

УДК 517.926

О числе сосуществующих автоволновых решений цепочки диффузионно связанных осцилляторов нейронного типа¹

Богомолов Ю. В.* , Глызин С. Д.*,**, Колесов А. Ю.*

* Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

** НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9

e-mail: mathematics@inbox.ru, glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

получена 20 августа 2014

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, релаксационный цикл, автоволны, устойчивость, буферность, bursting-эффект

Рассматривается математическая модель нейронной ассоциации, представляющая собой цепочку диффузионно связанных осцилляторов. Каждый из осцилляторов, моделирующих отдельный нейрон, задан некоторым сингулярно возмущенным скалярным нелинейным дифференциально-разностным уравнением с двумя запаздываниями. Сингулярность осцилляторов позволяет перейти к предельной системе без малых параметров, но с импульсным внешним воздействием. Утверждение о соответствии между полученной системой с импульсным воздействием и исходной цепочкой осцилляторов дает возможность показать, что в этой цепочке при согласованном увеличении числа звеньев цепочки и уменьшении коэффициента диффузии происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений (реализуется феномен буферности). Выполнен численный эксперимент, позволяющий определить, как меняется число устойчивых режимов системы при изменении параметра связи.

1. Введение

Автоколебательные процессы, происходящие в нейронных системах, обладают рядом характерных особенностей, среди которых выделим bursting-эффект и феномен буферности. Первая из них заключается в чередовании пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с периодами рефрактерности, в которых изменения мембранных потенциалов невелики. В свою очередь феномен буферности реализуется в случае, когда в некоторой динамической системе

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

при подходящем выборе параметров реализуется любое наперед заданное конечное число сосуществующих аттракторов.

Исследованию "bursting behavior" посвящена достаточно обширная литература (см., например, работы [1–5] и имеющуюся в них библиографию). Как правило, для математического моделирования этого эффекта привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными, в которых при определенных условиях могут существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). Однако возможен и другой подход к решению данной проблемы, связанный с учетом запаздываний по времени.

В случае феномена буферности ситуация несколько иная. Несмотря на то, что данное явление представляет собой один из фундаментальных законов функционирования нелинейных систем из различных областей естествознания [6–8], оно до сих пор не получило должного освещения в нейродинамической литературе. В то же время достаточно ясно, что буферность весьма актуальна именно для нейронной тематики. Действительно, она отражает конкурентное взаимодействие различных концепций и идей в неокортексе человеческого мозга, а также может быть использована для объяснения механизма работы ассоциативной памяти.

Итак, возникает проблема одновременной реализуемости описанных феноменов в рамках некой единой математической модели. Одна из таких моделей предлагается в настоящей статье.

Следуя методике из книги [9], основанной на общей идее из работы [10], будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона описывается дифференциально-разностным уравнением (см. также [11–13])

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \quad (1)$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$ предполагается большим, а запаздывание h фиксировано и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (1) функций $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad uf'(u) = O(1/u), \quad u^2 f''(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u), \quad ug'(u) = O(1/u), \quad u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_0, b_0 – положительные константы.

Как показывается ниже, по любому фиксированному натуральному n можно так подобрать фигурирующие в (1), (2) параметры h, a_0, b_0 , что при всех достаточно больших λ уравнение (1) будет иметь экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Сама же функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков продолжительности $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, а все остальное время она асимптотически мала. Иными словами, при указанном выборе параметров $u_*(t, \lambda)$ является bursting-циклом.

Наглядное представление о релаксационных свойствах bursting-цикла $u_*(t, \lambda)$ дает его график на плоскости (t, u) (см. рис. 1), построенный для случая $h = 1/26$, $\lambda = 130$ и для функций $f(u) = 2(1-u)/(2+u)$, $g(u) = 4u/(1+u)$.

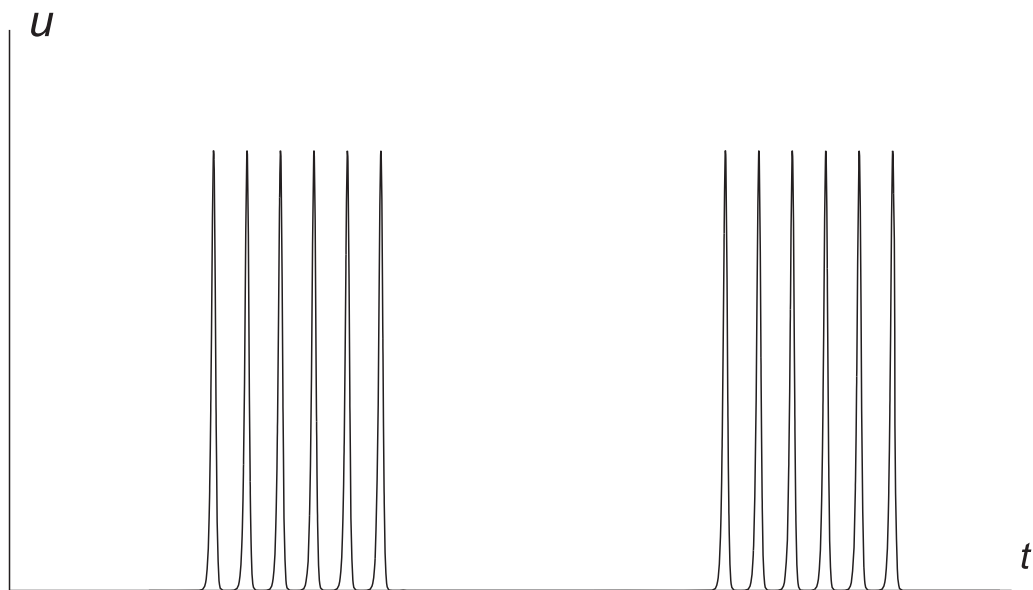


Рис. 1.

Как уже было сказано выше, уравнение (1) служит математической моделью изолированного нейрона. Предположим теперь, что рассматривается одномерная цепочка из m , $m \geq 2$, таких нейронов, каждый из которых взаимодействует с двумя ближайшими своими соседями. В этом случае вместо (1) имеем дело с системой вида

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))]u_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$, а параметр $d > 0$ порядка единицы характеризует глубину связи между нейронами.

Система (3) допускает, очевидно, так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (4)$$

где $u_*(t, \lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения (1). Наш основной результат состоит в том, что при подходящем уменьшении d и при всех $\lambda \gg 1$ у этой системы наряду с устойчивым циклом (4) существует не менее m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений. Последние будем называть дискретными автоволновыми процессами или просто автоволнами.

Забегая вперед, отметим, что система (3) и является интересующей нас математической моделью, в которой одновременно наблюдаются феномен буферности и bursting-эффект. Действительно, как показывается ниже, все ее устойчивые автоволны, обнаруженные аналитическими и численными методами, представляют собой bursting-циклы. Это означает, напомним, что на отрезке времени длины периода их компоненты u_j , $j = 1, \dots, m$ демонстрируют то же самое асимптотическое поведение, что и функция $u_*(t, \lambda)$, а именно, допускают ровно n асимптотически высоких всплесков, где натуральное n зависит от выбора параметров a_0 , b_0 , h и в принципе может быть любым.

Наряду с асимптотическими свойствами устойчивых режимов системы (3), которые проявляются в случае, если параметры подходящим образом велики или малы, большой интерес представляет численный анализ задачи. Численный эксперимент естественно проводить, учитывая асимптотические свойства (3), при этом важно определить границы применимости соответствующих асимптотических формул и выяснить, какие фазовые перестройки происходят с системой при изменении соответствующего бифуркационного параметра.

2. Устойчивые режимы отдельного релаксационного осциллятора

В данном разделе дадим сводку результатов из [11,12] по вопросу о существовании и устойчивости у уравнения (1) релаксационного bursting-цикла. В связи с этим выполним в (1) замену $u = \exp(\lambda x)$, приводящую интересующее нас уравнение к более удобному для последующего анализа виду

$$\dot{x} = F(x(t-h), \varepsilon) - G(x(t-1), \varepsilon), \quad (5)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, из свойств (2) функций $f(u)$, $g(u)$ вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x), \quad R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a_0 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ b_0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Равенства (6), в свою очередь, позволяют перейти от (5) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздываниями

$$\dot{x} = R(x(t-h)) - H(x(t-1)). \quad (7)$$

Как и в работах [11,12,14–17], понятие решения уравнения (7) определим конструктивно. С этой целью фиксируем произвольно натуральное n и предположим, что параметры h , a_0 , b_0 из (1), (2) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)} < h < \frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+2+1/a_0}, \quad (8)$$

$$b_0 > 1 + a_0. \quad (9)$$

Фиксируем затем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху на этот параметр будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \quad (10)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (7) с произвольной начальной функцией (10).

При интегрировании уравнения (7) следует учесть, что его правая часть представляет собой кусочно-постоянную функцию и меняется лишь тогда, когда $x(t-h)$ или $x(t-1)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 + h$ одновременно $\varphi(t-h) < 0$ и $\varphi(t-1) < 0$. Поэтому на указанном промежутке времени согласно (7), (10) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0$, а значит, задается равенством

$$x_\varphi(t) = t. \quad (11)$$

Ясно также, что формула (11) сохраняется до тех пор, пока $x_\varphi(t-h) < 0$ и $x_\varphi(t-1) < 0$. Тем самым, она заведомо справедлива на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t < 1$ в силу уже проделанных построений имеем $x_\varphi(t-1) < 0$ и, следовательно, $H(x_\varphi(t-1)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-h)). \quad (12)$$

Что же касается уравнения (12), то его свойства были изучены в статье [15]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение $x(t)$ этого уравнения, такое что $x(t) < 0$ при $-h \leq t < 0$, $x(0) = 0$, при всех $t \geq 0$ совпадает с периодической функцией

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ h - a_0(t-h) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ -a_0h + t - t_0 - h & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t), \quad (13)$$

где $t_0 = h(1 + 1/a_0)$, $T_0 = h(2 + a_0 + 1/a_0)$.

Возвращаясь к исходному уравнению (7) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (14)$$

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

Привлекая формулы (13), нетрудно увидеть, что при $t \geq 0$ функция $y_0(t)$ задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b_0 - 1)t & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - b_0t_0 & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad y_0(t) = (k-1)(T_0 - b_0t_0) + \\ + y_0(t - (k-1)T_0) \quad \text{при } (k-1)T_0 \leq t \leq kT_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2. \quad (16)$$

Добавим еще, что условие (9) гарантирует выполнение свойств

$$y_0(t) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y_0(t) = -\infty. \quad (17)$$

Перейдем к рассмотрению очередного отрезка времени $1 \leq t \leq 1+h$ и заметим, что неравенства (8) обеспечивают принадлежность точки $t = 1$ интервалу

$(nT_0 + t_0 + h, (n + 1)T_0)$. Тем самым, в силу (13), (14) имеем $x_\varphi(t - h) < 0$ при $t \in [1, 1 + h]$ и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (15) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - H(x_0(t - 1)), \quad x|_{t=1} = x_0(1).$$

А отсюда заключаем, что при $1 \leq t \leq 1 + h$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(1) + y_0(t - 1). \tag{18}$$

На следующем этапе обратим внимание, что при априорном условии

$$x_\varphi(t - h) < 0 \tag{19}$$

равенство (18) сохраняется на отрезке $1 \leq t \leq 2$. Но это условие действительно выполняется, поскольку согласно (8), (13)

$$x_0(1) = x_0(1 - nT_0) = 1 - (n + 1)T_0 < 0 \tag{20}$$

и в силу (17) имеем $y_0(t - 1) < 0 \forall t \geq 1$. Таким образом, при $1 \leq t \leq 2$ соотношение (18) обретает законную силу.

При рассмотрении значений $t \geq 2$ будем предполагать, что наряду с (19) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t - 1) < 0. \tag{21}$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = 1$, $x|_{t=2} = x_0(1) + y_0(1)$, а значит, задается вытекающей из (16), (20) формулой

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad T_* = (n + 1)(T_0 + b_0t_0). \tag{22}$$

Остается добавить, что согласно (18), (22) априорные требования (19), (21) заведомо выполняются на промежутке $2 \leq t \leq T_*$, длина которого в силу неравенства $T_* - 2 > 0$ (являющегося следствием оценок (8), (9)) положительна.

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. (10)). Из проделанных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < (n + 1)T_0 - 1, \tag{23}$$

которое в дальнейшем считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_*)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ принадлежит введенному выше множеству (10), а уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0) = -\sigma_0$ имеет на промежутке $(0, T_*]$ ровно $2n + 2$ корня (данные факты необходимы для обоснования приведенной ниже теоремы 2.1). Таким образом, при всех $t \geq -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (10) совпадает с одной и той же T_* -периодической функцией $x_*(t)$, задающейся равенствами

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0(1) + y_0(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ t - T_* & \text{при } 2 \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad x_*(t + T_*) \equiv x_*(t). \tag{24}$$

График этой функции при $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, $h = 1/26$ показан на рис. 2 (при выбранных значениях параметров неравенства (8) выполняются для $n = 5$).

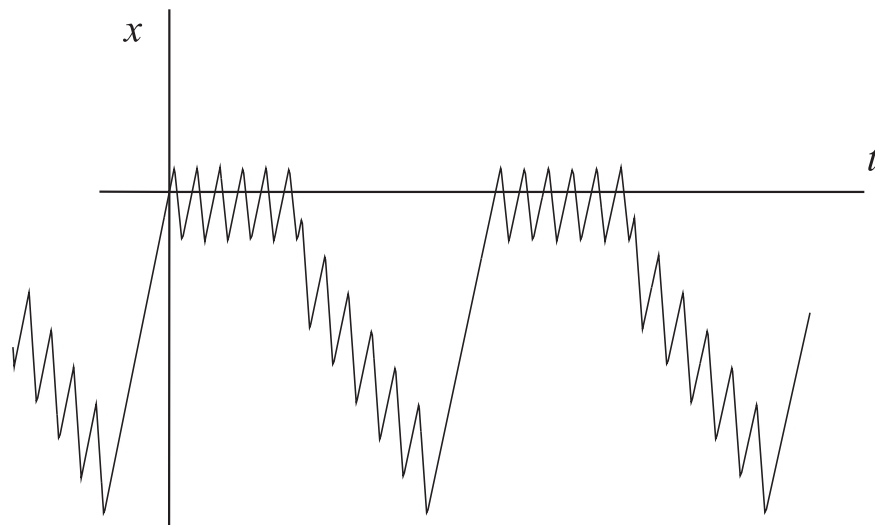


Рис. 2.

Обратимся к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (5) и (7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (5) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0.$$

Подробное доказательство сформулированной теоремы опустим, отсылая к аналогичным местам в работах [12, 14, 16]. Опишем лишь общую его схему. Для этого наряду с константой σ_0 , подчиненной условию (23), фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям $-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2$, $\varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0$. Затем для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$ уравнения (5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ с номером $2n + 2$ (в предположении, что это уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $(2n + 2)$ -х корней, занумерованных в порядке возрастания). И наконец, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (25)$$

Дальнейший план действий стандартен (см. [12, 14, 16]). Сначала мы устанавливаем равномерную по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$, $t \in [-\sigma_0, T_* - \sigma_0/2]$ асимптотическую близость $x_\varphi(t, \varepsilon)$ к функции $x_*(t)$, из которой будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (25) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проводим анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и убеждаемся, что Π_ε является сжимающим.

В дополнение к теореме 2.1 отметим, что релаксационный цикл

$$u_*(t, \lambda) = \exp(x_*(t, \varepsilon)/\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (26)$$

исходного уравнения (1) обладает требуемыми асимптотическими характеристиками, т.е. является bursting-циклом. Действительно, для его периода $T_*(\lambda)$ справедливо предельное равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_*$. Кроме того, на отрезке времени $0 \leq t \leq T_*(\lambda)$ цикл (26) допускает $n + 1$ подряд идущих асимптотически высоких (порядка $\exp(\lambda h)$) всплесков. Этим всплескам соответствуют интервалы $kT_0 < t < t_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots, n$ положительности функции (24). Если же t фиксировано и принадлежит множеству $[0, T_*) \setminus \bigcup_{k=0}^n [kT_0, t_0 + kT_0]$, то в указанный момент времени функция $u_*(t, \lambda)$ имеет порядок $\exp(-\lambda q)$, $q = \text{const} > 0$.

3. Автоволны в цепочке связанных осцилляторов

Обратимся теперь к системе (3), считая, что параметры a_0, b_0, h по-прежнему удовлетворяют условиям (8), (9). Ее анализ будем проводить в новых переменных x, y_1, \dots, y_{m-1} , где

$$u_1 = \exp(x/\varepsilon), \quad u_j = \exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = 2, \dots, m, \quad \varepsilon = 1/\lambda \ll 1. \quad (27)$$

Подставляя, далее, соотношения (27) в (3), приходим к релаксационной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d (\exp y_1 - 1) + F(x(t-h), \varepsilon) - G(x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] + \\ &+ F_j(x(t-h), y_1(t-h), \dots, y_j(t-h), \varepsilon) - \\ &- G_j(x(t-1), y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \\ & \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (28)$$

где $y_0 = y_m = 0$, функции F, G те же самые, что и в (5), а функции F_j, G_j имеют вид

$$\begin{aligned} F_j(x, y_1, \dots, y_j) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) - f\left(\exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) \right], \\ G_j(x, y_1, \dots, y_j) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, фиксируем постоянную $\sigma_0 > 0$, подчиненную условию (23). Далее, на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_* - \sigma_0$, где T_* – величина из (22), обозначим через $y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z)$, $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, компоненты решения импульсной системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ & \quad j = 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
y_j(h + kT_0 + 0) &= y_j(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)y_j(kT_0), \\
y_j(t_0 + h + kT_0 + 0) &= y_j(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\
y_j(1 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + kT_0 - 0) - b_0y_j(kT_0), \\
y_j(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= y_j(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)y_j(t_0 + kT_0), \\
k &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m - 1,
\end{aligned} \tag{30}$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \tag{31}$$

И наконец, рассмотрим отображение

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_*-\sigma_0}, \tag{32}$$

действующее из \mathbb{R}^{m-1} в \mathbb{R}^{m-1} . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (32), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (28) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл $(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon))$, $x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Кроме того, справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) &= T_*, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_*(t)| = O(\varepsilon), \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| &= 0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |y_j(t, \varepsilon)| \leq M, \quad j = 1, \dots, m - 1,
\end{aligned} \tag{33}$$

где $x_*(t)$ – функция (24), $M = \text{const} > 0$, а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T(\varepsilon) - \sigma_0]$ с выброшенными интервалами

$$\begin{aligned}
&(h + kT_0 - \varepsilon^\delta, h + kT_0 + \varepsilon^\delta), \quad (t_0 + h + kT_0 - \varepsilon^\delta, t_0 + h + kT_0 + \varepsilon^\delta), \\
&(1 + kT_0 - \varepsilon^\delta, 1 + kT_0 + \varepsilon^\delta), \quad (1 + t_0 + kT_0 - \varepsilon^\delta, 1 + t_0 + kT_0 + \varepsilon^\delta), \quad k = 0, 1, \dots, n, \\
&\delta = \text{const} \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено в статьях [11, 16, 19].

Теорема 3.1 носит базовый характер, так как она сводит интересующую нас проблему нахождения дискретных автоволновых процессов системы (3) к поиску устойчивых неподвижных точек отображения (32). Последнее же для удобства дальнейшего анализа перепишем в инвариантной форме, не зависящей от выбора параметра σ_0 . С этой целью обозначим через $P^t(z)$, $z \in \mathbb{R}^{m-1}$, $P^0(z) = z$ оператор сдвига по траекториям системы (29). Нетрудно убедиться, что после замены $P^{\sigma_0}(z) \rightarrow z$ интересующее нас отображение принимает требуемый инвариантный вид

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_*}, \tag{34}$$

где $(y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))$ – решение импульсной системы (29), (30) с аналогичным (31) начальным условием (z_1, \dots, z_{m-1}) , заданным при $t = 0$.

Исследование аттракторов отображения (34) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

Теорема 3.2. *Найдется такое достаточно малое $d_0 > 0$, что при всех $d \in (0, d_0]$ нулевая неподвижная точка отображения (34) экспоненциально устойчива.*

Доказательство данной теоремы можно найти в статье [11].

В системе (28) неподвижной точке $z = 0$ отвечает цикл с компонентами $x = x_*(t, \varepsilon)$, $y_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, m - 1$, где $x_*(t, \varepsilon)$ – периодическое решение уравнения (5), доставляемое теоремой 2.1. В системе же (3) ей соответствует однородный цикл (4), где $u_*(t, \lambda)$ – функция (26). Теоремы 3.1, 3.2 приводят к выводу, что этот цикл является экспоненциально орбитально устойчивым при любом фиксированном значении $d \in (0, d_0]$ и при всех достаточно больших λ .

Как и выше, отыскание ненулевых устойчивых неподвижных точек отображения (34) будем проводить в предположении о малости d . В этом случае удастся асимптотически проинтегрировать систему (29), (30) при $0 \leq t \leq T_*$ и при

$$(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{(a_0, b_0) : a_0 > 1, a_0 + 1 < b_0 < 2a_0\}, \quad \mathcal{U}_2 = \{(a_0, b_0) : a_0 > 1, b_0 > 2a_0\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{(a_0, b_0) : 0 < a_0 < 1, b_0 > a_0 + 1\}. \end{aligned}$$

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.3. *Пусть параметры h , a_0 , b_0 фиксированы и удовлетворяют условиям (8), (35). Тогда при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (34) имеет t экспоненциально устойчивых неподвижных точек*

$$O_{r_0}(d) = (z_{1,r_0}(d), z_{2,r_0}(d), \dots, z_{m-1,r_0}(d)), \quad r_0 = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (36)$$

компоненты которых при $d \rightarrow 0$ в случае $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_1$ допускают асимптотику

$$\begin{aligned} z_{j,r_0} &= -\frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = 1, \dots, r_0; \\ z_{j,r_0} &= \frac{b_0 - a_0}{a_0} \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (37)$$

а в случае $(a_0, b_0) \in \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$ – асимптотику

$$z_{j,r_0} = -\ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = 1, \dots, r_0; \quad z_{j,r_0} = \ln \frac{1}{d} + O(1), \quad j = r_0 + 1, \dots, m - 1. \quad (38)$$

Доказательство этой теоремы выполняется аналогично приведенным в статьях [11, 18, 19] утверждениям.

Теорема 3.1 о соответствии и асимптотические свойства отображения (34) (см. теоремы 3.2, 3.3) приводят к следующему утверждению.

Теорема 3.4. *Пусть параметры h , a_0 , b_0 фиксированы и удовлетворяют требованиям (8), (35). Тогда для любых достаточно малых $d_2 > d_1 > 0$ найдется такое достаточно большое $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$, что при всех $d_1 \leq d \leq d_2$, $\lambda \geq \lambda_0$ система (3) будет иметь не менее t экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов, сосуществующих с устойчивым однородным циклом (4).*

Из сформулированной теоремы следует, что при согласованном уменьшении d и увеличении параметров λ , m в системе (3) наблюдается феномен буферности, а точнее, происходит неограниченное накапливание сосуществующих устойчивых циклов. Добавим еще, что все эти циклы демонстрируют bursting-эффект. Действительно, для компонент u_j , $j = 1, \dots, m$ каждого из упомянутых циклов в силу свойств (33) справедливы равномерные по $t \in [0, T(\varepsilon)]$ асимптотические представления $u_j = \exp(\lambda x_*(t) + O(1))$, $\lambda \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$, где $x_*(t)$ – функция (24). А отсюда следует, что графики u_j имеют вид, подобный показанному на рис. 1, т.е. допускают $n+1$ подряд идущих асимптотически высоких всплесков. Что же касается натурального n , то оно определяется выбором параметров h , a_0 , b_0 и может быть любым.

4. Численный анализ импульсной системы

4.1. Вычисление итераций отображения $\Phi_0(z)$

В этом разделе численно проанализируем отображение $\Phi_0(z)$ при произвольных положительных значениях параметра d . В частности, выясним область применимости асимптотик из теоремы 3.1 и возможные фазовые перестройки, связанные с изменением параметра связи. В процессе численного эксперимента будем преследовать следующие три цели:

1. Выяснить, существуют ли у системы (3) другие устойчивые автоволновые режимы, отличные от задаваемых формулами (37) или (38).
2. Найти границы областей устойчивости автоволновых режимов.
3. Определить сценарии потери устойчивости неподвижных точек отображения $\Phi_0(z)$ при изменении коэффициента связи d .

Для определения наиболее эффективного способа вычисления итераций отображения $\Phi_0(z)$ заметим, что решение системы (29) на промежутках между импульсами может быть найдено по формулам

$$y_j(t) = \ln(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (39)$$

где $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j = d(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{m+1} = \xi_m, \quad (40)$$

принадлежащее инвариантному конусу $K = \{(\xi_1, \dots, \xi_m) : \xi_j > 0, j = 1, \dots, m\}$.

Свойства системы (40) хорошо известны. Во-первых, все ее решения при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к устойчивому одномерному инвариантному многообразию $\{(\xi_1, \dots, \xi_m) : \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = c, c \in \mathbb{R}\}$, движения на котором задаются уравнением $\dot{c} = 0$. Во-вторых, справедлив закон сохранения $\sum_{j=1}^m \xi_j \equiv \text{const}$. Далее, из упомянутых свойств следует, что для любого решения $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) \in K$ этой системы выполняются предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_m(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \xi_j(0) > 0. \quad (41)$$

Учитывая сказанное, рассмотрим цепь из $m = 4$ связанных осцилляторов, тогда система (40) записывается в виде

$$\dot{w} = Dw, \quad (42)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$w = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$. Собственные значения данной матрицы равны $-2 \pm \sqrt{2}$, -2 , 0 . Им соответствуют следующие собственные векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Общее решение системы (42) представляет собой следующую линейную комбинацию:

$$w(t) = C_1 \exp(-(2 + \sqrt{2})t)v_1 + C_2 \exp(-(2 - \sqrt{2})t)v_2 + C_3 \exp(-2t)v_3 + C_4 v_4, \quad (45)$$

с помощью которой и формул (39) вычисляется решение системы (29) на промежутках от импульса до импульса.

Опишем алгоритм вычисления значения $\Phi_0(z)$ для заданного аргумента z :

1. Разбиваем промежуток $[0, T_*]$ на интервалы точками kT_0 , $h + kT_0$, $t_0 + kT_0$, $t_0 + h + kT_0$, $1 + kT_0$, $1 + t_0 + kT_0$ ($k = 0, 1, \dots, n$).
2. Начальное значение при $t = -0$ фиксируем равным z .
3. На каждом из полученных интервалов строим решение по формулам (39), (45), находя свободные константы по начальному значению в левой границе соответствующего интервала и выбирая в качестве нулевого значения времени левую границу соответствующего интервала. Далее, вычисляем значение построенного решения в правой границе интервала и находим начальное значение для следующего интервала:
 - (а) если правой границей интервала служит точка вида kT_0 или $t_0 + kT_0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), то начальным значением на следующем интервале является значение построенного решения в границе текущего интервала; значение в точке kT_0 (или $t_0 + kT_0$) запоминается для дальнейшего пере-счета состояний по формулам (30);
 - (б) если правой границей интервала служит точка вида $h + kT_0$, $t_0 + h + kT_0$, $1 + kT_0$, $1 + t_0 + kT_0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), то начальное значение на следующем интервале строится по формулам (30) для соответствующего значения правой границы.

4. Значение $\Phi_0(z)$ вычисляется как значение решения, построенного на последнем интервале, в точке T_* (правой границе последнего интервала).

4.2. Выделение устойчивых неподвижных точек

В соответствии с теоремами 3.2, 3.3 отображение $\Phi_0(z)$ при достаточно малых d имеет нулевую неподвижную точку и не менее m ненулевых неподвижных точек. Для численного нахождения всех устойчивых неподвижных точек $\Phi_0(z)$ была проведена серия вычислительных экспериментов по следующему плану:

1. Формировалась случайная (псевдослучайная) выборка из M начальных значений отображения в области, содержащей асимптотические оценки неподвижных точек, полученные в теореме 3.3.
2. Для каждого из начальных значений z_i^0 рассматривался его образ под действием q итераций отображения (34): $z_i^q = \Phi_0^q(z_i^0)$, где $\Phi_0^0(z) = z$, $\Phi_0^j(z) = \Phi_0(\Phi_0^{j-1}(z))$ при $j \in \mathbb{N}$. Численное моделирование отображения проводилось по алгоритму, описанному в разделе 4.1.
3. Множество значений z_i^q разбивалось на кластеры, предположительно соответствующие неподвижным точкам отображения (так как основной задачей данного эксперимента был поиск устойчивых неподвижных точек, то полагалось, что начальные значения попадают в область притяжения одной из устойчивых неподвижных точек отображения (34), а в случае их экспоненциальной устойчивости образы z_i^q выбранных начальных значений будут образовывать соответствующие кластеры).
4. Из каждого выявленного кластера выбиралась одна точка, для которой проводился численный анализ сходимости последовательности итераций отображения (34) с выбранной начальной точкой z_i^q . Для этого рассматривалась последовательность z_i^{q+s} ($s \in \mathbb{N}$), в качестве критерия сходимости к неподвижной точке рассматривалось условие $|z_i^{q+s} - z_i^{q+s+r}| < \varepsilon_0$ при всех $1 \leq r \leq s$ для заданного $\varepsilon_0 \ll 1$ и выбранных фиксированных параметров (число итераций) r и s .

Серия вычислительных экспериментов проводилась для различных значений параметров a_0 и b_0 системы (29) (для различных классов параметров, удовлетворяющих (8), (35)), при фиксированном $\lambda = 130$. Параметры n и h выбирались в зависимости от остальных параметров системы для обеспечения существования устойчивого bursting-режима составляющих цепь осцилляторов (например, $n = 5$, $h = 1/26$ при $a_0 = 2$, $b_0 = 4.2$). Значения коэффициента диффузии d выбирались из отрезка $[0.05; 1.0]$. Параметры итерационного процесса для набора начальных состояний: $M \in [10^2; 10^4]$, $q \in [1; 20]$, $\max(s) \in [10; 300]$, $S = 10$, $\varepsilon_0 = 10^{-5}$. Отметим важную для численного анализа особенность отображения Φ_0 — уже первая итерация облака начальных точек фазового пространства оказывается в окрестности некоторого многообразия меньшей размерности (см. рис. 3 с облаком из $2 \cdot 10^5$ точек), на рис. 4 и рис. 5 представлен вид данного облака после десяти и двадцати итераций отображения Φ_0 соответственно. Отметим, что на рис. 5 точки облака изображены для наглядности крупнее, чем на предыдущих рисунках.

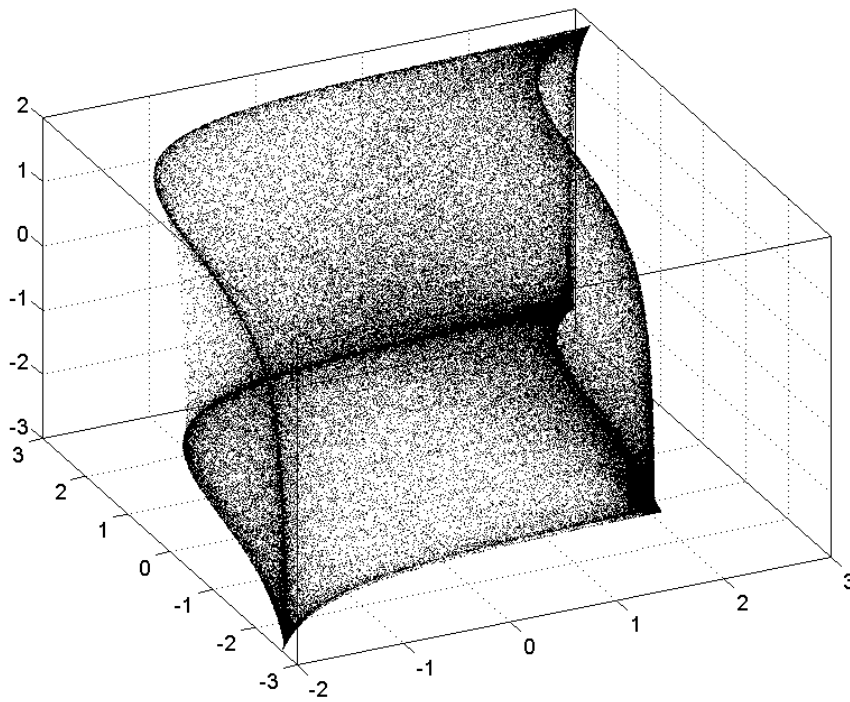


Рис. 3.

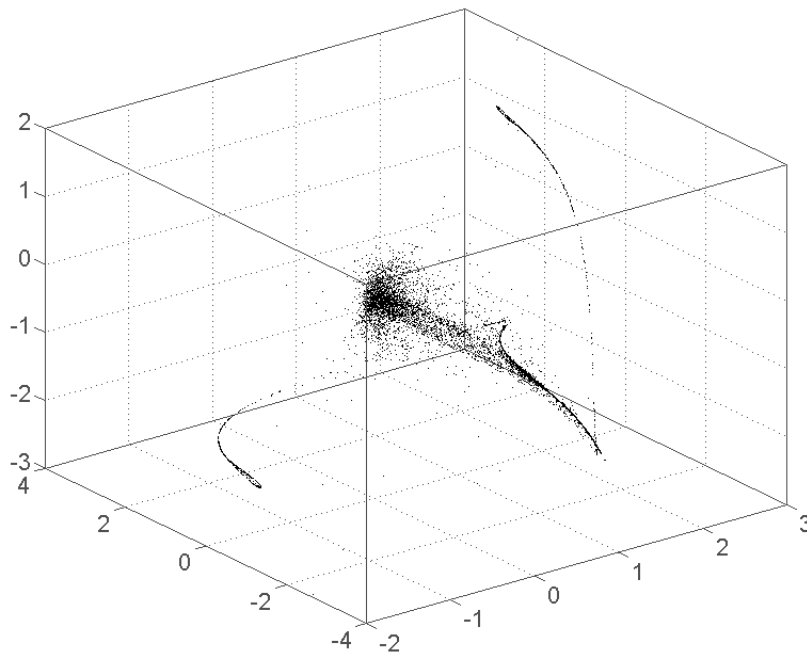


Рис. 4.

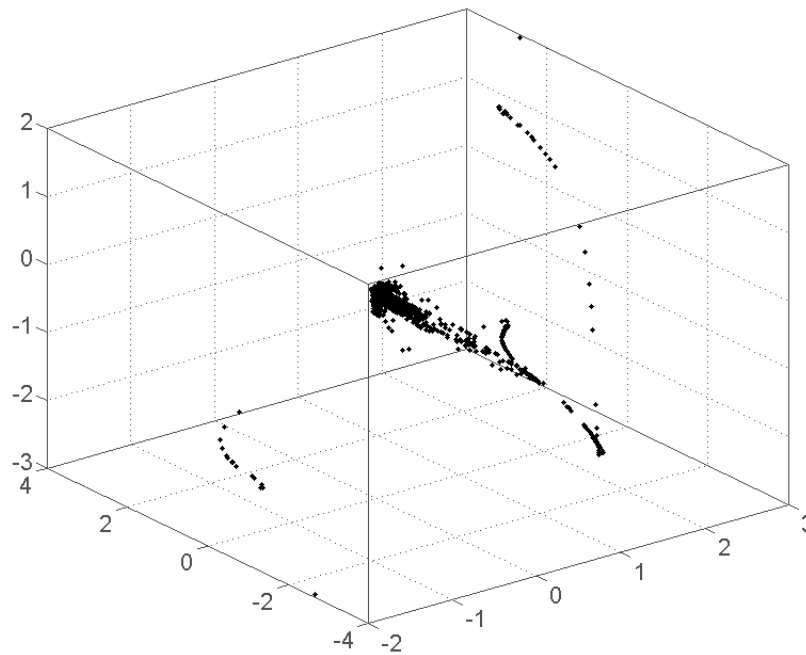


Рис. 5.

Опишем некоторые результаты численных экспериментов для цепочки из 4 нейронов.

1. При малых значениях коэффициента диффузии (для описанных выше параметров: $d < 0.31$) численно подтверждено наличие устойчивых состояний равновесия отображения Φ_0 , описанных в теореме 3.3: нулевое состояние, соответствующее синхронному режиму динамики цепи нейронов (29), а также четыре состояния равновесия с описанной асимптотикой, разбивающиеся на пары симметричных (состояния $z^1 = (z_1^1, \dots, z_{m-1}^1)$ и $z^2 = (z_1^2, \dots, z_{m-1}^2)$, будем называть симметричными, если $z_i^2 = -z_{m-i}^1$, $i = 1, \dots, m-1$).
2. Дополнительно при тех же значениях коэффициента d выявлено еще одно устойчивое самосимметричное состояние равновесия отображения Φ_0 вида $(c, 0, -c)$, где $c > 0$.
3. Для значений $0.31 < d < 0.448$ количество состояний равновесия сократилось на два: остается устойчивое нулевое состояние равновесия, два симметричных состояния равновесия и одно самосимметричное.
4. Для значений $0.448 < d < 0.565$ остается устойчивое нулевое состояние равновесия и два симметричных состояния равновесия (из пункта 1).
5. При коэффициенте диффузии $d > 0.565$ отображение Φ_0 имеет только нулевое устойчивое состояние равновесия.

Среди полученных результатов особо отметим нахождение нового устойчивого состояния равновесия отображения Φ_0 , что соответствует новому устойчивому режиму в динамике системы (29) и исходной системы (3).

4.3. Области устойчивости и сценарии потери устойчивости

Наличие различного количества неподвижных точек отображения Φ_0 для рассмотренных в предыдущем разделе диапазонов значений коэффициента диффузии позволяет поставить задачу изучения расположения данных точек при изменении параметра d , устойчивости данных точек, а также особенностей потери их устойчивости, что может интерпретироваться как разрушение соответствующих колебательных режимов в нейронной сети. Для численного анализа поставленной задачи была выполнена серия вычислительных экспериментов в соответствии со следующим порядком действий.

1. Выделение набора неподвижных точек для фиксированного значения коэффициента диффузии d_1 (используется описанный выше алгоритм): $Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_K^0$.
2. Последовательно рассматриваются значения коэффициента d из диапазона от d_1 до некоторого заданного d_2 с фиксированным шагом h_d . При каждом таком значении параметра d для каждой текущей неподвижной точки Z_k^i ($k = 1, \dots, K$) рассматривается последовательность из M итераций отображения Φ_0 . Таким образом, для последовательности значений коэффициента диффузии d^i ($d^0 = d_1, d^{i+1} = d^i + h_d$) рассматриваются последовательности точек Z_k^i (где $k = 1, \dots, K$; при этом $Z_k^{i+1} = \Phi^M(Z_k^{i+1})$).
3. Для каждой последовательности Z_k^i условие $|Z_k^{i+1} - Z_k^i| \leq \varepsilon_1$ для некоторого i интерпретируется как сохранение устойчивости неподвижной точки при изменении $d = d^i \rightarrow d^{i+1}$ (полагается, что в случае сохранения устойчивости стационарная точка для предыдущего рассмотренного значения $d = d^i$ попадает в область притяжения некоторой стационарной точки для текущего $d = d^{i+1}$). Соответственно, выполнение условия $|Z_k^{i+1} - Z_k^i| > \varepsilon_1$ расценивается как потеря устойчивости неподвижной точки (в этом случае представляет интерес дальнейшее поведение последовательности Z_k^i).

Вычислительные эксперименты по изучению расположения устойчивых неподвижных точек отображения Φ_0 и потери их устойчивости при изменении коэффициента диффузии проводились при тех же параметрах, что и в ходе поиска неподвижных точек. Параметр h_d выбирался в промежутке $[10^{-5}; 10^{-2}]$, точность при оценке устойчивости неподвижной точки при пересчете коэффициента диффузии: $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, количество итераций для сходимости к новой неподвижной точке: $K \in [10; 100]$.

Проведенные по описанному алгоритму вычислительные эксперименты для нейронной сети (цепи) на 4 нейронах и, соответственно, 3 рассогласованиях между ними дали следующие основные результаты:

1. Для значений коэффициента диффузии из интервала $d \in (0.1; 0.31)$ отображение Φ_0 имеет 6 устойчивых неподвижных точек: нулевую точку (соответствует

синхронному режиму), самосимметричную (соответствует синхронной динамике средних нейронов), пару симметричных точек, соответствующих рассогласованиям одного знака при переходе от нейрона к нейрону, а также еще одну пару симметричных точек, соответствующих рассогласованиям разных знаков. При d близких к $d \approx 0.309$ последняя пара неподвижных точек теряет устойчивость, при этом данные неподвижные точки попадают в область притяжения самосимметричной неподвижной точки отображения.

2. В ходе дальнейшего увеличения коэффициента диффузии при $d \approx 0.448$ теряет устойчивость самосимметричная неподвижная точка, за счет чего расширяется область притяжения устойчивой нулевой неподвижной точки.
3. При $d \approx 0.565$ теряет устойчивость оставшаяся пара неподвижных точек (соответствующая рассогласованиям одного знака), точки в окрестностях данных неподвижных точек оказываются в области притяжения нулевой неподвижной точки, которая остается единственным устойчивым состоянием равновесия.

Таким образом, с ростом коэффициента диффузии при переходе через отдельные критические точки происходит разрушение устойчивых периодических режимов импульсной активности и качественная перестройка динамики рассматриваемой нейронной цепи. Тем самым удалось установить, что в одномерной цепочке диффузионно связанных осцилляторов одновременно наблюдается bursting-эффект и явление буферности. А именно, при согласованном увеличении числа звеньев цепочки и уменьшении коэффициента диффузии происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений с наперед заданным за счет подбора параметров числом всплесков на периоде.

Список литературы

1. *Chay T.R., Rinzel J.* Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model // *Biophys. J.* 1985. V. 47. №3. P. 357 – 366.
2. *Ermentrout G. B., Kopell N.* Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. V. 46. №2. P. 233 – 253.
3. *Izhikevich E.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2000. V. 10. №6. P. 1171 – 1266.
4. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. V. 78. №4. P. 1213 – 1265.
5. *Coombes S., Bressloff P.C.* Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system. (World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005)
6. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М. : Физматлит, 2004. 408 с. [*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnye toru nelineynykh volnovykh uravneniy. М. : Fizmatlit, 2004. 408 s. (in Russian).]
7. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 432 с. [*Mishchenko E. F.,*

Sadovnichii V. A., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Avtovolnovyye protsessy v nelineynykh sredakh s diffuziyey. M.: Fizmatlit, 2005. 432 s. (in Russian).]

8. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Феномен буферности в нейродинамике // ДАН. 2012. Т. 443. №2. С. 168 – 172. [English transl.: *Glyzin S., Kolesov A., Rozov N.* Buffer phenomenon in neurodynamics // Doklady Mathematics. 2012. V. 85, № 2. P. 297–300.]
9. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 288 с. [*Kashchenko S. A., Mayorov V. V.* Modeli volnovoy pamuyati. M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2009. 288 s. (in Russian).]
10. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. V. 117. P. 500 – 544.
11. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Дискретные автоволны в нейронных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858. [English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Discrete autowaves in neural systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 2, № 5. P. 702–719.]
12. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Математические заметки. 2013. Т. 93. № 5. С. 682–699. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems // Mathematical Notes. 2013. Vol. 93. No. 5. P. 676–690.]
13. *Глызин С.Д., Овсянникова Е.О.* Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 86–105. [English transl.: *Glyzin S.D., Ovsyannikova E.O.* Double Frequency Oscillations of an Impulse Neuron Equation with Two Delays // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, No. 7. P. 526–540.]
14. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // Тр. МИАН. Т. 216. М.: Наука, 1997. С. 126–153. [English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* Relay with delay and its C^1 -approximation // Dynamical systems and related topics. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1997. V. 216. P. 119–146.]
15. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, №12. С. 2099 – 2112. [English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* A modification of Hutchinson's equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. V. 50, no. 12. P. 1990–2002.]
16. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 919 – 932. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Relaxation self-oscillations in neuron systems: I // Differential Equations. 2011. V. 47, № 7. P. 927–941.]
17. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием // Изв РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. №2. С. 53 – 96. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Relaxation Self-oscillations in Hopfield Networks with Delay // Izvestiya. Mathematics. 2013. V. 77, № 2. P. 271–312.]

18. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1675 – 1692. [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems: II // Differential Equations. 2011. V. 47, № 12. P. 1697–1713.]
19. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 155 – 170. [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems: III // Differential Equations. 2012. V. 48, № 2. P. 159–175.]

On the Number of Coexisting Autowaves in the Chain of Coupled Oscillators

Bogomolov Y. V.* , Glyzin S. D.** , Kolesov A. Yu.*

* *P. G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

** *Scientific Center in Chernogolovka RAS
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia*

Keywords: difference-differential equations, relaxation cycle, autowaves, stability, buffering, bursting

We consider a model of neuron complex formed by a chain of diffusion coupled oscillators. Every oscillator simulates a separate neuron and is given by a singularly perturbed nonlinear differential-difference equation with two delays. Oscillator singularity allows reduction to limit system without small parameters but with pulse external action. The statement on correspondence between the resulting system with pulse external action and the original oscillator chain gives a way to demonstrate that under consistent growth of the chain node number and decrease of diffusion coefficient we can obtain in this chain unlimited growth of its coexistent stable periodic orbits (buffer phenomenon). Numerical simulations give the actual dependence of the number of stable orbits on the diffusion parameter value.

Сведения об авторах:

Богомолов Юрий Викторович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
старший преподаватель кафедры дискретного анализа;

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;
Отдел прикладных сетевых исследований ИЦЧ РАН,
ведущий научный сотрудник;

Колесов Андрей Юрьевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений