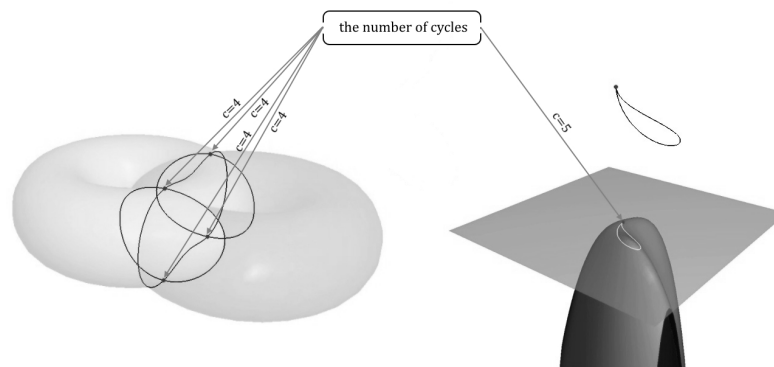


Рис. 12: Особые точки кривых как результаты работы циклов длины 4 и 5  
 Fig. 12: Singular points of curves as the results of operation of cycles of lengths 4 and 5

## Список литературы / References

- [1] Голованов Н. Н., *Геометрическое моделирование*, Издательство физико-математической литературы, М., 2002, 472 с.; English transl.: Golovanov N. N., *Geometric modeling*, Create Space Independent Publishing Platform, 2014, 348 pp.
- [2] Шенен П. и др., *Математика и САПР*, в 2-х томах, Мир, М., 1988; [Shenen P. et al, *Matematika i SAPR*, in 2 vol., Mir, M., 1988, (in Russian).]
- [3] Фокс А., Прайт М., *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве*, Мир, М., 1982, 304 с.; in English: Faux I. D., Pratt M. J., *Computational geometry for design and manufacture*, Ellis Horwood Ltd., 1979.
- [4] Hopcroft J., Kannan R., *Computer Science Theory for the Information Age*, Springer, 2012.
- [5] Golub J., Reinsch C., "Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions", *Numerische Mathematik*, **14**:5 (1970), 403–420.
- [6] Butterfield K., *Ph. D. Thesis*, Brunel University Uxbridge, 1978.
- [7] Калиткин Н. Н., *Численные методы*, учебное пособие, БХВ-Петербург, 2011, 592 с.; [Kalitkin N. N., *Chislennyye metody*, uchebnoye posobiye, BKHV-Peterburg, 2011, 592 pp., (in Russian).]
- [8] Вермель А. В., Вермель В. Д., Калитин Е. И., "Пересечение поверхностей агрегатов в аэродинамической компоновке самолета", *Ученые записки ЦАГИ*, **XLII**:5 (2011), 92–106; [Vermel A. V., Vermel V. D., Kalitin E. I., "Intersection of airplane component surfaces for design of an aerodynamic layout", *Uchenyye zapiski TsAGI*, **XLII**:5 (2011), 92–106, (in Russian).]
- [9] Bajaj C. L., Hoffmann C. M., Lynch R. E., Hopcroft J. T., "Tracing surface intersections", *Computer Aided Geometric Design*, **5** (1988), 285–307.

---

Uvarov A. D., "Singular Points of Curves", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:6 (2018), 692–710.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-692-710

**Abstract.** In this paper, we consider the key problem of geometric modeling, connected with the construction of the intersection curves of surfaces. Methods for constructing the intersection curves in complex cases are found: by touching and passing through singular points of surfaces. In the first part of the paper, the problem of determining the tangent line of two surfaces given in parametric form is considered. Several approaches to the solution of the problem are analyzed. The advantages and disadvantages of these approaches are revealed. The iterative algorithms for finding a point on the line of tangency are described. The second part of the paper is devoted to methods for overcoming the difficulties encountered in solving a problem for singular points of intersection curves, in which a regular iterative process is violated. Depending on the type of problem, the author dwells on two methods. The first of them suggests finding singular points of curves without using iterative methods, which reduces the running time of the algorithm of plotting the intersection curve. The second method, considered in the final part of the article, is a numerical method. In this part, the author introduces a function that achieves a global minimum only at singular points of the intersection curves and solves the problem of minimizing this function. The application of this method is very effective in some particular cases, which impose restrictions on the surfaces and their arrangement. In conclusion, this method is considered in the case when the function has such a relief, that in the neighborhood of the minimum point the level surfaces are strongly elongated ellipsoids. All the images given in this article are the result of the work of algorithms on methods proposed by the author. Images are built in the author's software environment.

**Keywords:** singular point, intersection, touching, matrix, gradient

**On the authors:**

Artem D. Uvarov, [orcid.org/0000-0002-0624-3877](https://orcid.org/0000-0002-0624-3877), PhD,  
K.D. Ushinsky Yaroslavl State Pedagogical University,  
108 Respublikanskaya str., Yaroslavl 150000, Russia, e-mail: [artiom\\_uvarov@inbox.ru](mailto:artiom_uvarov@inbox.ru)