

ISSN 1818–1015 (Print)  
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 26      3 (81)      2019

Основан в 1999 году  
Выходит 4 раза в год

*Главный редактор*

**В.А. Соколов,**

доктор физико-математических наук, профессор, Россия

*Редакционная коллегия*

**С.М. Абрамов**, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **L. Aveneau**, проф., Франция; **Т. Ваар**, д-р наук, проф., Германия; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия; **В.Н. Белых**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **R. Brooks**, проф., США; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **A. Dekhtyar**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Захаров**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Kouchnarenko**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **A. Mikhailov**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН, Россия; **N. Sidorova**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **J. Taheri**, доцент, Швеция; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **M. Trakhtenbrot**, д-р комп. наук, Израиль; **D. Turaev**, проф., Великобритания; **Ph. Schnoebelen**, проф., Франция

*Ответственный секретарь* **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

**Адрес редакции:** ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия  
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: [mais@uniyar.ac.ru](mailto:mais@uniyar.ac.ru); телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

# СОДЕРЖАНИЕ

---

*Моделирование и анализ информационных систем. Т. 26, №3. 2019*

---

## Software

- Об автоматическом анализе практической стойкости обфусцирующих преобразований  
*Борисов П. Д., Косолапов Ю. В.* 317
- Формальная верификация диаграмм троичных цифровых сигналов  
*Куцак Н. Ю., Подьмов В. В.* 332

## Computer system organization

- Динамическая модель развития пиринговой файлообменной сети  
*Кононова А. И., Гагарина Л. Г.* 351
- GRID-система на основе европейских стандартов EGI для крупномасштабных расчетов по оригинальному ускоренному методу квантовой химии  
*Аникин Н. А., Мускатин А. Ю., Кузьминский М. Б., Русаков А. И.* 360
- Новый подход к моделированию генных сетей  
*Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* 365

## Algorithms

- NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа  
*Медведева Н. С., Смирнов А. В.* 405
- Автоматизированный поиск средств ритмизации художественного текста для сравнительного анализа оригинала и перевода на материале английского и русского языков  
*Лагутина Н. С., Лагутина К. В., Бойчук Е. И., Воронцова И. А., Парамонов И. В.* 420

## Discrete mathematics in relation to computer science

- Геометрические оценки при интерполяции на  $n$ -мерном шаре  
*Невский М. В.* 441
- Сравнение диффеоморфных изображений на основе формирования персистентных гомологий  
*Чуканов С. Н.* 450

---

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 – 66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Компьютер. верстка М.С. Каряевой. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 17.09.2019. Дата выхода в свет 30.09.2019. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Усл. печ. л. 19,9. Уч.-изд. л. 8,9. Объем 156 с. Тираж 46 экз. Свободная цена. Заказ 053/019. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)  
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS  
OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 26      No 3 (81)      2019

Founded in 1999  
4 issues per year

*Editor-in-Chief*

**V. A. Sokolov,**

Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

*Editorial Board*

**S.M. Abramov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **L. Aveneau**, Prof., France; **T. Baar**, Prof., Dr. Sci., Germany; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **R. Brooks**, Prof., USA; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **J. Taheri**, Associate Prof., PhD., Sweden; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **V.A. Zakharov**, Prof., Dr. Sci., Russia

*Responsible Secretary* **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

**Editorial Office Address:** P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia  
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: [mais@uniyar.ac.ru](mailto:mais@uniyar.ac.ru)

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2019

# Contents

---

*Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 26, No 3. 2019*

---

## Software

- On the Automatic Analysis of the Practical Resistance of Obfuscating Transformations  
*Borisov P. D., Kosolapov Y. V.* 317
- Formal Verification of Three-Valued Digital Waveforms  
*Kutsak N. Yu., Podymov V. V.* 332

## Computer system organization

- Dynamic Model of Growing File-Sharing P2P Network  
*Kononova A. I., Gagarina L. G.* 351
- GRID-system Based on European EGI Standards for Large-scale Calculations  
Using the Original Accelerated Method of Quantum Chemistry  
*Anikin N. A., Muskatin A. Y., Kuzminsky M. B., Rusakov A. I.* 360
- New Approach to Gene Network Modeling  
*Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* 365

## Algorithms

- NP-completeness and One Polynomial Subclass of the Two-Step Graph Colouring Problem  
*Medvedeva N. S., Smirnov A. V.* 405
- Automated Search of Rhythm Figures in a Literary Text for Comparative Analysis  
of Originals and Translations Based on the Material of the English and Russian Languages  
*Lagutina N. S., Lagutina K. V., Boychuk E. I., Vorontsova I. A., Paramonov I. V.* 420

## Discrete mathematics in relation to computer science

- Geometric Estimates in Interpolation on an  $n$ -Dimensional Ball  
*Nevskii M. V.* 441
- The Comparison of Diffeomorphic Images Based on the Construction of Persistent Homology  
*Chukanov S. N.* 450

©Борисов П. Д., Косолапов Ю. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-317-331

УДК 517.9

## Об автоматическом анализе практической стойкости обфусцирующих преобразований

Борисов П. Д., Косолапов Ю. В.

*Поступила в редакцию 18 июля 2019*

*После доработки 9 сентября 2019*

*Принята к публикации 11 сентября 2019*

**Аннотация.** Разрабатывается способ оценки практической стойкости обфусцирующих преобразований программ, основанный на вычислении показателя похожести для исходной, обфусцированной и деобфусцированной программ. Предлагаются кандидаты для показателей похожести, в основе вычисления которых лежат такие характеристики программ, как граф потока управления, время символьного выполнения и степень покрытия при символьном выполнении. Граф потока управления рассматривается как основа для построения других кандидатов для показателей похожести программ. На его основе предлагается новый кандидат для показателя похожести, при вычислении которого находится расстояние Хэмминга между матрицами смежности графов потока управления сравниваемых программ. Строится схема оценки (анализа) стойкости обфусцирующих преобразований, в соответствии с которой для исходной, обфусцированной и деобфусцированной программ вычисляются или находятся характеристики этих программ, которые сравниваются в соответствии с выбранной моделью сравнения. Разработанная схема, в частности, подходит для сравнения программ на основе показателей похожести. В работе разрабатывается и реализуется один из ключевых блоков построенной схемы – блок получения характеристик программ, скомпилированных для архитектуры x86/x86\_64. Разработанный блок позволяет находить граф потока управления, время символьного выполнения и степень покрытия при символьном выполнении. Приводятся некоторые результаты работы построенного блока.

**Ключевые слова:** обфускация кода, стойкость, символьное исполнение

**Для цитирования:** Борисов П. Д., Косолапов Ю. В., "Об автоматическом анализе практической стойкости обфусцирующих преобразований", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 317–331.

### Об авторах:

Борисов Петр Дмитриевич, [orcid.org/0000-0002-8919-8310](https://orcid.org/0000-0002-8919-8310), аспирант

Южный Федеральный Университет,

ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090 Россия, e-mail: [borisovpetr@mail.ru](mailto:borisovpetr@mail.ru)

Косолапов Юрий Владимирович, [orcid.org/0000-0002-1491-524X](https://orcid.org/0000-0002-1491-524X), канд. техн. наук

Южный Федеральный Университет,

ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090 Россия, e-mail: [itaim@mail.ru](mailto:itaim@mail.ru)

## Введение

Обфускация (или запутывание) программного кода используется для защиты программ от анализа типа обратной инженерии (reverse engineering). Обфускация мо-

жет применяться на разных уровнях: на уровне исходного кода, на уровне промежуточного представления, а также на уровне машинных команд. При этом целью обфускации является не только затруднение понимания алгоритмов программы при статическом анализе, но и затруднение понимания при динамическом анализе. В настоящее время разработано множество способов обфускации, которые на интуитивном уровне позволяют затруднить *понимание* защищаемых алгоритмов, однако нет теоретического обоснования стойкости для этих методов. Отметим, что *понимание* (comprehension) исходного кода программного обеспечения является в настоящее время активно исследуемой областью в программной инженерии [1], а в [2] для измерения понятности кода предлагаются метрики, построенные на основе знаний из области обфускации исходного кода (пока отсутствует экспериментальное доказательство пригодности этих метрик).

При разработке обфусцирующего преобразования важной задачей представляется обоснование стойкости этого преобразования к современным методам деобфускации (к распутыванию кода) [3]. Деобфускация может выполняться как с использованием автоматических средств деобфускации (автоматическая деобфускация, без участия человека), так и с участием человека-эксперта, использующего инструментальные средства анализа. В [4] показано, что для многих способов обфускации имеются способы деобфускации, многие из которых поддаются автоматизации. Поэтому актуальными являются задачи, во-первых, разработки способа анализа стойкости обфусцирующих преобразований, примененных на любом уровне, а во-вторых, актуальна задача разработки практически устойчивых способов обфускации к автоматической деобфускации. В настоящей работе разрабатывается схема оценки практической стойкости обфусцирующих преобразований к автоматическим методам деобфускации.

Статья кроме введения и заключения содержит три раздела. Первый раздел посвящен обзору работ в области современных методов обфускации и автоматической деобфускации. Во втором разделе предлагается способ оценки стойкости обфусцирующих преобразований на основе вычисления показателя похожести программ для исходной, обфусцированной и деобфусцированной программ. Третий раздел посвящен разработке и реализации схемы оценки стойкости обфусцирующих преобразований.

## 1. Обзор работ

### 1.1. Обфускация в программной инженерии

В настоящее время исследование в области обфускации ведется по двум направлениям: 1) применение обфускации в криптографии и 2) обфускация в программной инженерии и компьютерной безопасности [5]. В области криптографии интерес к обфускации вызван тем доказанным фактом, что если возможно создать теоретически стойкий алгоритм обфускации программ, то его можно преобразовать в криптосистему с открытым ключом, в которой секретным ключом будет сам алгоритм расшифрования, а открытым ключом будет обфусцированная шифрующая программа [6]. В программной инженерии обфускация применяется для решения следующих задач: для защиты алгоритмов, представляющих собой интеллектуаль-

ную собственность [7] (в частности, для включения «водяных» знаков), для защиты критических участков кода (например, при проверке лицензий) [8], для маскировки критичных данных, например, ключа шифрования и/или расшифрования [6], для маскировки известного программного обеспечения под новое программное обеспечение (например, для обхода сигнатурного анализа антивирусных программ и систем обнаружения вторжений) [9, 10], для защиты программ от эксплуатации возможных уязвимостей (диверсификация) [11, 12], в частности, от атак типа повторного выполнения исполнимого кода [13].

Можно выделить следующие уровни обфускации программного кода: уровень исходного кода (C/C++/Java/JavaScript и т.п.), уровень промежуточного кода (бит код LLVM) и уровень целевого исполняемого кода (байт-код Java и WebAssembly, машинный код для архитектуры Intel x86/x86\_64 и т.п.). Здесь и далее под уровнем целевого исполняемого кода понимается уровень, на котором непосредственно выполняются инструкции кода; в качестве интерпретатора на таком уровне могут выступать, например, процессор архитектуры Intel x86/x86\_64 или виртуальная Java-машина. На каждом из этих уровней могут применяться как специфичные для каждого уровня способы обфускации (например, шифрование константных строк, замена имен переменных, добавление избыточных инструкций, добавление непрозрачных предикатов, перестановка базовых блоков), так и общие для всех уровней способы (например, замена набора инструкций эквивалентным по функциональности набором инструкций, вставка мертвого кода).

## 1.2. Автоматическая деобфускация

В [14] предлагается обфусцирующие преобразования оценивать по трем характеристикам: стоимость обфусцирующего преобразования (*cost*), устойчивость к автоматической деобфускации (*resilience*) и устойчивость к деобфускации человеком (*potency*). Две последние характеристики определяют стойкость преобразований. Автоматическая деобфускация находит применение, например, при исследовании новых образцов вредоносного кода, когда сначала необходимо выяснить, является ли этот образец действительно новым вредоносным кодом, или это обфусцированная версия вредоносного кода с уже известной сигнатурой. Также автоматическая деобфускация применяется при выявлении плагиата программного обеспечения [15]. Деобфускация кода человеком обычно выполняется в случае, если автоматические способы деобфускации не дают результатов. Эмпирически установлено, что понимание программ человеком по своей природе тесно связано с обработкой человеком естественного языка [1]. Учитывая, что привлечение человека к деобфускации обычно существенно повышает стоимость процесса деобфускации, большое внимание уделяется разработке и усовершенствованию автоматических способов деобфускации, в частности, на основе символьного исполнения (см. [16, 17]). Отметим, что это, в свою очередь, приводит к развитию способов обфускации, направленных на противодействие автоматическому распутыванию кода [18].

Автоматическая деобфускация программ может выполняться как статически, так и динамически. Статический анализ не предполагает запуск кода, в то время как при динамическом анализе программа запускается. Совместное использование статического и динамического анализа при оценке стойкости обфусцирующих

преобразований обусловлено тем, что такие преобразования могут быть устойчивы к статическому анализу, но не быть устойчивыми к динамическому, или наоборот. Отметим, что при статическом анализе могут использоваться техники, аналогичные тем, которые используются в компиляторах при оптимизации программ: поиск циклов, условных операторов, выявление избыточных операций, недостижимого и/или мертвого кода и т.п. При динамическом анализе используется, например, сравнение трассы выполненных команд с кодом программы.

Одним из мощных средств, используемом в автоматической деобфускации программ, является символьное исполнение кода [17–19], которое изначально было разработано для автоматического тестирования программного обеспечения, поиска ошибок и выявления уязвимостей [20]. Символьное исполнение позволяет построить наборы входных данных, на которых будет исполняться определенный путь в программе [20]. Эту задачу выполняет решающий модуль (resolver). Таким образом, для каждого пути исполнения формируется набор ограничений на входные параметры, по которым могут быть сгенерированы конкретные наборы значений, используемых для прохождения этого пути. Решение данной задачи обычно получается с помощью SMT-решателя (Satisfiability Modulo Theories). Результатом работы символьного интерпретатора являются наборы входных параметров программы и процент покрытия кода программы символьным исполнением. Для анализа программ символьное исполнение используется в таких средствах как S<sup>2</sup>E [16] (на основе символьного интерпретатора KLEE [21]), Triton [17], Angr [22]. Для защиты от методов анализа (деобфускации), применяющих символьное исполнение, в работах [18, 23] предлагается использовать непрозрачные предикаты на основе криптографических хэш-функций. В этом случае у решающего модуля может потребоваться длительное время для нахождения условий, при которых предикат является истинным/ложным. Однако непрозрачные предикаты могут быть выявлены при динамическом символьном исполнении (dynamic symbolic execution), например, путем многократного запуска программы [24].

В настоящей работе предлагается проводить оценку *практической* стойкости обфусцирующих преобразований по отношению к заданным автоматическим методам деобфускации. Заметим, что здесь не рассматриваются вопросы теоретической вычислительной стойкости (стойкость по отношению ко всем полиномиальным алгоритмам деобфускации).

## 2. Оценка стойкости

### 2.1. Информационно-аналитическая модель

Пусть  $\mathcal{P}$  — множество всех исполнимых программ для фиксированной архитектуры вычислительного устройства, представленных в заранее известном формате (например, на языке ассемблера),  $\mathcal{T}$  — множество таких отображений (преобразований) вида  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , что для каждой программы  $P \in \mathcal{P}$  программа  $\tau(P)$  семантически эквивалентна программе  $P$  на всех допустимых входных данных. Во множество  $\mathcal{T}$ , в частности, входят оптимизирующие код преобразования, а также обфусцирующие и деобфусцирующие преобразования. Множество  $\mathcal{T}$  задает на множестве  $\mathcal{P}$  отношение эквивалентности: две программы  $P_1$  и  $P_2$  эквивалентны, тогда и толь-

ко тогда, когда существует такое отображение  $\tau$ , что  $P_1 = \tau(P_2)$ . Во множестве  $\mathcal{T}$  выделим подмножество обфусцирующих преобразований  $\mathcal{T}^O$ , которые направлены на затруднение понимания программ. В  $\mathcal{T}^O$  рассмотрим некоторое фиксированное множество преобразований

$$\{\tau_1^o, \dots, \tau_r^o\} \subseteq \mathcal{T}^O. \quad (1)$$

и деобфусцирующее преобразование  $\tau^d \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^O$ . Требуется из набора (1) выбрать преобразование, наиболее устойчивое к деобфусцирующему преобразованию  $\tau^d$ .

## 2.2. Способ оценки стойкости

В настоящей работе выбор преобразования из набора (1) предлагается выполнять на основе вычисления *показателя похожести* для программ  $\tau^d(\tau_i^o(P))$  и  $P (\in \mathcal{P})$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Для сравнения двух программ рассмотрим *показатель похожести*

$$\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow [0, 1] (\subseteq \mathbb{R}).$$

При этом будем полагать, что  $\delta(P_1, P_2) = \delta(P_2, P_1)$  для всех  $(P_1, P_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  и  $\delta(P, P) = 0$  для всех  $P$  из  $\mathcal{P}$ . Для показателя  $\delta$  рассмотрим такую пару  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , что при  $\delta(P_1, P_2) \leq \epsilon_\delta^+$  программы  $P_1, P_2 (\in \mathcal{P})$  считаются похожими, а при  $\delta(P_1, P_2) \geq \epsilon_\delta^-$  — непохожими. Очевидно, что для показателя похожести должно выполняться неравенство

$$\epsilon_\delta^+ < \epsilon_\delta^-. \quad (2)$$

Для заданного показателя  $\delta$  пара  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-)$  может быть найдена в результате вычислительного эксперимента в соответствии со следующим алгоритмом 1.

**Исходные параметры:**  $\tilde{\mathcal{P}} (\subseteq \mathcal{P})$  — подмножество различных по функционалу исполнимых программ,  
 $\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$  — претендент на показатель похожести,  $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^O$  — подмножество необфусцирующих преобразований

**Результат:** пара  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-)$

$$\epsilon_\delta^+ := 0, \epsilon_\delta^- := 1$$

для каждого  $P \in \tilde{\mathcal{P}}$  выполнять

построить  $\tilde{\mathcal{T}}(P) = \{\tau(P) : \tau \in \tilde{\mathcal{T}}\}$

для каждого  $(P_1, P_2) \in \tilde{\mathcal{T}}(P) \times \tilde{\mathcal{T}}(P)$  выполнять

$$\epsilon_\delta^+ := \max\{\epsilon_\delta^+, \delta(P_1, P_2)\}$$

конец цикла

для каждого  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{P} \neq P$  выполнять

$$\epsilon_\delta^- := \min\{\epsilon_\delta^-, \delta(P, \tilde{P})\}$$

конец цикла

конец цикла

**Алгоритм 1:** Экспериментальное вычисление пары  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-)$

**Algorithm 1:** Experimental calculation of pair  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-)$

Значения показателя  $\delta$  естественным образом отображаются в два возможных значения: программы похожи (П) или непохожи (Н). Если  $\epsilon_\delta^+ < \delta(P_1, P_2) < \epsilon_\delta^-$ , то в случае  $\delta(P_1, P_2) \in [0, \epsilon_\delta^+ + (\epsilon_\delta^- - \epsilon_\delta^+)/2]$  полагаем, что программы похожи, а в противном случае считаем, что программы непохожи.

**Определение 1.** Будем говорить, что обфусцирующее преобразование  $\tau^o (\in \mathcal{T}^O)$  эффективно в рамках показателя  $\delta$ , если

$$\forall P \in \mathcal{P} \quad \delta(P, \tau^{obf}(P)) \geq \epsilon_{\delta}^-.$$

Другими словами, преобразование является эффективным, если исходная и обфусцированная программа считаются непохожими в рамках показателя  $\delta$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что деобфусцирующее отображение  $\tau^d$  является эффективным преобразованием для преобразования  $\tau^o$  в рамках показателя похожести  $\delta$ , если

$$\forall P \in \mathcal{P} \quad \delta(P, \tau^d(\tau^o(P))) \leq \epsilon_{\delta}^+.$$

Аналогично можно ввести определения  $\tilde{\mathcal{P}}$ -эффективных обфусцирующих и деобфусцирующих преобразований, если в определениях 1 и 2 рассмотреть вместо множества всех программ  $\mathcal{P}$  некоторое фиксированное подмножество  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Для программы  $P$ , обфусцирующего преобразования  $\tau^o$  и деобфусцирующего преобразования  $\tau^d$  возможны восемь возможных сочетаний значения показателя  $\delta$ , которые представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сочетания значений показателя похожести  $\delta$  для заданного обфусцирующего преобразования  $\tau^o$  и деобфусцирующего преобразования  $\tau^d$   
 Table 1. Combinations of values of the similarity index  $\delta$  for a given obfuscating transformation  $\tau^o$  and deobfuscating transformation  $\tau^d$

	$\delta(P, \tau^o(P))$	$\delta(\tau^o(P), \tau^d(\tau^o(P)))$	$\delta(P, \tau^d(\tau^o(P)))$
1	П	П	П
2	П	П	Н
3	П	Н	П
4	П	Н	Н
5	Н	П	П
6	Н	П	Н
7	Н	Н	П
8	Н	Н	Н

Преобразования, соответствующие первым четырем сочетаниям таблицы, не являются эффективными обфусцирующими преобразованиями. Сочетания 6 и 8 соответствуют эффективному обфусцирующему преобразованию  $\tau^o$ , устойчивому в рамках показателя  $\delta$  к деобфусцирующему преобразованию  $\tau^d$ , так как, с одной стороны, по показателю  $\delta$  обфусцированная и исходная программы непохожи, а с другой стороны, исходная программа и деобфусцированная непохожи. Сочетания 5, 7, наоборот, соответствуют обфусцирующему преобразованию  $\tau^o$ , неустойчивому к деобфусцирующему преобразованию  $\tau^d$  (также в рамках показателя  $\delta$ ).

**Утверждение 1.** Для определения стойкости эффективного обфусцирующего преобразования  $\tau^o$  к деобфусцирующему преобразованию  $\tau^d$  в рамках показателя похожести  $\delta$  достаточно вычислить  $\delta(P, \tau^d(\tau^o(P)))$ .

*Доказательство.* По условию, преобразование  $\tau^o$  эффективное. Так как значение показателя  $\delta(P, \tau^d(\tau^o(P)))$  для сочетаний 6 и 8 таблицы 1 одинаковое (для строк 5 и 7 значение также одинаковое, но отличается от значения в строках 6 и 8), то для определения стойкости этого значения достаточно.  $\square$

Таким образом, если из заданного набора (1) обфусцирующих преобразований требуется выбрать наиболее устойчивое к заданному методу деобфускации  $\tau^d$ , то следует выбирать обфусцирующее преобразование  $\tau^o$  с наибольшим числовым значением  $\delta(P, \tau^d(\tau^o(P)))$ , соответствующим бинарному значению «Н» (программы  $P$  и  $\tau^d(\tau^o(P))$  непохожи). Если же имеется набор показателей похожести  $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ , то наиболее стойким следует считать преобразование  $\tau^o$  с наибольшим числом показателей  $\delta_i$ , значения которых для программ  $P$  и  $\tau^d(\tau^o(P))$  соответствуют бинарному значению «Н» и принимают наибольшее значение.

Стоит отметить, что если для пары  $(\epsilon_\delta^+, \epsilon_\delta^-)$ , найденной в соответствии с алгоритмом 1, не выполняется условие (2), то считается, что показатель  $\delta$  не подходит для оценки эффективности и стойкости обфусцирующих преобразований в рамках предлагаемого способа. Поиск подходящего показателя похожести, для которого выполняется условие (2), является актуальной и, как можно заключить из обзора [15], пока нерешенной задачей. В частности, остается пока открытым вопрос о составе множества  $\tilde{T}$ , используемом в алгоритме 1 для нахождения значений, соответствующих похожим программам. Можно предположить, что во множество  $\tilde{T}$  следует включать преобразования, соответствующие, например, преобразованиям разных компиляторов (из исходного кода в код целевой архитектуры), разным опциям компиляции, использующим различные наборы оптимизирующих преобразований. Однако, в частности, некоторые оптимизирующие преобразования, могут рассматриваться и как обфусцирующие преобразования. Поэтому необходимы исследования для определения состава множества  $\tilde{T}$ . Другим способом построения множества  $\tilde{T}(P)$  может быть выбор различных версий/обновлений одной программы  $P$ .

Кроме поиска подходящих показателей похожести актуальными являются задачи построения *эффективно вычисляемых* показателей похожести и установление корреляции между различными показателями похожести. В следующем разделе предлагаются возможные кандидаты для показателей похожести.

## 2.3. Показатели похожести программ

### 2.3.1. Похожесть графов потока управления

Множество всех возможных путей выполнения программы  $P(\in \mathcal{P})$ , представленное в виде графа  $G_P = (V_P, E_P)$  называется *графом потока управления* (control flow graph) программы. Узлы из  $V_P$  такого графа обычно соответствуют базовым блокам программы  $P$  – последовательностям команд, завершающимися командами перехода на другие базовые блоки. Ребра (из  $E_P$ ), исходящие из заданного узла, соответствуют условиям, при выполнении которых совершается переход из заданного базового блока к следующему базовому блоку. Как показывают исследования, граф потока управления является важной характеристикой программ, используемой при их сравнении [15]. Многие обфусцирующие преобразования не влияют или слабо

вливают на топологию графа, что используется, например, для выявления обфусцированных версий уже известных вредоносных программ [25–28]. Для сравнения графов часто используется подход, основанный на итеративном поиске и сопоставлении в графах наиболее «похожих» узлов [29, 30]. Под сопоставлением здесь понимается присвоение этим узлам одинаковых меток, уникальных в рамках каждого графа. Некоторые другие подходы к сравнению графов рассматриваются в [31]. Там же предлагается методология для оценки различных способов сравнения графов потока управления.

В настоящей работе для сравнения графов потока управления программ  $P_1$  и  $P_2$  предлагается использовать утилиту *BinDiff*, в которой реализован алгоритм сопоставления вершин из [30]. Результатом работы этой программы является число в диапазоне от 0 (программы полностью отличаются) до 1 (программы полностью совпадают). Такой показатель похожести обозначим  $\delta_{\text{BinDiff}}$ , а его значение определяется формулой:

$$\delta_{\text{BinDiff}}(P_1, P_2) = 1 - \text{BinDiff}(P_1, P_2). \quad (3)$$

### 2.3.2. Похожесть при символьном исполнении

В разделе 1.2. отмечается, что важными характеристиками символьного исполнения являются время исполнения, необходимое для генерации входных параметров, и процент покрытия кода. Время исполнения зависит от времени, необходимого SMT-решателю. Пусть  $t_{\text{SE}}(P)$  и  $c_{\text{SE}}(P)$  – время, необходимое SMT-решателю, и степень покрытия кода при символьном исполнении программы  $P \in \mathcal{P}$  соответственно. Тогда можно рассмотреть два показателя похожести программ  $P_1$  и  $P_2$  в рамках символьного исполнения:

$$\delta_{\text{SE}}^t(P_1, P_2) = \frac{|t_{\text{SE}}(P_1) - t_{\text{SE}}(P_2)|}{\max\{t_{\text{SE}}(P_1), t_{\text{SE}}(P_2)\}}, \quad (4)$$

$$\delta_{\text{SE}}^c(P_1, P_2) = \frac{|c_{\text{SE}}(P_1) - c_{\text{SE}}(P_2)|}{\max\{c_{\text{SE}}(P_1), c_{\text{SE}}(P_2)\}}. \quad (5)$$

### 2.3.3. О построении новых показателей похожести

На основе графа потока управления могут быть построены и другие показатели похожести, отличные от (3). Разнообразие показателей, с одной стороны, позволяет выбрать наиболее подходящий показатель в рамках предлагаемого выше способа, а с другой стороны, множество показателей может быть использовано при построении показателя похожести на основе машинного обучения. Отметим, что значения разных показателей похожести могут быть использованы для построения вектора характеристик, например, в алгоритмах машинного обучения, использующих метод опорных векторов SVM (Support Vector Method). Рассмотрим возможный подход к построению показателей похожести на основе графа потока управления.

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  – программы, графы потока управления которых требуется сравнить,  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Для удобства отождествим узлы каждого графа с метками, присвоенными этим узлам после выполнения процедуры сопоставления узлов графов  $G_{P_1}$  и  $G_{P_2}$ , например, в соответствии с алгоритмом из [30]. При этом узлам

графов, которые не были сопоставлены, присваиваются уникальные метки в рамках двух графов. Пусть  $k = |V_{P_1} \cup V_{P_2}|$  — число различных меток для двух графов. Для  $i = 1, 2$  по графу  $G_i$  построим граф  $G'_i = (V_{P_1} \cup V_{P_2}, E_{P_i})$ , которому сопоставим  $(k \times k)$ -матрицу смежности  $A^i$ , столбцы и строки которой пронумерованы элементами множества  $V_{P_1} \cup V_{P_2}$ :

$$A^i_{v,\tilde{v}} = \begin{cases} 1, & (v, \tilde{v}) \in E_{P_i} \\ 0, & (v, \tilde{v}) \notin E_{P_i} \end{cases}.$$

Величину  $\rho(A^1, A^2) = \{(i, j) \in [k] \times [k] : a^1_{i,j} \neq a^2_{i,j}\}$  будем называть расстоянием Хэмминга между матрицами  $A^1$  и  $A^2$ , так как она равна числу пар индексов, где элементы матриц  $A$  и  $B$  отличаются. Такое расстояние в [32] называется расстоянием редактирования графа. В качестве показателя схожести для  $P_1$  и  $P_2$  предлагается нормированное расстояние Хэмминга между соответствующими матрицами  $A^1$  и  $A^2$ :

$$\delta_{\text{Hamm}} = \frac{\rho(A^1, A^2)}{k^2}. \quad (6)$$

Для применения показателя схожести  $\delta_{\text{Hamm}}$  узлам двух сравниваемых программ должны быть присвоены метки, что является непростой задачей. Некоторые подходы сопоставления вершин предлагаются, например, в [29, 30]. Для сопоставления базовых блоков представляется возможным применение нечетких хэш-функций, которые слабо чувствительны к небольшим изменениям [33]. Тогда в сравниваемых программах базовым блокам присваиваются одинаковые метки, если хэш-значения, вычисленные по коду этих базовых блоков, наиболее близки. Затем поиск наиболее похожих базовых блоков повторяется, но при этом не учитываются ранее помеченные блоки. Заметим, что для применения такого подхода необходимо представление кода базовых блоков в виде, подходящем для применения нечетких хэш-функций (или других методов сравнения).

Отметим, что если вместо графа потока управления рассматривать граф вызовов системных функций и/или библиотечных функций при статическом анализе, или трассу системных вызовов при динамическом анализе (такую трассу, например, в операционной системе Linux можно получить с помощью утилит *strace/ltrace*), то задача вычисления показателя  $\delta_{\text{Hamm}}$  упрощается, так как узлы уже имеют метки — названия системных и/или библиотечных функций. Однако сравнение на основе графов системных/библиотечных функций имеет ограниченную сферу применения: этот подход неприменим для сравнения программ, в которых не применяются системные/библиотечные функции (программы в рамках такого показателя схожести будут всегда похожими).

### 3. Схема анализа стойкости

#### 3.1. Схема на основе сравнения характеристик

Так как при обфускации и деобфускации вносятся изменения в программный код, то это может привести к изменению характеристик, от которых зависят показатели

похожести. В [34] проведен обзор характеристик программного обеспечения, предложенных различными исследователями для оценки сложности программного обеспечения. К числу таких характеристик относятся, в частности, плотность условных операторов, число различных путей выполнения программы, размер программы, число различных операторов, степень влияния изменения одного модуля программы на остальные модули программы. О влиянии некоторых из этих характеристик на сложность понимания программ выдвинуты гипотезы в [35].

Схема анализа стойкости обфусцирующих преобразований показана на рис. 1. Исходная программа подвергается обфускации с помощью преобразования  $\tau^o$ ; результат обфускации затем подается на вход блока деобфускации, где применяется выбранное преобразование  $\tau^d$ ; в блоке нахождения характеристик вычисляются характеристики программ, которые сравниваются в блоке оценки стойкости. Для сравнения характеристик программного обеспечения может быть использована модель на основе похожести программ из раздела 2.2.. В качестве характеристик,



Рис. 1. Структурная схема оценки стойкости обфусцирующих преобразований  
Fig. 1. Structural scheme for assessing the persistence of obfuscating transformations

получаемых в блоке нахождения характеристик, могут быть такие характеристики, как граф потока управления программ, время символьного исполнения, степень покрытия при символьном исполнении. Тогда в блоке оценки стойкости могут использоваться показатели  $\delta_{\text{BinDiff}}$ ,  $\delta_{\text{Ham}}$ ,  $\delta_{\text{SE}}^t$ ,  $\delta_{\text{SE}}^c$  (см. формулы (3), (6), (4) и (5)).

Заметим, что граф потока управления может быть найден с помощью множества автоматизированных средств. Такой граф может быть получен, в частности, для исполнимого файла, скомпилированного для целевой архитектуры, например, Intel

x86/x86\_64. Для нахождения характеристик символьного исполнения таких файлов разработан и реализован подход, описанный в следующем разделе.

### 3.2. Нахождение характеристик символьного исполнения

Для оценки стойкости обфусцирующих преобразований разработан алгоритм нахождения характеристик исполнимых файлов, скомпилированных для архитектуры Intel x86/x86\_64 [36]. Результатом выполнения этого алгоритма являются характеристики программ, которые могут быть использованы для оценки стойкости обфусцирующих преобразований в рамках схемы оценки стойкости обфусцирующих преобразований, показанной на рис. 1. Модель нахождения характеристик включает следующие компоненты: модуль дизассемблирования, модуль трансляции кода программы на языке ассемблера в код на языке промежуточного представления, модуль оптимизации, модуль символьного исполнения, модуль сбора анализируемых характеристик на уровне промежуточного представления.

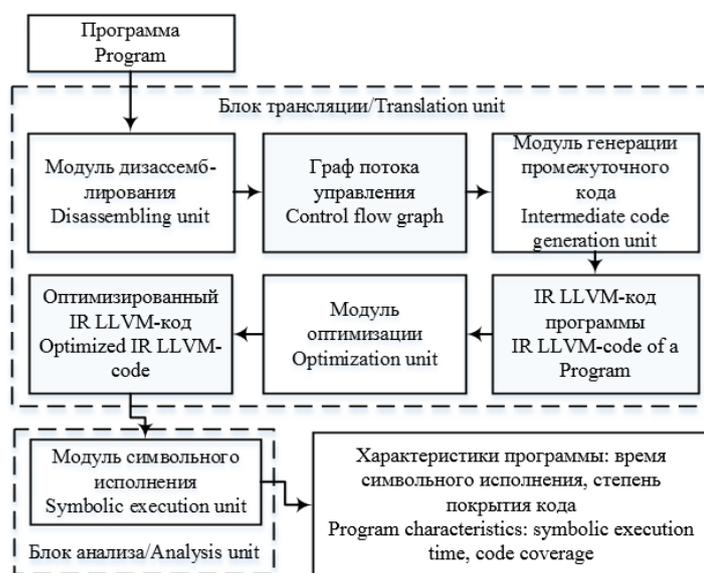


Рис. 2. Реализация блока нахождения характеристик на основе символьного исполнения

Fig. 2. Implementing a block for finding characteristics based on symbolic execution

Модуль дизассемблирования реализуется с помощью средства *IDA Pro 7.0* [37] и утилиты *mcsema-disass*, входящей в фреймворк *McSema* [39], предназначенной для транслирования исполнимых программ, скомпилированных для архитектур x86/x86\_64/arm, в программы на языке промежуточного представления *LLVM IR* (Low Level Virtual Machine Intermediate Representation) [38]. Средство *IDA Pro 7.0* дизассемблирует программу, а утилита *mcsema-disass*, используя API-интерфейс *IDA Pro 7.0*, на основе полученного представления формирует граф потока управления. В качестве промежуточного представления используется биткод *LLVM IR*. Модуль трансляции в промежуточное представление *LLVM IR* реализуется с помощью утилиты *mcsema\_lift* из состава фреймворка *McSema*. Утилита *mcsema\_lift* генерирует *LLVM IR* по полученному графу потока управления программы. Таким

образом, исполнимая программа транслируется в единый модуль в промежуточном представлении *LLVM IR*. Модуль оптимизации представлен утилитой *opt* из состава *LLVM*. Оптимизация программы производится на уровне промежуточного представления. Символьное исполнение выполняется с помощью фреймворка KLEE [21]. Напомним, что суть символьного исполнения заключается в подмене входных параметров программы символьными значениями. Источниками входных параметров для консольных программ часто являются аргументы командной строки и стандартный поток ввода. Символьный интерпретатор пытается исследовать всю программу, определить все возможные пути исполнения и соответствующие этим путям входные параметры. Каждое ветвление в программе воспринимается как ограничение на входные параметры, которым они должны удовлетворять, чтобы продолжить выполнение программы по каждому из возможных путей.

В качестве примера работы реализованного алгоритма нахождения характеристик символьного выполнения проведен ряд экспериментов с программой Maze, реализованной на языке C, исходный код которой доступен в сети. Программа представляет собой простую игру, для победы в которой необходимо через стандартный поток ввода (*stdin*) правильно задать путь до выхода из представленного на консоли лабиринта. Для компиляции программы использовался компилятор *Obfuscator-LLVM* [40], в котором имеется возможность добавить обфусцирующие преобразования на стадии представления программы на языке *LLVM IR*. В ходе эксперимента программа Maze была скомпилирована в четырех разных режимах: без применения обфусцирующих преобразований (*maze-org*), с применением обфусцирующего преобразования *Instruction Substitution* (*maze-sub*), с применением преобразования *Control Flow Flattening* (*maze-fla*), а также с применением обфусцирующего преобразования *Bogus Control Flow* (*maze-bcf*). Каждый из полученных четырех исполнимых файлов был подан на вход схемы (см. рис. 2) и получены соответствующие характеристики: время символьного исполнения и степень покрытия кода при символьном исполнении. Результаты анализа показаны в таблице 2.

Таблица 2. Пример вычисления характеристик для программы Maze  
Table 2. An example of calculating characteristics for the program Maze

Исполнимый файл	Время символьного исполнения, с.	Степень покрытия кода, %
maze-org	43,48	31,53
maze-sub	43,56	31,58
maze-fla	244,85	34,61
maze-bcf	40,41	35,43

Как видно из таблицы, применение обфусцирующих преобразований изменяет время символьного исполнения программы. В то же время степень покрытия кода показала неоднозначные значения. Обфусцирующее преобразование *Control Flow Flattening* значительно увеличило время символьного исполнения, в то время как остальные обфусцирующие преобразования не оказали заметного эффекта на время символьного исполнения.

## Заключение

В настоящей работе разработана схема автоматической оценки стойкости обфусцирующих преобразований, основанная на вычислении характеристик трех версий программы: исходной программы, обфусцированной программы и деобфусцированной программы. Предложены характеристики, которые могут быть использованы в рамках построенной модели на основе схожести программ. Построена реализация алгоритма вычисления характеристик на основе символьного исполнения. Эксперименты показали, что обфусцирующие преобразования влияют на характеристики, на основе которых вычисляются предложенные показатели схожести.

Дальнейшим направлением исследования является проведение экспериментов для оценки применимости предложенных показателей схожести (3), (6), (4) и (5), разработка новых показателей, в частности, на основе методов машинного обучения, а также исследование корреляции различных показателей схожести.

## Список литературы / References

- [1] Siegmund J., “Program Comprehension: Past, Present, and Future”, *IEEE 23rd International Conference on Software Analysis, Evolution, and Reengineering (SANER)*, **5** (2016), 13–20.
- [2] Avidan E., Feitelson D. G., “From Obfuscation to Comprehension”, *Proceedings of the 2015 IEEE 23rd International Conference on Program Comprehension*, 2015, 178–181.
- [3] Поздеев А. Г., Кривопапов В. Н., Ромашкин Е. В., Радченко Е. Д., “Математические и программные средства обфускации программ”, *ПДМ*, **1** (2009), 52–53; [Pozdeev A. G., Krivopalov V. N., Romashkin E. V., Radchenko E. D., “Matematicheskie i programmye sredstva obfuskacii programm”, *PDM*, **1** (2009), 52–53, (in Russian).]
- [4] Чернов А. В., “Анализ запутывающих преобразований программ”, 2002, <http://www.citforum.ru/security/articles/analysis/>; [Chernov A. V., “Analiz zaputyvayushchih preobrazovaniy programm”, 2002, <http://www.citforum.ru/security/articles/analysis/>, (in Russian).]
- [5] Kuzurin N., Shokurov A., Varnovsky N., Zakharov V., “On the Concept of Software Obfuscation in Computer Security”, *International Conference on Information Security. – Springer, Berlin, Heidelberg*, 2007, 281–298.
- [6] Diffie W., Hellman M., “New directions in cryptography”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **22:6** (1976), 644–654.
- [7] Collberg C. S., Thomborson C., “Watermarking, Tamper-Proofing, and Obfuscation Tools for Software Protection”, *IEEE transactions on software engineering*, **28:8** (2002), 735–746.
- [8] Lee B., Kim Y., Kim J., “binOb+: a Framework for Potent and Stealthy Binary Obfuscation”, *Proceedings of the 5th ACM Symposium on Information, Computer and Communications Security, ASIACCS 2010*, 2010, 271–281.
- [9] Borello J.M., Me L., “Code Obfuscation Techniques for Metamorphic Viruses”, *Journal in Computer Virology*, **4:3** (2008), 211–220.
- [10] Moser A., Kruegel C., Kirda E., “Limits of Static Analysis for Malware Detection”, *Proceedings of Twenty-Third Annual Computer Security Applications Conference (ACSAC 2007)*, 2007, 421–430.
- [11] Baiardi F., Sgandurra D., “An obfuscation-based approach against injection attacks”, *Proceedings of the Sixth International Conference on Availability, Reliability and Security (ARES)*, 2011, 51–58.

- [12] Нурмухаметов А. Р., “Применение диверсифицирующих и обфусцирующих преобразований для изменения сигнатуры программного кода”, *Труды ИСП РАН*, **28**:5 (2016), 93–104; [Nurmukhametov A. R., “Primenenie diversificiruyushchih i obfusciruyushchih preobrazovaniy dlya izmeneniya signatury programmogo koda”, *Trudy ISP RAN*, **28**:5 (2016), 93–104, (in Russian).]
- [13] Косолапов Ю. В., “Об обнаружении атак типа повторного использования исполнимого кода”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **26**:2 (2019), 213–228; [Kosolapov Y. V., “About Detection of Code Reuse Attacks”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 213–228, (in Russian).]
- [14] Collberg C., Thomborson C., Low D., “A taxonomy of obfuscating transformations”, *Technical Report 148, The University of Auckland, New Zealand*, 1997.
- [15] Walenstein A., El-Ramly M., Cordy J. R., Evans W. S., Mahdavi K., Pizka M., Ramalingam G., von Gudenberg J. W., “Similarity in Programs”, *Duplication, Redundancy, and Similarity in Software*, 2007, 1–8.
- [16] Chipounov V., Kuznetsov V., Candea G., “The S2E Platform: Design, Implementation, and Applications”, *ACM Transactions on Computer Systems*, **30**:1 (2012), 1–49.
- [17] Saudel F., Salwan J., “Triton: A Dynamic Symbolic Execution Framework”, *Symposium Sur La Security Des Technologies de L’information et Des Communications, SSTIC*, 2015, 31–54.
- [18] Wang Z, Ming J., Jia C., Gao D., “Linear Obfuscation to Combat Symbolic Execution”, *Proceedings of Computer Security - ESORICS 2011*, **6879** (2011), 210–226.
- [19] Brumley D., Hartwig C., Liang Z., Newsome J., Song D., Yin H., “Automatically Identifying Trigger-based Behavior in Malware”, *Botnet Detection. Advances in Information Security*, **36** (2008), 65–88.
- [20] King J. C., “Symbolic execution and program testing”, *Communications of the ACM*, **19**:7 (1976), 385–394.
- [21] Cadar C., Dunbar D., Engler D. R., “KLEE: Unassisted and Automatic Generation of High-Coverage Tests for Complex Systems Programs”, *8th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*, **8** (2008), 209–224.
- [22] Shoshitaishvili Y. et al., “SoK: (State of) The Art of War: Offensive Techniques in Binary Analysis”, *IEEE Symposium on Security and Privacy*, 2016, 138–157.
- [23] Sharif M. I., Lanzi A., Giffin J. T., Lee W., “Impeding Malware Analysis Using Conditional Code Obfuscation”, *Proceedings of NDSS*, 2008, 1–13.
- [24] Udupa S. K., Debray S. K., Madou M., “Deobfuscation: Reverse Engineering Obfuscated Code”, *Proceedings of the 12th Working Conference on Reverse Engineering (WCRE’05)*, 2005, 44–53.
- [25] Nagarajan V., Gupta R., Zhang X., Madou M., De Sutter B., “Matching Control Flow of Program Versions”, *IEEE International Conference on Software Maintenance*, 2007, 84–93.
- [26] Bonfante G., Kaczmarek M., Marion J. Y., “Control Flow Graphs as Malware Signatures”, *International Workshop on the Theory of Computer Viruses*, 2007, 1–6.
- [27] Park Y., Reeves D., Mulukutla V., Sundaravel B., “Fast Malware Classification by Automated Behavioral Graph Matching”, *Proceedings of the Sixth Annual Workshop on Cyber Security and Information Intelligence Research*, 2010, 1–4.
- [28] Kinable J., Kostakis O., “Malware classification based on call graph clustering”, *Journal in Computer Virology*, **7**:4 (2011), 233–245.
- [29] Lim H. I., “Comparing Control Flow Graphs of Binary Programs through Match Propagation”, *IEEE 38th Annual Computer Software and Applications Conference*, 2014, 598–599.
- [30] Dullien T., Rolles R., “Graph-based comparison of executable objects”, **5**:1 (2005), 1–8.
- [31] Chan P. P. F., Collberg C., “A Method to Evaluate CFG Comparison Algorithms”, *14th International Conference on Quality Software*, 2014, 95–104.
- [32] Axenovich M., Kezdy A., Martin R., “On the editing distance of graphs”, *J. Graph Theory*, **58**:2 (2008), 123–138.

- [33] Борисов П. Д., Косолапов Ю. В., “О выборе характеристик для оценки стойкости обфусцирующих преобразований”, *Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Труды XXVI научной конференции СИТО-2019.*, 2019, 42–44; [Borisov P. D., Kosolapov Y. V., “O vybore harakteristik dlja ocenki stojkosti obfuscirujushhijh preobrazovanij”, *Sovremennye informacionnye tekhnologii: tendencii i perspektivy razvitiya. Trudy XXV nauchnoj konferencii SI TO-2019.*, 2019, 42–44, (in Russian).]
- [34] Lehman M. M., Belady L. A. Program Evolution. Processes of Software Change., *Academic press*, 1985.
- [35] Schnappinger M., Osman M. H., Pretschner A., Pizka M., Fietzke A., “Software Quality Assessment in Practice: a Hypothesis-Driven Framework”, *Proceedings of the 12th ACM/IEEE International Symposium on Empirical Software Engineering and Measurement*, 2018, 1–6.
- [36] Борисов П. Д., Косолапов Ю. В., “Модель экспериментального анализа стойкости алгоритмов обфускации”, *Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Труды XXV научной конференции СИТО-2018.*, 2018, 37–39; [Borisov P. D., Kosolapov Y. V., “Model’ eksperimental’nogo analiza stojkosti algoritmov obfuskacii”, *Sovremennye informacionnye tekhnologii: tendencii i perspektivy razvitiya. Trudy XXV nauchnoj konferencii SI TO-2018.*, 2018, 37–39, (in Russian).]
- [37] “IDA Pro”, <https://www.hex-rays.com/products/ida/>.
- [38] “The LLVM Compiler Infrastructure”, <https://llvm.org/>.
- [39] “McSema”, <https://github.com/trailofbits/mcsema>.
- [40] Junod P., Rinaldini J., Wehrli J., Michieliny J., “Obfuscator-LLVM – Software Protection for the Masses”, *Conference: 2015 IEEE/ACM 1st International Workshop on Software Protection (SPRO)*, 2015, 3–9.

**Borisov P. D., Kosolapov Y. V.**, "On the Automatic Analysis of the Practical Resistance of Obfuscating Transformations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26:3** (2019), 317–331.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-317-331

**Abstract.** A method is developed for assessing the practical persistence of obfuscating transformations of programs based on the calculation of the similarity index for the original, obfuscated and deobfuscated programs. Candidates are proposed for similarity indices, which are based on such program characteristics as the control flow graph, symbolic execution time and degree of coverage for symbolic execution. The control flow graph is considered as the basis for building other candidates for program similarity indicators. On its basis, a new candidate is proposed for the similarity index, which, when calculated, finds the Hamming distance between the adjacency matrices of control flow graphs of compared programs. A scheme for estimating (analyzing) the persistence of obfuscating transformations is constructed, according to which for the original, obfuscated and deobfuscated programs, the characteristics of these programs are calculated and compared in accordance with the chosen comparison model. The developed scheme, in particular, is suitable for comparing programs based on similarity indices. This paper develops and implements one of the key units of the constructed scheme - a block for obtaining program characteristics compiled for the x86/x86\_64 architecture. The developed unit allow to find the control flow graph, the time for symbolic execution and the degree of coverage for symbolic execution. Some results of work of the constructed block are given.

**Keywords:** code obfuscation, resistance, symbolic execution

**On the authors:**

Petr D. Borisov, [orcid.org/0000-0002-8919-8310](https://orcid.org/0000-0002-8919-8310), graduate student,  
Southern Federal University,  
8a Milchakova str., Rostov-on-Don 344090, Russia, e-mail: [borisovpetr@mail.ru](mailto:borisovpetr@mail.ru)

Yury V. Kosolapov, [orcid.org/0000-0002-1491-524X](https://orcid.org/0000-0002-1491-524X), PhD,  
Southern Federal University,  
8a Milchakova str., Rostov-on-Don 344090, Russia, e-mail: [itaim@mail.ru](mailto:itaim@mail.ru)

©Куцак Н. Ю., Подымов В. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-332-350

УДК 519.71

## Формальная верификация диаграмм троичных цифровых сигналов

Куцак Н. Ю., Подымов В. В.

Поступила в редакцию 28 июня 2019

После доработки 2 сентября 2019

Принята к публикации 4 сентября 2019

**Аннотация.** В работе исследуется задача формальной верификации (математически строгой проверки правильности) диаграмм цифровых сигналов, используемых на практике на ранних стадиях разработки микроэлектронных цифровых устройств (цифровых схем). Отправной точкой разработки схемы, согласно современному методу проектирования, является её описание на каком-либо высокоабстрактном языке описания аппаратуры (hardware description language, HDL). Обязательным этапом разработки HDL-кода схемы является отладка этого кода, схожая по устройству и важности с отладкой программ. Один из популярных способов отладки HDL-кода основан на получении и проверке правильности диаграммы сигналов, то есть совокупности графиков сигналов: функций, описывающих изменение значений в выделенных местах схемы в реальное время. В работе предлагаются математические средства автоматизации проверки правильности таких диаграмм, основанные на понятиях и методах верификации систем относительно формул темпоральных логик и учитывающие такие характерные особенности сигналов в HDL и соответствующих свойств правильности диаграмм в неформальном смысле, как реальное время, троичность и наличие точек фронтов. Троичность сигнала означает, что наряду с основными логическими значениями 0 и 1 сигнал может принимать и неопределённое значение: одно из значений 0 и 1, но неизвестно или неважно, какое именно. Точкой фронта называется момент изменения значения сигнала. В работе предлагаются понятия, утверждения и алгоритмы, предназначенные для формализации и решения задачи верификации диаграмм сигналов: определения сигналов и диаграмм, учитывающие упомянутые характерные особенности сигналов; темпоральная логика, предназначенная для описания свойств диаграмм сигналов, и соответствующая постановка задачи верификации диаграмм; метод решения предлагаемой задачи верификации, основанный на сведении к задачам преобразования и анализа сигналов; соответствующий алгоритм верификации диаграмм с обоснованием корректности и “приемлемой” оценкой сложности.

**Ключевые слова:** формальная верификация, цифровой сигнал, темпоральная логика, троичная логика

**Для цитирования:** Куцак Н. Ю., Подымов В. В., "Формальная верификация диаграмм троичных цифровых сигналов", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 332–350.

**Об авторах:**

Куцак Нина Юрьевна, [orcid.org/0000-0002-0832-3635](https://orcid.org/0000-0002-0832-3635), студент бакалавриата, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Ленинские горы, 1, стр. 52, г. Москва, ГСП-1, 119991 Россия, e-mail: [nina\\_svetik@mail.ru](mailto:nina_svetik@mail.ru)

Подымов Владислав Васильевич, [orcid.org/0000-0002-2041-7634](https://orcid.org/0000-0002-2041-7634), канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Ленинские горы, 1, стр. 52, г. Москва, ГСП-1, 119991 Россия, e-mail: [valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

**Благодарности:**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00854.

## Введение

Данная работа представляет собой попытку применения методов формальной верификации [1] (математически строгой проверки правильности выполнения систем) для формализации и автоматизации одного из этапов разработки цифровых микроэлектронных устройств (цифровых схем) [2]. Отправной точкой проектирования цифровой схемы, согласно современным подходам, является разработка её функционала на каком-либо языке описания аппаратуры (hardware description language, HDL) [2] на высоком уровне абстракции, не учитывающем многие физические и технологические особенности схем. Обязательным этапом разработки HDL-кода схемы является отладка этого кода, схожая с отладкой программ, но основанная на понятиях и типах данных, характерных для схем. Основным таким понятием является цифровой сигнал: функция, описывающая изменение логических значений (1 и 0; истина и ложь; высокий и низкий уровни напряжения в заданном месте схемы) в реальном времени. Сигналы в рамках HDL могут принимать и другие значения, например: неопределённое значение, то есть одно из значений 0, 1, но неизвестно или неважно, какое именно; значение высокого импеданса, то есть физически изолированная точка схемы; арифметические значения в двоичной записи для совокупностей сигналов. В данной работе рассматриваются сигналы, принимающие три значения: 0, 1 и \*. Значение \* трактуется как неопределённость в упомянутом смысле, а также как полноценное независимое третье значение сигнала. Соответствующим двояким образом трактуется и троичность сигналов.

Один из популярных способов отладки HDL-описания схемы устроен следующим образом. Разрабатывается показательное семейство наборов значений входных сигналов, то есть тестовое покрытие. Выполняется симуляция схемы на элементах покрытия подходящим программным средством: вычисление значений выходных сигналов согласно особой семантике языка, реализованной в средстве. В результате симуляции вычисляется диаграмма сигналов: совокупность графиков, описывающих изменение значений сигналов в выделенных местах схемы в действительном (реальном) модельном времени. Полученная диаграмма изучается экспертом на предмет правильности: соответствия поведения схемы, представленного в диаграмме, ожидаемому. Основной целью работы является разработка математических средств, пригодных для автоматизации такой проверки правильности диаграмм.

Для наглядности рассмотрим в качестве примера D-триггер [2]: однобитовую схемную ячейку памяти, используемую практически во всех нетривиальных цифровых схемах. D-триггер содержит два входных сигнала (*in*, *clk*) и один выходной сигнал (*out*), и его функционирование можно коротко описать так: каждый раз, когда значение *clk* изменяется с 0 на 1 (то есть наступает так называемый передний фронт сигнала), в триггере сохраняется текущее значение *in*; значение *out* всегда совпадает с последним сохранённым значением. Пример диаграммы, которую можно получить в результате программной симуляции правильного HDL-кода D-триггера, приведён на рисунке 1. В этой диаграмме по горизонтали отложена шкала реального времени, и по строкам изображены графики сигналов *in*, *clk* и *out*. Нижний, средний и верхний уровни строк соответствуют значениям 0, \* и 1. Вертикальные линии соответствуют мгновенным изменениям значений сигналов (фронтам). Отметим, что неопределённое значение сигнала *out* на рисунке 1 возникает по трём причинам:

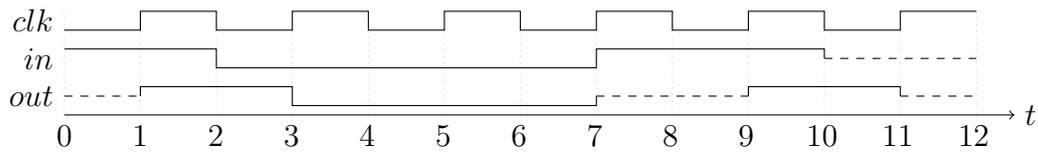


Рис. 1. Диаграмма сигналов D-триггера  
Fig. 1. A waveform of a D flip-flop

до первого переднего фронта сигнала  $clk$  значение, сохранённое в триггере, произвольно; если значение сигнала  $in$  в момент переднего фронта  $clk$  не определено, то и сохраняемое значение не определено; если сигнал  $in$  в момент переднего фронта  $clk$  изменяет своё значение, то может сохраниться как значение до изменения, так и после (это известный схемный эффект, называемый метастабильностью [2]).

Отправной точкой формальной верификации диаграммы сигналов является запись свойства правильности на формальном языке. Как видно из рассмотренного примера, в подходящем формальном языке требуется иметь средства рассуждения о взаимосвязи логических значений во времени. Такие средства содержатся в языках темпоральных логик [1]. Наиболее популярные темпоральные логики, как правило, принадлежат одному из двух широких классов: логики дискретного времени, в которых время описывается множеством целых чисел, и логики реального времени, в которых время описывается множеством действительных чисел. При использовании дискретных логик для верификации схема обычно заменяется конечным автоматом, выполняющим переходы в моменты передних фронтов выбранного (тактового) сигнала. В исследованиях встречается широкий спектр вариаций такой замены, и с основными идеями таких вариаций можно ознакомиться, например, в [2–5] (в том числе с использованием троичности — в [6]). Такая замена без потери полноты описания поведения возможна только для синхронных схем [2]: изменяющих своё состояние только по указанным фронтам единственного тактового сигнала. Для остальных схем (асинхронных) применение такого подхода сопряжено с дополнительным анализом схемы и потерей точности описания её поведения. Темпоральные логики реального времени, основанные на понятиях сигнала, наиболее близких к используемому на практике в диаграммах, предлагаются в [7, 8]. В этих работах рассматриваются двоичные сигналы, и кроме того, в предлагаемых языках отсутствуют средства рассуждения о фронтах сигналов, и из-за этого предлагаемые языки практически непригодны для верификации диаграмм сигналов: значение \* часто встречается в диаграммах, и неопределённость либо произвольность — в рассуждениях о правильности диаграмм, и даже в таких простых схемах, как D-триггер, требуются средства рассуждения о фронтах сигналов.

В работе предлагаются: формальный язык (темпоральная логика), предназначенный для записи свойств диаграмм троичных сигналов и содержащий, в числе прочего, средства записи высказываний о моментах фронтов сигналов; сопутствующий набор понятий, включая строгие определения троичного сигнала и диаграммы; постановку и конструктивное алгоритмическое решение задачи верификации диаграмм относительно формул предлагаемой логики. Текст работы имеет следующую структуру. В разделе 1 обсуждаются понятия и обозначения, не относящиеся непосредственно к цифровым сигналам и предлагаемому языку. В разделе 2 вводятся

$x$	$\neg x$	$x \vee y$			$y$			$x \leftrightarrow y$			$y$			$x \Leftrightarrow y$			$y$			$x \sqsubseteq y$			$y$										
0	1	0	0	*	1	0	*	1	0	1	*	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
*	*	$x$	*	*	*	1	*	*	*	*	*	*	$x$	*	0	1	0	0	$x$	*	1	1	1	1	$x$	*	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	*	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

Рис. 2. Таблицы значений троичных функций  
 Fig. 2. Value tables of three-valued functions

основные определения и обозначения, относящиеся к троичным сигналам и диаграммам. В разделе 3 предлагаются синтаксис и семантика формул логики, предназначенной для записи свойств правильности диаграмм и для ясности названной логикой троичных сигналов, и строгая постановка задачи верификации диаграмм. В разделе 4 вводится альтернативная семантика формул, позволяющая переформулировать задачу верификации диаграмм как задачу преобразования и анализа сигналов. Соответствующий решающий алгоритм с обоснованием корректности и грубой оценкой сложности приведён в разделе 5. Наконец, в разделе 6 обсуждается набор операций, выразимых в логике троичных сигналов, и приводятся примеры формул, выражающих правильность диаграмм несложных “реальных” схем.

## 1. Общие обозначения

Записями  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$  и  $\mathbb{R}$  обозначим соответственно множества всех натуральных чисел, всех целых неотрицательных чисел и всех действительных чисел. В работе используются следующие виды *интервалов* (конечные интервалы действительных чисел):  $(x, y) = \{z \mid z \in \mathbb{R}, x < z < y\}$ ;  $[x, y) = \{z \mid z \in \mathbb{R}, x \leq z < y\}$ ;  $(x, y] = \{z \mid z \in \mathbb{R}, x < z \leq y\}$ ;  $[x, y] = \{z \mid z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y\}$ . Также в работе используются *диапазоны* целых неотрицательных чисел:  $[x..y] = \{z \mid z \in \mathbb{N}_0, x \leq z \leq y\}$ .

Рассмотрим произвольную функцию  $f : X \rightarrow Y$ . Записью  $f^{-1}(y)$  обозначим множество  $\{x \mid x \in X, f(x) = y\}$ . Записью  $f\langle Z \rangle \sim v$ , где  $Z \subseteq X$  и  $\sim$  — равенство ( $=$ ) или неравенство ( $\neq$ ), обозначим следующий факт: для каждого элемента  $z$  множества  $Z$  верно  $f(z) \sim v$ . Будем говорить, что значение функции  $f$  *постоянно* на множестве  $Z$ ,  $Z \subseteq X$ , если существует значение  $y$ ,  $y \in Y$ , такое что  $f\langle Z \rangle = y$ .

Записью  $\mathfrak{T}$  обозначим множество  $\{0, 1, *\}$ . Это множество будет использоваться в двух смыслах. В широком смысле,  $\mathfrak{T}$  — множество значений, которыми оперируют троичные функции [9]. В узком смысле,  $\mathfrak{T}$  — множество истинностных значений троичной логики Клини [10, 11], согласно которой 0 трактуется как *ложь*, 1 — как *истина*, и \* — как *неопределённое* значение: либо истина, либо ложь, но неизвестно или неважно, что именно. *Троичной функцией* (местности  $n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ) называется функция вида  $f : \mathfrak{T}^n \rightarrow \mathfrak{T}$ . На рисунке 2 изображены таблицы значений троичных функций, использующихся в разделах 3 и 6: отрицание ( $\neg$ ), дизъюнкция ( $\vee$ ) и равносильность ( $\leftrightarrow$ ) логики Клини; равносильность алгебры троичных функций ( $\Leftrightarrow$ ); функция  $\sqsubseteq$ , означающая, что левый аргумент можно доопределить до правого.

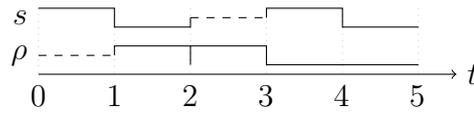


Рис. 3. График сигнала ( $s$ ) и заготовки, не являющейся сигналом ( $\rho$ )  
Fig. 3. Plots of a signal ( $s$ ), and a non-signal preform ( $\rho$ )

## 2. Троичные цифровые сигналы

Далее полагаются заданными действительные числа  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , задающие область определения  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  рассматриваемых сигналов. Числа интервала  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  назовём *моментами времени*, а также *точками* (временной оси). Точки интервалов  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  будем называть соответственно *левыми*, *правыми* и *внутренними*.

Записью  $\mathfrak{T}_{\updownarrow}$  обозначим множество  $\mathfrak{T} \cup \{\updownarrow\}$ , где  $\updownarrow$  — *фронтальное* значение,  $\updownarrow \notin \mathfrak{T}$ . *Сигнальной функцией* назовём отображение вида  $\chi : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathfrak{T}_{\updownarrow}$ . Будем говорить, что функция  $\chi$  имеет значение  $v$  *справа от левой точки*  $\ell$ , если существует точка  $t$ , такая что  $\ell < t$  и  $\chi\langle(\ell, t)\rangle = v$ , и имеет значение  $v$  *слева от правой точки*  $r$ , если существует точка  $t$ , такая что  $t < r$  и  $\chi\langle(t, r)\rangle = v$ . Значения  $\chi$  справа и слева от точки  $t$  обозначим записями  $\chi(t+0)$  и  $\chi(t-0)$  соответственно. Сигнальную функцию  $\rho$  назовём *заготовкой* троичного цифрового сигнала, если множество  $\rho^{-1}(\updownarrow)$  конечно и на каждом интервале  $\mathcal{I}$ , таком что  $\rho(\mathcal{I}) \neq \updownarrow$ , значение  $\rho$  постоянно. Пусть  $\rho^{-1}(\updownarrow) = \{t_1, \dots, t_k\}$ , где  $t_1 < \dots < t_k$ . Точку  $t_i$  назовём *точкой  $i$ -го фронта* заготовки  $\rho$ . Записью  $|\rho|$  обозначим общее число точек фронтов  $\rho$ :  $|\rho| = k$ . Точки  $\mathbf{t}_i^\rho$ ,  $i \in [0..k+1]$ , определим так:  $(\mathbf{t}_0^\rho, \mathbf{t}_1^\rho, \dots, \mathbf{t}_k^\rho, \mathbf{t}_{k+1}^\rho) = (\mathbf{a}, t_1, \dots, t_k, \mathbf{b})$ . Записями  $\mathfrak{J}_i^\rho$  и  $\mathbf{v}_i^\rho$ ,  $i \in [0..k]$ , обозначим соответственно интервал  $(\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)$  и значение из  $\mathfrak{T}$ , такое что  $\rho\langle\mathfrak{J}_i^\rho\rangle = \mathbf{v}_i^\rho$ . Отметим, что каждое значение  $\mathbf{v}_i^\rho$  существует и единственно, так как значение функции  $\rho$  на каждом интервале  $\mathfrak{J}_i^\rho$  постоянно и множество  $\rho^{-1}(\updownarrow)$  конечно.

**Пример 1.** На рисунке 3 изображены графики заготовок  $s$  и  $\rho$  на интервале  $(0, 5)$ , определяемых так:  $|s| = 4$ ,  $(\mathbf{t}_0^s, \dots, \mathbf{t}_5^s) = [0..5]$ ,  $\mathfrak{J}_i^s = (i, i+1)$ , где  $i \in [0..4]$ , и  $(\mathbf{v}_0^s, \dots, \mathbf{v}_4^s) = (1, 0, *, 1, 0)$ ;  $|\rho| = 3$ ,  $(\mathbf{t}_0^\rho, \dots, \mathbf{t}_4^\rho) = (0, 1, 2, 3, 5)$ ,  $\mathfrak{J}_i^\rho = (i, i+1)$ , где  $i \in [0..2]$ ,  $\mathfrak{J}_3^\rho = (3, 5)$  и  $(\mathbf{v}_0^\rho, \mathbf{v}_1^\rho, \mathbf{v}_2^\rho, \mathbf{v}_3^\rho) = (*, 1, 1, 0)$ . Значения 0, \* и 1 соответствуют нижнему, среднему (пунктирному) и верхнему уровням графиков. Вертикальные линии соответствуют значению  $\updownarrow$ .

**Утверждение 1.** Для любых заготовки  $\rho$ , точки  $t$  и индекса  $i$ ,  $i \in [0..|\rho|]$ , справедливо следующее:

1.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus (\mathfrak{J}_0^\rho \cup \dots \cup \mathfrak{J}_{|\rho|}^\rho) = \{\mathbf{t}_0^\rho, \dots, \mathbf{t}_{|\rho|+1}^\rho\}$ .
2. Если  $t \in \mathfrak{J}_i^\rho$ , то  $\rho(t-0) = \rho(t) = \rho(t+0) = \mathbf{v}_i^\rho$ .
3. Если  $t = \mathbf{t}_i^\rho$ , то  $\rho(t+0) = \mathbf{v}_i^\rho$ .
4. Если  $t = \mathbf{t}_{i+1}^\rho$ , то  $\rho(t-0) = \mathbf{v}_i^\rho$ .

*Доказательство.* Пункт 1 следует из определений  $\mathbf{t}_0^\rho, \dots, \mathbf{t}_{|\rho|+1}^\rho$  и  $\mathfrak{J}_0^\rho, \dots, \mathfrak{J}_{|\rho|}^\rho$ . Если  $t \in [\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)$ , то  $\rho(t+0) = \rho\langle(t, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)\rangle = \rho\langle(\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)\rangle = \mathbf{v}_i^\rho$ . Если  $t \in (\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho]$ , то  $\rho(t-0) = \rho\langle(\mathbf{t}_i^\rho, t)\rangle = \rho\langle(\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)\rangle = \mathbf{v}_i^\rho$ . Если  $t \in (\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)$ , то  $\rho(t) = \rho\langle(\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_{i+1}^\rho)\rangle = \mathbf{v}_i^\rho$ .  $\square$

**Следствие.** Для любых заготовки  $\rho$ , левой точки  $\ell$  и внутренней точки  $t$ , такой что  $t \neq \uparrow$ , существуют единственные индексы  $i, j$  диапазона  $[0..|\rho|]$ , такие что  $\ell \in [t_i^\rho, t_{i+1}^\rho)$  и  $t \in (t_j^\rho, t_{j+1}^\rho)$ .

Для обозначения индексов  $i, j$  последнего следствия будем использовать соответственно записи  $[\ell + 0]$  и  $[t]$  на месте индекса  $m$  в задании точек  $t_m^\rho$ , значений  $v_m^\rho$  и интервалов  $\mathfrak{I}_m^\rho$ . Тройчным цифровым сигналом назовём заготовку  $s$ , такую что  $v_{i-1}^s \neq v_i^s$  для всех  $i, i \in [1..|s|]$ . Диаграммой сигналов над конечным множеством переменных  $\text{Var}$  назовём отображение  $D : \text{Var} \rightarrow \mathfrak{S}$ , где  $\mathfrak{S}$  — множество всех сигналов. Множество  $\text{Var}$  далее полагаем заданным по умолчанию.

**Пример 2.** Заготовка  $\rho$  из примера 1 не является сигналом, так как  $v_1^\rho = v_2^\rho = 1$ . Заготовка  $s$  из того же примера является сигналом.

Упорядочим множество  $\mathfrak{T}: 0 < * < 1$ . Точкой переднего (заднего) фронта сигнала  $s$  назовём точку фронта  $t_i^s$ , такую что  $v_{i-1}^s < v_i^s$  ( $v_{i-1}^s > v_i^s$ ). Тот факт, что  $t$  является точкой переднего фронта сигнала  $s$ , будем записывать в следующем виде:  $s(t) = \uparrow$ . Для произвольной точки  $t$  записью  $\text{next}_\uparrow(s, t)$  обозначим точку  $t'$  переднего фронта, следующего за  $t$  в  $s: t < t'; s(t') = \uparrow; s\langle(t, t')\rangle \neq \uparrow$ . Тактом сигнала  $s$  назовём интервал  $(\ell, r)$ , такой что:  $\ell < r; \ell = \mathbf{a}$  или  $s(\ell) = \uparrow; r = \mathbf{b}$  или  $s(r) = \uparrow; s\langle(\ell, r)\rangle \neq \uparrow$ . Такт  $(\ell, r)$  назовём тактом точки  $t$  и обозначим записью  $C(s, t)$ , если  $t \in [\ell, r)$ .

### 3. Формулы и задача верификации

В данном разделе предлагается логика тройчных сигналов, включающая в себя синтаксис и семантику формул, предназначенных для описания свойств диаграмм, и постановку задачи верификации диаграмм. Синтаксис формул (над множеством переменных  $\text{Var}$ ) зададим следующей формой Бэкуса-Наура:

$$\varphi ::= 1 \mid * \mid x \mid f(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \mid (\varphi_1 \oplus \varphi_2) \mid (\circ \varphi_1),$$

где  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  — формулы,  $x \in \text{Var}$ ,  $f$  —  $k$ -местная тройчная функция,  $\oplus \in \{\mathbf{U}, \mathbf{C}, \mathbf{X}\}$  — двуместный темпоральный оператор и  $\circ$  — одноместный оператор отражения. Перечисленные функции и операторы будем называть сигнальными операциями. В записи формул иногда будем использовать инфиксную нотацию для тройчных функций и опускать внешнюю пару скобок, а также другие пары скобок согласно приоритетам операций: наиболее приоритетны одноместные операции; затем  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{X}$ ; затем остальные тройчные функции с обычными приоритетами.

Заметим, что сигнал  $s$  может трактоваться как описание изменения истинностного значения формулы в реальном времени:  $s(t \pm 0)$  — как истинность, ложность или неопределённость до и после точки  $t$ ;  $s(t)$  — как обозначение постоянства (стабильности) значения в точке  $t$ , если  $s(t) \in \mathfrak{T}$ , и непостоянства (нестабильности), если  $s(t) = \uparrow$ . При этом сигнал однозначно задаётся спектром истинностных значений справа от всех внутренних точек, что обосновывается следующим утверждением.

**Утверждение 2.** Для любых сигнала  $s$ , внутренней точки  $t$  и правой точки  $r$  и для сигнальной функции  $s^{+0}$ , определяемой тождеством  $s^{+0}(t) = s(t + 0)$ , верно следующее:

1. Если  $s(t - 0) = s(t + 0)$ , то  $s(t) = s^{+0}(t)$ , а иначе  $s(t) = \uparrow$ .

2. Существует точка  $\ell$ , такая что  $\ell < r$  и  $s(r - 0) = s^{+0}(\langle \ell, r \rangle)$ .

*Доказательство.* Пункт 1 следует из утверждения 1 и определения сигнала.

*Пункт 2.* Пусть  $\mathfrak{I}_{[r-0]}^s = \mathfrak{I}_i^s$ . По утверждению 1, для любой точки  $t'$  интервала  $\mathfrak{I}_i^s$  верно  $s^{+0}(t') = s(t' + 0) = \mathbf{v}_i^s = s(r - 0)$ . Значит,  $s^{+0}(\langle t_i^s, r \rangle) = s^{+0}(\mathfrak{I}_i^s) = s(r - 0)$ , и при этом  $t_i^s < r$ .  $\square$

Отразим упомянутую выше трактовку сигналов и свойства, сформулированные в утверждении 2, в логической семантике формул. Сопоставим каждой формуле  $\varphi$ , диаграмме  $D$  и левой точке  $\ell$  значение  $\varphi[D, \ell + 0]$  множества  $\mathfrak{I}$ , которое будем называть значением формулы  $\varphi$  на диаграмме  $D$  справа от левой точки  $\ell$ . В определении будем использовать вспомогательные виды значений  $\varphi$  на  $D$ :

- Значение слева от правой точки  $r$ :

$$\varphi[D, r - 0] = \begin{cases} v, & \text{если } \exists \ell \in [\mathbf{a}, r) : \forall t \in (\ell, r) : \varphi[D, t + 0] = v \in \mathfrak{I}; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

- Значение во внутренней точке  $t$ :

$$\varphi[D, t] = \begin{cases} \varphi[D, t + 0], & \text{если } \varphi[D, t - 0] = \varphi[D, t + 0]; \\ \downarrow & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

- Значение на интервале  $\mathcal{I}$ :  $\varphi[D, \mathcal{I}] \sim v \Leftrightarrow$  для любой точки  $t$  интервала  $\mathcal{I}$  верно  $\varphi[D, t] \sim v$ , где  $\sim$  — равенство ( $=$ ) или неравенство ( $\neq$ ).

В описании семантики формул понадобятся обобщения понятий переднего фронта и такта с сигналов на формулы. Для формулы  $\varphi$ , диаграммы  $D$  и внутренней точки  $t$  записью  $\varphi[D, t] = \uparrow$  обозначим следующий факт:  $\varphi[D, t - 0] < \varphi[D, t + 0]$ . Содержательное прочтение: формула  $\varphi$  становится достовернее на  $D$  в  $t$  или, по-другому,  $t$  — точка переднего фронта формулы  $\varphi$  на  $D$ . Записью  $\text{next}_{\uparrow}(\varphi, D, t)$ , где  $t$  — произвольная точка, обозначим передний фронт  $t'$  формулы  $\varphi$ , следующий за  $t$  на  $D$ :  $t < t'$ ;  $\varphi[D, t'] = \uparrow$ ;  $\varphi[D, (t, t')] \neq \uparrow$ . Тактом формулы  $\varphi$  на  $D$  назовём интервал  $(\ell, r)$ , такой что:  $\ell < r$ ;  $\ell = \mathbf{a}$  или  $\varphi[D, \ell] = \uparrow$ ;  $r = \mathbf{b}$  или  $\varphi[D, r] = \uparrow$ ;  $\varphi[D, (\ell, r)] \neq \uparrow$ . Записью  $C(\varphi, D, t)$  обозначим такт  $(\ell, r)$  формулы  $\varphi$  на  $D$ , такой что  $t \in [\ell, r)$ .

Отражением точки  $t$ , сигнала  $s$  и диаграммы  $D$  назовём соответственно точку  $t^{\circ}$ , сигнал  $s^{\circ}$  и диаграмму  $D^{\circ}$ , определяемые тождествами  $t^{\circ} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - t)$ ,  $s^{\circ}(t) = s(t^{\circ})$  и  $D^{\circ}(x) = D(x)^{\circ}$ .

**Утверждение 3.** Для любого сигнала  $s$  существует единственный сигнал  $s^{\circ}$ .

*Доказательство.* Единственность следует из того, что для любого сигнала  $s$  и любой внутренней точки  $t$  значение  $s(t^{\circ})$  определено однозначно.

*Существование.* Рассмотрим такую заготовку  $\rho$ :  $\rho^{-1}(\uparrow) = \{t^{\circ} \mid t \in s^{-1}(\uparrow)\}$ ;  $\mathbf{v}_i^{\rho} = \mathbf{v}_{|s|-i}^s$ ,  $i \in [0..|s|]$ . Верны соотношения  $\mathbf{v}_{i-1}^{\rho} = \mathbf{v}_{|s|-i+1}^s \neq \mathbf{v}_{|s|-i}^s = \mathbf{v}_i^{\rho}$ ,  $i \in [1..|\rho|]$ , а значит,  $\rho$  — сигнал. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку  $t$ . Если  $\rho(t) = \uparrow$ , то  $t \in \rho^{-1}(\uparrow)$ , а значит,  $t^{\circ} \in \{t^{\circ} \mid t \in \rho^{-1}(\uparrow)\} = \{t^{\circ\circ} \mid t \in s^{-1}(\uparrow)\} = s^{-1}(\uparrow)$ , то есть  $\rho(t) = \uparrow = s(t^{\circ})$ . Если  $\rho(t) \neq \uparrow$  и  $\mathfrak{I}_{[t]}^{\rho} = \mathfrak{I}_i^{\rho}$ , то  $t^{\circ} \in (t_{i+1}^{\rho\circ}, t_i^{\rho\circ}) = (t_{|s|-(i+1)}^s, t_{|s|-i}^s) = \mathfrak{I}_{|s|-i}^s$ , а значит,  $\rho(t) = \rho(\mathfrak{I}_i^{\rho}) = \mathbf{v}_i^{\rho} = \mathbf{v}_{|s|-i}^s = s(\mathfrak{I}_{|s|-i}^s) = s(t^{\circ})$ . Таким образом,  $\rho$  — сигнал, такой что для любой внутренней точки  $t$  верно  $\rho(t) = s(t^{\circ})$ , то есть  $\rho = s^{\circ}$ .  $\square$

Семантику формул (значение  $\varphi[D, \ell + 0]$ ) определим следующими правилами:

- $1[D, \ell + 0] = 1$ .

- $*[D, \ell + 0] = *$ .
- $x[D, \ell + 0] = D(x)(\ell + 0)$ , если  $x \in \text{Var}$ .
- $f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)[D, \ell + 0] = f(\varphi_1[D, \ell + 0], \dots, \varphi_k[D, \ell + 0])$ .
- $(\varphi \mathbf{U} \psi)[D, \ell + 0] = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists t \in (\ell, \mathbf{b}) : \psi[D, t] = (\varphi \vee \psi)[D, (\ell, t)] = 1; \\ *, & \text{если условие выше неверно и} \\ & \exists t \in (\ell, \mathbf{b}) : \psi[D, t] \neq 0 \text{ и } (\varphi \vee \psi)[D, (\ell, t)] \neq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$
- $(\varphi \mathbf{C} \psi)[D, \ell + 0] = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi[D, C(\psi, D, \ell)] = 1; \\ 0, & \text{если } \exists t \in C(\psi, D, \ell) : \varphi[D, t] = 0; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$
- $(\varphi \mathbf{X} \psi)[D, \ell + 0] = \begin{cases} v, & \text{если } \exists t = \text{next}_\uparrow(\psi, D, \ell) \text{ и } \varphi[D, t] = v \in \mathfrak{T}; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$
- $(\circlearrowleft \varphi)[D, \ell + 0] = \varphi[D^\circ, \ell^\circ - 0]$ .

Содержательное прочтение темпоральных операторов:  $\varphi \mathbf{U} \psi$  —  $\psi$  станет истинным, а до тех пор будет истинно  $\varphi$ ;  $\varphi \mathbf{C} \psi$  —  $\varphi$  истинно на текущем такте формулы  $\psi$ ;  $\varphi \mathbf{X} \psi$  —  $\varphi$  будет истинным в момент следующего переднего фронта формулы  $\psi$ ;  $\circlearrowleft \varphi$  — формула  $\varphi$  истинна, если поменять ролями будущее и прошлое (отразить временную ось и все сигналы относительно текущей точки). Строгая семантика и содержательная трактовка оператора  $\mathbf{U}$  совмещает в себе семантику и трактовку одноимённого оператора двоичных логик реального времени [1, 7] и троичных логик дискретного времени [12, 13]. Известные нам темпоральные логики реального времени не содержат операторов, сколь-нибудь схожих с операторами  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{X}$ . Известные нам темпоральные логики дискретного времени не содержат операторов, схожих с  $\mathbf{C}$ , и нередко содержат одноместный оператор  $\mathbf{X}$  (“в следующий момент времени”; в некоторых системах обозначений —  $\circ$ ) [1, 13], отдалённо похожий на оператор  $\mathbf{X}$  логики троичных сигналов, но ввиду отсутствия реального времени и точек фронтов существенно отличающийся и трактовкой, и строгим определением.

Запись  $D \models \varphi$  (формула  $\varphi$  выполняется на диаграмме  $D$ ) будем использовать как синоним записи  $\varphi[D, \mathbf{a} + 0] = 1$ . Задача верификации, исследуемая в работе, формулируется так: для заданных диаграммы  $D$  и формулы  $\varphi$  проверить справедливость соотношения  $D \models \varphi$ .

## 4. Сигнальная семантика формул

Решение задачи верификации основано на подходе к заданию семантики формул, согласно которому каждому формуле  $\varphi$  и диаграмме  $D$  сопоставляется сигнал, описывающий изменение значения формулы с течением реального времени. Для произвольных формулы  $\varphi$  и диаграммы  $D$  определим функцию  $\varphi[[D]] : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathfrak{T}_\uparrow$  тождеством  $\varphi[[D]](t) = \varphi[D, t]$ . Сигнальная семантика формул определяется этой функцией. Далее в разделе обосновывается корректность сигнальной семантики: доказываем, что функция  $\varphi[[D]]$  является сигналом и что значения сигнала  $\varphi[[D]]$  и формулы  $\varphi$  на  $D$  слева от правой точки и справа от левой точки всегда равны. Предлагаемое решение задачи верификации основано на сведении проверки соотношения  $\varphi \models D$  к вычислению и анализу сигнала  $\varphi[[D]]$ .

Записью  $\Delta(\chi_1, \chi_2)$ , где  $\chi_1, \chi_2$  — сигнальные функции, обозначим множество всех внутренних точек  $t$ , таких что  $\chi_1(t) \neq \chi_2(t)$ . Функции  $\chi_1, \chi_2$  назовём *почти равными*, если множество  $\Delta(\chi_1, \chi_2)$  конечно.

**Лемма 1.** *Для любых почти равных заготовок  $\rho_1, \rho_2$ , левой точки  $\ell$  и правой точки  $r$  верны равенства  $\rho_1(\ell + 0) = \rho_2(\ell + 0)$  и  $\rho_1(r - 0) = \rho_2(r - 0)$ .*

*Доказательство.* По определению значения заготовки справа, существуют точки  $r_1$  и  $r_2$ , такие что  $\ell < r_1, \ell < r_2$  и  $\rho_1(\ell + 0) = \rho_1(\langle \ell, r_1 \rangle)$  и  $\rho_2(\ell + 0) = \rho_2(\langle \ell, r_2 \rangle)$ . Рассмотрим точку  $r$ , равную наименьшей из точек  $r_1, r_2$ . Множество  $\Delta = (\ell, r) \cap \Delta(\rho_1, \rho_2)$  конечно, так как заготовки  $\rho_1, \rho_2$  почти равны. Рассмотрим наименьшую точку  $t$  множества  $\Delta$ . Так как  $(\ell, t) \cap \Delta = \emptyset, \ell < t$  и  $(\ell, t) \subseteq (\ell, r_1) \cap (\ell, r_2)$ , верно  $\rho_1(\ell + 0) = \rho_1(\langle \ell, t \rangle) = \rho_2(\langle \ell, t \rangle) = \rho_2(\ell + 0)$ .

Обоснование равенства  $\rho_1(r - 0) = \rho_2(r - 0)$  аналогично.  $\square$

**Лемма 2.** *Для любой заготовки  $\rho$  существует единственный почти равный сигнал  $s$ .*

*Доказательство. Существование.* Пусть  $m_1 < \dots < m_k$  — все индексы диапазона  $[1..|\rho|]$ , такие что  $\mathbf{v}_{m_{j-1}}^\rho \neq \mathbf{v}_{m_j}^\rho$ . Рассмотрим заготовку  $s$  следующего вида:  $s^{-1}(\uparrow) = \{\mathbf{t}_{m_1}^\rho, \dots, \mathbf{t}_{m_k}^\rho\}$ ;  $\mathbf{v}_0^s = \mathbf{v}_0^\rho$ ;  $\mathbf{v}_i^s = \mathbf{v}_{m_i}^\rho, i \in [1..k]$ . По заданию  $s$ , для каждого  $i, i \in [1..k]$ , справедлива цепочка соотношений (\*):  $\mathbf{v}_{m_{i-1}}^\rho = \mathbf{v}_{m_{i-1}+1}^\rho = \dots = \mathbf{v}_{m_i-1}^\rho \neq \mathbf{v}_{m_i}^\rho$ . Из (\*) следует, что  $\mathbf{v}_{i-1}^s = \mathbf{v}_{m_{i-1}}^\rho \neq \mathbf{v}_{m_i}^\rho = \mathbf{v}_i^s$  для всех  $i, i \in [1..|s|]$ , а значит,  $s$  — сигнал. Также из (\*) следует, что для любой точки  $t$  любого интервала  $\mathcal{I}_j^\rho, j \in [0..|\rho|]$ , верно  $s(t) = \rho(t)$ . По утверждению 1,  $\Delta(s, \rho) \subseteq (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \setminus (\mathcal{I}_0^\rho \cup \dots \cup \mathcal{I}_{|\rho|}^\rho) = \rho^{-1}(\uparrow)$ . Значит, множество  $\Delta(s, \rho)$  конечно, то есть сигнал  $s$  почти равен заготовке  $\rho$ .

*Единственность.* Рассмотрим произвольные различные сигналы  $s_1, s_2$ : существует внутренняя точка  $t$ , такая что  $s_1(t) \neq s_2(t)$ . Покажем, что сигналы  $s_1, s_2$  не являются почти равными. Предположим от противного, что  $s_1(t - 0) = s_2(t - 0)$  и  $s_1(t + 0) = s_2(t + 0)$ . Если  $s_1(t - 0) = s_1(t + 0)$ , то, по утверждению 2,  $s_1(t) = s_1(t + 0) = s_2(t + 0) = s_2(t)$  (противоречие). Иначе  $s_1(t - 0) \neq s_1(t + 0)$  и, по утверждению 2,  $s_1(t) = s_2(t) = \uparrow$  (противоречие). Значит предположение неверно, то есть верно хотя бы одно из неравенств  $s_1(t - 0) \neq s_2(t - 0), s_1(t + 0) \neq s_2(t + 0)$ . Тогда из леммы 1 следует, что сигналы  $s_1, s_2$  не являются почти равными.  $\square$

Опираясь на лемму 2, обозначим (существующий и единственный) сигнал, почти равный заготовке  $\rho$ , записью  $\rho^\uparrow$ . Для заданных формулы  $\varphi$  и диаграммы  $D$  функцию  $\varphi[[D]]$  назовём *корректной*, если для любых левой точки  $\ell$  и правой точки  $r$  верны равенства  $\varphi[[D]](\ell + 0) = \varphi[D, \ell + 0]$  и  $\varphi[[D]](r - 0) = \varphi[D, r - 0]$ . В формулировках следующих далее лемм 3–10 для краткости опущено общее начало “для любых диаграммы  $D$ , формулы  $\varphi$ , заготовки  $\rho$  и сигнала  $s$  верно следующее”.

**Лемма 3.** *Если для любой левой точки  $\ell$  верно  $s(\ell + 0) = \varphi[D, \ell + 0]$ , то  $s = \varphi[[D]]$  — корректный сигнал.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную правую точку  $r$ . По утверждению 2, существует точка  $t$ , такая что  $t < r$  и  $s(r - 0) = s^{+0}(\langle t, r \rangle)$ . Значит, для любой точки  $t'$  интервала  $(t, r)$  верно  $s(r - 0) = s(t' + 0) = \varphi[D, t' + 0]$ . По определению значения формулы слева,  $s(r - 0) = \varphi[D, r - 0]$ .

Рассмотрим произвольную внутреннюю точку  $t$ . По условию и по доказанному,  $s(t+0) = \varphi[D, t+0]$  и  $s(t-0) = \varphi[D, t-0]$ . По утверждению 2 и определению значения формулы в точке,  $s(t) = \varphi[D, t]$ .  $\square$

**Лемма 4.** Если для любой левой точки  $\ell$  верно  $\rho(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ , то  $\rho^\dagger = \varphi[[D]]$  – корректный сигнал.

*Доказательство.*  $\rho^\dagger$  – сигнал, почти равный  $\rho$ . По лемме 1, для любой левой точки  $\ell$  верно  $\rho^\dagger(\ell+0) = \rho(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ . Значит, сигнал  $\rho^\dagger$  подходит под условие леммы 3.  $\square$

**Лемма 5.** Если  $\varphi \in \{1, *\} \cup \text{Var}$ , то  $\varphi[[D]]$  – корректный сигнал.

*Доказательство.* Случай 1:  $\varphi = v \in \{0, 1\}$ . Рассмотрим сигнал  $s$ , всюду принимающий значение  $v$ . Для любой левой точки  $\ell$  верно  $s(\ell+0) = v = \varphi[D, \ell+0]$ .

Случай 2:  $\varphi = x \in \text{Var}$ . Рассмотрим сигнал  $s = D(x)$ . Для любой левой точки  $\ell$  верно  $s(\ell+0) = D(x)(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ .

Итог: по лемме 3, в обоих случаях  $s = \varphi[[D]]$  – корректный сигнал.  $\square$

Для троичной функции  $f$  местности  $k$  и сигналов  $s_1, \dots, s_k$  записью  $f(s_1, \dots, s_k)$  обозначим такую заготовку  $\rho$ :

$$\rho^{-1}(\dagger) = s_1^{-1}(\dagger) \cup \dots \cup s_k^{-1}(\dagger); \quad \mathbf{v}_i^\rho = f(s_1(\mathbf{t}_i^\rho + 0), \dots, s_k(\mathbf{t}_i^\rho + 0)), \quad i \in [0..|\rho|].$$

**Лемма 6.** Если  $f$  – троичная функция,  $\varphi = f(\psi_1, \dots, \psi_k)$  и  $s_1 = \psi_1[[D]], \dots, s_k = \psi_k[[D]]$  – корректные сигналы, то  $f(s_1, \dots, s_k)^\dagger = \varphi[[D]]$  – корректный сигнал.

*Доказательство.* Пусть  $\rho = f(s_1, \dots, s_k)$ . По лемме 4, достаточно показать, что для любой левой точки  $\ell$  верно  $\rho(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ .

Пусть  $\mathfrak{I}_{[\ell+0]}^\rho = \mathfrak{I}_i^\rho$ . По утверждению 1 и заданию  $\rho$ , верны равенства  $\rho(\ell+0) = \mathbf{v}_i^\rho = f(s_1(\mathbf{t}_i^\rho + 0), \dots, s_k(\mathbf{t}_i^\rho + 0)) = f(s_1 \langle \mathfrak{I}_i^\rho \rangle, \dots, s_k \langle \mathfrak{I}_i^\rho \rangle) = f(s_1(\ell+0), \dots, s_k(\ell+0))$ . По условию леммы, верны равенства  $f(s_1(\ell+0), \dots, s_k(\ell+0)) = f(\psi_1[[D]](\ell+0), \dots, \psi_k[[D]](\ell+0)) = f(\psi_1[D, \ell+0], \dots, \psi_k[D, \ell+0]) = f(\psi_1, \dots, \psi_k)[D, \ell+0] = \varphi[D, \ell+0]$ .  $\square$

Для сигналов  $s_1, s_2$  записью  $\mathbf{U}(s_1, s_2)$  обозначим такую заготовку  $\rho$ :

$$\rho^{-1}(\dagger) = s_1^{-1}(\dagger) \cup s_2^{-1}(\dagger);$$

$$\mathbf{v}_i^\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists j \in [0..|s_2|] : \mathbf{t}_i^\rho < \mathbf{t}_{j+1}^{s_2}, \mathbf{v}_j^{s_2} = 1 \text{ и } s_1 \langle (\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_j^{s_2}) \rangle = 1; \\ *, & \text{если условие выше не выполнено и} \\ & \exists j \in [0..|s_2|] : \mathbf{t}_i^\rho < \mathbf{t}_{j+1}^{s_2}, \mathbf{v}_j^{s_2} \neq 0 \text{ и } s_1 \langle (\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_j^{s_2}) \rangle \neq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i \in [0..|\rho|]. \end{cases}$$

**Лемма 7.** Если  $\varphi = (\psi_1 \mathbf{U} \psi_2)$  и  $s_1 = \psi_1[[D]], s_2 = \psi_2[[D]]$  – корректные сигналы, то  $\mathbf{U}(s_1, s_2)^\dagger = \varphi[[D]]$  – корректный сигнал.

*Доказательство.* Пусть  $\rho = \mathbf{U}(s_1, s_2)$ . По лемме 4, достаточно показать, что для любой левой точки  $\ell$  верно  $\rho(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ . Пусть, для ясности,  $\mathfrak{I}_{[\ell+0]}^\rho = \mathfrak{I}_i^\rho$ . По утверждению 1, достаточно показать, что  $\mathbf{v}_i^\rho = \varphi[D, \ell+0]$ .

Случай 1:  $\mathbf{v}_i^\rho = 1$ . Тогда для некоторого  $j, j \in [0..|s_2|]$ , верно  $\mathbf{t}_i^\rho < \mathbf{t}_{j+1}^{s_2}, \mathbf{v}_j^{s_2} = 1$  и  $s_1 \langle (\mathbf{t}_i^\rho, \mathbf{t}_j^{s_2}) \rangle = 1$ .

Подслучай (а):  $\ell \geq \mathbf{t}_j^{s_2}$ . По заданию множества  $\rho^{-1}(\dagger)$  и выбору индекса  $i$ , верны неравенства  $\mathbf{t}_j^{s_2} \leq \ell < \mathbf{t}_{i+1}^\rho \leq \mathbf{t}_{j+1}^{s_2}$ . Рассмотрим точку  $t = (\ell + \mathbf{t}_{j+1}^{s_2})/2$ . По утверждению 1,

верно  $s_2(t) = s_2\langle(\ell, t)\rangle = 1$ . По заданию  $s_2$ , верно  $\psi_2[D, t] = \psi_2[D, (\ell, t)] = 1$ . По логической семантике дизъюнкции и последнему равенству, верно  $(\psi_1 \vee \psi_2)[D, (\ell, t)] = 1$ . Значит,  $\varphi[D, \ell + 0] = 1$ .

*Подслучай (б):*  $\ell < \mathfrak{t}_j^{s_2}$ . Тогда  $s_1\langle(\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle = s_2\langle(\mathfrak{t}_i^{\rho}, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle = 1$ . По заданию  $s_1$ , верно  $\psi_1[D, (\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})] = 1$ . Рассмотрим точку  $t = (\mathfrak{t}_j^{s_2} + \mathfrak{t}_{j+1}^{s_2})/2$ . По утверждению 1, верно  $s_2(t) = s_2\langle(\mathfrak{t}_j^{s_2}, t)\rangle = 1$ . По заданию  $s_2$ , верно  $\psi_2[D, t] = \psi_2[D, (\mathfrak{t}_j^{s_2}, t)] = 1$ . Из полученных равенств  $\psi_1[D, (\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})] = \psi_2[D, (\mathfrak{t}_j^{s_2}, t)] = 1$  следует равенство  $(\psi_1 \vee \psi_2)[D, (\ell, t)] = 1$ . Значит, с учётом соотношения  $\psi_2[D, t] = 1$ , верно  $\varphi[D, \ell + 0] = 1$ .

*Случай 2:*  $\mathbf{v}_i^{\rho} \neq 0$ . Тогда, аналогично случаю 1, верно  $\varphi[D, \ell] \neq 0$ .

*Случай 3:*  $\varphi[D, \ell + 0] = 1$ . Тогда существует точка  $t$ , такая что  $\ell < t$  и  $\psi_2[D, t] = (\psi_1 \vee \psi_2)[D, (\ell, t)] = 1$ . Пусть  $\mathfrak{J}_{[\ell+0]}^{s_2} = \mathfrak{J}_m^{s_2}$  и  $\mathfrak{J}_t^{s_2} = \mathfrak{J}_k^{s_2}$ . Тогда  $\mathbf{v}_k^{s_2} = s_2(t) = 1$ , и так как  $\ell < t$ , то верно  $m \leq k$ . Рассмотрим наименьший индекс  $j$  диапазона  $[m..k]$ , такой что  $\mathbf{v}_j^{s_2} = 1$ . По выбору индексов  $i$  и  $m$  и неравенству  $m \leq j$ , верно  $\mathfrak{t}_i^{\rho} \leq \ell < \mathfrak{t}_{j+1}^{s_2}$ .

Предположим, что существует точка  $t'$  интервала  $(\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})$ , такая что  $s_1(t') \neq 1$ . Тогда, по утверждению 2, существует точка  $t''$  интервала  $(\ell, t')$ , такая что  $s_1(t'' + 0) \neq 1$ . По выбору индекса  $j$ , верно  $s_2\langle(\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle \neq 1$ , а значит,  $s_2(t'' + 0) \neq 1$ . Пусть  $s_{12} = (\psi_1 \vee \psi_2)[[D]]$ . По лемме 6,  $s_{12}$  — корректный сигнал, а значит,  $s_{12}(t'' + 0) = \vee(s_1(t'' + 0), s_2(t'' + 0)) \neq 1$ . При этом, согласно полученному в начале случая,  $s_{12}(t'' + 0) = s_{12}\langle(t'', t)\rangle = s_{12}\langle(\ell, t)\rangle = 1$ , что противоречит последнему неравенству. Следовательно, предположение неверно:  $s_1\langle(\ell, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle = 1$  и, по утверждению 1 и выбору индекса  $i$ ,  $s_1\langle(\mathfrak{t}_i^{\rho}, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle = 1$ .

Итог рассуждений случая 3: существует индекс  $j$ , такой что  $\mathfrak{t}_i^{\rho} \leq \mathfrak{t}_j^{s_2}$ ,  $\mathbf{v}_j^{s_2} = 1$  и  $s_1\langle(\mathfrak{t}_i^{\rho}, \mathfrak{t}_j^{s_2})\rangle = 1$ . Значит, по заданию  $\rho$ , верно  $\mathbf{v}_i^{\rho} = 1$ .

*Случай 4:*  $\varphi[D, \ell + 0] \neq 0$ . Тогда, аналогично случаю 3, верно  $\mathbf{v}_i^{\rho} \neq 0$ .

*Итог:* верны равносильности  $\mathbf{v}_i^{\rho} = 1 \Leftrightarrow \varphi[D, \ell + 0] = 1$  и  $\mathbf{v}_i^{\rho} \neq 0 \Leftrightarrow \varphi[D, \ell + 0] \neq 0$ . Значит, так как  $\mathbf{v}_i^{\rho} \in \{0, 1, *\}$ , верно и равенство  $\mathbf{v}_i^{\rho} = \varphi[D, \ell + 0]$ .  $\square$

Для сигналов  $s_1, s_2$  записью  $\mathbf{C}(s_1, s_2)$  обозначим такую заготовку  $\rho$ :

$$\rho^{-1}(\uparrow) = s_1^{-1}(\uparrow) \cup s_2^{-1}(\uparrow);$$

$$\mathbf{v}_i^{\rho} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_1\langle C(s_2, \mathfrak{t}_i^{\rho})\rangle = 1; \\ 0, & \text{если } \exists t \in C(s_2, \mathfrak{t}_i^{\rho}) : s_1(t) = 0; \\ * & \text{в остальных случаях, } i \in [0..|\rho|]. \end{cases}$$

**Лемма 8.** Если  $\varphi = (\psi_1 \mathbf{C} \psi_2)$  и  $s_1 = \psi_1[[D]]$ ,  $s_2 = \psi_2[[D]]$  — корректные сигналы, то  $\mathbf{C}(s_1, s_2)^{\uparrow} = \varphi[[D]]$  — корректный сигнал.

*Доказательство.* Пусть  $\rho = \mathbf{C}(s_1, s_2)$ . Аналогично доказательству леммы 7, достаточно показать, что если  $\mathfrak{J}_{[\ell+0]}^{\rho} = \mathfrak{J}_i^{\rho}$ , то  $\mathbf{v}_i^{\rho} = \varphi[D, \ell + 0]$ . Для обоснования этого равенства достаточно заметить следующее. По заданию  $s_1$ , для любой внутренней точки  $t$  верно  $s_1(t) = \psi_1[D, t]$ . По заданию  $s_2$  и определениям передних фронтов и тактов сигналов и формул,  $C(s_2, \mathfrak{t}_i^{\rho}) = C(s_2, \ell) = C(\psi_2, D, \ell)$ .  $\square$

Для сигналов  $s_1, s_2$  записью  $\mathbf{X}(s_1, s_2)$  обозначим такую заготовку  $\rho$ :

$$\rho^{-1}(\uparrow) = s_1^{-1}(\uparrow) \cup s_2^{-1}(\uparrow);$$

$$\mathbf{v}_i^{\rho} = \begin{cases} v, & \text{если } \exists t = \text{next}_{\uparrow}(s_2, \mathfrak{t}_i^{\rho}) \text{ и } v = s_1(t) \neq \uparrow; \\ * & \text{в остальных случаях, } i \in [0..|\rho|]. \end{cases}$$

**Лемма 9.** Если  $\varphi = (\psi_1 \mathbf{X} \psi_2)$  и  $s_1 = \psi_1[[D]]$ ,  $s_2 = \psi_2[[D]]$  — корректные сигналы, то  $\mathbf{X}(s_1, s_2)^{\uparrow} = \varphi[[D]]$  — корректный сигнал.

*Доказательство.* Пусть  $\rho = \mathbf{X}(s_1, s_2)$ . Аналогично доказательству леммы 7, достаточно показать, что если  $\mathfrak{I}_{[\ell+0]}^\rho = \mathfrak{I}_i^\rho$ , то  $\mathbf{v}_i^\rho = \varphi[D, \ell+0]$ . Для обоснования этого равенства достаточно заметить следующее. По заданию  $s_1$ , для любой внутренней точки  $t$  верно  $s_1(t) = \psi_1[D, t]$ . По заданию  $s_2$  и определениям передних фронтов и следующих передних фронтов сигналов и формул, значения  $next_{\uparrow}(s_2, \mathbf{t}_i^\rho)$ ,  $next_{\uparrow}(s_2, \ell)$  и  $next_{\uparrow}(\psi_2, D, \ell)$  либо все не определены, либо все определены и равны.  $\square$

**Лемма 10.** *Если  $\varphi = (\circ\psi)$  и  $s = \psi[[D^\circ]]$  – корректный сигнал, то  $s^\circ = \varphi[[D]]$  – корректный сигнал.*

*Доказательство.* По лемме 3, достаточно показать, что для любой левой точки  $\ell$  верно  $s^\circ(\ell+0) = \varphi[D, \ell+0]$ . По условию леммы и определениям отражения сигнала и точки и значений сигнала справа и слева, верна цепочка равенств  $s^\circ(\ell+0) = s(\ell^\circ - 0) = \psi[[D^\circ]](\ell^\circ - 0) = \psi[D^\circ, \ell^\circ - 0] = \varphi[D, \ell+0]$ .  $\square$

**Теорема 1.** *Для любых формулы  $\varphi$  и диаграммы  $D$  функция  $\varphi[[D]]$  является корректным сигналом.*

*Доказательство.* Применим индукцию по построению формулы. База индукции:  $\varphi \in \{1, *\} \cup \text{Var}$  – обосновывается леммой 5. Индуктивный переход:  $\varphi = (\psi_1 \oplus \psi_2)$ , где  $\oplus \in \{\mathbf{U}, \mathbf{C}, \mathbf{X}\}$ , или  $\varphi = (\circ\psi)$  – обосновывается леммами 6–10.  $\square$

## 5. Алгоритм верификации диаграмм сигналов

Заготовку  $\rho$  назовём *рациональной*, если все числа множества  $\rho^{-1}(\uparrow) \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  рациональны. *Рациональной диаграммой* назовём диаграмму, все сигналы области значений которой рациональны. В алгоритмах работы с сигналами рассматриваются только рациональные точки, заготовки, сигналы и диаграммы. Такое ограничение типично для моделей с реальным временем [1, 8] и связано с тем, что: множество действительных чисел континуально; разнообразие входных данных алгоритма и множество рациональных чисел счётны; любое действительное число можно приблизить рациональным с любой заданной точностью. Отметим, что в алгоритмах можно использовать и более широкие (но всё равно счётные) множества чисел по сравнению с рациональными, однако на практике это обычно не требуется, и в описании алгоритмов это не столь важно.

В качестве конечного представления  $\bar{\rho}$  заготовки  $\rho$  в алгоритмах будем использовать пару  $\langle T, V \rangle$ , где  $T = (\mathbf{t}_1^\rho, \dots, \mathbf{t}_{|\rho|}^\rho)$  и  $V = (\mathbf{v}_0^\rho, \mathbf{v}_1^\rho, \dots, \mathbf{v}_{|\rho|}^\rho)$ . В связи с устройством такого представления  $\rho$  будем в алгоритмах использовать записи  $|\rho|$ ,  $\mathbf{t}_i^\rho$  и  $\mathbf{v}_j^\rho$ , где  $i \in [0..|\rho| + 1]$  и  $j \in [0..|\rho|]$ , понимая под этим размер набора  $T$ , соответствующие точки и значения представления и точки  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Диаграмму  $D$  представим в виде конечного отображения  $\bar{D}$ , сопоставляющего каждой переменной  $x$  пару  $\bar{x}$ . Записью  $|D|$  обозначим общее число точек фронтов образов  $D$ :  $|D| = \sum_{x \in \text{Var}} |D(x)|$ . Записью  $|\varphi|$ , где  $\varphi$  – формула, обозначим общее число сигнальных операций в  $\varphi$ .

Алгоритм верификации (проверки соотношения  $D \models \varphi$ ) опишем в процедурном стиле. Результат выполнения процедуры  $\pi$  на входных данных  $o_1, \dots, o_m$  обозначим записью  $\pi(o_1, \dots, o_m)$ . *Проверками* будем называть процедуры с двумя возможными результатами: 0 (неуспех) и 1 (успех). *Сложностью* процедуры в дальнейших

оценках будем считать общее число сравнений и присваиваний значений множества  $\mathfrak{I}_\downarrow$  и точек. Обсуждаемые далее оценки сложности не являются оптимальными, но достаточны для обоснования полиномиальной разрешимости исследуемой задачи.

Алгоритм отождествляется с основной процедурой  $\Pi$ , описанной после всех вспомогательных процедур. В описаниях процедур полагается, что:  $\rho$  — рациональная заготовка;  $s, s_1, s_2, \dots, s_k$  — рациональные сигналы;  $\ell, r$  и  $t$  — рациональные левая, правая и внутренняя точки соответственно;  $v \in \mathfrak{I}$ .

**Процедура  $\pi_{+0}$ :**  $\pi_{+0}(\bar{s}, \ell) = s(\ell + 0)$ . Устройство процедуры:

- Перебором вычислить индекс  $i$  диапазона  $[0..|s|]$ , такой что  $\mathfrak{t}_i^s \leq \ell < \mathfrak{t}_{i+1}^s$ .
- Выдать результат:  $\pi_{+0}(\bar{s}, \ell) = \mathfrak{v}_i^s$ .

*Корректность процедуры* обосновывается утверждением 1.

*Сложность процедуры:*  $O(|s|)$ .

**Процедура  $\pi_{-0}$ :**  $\pi_{-0}(\bar{s}, r) = s(r - 0)$ . Устройство процедуры:

- Перебором вычислить индекс  $i$  диапазона  $[0..|s|]$ , такой что  $\mathfrak{t}_i^s < r \leq \mathfrak{t}_{i+1}^s$ .
- Выдать результат:  $\pi_{-0}(\bar{s}, r) = \mathfrak{v}_i^s$ .

*Корректность процедуры* обосновывается утверждением 1.

*Сложность процедуры:*  $O(|s|)$ .

**Процедура  $\pi_{val}$ :**  $\pi_{val}(\bar{s}, t) = s(t)$ . Устройство процедуры:

- Вычислить значения  $v_- = \pi_{-0}(\bar{s}, t)$  и  $v_+ = \pi_{+0}(\bar{s}, t)$ .
- Выдать результат: если  $v_- = v_+$ , то  $\pi_{val}(\bar{s}, t) = v_+$ ; иначе  $\pi_{val}(\bar{s}, t) = \uparrow$ .

*Корректность процедуры* обосновывается утверждением 2 и корректностью процедур  $\pi_{-0}, \pi_{+0}$ . *Сложность процедуры:*  $O(|s|)$ , определяется вызовами  $\pi_{-0}, \pi_{+0}$ .

**Процедура  $\pi_{clean}$ :**  $\pi_{clean}(\bar{\rho}) = \bar{\rho}^\downarrow$ . Устройство процедуры:

- Перебором вычислить все индексы  $i_1, \dots, i_k$  диапазона  $[1..|\rho|]$ , такие что  $\mathfrak{v}_{i_j-1}^\rho \neq \mathfrak{v}_{i_j}^\rho$ , в порядке возрастания.
- Выдать результат:  $\pi_{clean}(\bar{\rho}) = \langle (\mathfrak{t}_{i_1}^\rho, \dots, \mathfrak{t}_{i_k}^\rho), (\mathfrak{v}_0^\rho, \mathfrak{v}_{i_1}^\rho, \dots, \mathfrak{v}_{i_k}^\rho) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается в доказательстве леммы 2.

*Сложность процедуры:*  $O(|\rho|)$ .

**Проверка  $\pi_\forall$ :**  $\pi_\forall(\bar{s}, \ell, r, v) = 1 \Leftrightarrow s\langle(\ell, r)\rangle = v$ . Устройство проверки:

- Если  $r \leq \ell$ , то выдать результат:  $\pi_\forall(\bar{s}, \ell, r, v) = 1$ . Иначе продолжить проверку.
- Перебором вычислить индекс  $i$  диапазона  $[0..|s|]$ , такой что  $\mathfrak{t}_i^s \leq \ell < \mathfrak{t}_{i+1}^s$ .
- Выдать результат:  $\pi_\forall(\bar{s}, \ell, r, v) = 1 \Leftrightarrow r \leq \mathfrak{t}_{i+1}^s$  и  $\mathfrak{v}_i^s = v$ .

*Корректность проверки* обосновывается утверждением 1: проверка успешна в том и только том случае, если  $(\ell, r) = \emptyset$  или для некоторого  $i$  верно  $(\ell, r) \subseteq \mathfrak{I}_i^s$  и  $v = \mathfrak{v}_i^s$ .

*Сложность проверки:*  $O(|s|)$ .

**Проверка  $\pi_\exists$ :**  $\pi_\exists(\bar{s}, \ell, r, v) = 1 \Leftrightarrow \exists t \in (\ell, r) : s(t) = v$ . Устройство проверки:

- Если  $r \leq \ell$ , то выдать результат:  $\pi_\exists(\bar{s}, \ell, r, v) = 0$ . Иначе продолжить проверку.
- Перебором вычислить индекс  $i$  диапазона  $[0..|s|]$ , такой что  $\mathfrak{t}_i^s \leq \ell < \mathfrak{t}_{i+1}^s$ .
- Перебором вычислить индекс  $j$  диапазона  $[i..|s|]$ , такой что  $\mathfrak{t}_j^s < r \leq \mathfrak{t}_{j+1}^s$ .
- Выдать результат:  
 $\pi_\exists(\bar{s}, \ell, r, v) = 1 \Leftrightarrow$  хотя бы одно из значений  $\mathfrak{v}_k^s, k \in [i..j]$ , равно  $v$ .

*Корректность проверки* обосновывается утверждением 1: проверка успешна в том и только том случае, если  $(\ell, r) \neq \emptyset$  и интервал  $(\ell, r)$  пересекается хотя бы с одним интервалом  $\mathfrak{I}_k^s$ , таким что  $\mathbf{v}_k^s = 1$ . *Сложность проверки*:  $O(|s|)$ .

**Проверка  $\pi_{\uparrow}$** :  $\pi_{\uparrow}(\bar{s}, t) = 1 \Leftrightarrow s(t) = \uparrow$ . Устройство проверки:

- Вычислить значения  $v_- = \pi_{-0}(\bar{s}, t)$  и  $v_+ = \pi_{+0}(\bar{s}, t)$ .
- Выдать результат:  $\pi_{\uparrow}(\bar{s}, t) = 1 \Leftrightarrow v_- < v_+$ .

*Корректность проверки* обосновывается определением точки переднего фронта сигнала, утверждением 2 и корректностью процедур  $\pi_{-0}$ ,  $\pi_{+0}$ .

*Сложность проверки*:  $O(|s|)$ , определяется вызовами процедур  $\pi_{-0}$  и  $\pi_{+0}$ .

**Процедура  $\pi_{next}$** :  $\pi_{next}(\bar{s}, \ell) = \begin{cases} next_{\uparrow}(s, \ell), & \text{если это значение существует;} \\ \mathbf{b} & \text{иначе.} \end{cases}$

Устройство процедуры:

- Перебором вычислить наименьший индекс  $i$  диапазона  $[1..|s|]$ , такой что  $\ell < \mathbf{t}_i^s$  и проверка  $\pi_{\uparrow}(\bar{s}, \mathbf{t}_i^s)$  успешна.  
Если перебором такой индекс не обнаружен, то положить  $i = |s| + 1$ .
- Выдать результат:  $\pi_{next}(\bar{s}, \ell) = \mathbf{t}_i^s$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением точки следующего фронта и корректностью проверки  $\pi_{\uparrow}$ .

*Сложность процедуры*:  $O(|s|^2)$ , определяется  $|s|$  вызовами проверки  $\pi_{\uparrow}$ .

**Процедура  $\pi_{cycle}$** :  $\pi_{cycle}(\bar{s}, \ell) = \langle t_1, t_2 \rangle$  — пара точек, такая что  $(t_1, t_2) = C(s, \ell)$ .

Устройство процедуры:

- Перебором вычислить наибольший индекс  $i$  диапазона  $[1..|s|]$ , такой что  $\mathbf{t}_i^s \leq \ell$  и проверка  $\pi_{\uparrow}(\bar{s}, \mathbf{t}_i^s)$  успешна.  
Если такого индекса не существует, то положить  $i = 0$ .
- Вычислить индекс  $j = \pi_{next}(\bar{s}, \ell)$ .
- Выдать результат:  $\pi_{cycle}(\bar{s}, \ell) = \langle \mathbf{t}_i^s, \mathbf{t}_j^s \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением такта точки  $t$  и корректностью проверки  $\pi_{\uparrow}$  и процедуры  $\pi_{next}$ .

*Сложность процедуры*:  $O(|s|^2)$ , определяется  $|s|$  вызовами процедуры  $\pi_{\uparrow}$ .

**Процедура  $\pi_{\circ}$** :  $\pi_{\circ}(\bar{s}) = \bar{s}^{\circ}$ . Устройство процедуры:

- Выдать результат:  $\pi_{\circ}(\bar{s}) = \langle (\mathbf{t}_{|s|}^s, \mathbf{t}_{|s|-1}^s, \dots, \mathbf{t}_1^s), (\mathbf{v}_{|s|}^s, \mathbf{v}_{|s|-1}^s, \dots, \mathbf{v}_0^s) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается в доказательстве утверждения 3.

*Сложность процедуры*:  $O(|s|)$ .

**Процедура  $\pi_{\circ'}$** :  $\pi_{\circ'}(\bar{D}) = \bar{D}^{\circ}$ . Устройство процедуры:

- Для каждой переменной  $x$  вычислить представление  $\bar{s}_x = \pi_{\circ}(\bar{D}(x))$ .
- Выдать результат:  $\pi_{\circ'}(\bar{D})$  — отображение, сопоставляющее каждой переменной  $x$  представление  $\bar{s}_x$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением отражения диаграммы и корректностью процедуры  $\pi_{\circ}$ .

*Сложность процедуры*:  $O(|D|)$ , определяется сложностью процедуры  $\pi_{\circ}$ .

**Спектр процедур  $\pi_{\mathfrak{f}}$** :  $\pi_{\mathfrak{f}}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k) = \overline{\mathfrak{f}(s_1, \dots, s_k)}$ , где  $\mathfrak{f}$  —  $k$ -местная троичная функция. Устройство каждой такой процедуры:

- Перебором точек, содержащихся в  $\overline{s_1}, \dots, \overline{s_k}$ , вычислить набор  $(t_1, \dots, t_m)$  всех таких точек без повторений в порядке возрастания. Положить  $t_0 = \mathbf{a}$ .
- Для каждого индекса  $i$  диапазона  $[0..m]$  вычислить значение  $v_i = f(\pi_{+0}(\overline{s_1}, t_i), \dots, \pi_{+0}(\overline{s_k}, t_i))$ .
- Выдать результат:  $\pi_f(\overline{s_1}, \dots, \overline{s_k}) = \langle (t_1, \dots, t_m), (v_0, \dots, v_m) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением заготовки  $f(s_1, \dots, s_k)$  и корректностью процедуры  $\pi_{+0}$ . *Сложность процедуры*:  $O(n^2)$ , где  $n = |s_1| + \dots + |s_k|$ , определяется  $O(n)$  вызовами процедуры  $\pi_{+0}$ .

**Процедура  $\pi_U$** :  $\pi_U(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \overline{U(s_1, s_2)}$ . Устройство процедуры:

- Перебором точек, содержащихся в  $\overline{s_1}, \overline{s_2}$ , вычислить набор  $(t_1, \dots, t_m)$  всех таких точек без повторений в порядке возрастания. Положить  $t_0 = \mathbf{a}$ .
- Для каждого индекса  $i$  диапазона  $[0..m]$  вычислить значение  $v_i$ :
  - перебором проверить, существует ли индекс  $j$  диапазона  $[0..|s_2|]$ , такой что  $t_i < t_{j+1}^{s_2}$ ,  $v_j^{s_2} = 1$  и проверка  $\pi_{\forall}(s_1, t_i, t_j^{s_2}, 1)$  успешна: если существует, то  $v_i = 1$ , иначе продолжить вычисление  $v_i$ ;
  - перебором проверить, существует ли индекс  $j$  диапазона  $[0..|s_2|]$ , такой что  $t_i < t_{j+1}^{s_2}$ ,  $v_j^{s_2} \neq 0$  и проверка  $\pi_{\exists}(s_1, t_i, t_j^{s_2}, 0)$  неуспешна: если существует, то  $v_i = *$ , иначе  $v_i = 0$ .
- Выдать результат:  $\pi_U(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \langle (t_1, \dots, t_m), (v_0, \dots, v_m) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением заготовки  $U(s_1, s_2)$  и корректностью процедур  $\pi_{\forall}, \pi_{\exists}$ . *Сложность процедуры*:  $O(n^3)$ , где  $n = |s_1| + |s_2|$ , определяется  $O(n^2)$  вызовами процедур  $\pi_{\forall}, \pi_{\exists}$ .

**Процедура  $\pi_C$** :  $\pi_C(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \overline{C(s_1, s_2)}$ . Устройство процедуры:

- Перебором точек, содержащихся в  $\overline{s_1}, \overline{s_2}$ , вычислить набор  $(t_1, \dots, t_m)$  всех таких точек без повторений в порядке возрастания. Положить  $t_0 = \mathbf{a}$ .
- Для каждого индекса  $i$  диапазона  $[0..m]$  вычислить значение  $v_i$ :
  - вычислить пару точек  $\langle t_1^i, t_2^i \rangle = \pi_{cycle}(\overline{s_2}, t_i)$ ;
  - если проверка  $\pi_{\forall}(\overline{s_1}, t_1^i, t_2^i, 1)$  успешна, то  $v_i = 1$ , а иначе продолжить вычисление  $v_i$ ;
  - если проверка  $\pi_{\exists}(\overline{s_1}, t_1^i, t_2^i, 0)$  успешна, то  $v_i = 0$ , иначе  $v_i = *$ .
- Выдать результат:  $\pi_C(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \langle (t_1, \dots, t_m), (v_0, \dots, v_m) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением заготовки  $C(s_1, s_2)$  и корректностью процедур  $\pi_{cycle}, \pi_{\forall}, \pi_{\exists}$ . *Сложность процедуры*:  $O(n^3)$ , где  $n = |s_1| + |s_2|$ , определяется  $O(n)$  вызовами процедуры  $\pi_{cycle}$ .

**Процедура  $\pi_X$** :  $\pi_X(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \overline{X(s_1, s_2)}$ . Устройство процедуры:

- Перебором точек, содержащихся в  $\overline{s_1}, \overline{s_2}$ , вычислить набор  $(t_1, \dots, t_m)$  всех таких точек без повторений в порядке возрастания. Положить  $t_0 = \mathbf{a}$ .
- Для каждого индекса  $i$  диапазона  $[0..m]$  вычислить значение  $v_i$ :
  - вычислить точку  $t'_i = \pi_{next}(\overline{s_2}, t_i)$  и, если  $t'_i \neq \mathbf{b}$ , значение  $v'_i = \pi_{val}(\overline{s_1}, t'_i)$ ;
  - если  $t'_i \neq \mathbf{b}$  и  $v'_i \neq \uparrow$ , то  $v_i = v'_i$ , а иначе  $v_i = *$ .
- Выдать результат:  $\pi_X(\overline{s_1}, \overline{s_2}) = \langle (t_1, \dots, t_m), (v_0, \dots, v_m) \rangle$ .

*Корректность процедуры* обосновывается определением заготовки  $X(s_1, s_2)$  и корректностью процедур  $\pi_{next}, \pi_{val}$ . *Сложность процедуры*:  $O(n^3)$ , где  $n = |s_1| + |s_2|$ , определяется  $O(n)$  вызовами процедуры  $\pi_{next}$ .

**Процедура  $\pi_{\square}$ :**  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \overline{\varphi[[D]]}$ . Устройство процедуры:

- В зависимости от вида формулы  $\varphi$  выдать результат:
  - если  $\varphi = v \in \{1, *\}$ , то  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \langle (), (v) \rangle$ ;
  - если  $\varphi = x \in \text{Var}$ , то  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \overline{D}(x)$ ;
  - если  $\varphi = \mathbf{f}(\psi_1, \dots, \psi_k)$ , где  $\mathbf{f}$  – троичная функция, то  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \pi_{clean}(\pi_{\mathbf{f}}(\pi_{\square}(\psi_1, \overline{D}), \dots, \pi_{\square}(\psi_k, \overline{D})))$ ;
  - если  $\varphi = (\psi_1 \oplus \psi_2)$ , где  $\oplus \in \{\mathbf{U}, \mathbf{C}, \mathbf{X}\}$ , то  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \pi_{clean}(\pi_{\oplus}(\pi_{\square}(\psi_1, \overline{D}), \pi_{\square}(\psi_2, \overline{D})))$ .
  - если  $\varphi = (\circ\psi)$ , то  $\pi_{\square}(\varphi, \overline{D}) = \pi_{\circ}(\pi_{\square}(\psi, \pi_{\circ'}(\overline{D})))$ .

*Корректность процедуры* обосновывается индукцией согласно доказательству теоремы 1, леммами 5–10 и корректностью процедур  $\pi_{\mathbf{f}}$ ,  $\pi_{\mathbf{U}}$ ,  $\pi_{\mathbf{C}}$ ,  $\pi_{\mathbf{X}}$ ,  $\pi_{\circ}$ ,  $\pi_{\circ'}$  и  $\pi_{clean}$ .  
*Сложность процедуры:*  $O(|\varphi| \cdot |D|^3)$ , определяется сложностями используемых процедур, способом организации рекурсии и тем фактом, что все точки вычисляемых представлений содержатся в образах  $\overline{D}$  и  $\overline{D}^{\circ}$ .

**Проверка  $\Pi$ :**  $\Pi(\varphi, \overline{D}) = 1 \Leftrightarrow D \models \varphi$ . Устройство проверки:

- Вычислить сигнал, определяемый сигнальной семантикой:  $\overline{s} = \pi_{\square}(\varphi, \overline{D})$ .
- Выдать результат:  $\Pi(\varphi, \overline{D}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{v}_0^s = 1$ .

*Корректность проверки* обосновывается корректностью процедуры  $\pi_{\square}$  и:

- определением выполнимости формул:  $D \models \varphi \Leftrightarrow \varphi[D, \mathbf{a} + 0] = 1$ ;
- теоремой 1, согласно которой вычисляемый сигнал  $s$  корректен;
- определением корректного сигнала:  $\varphi[D, \mathbf{a} + 0] = s(\mathbf{a} + 0)$ ;
- утверждением 1:  $s(\mathbf{a} + 0) = \mathbf{v}_0^s$ .

*Сложность проверки:*  $O(|\varphi| \cdot |D|^3)$ , определяется вызовом процедуры  $\pi_{\square}$ .

Корректностью и сложностью процедуры  $\Pi$  обосновывается следующая теорема.

**Теорема 2.** *Задача верификации рациональных диаграмм относительно формул логики троичных сигналов полиномиально разрешима.*

**Пример 3.** Положим, что  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0, 11)$  и  $\text{Var} = \{a, b, c, d\}$ . Рассмотрим формулу

$$\varphi = (((a\mathbf{C}b) \vee c)\mathbf{U}\circ(d\mathbf{X}b))$$

и диаграмму  $D$ , значениями которой являются сигналы, изображённые в верхних четырёх строках рисунка 4. Принцип прочтения рисунка обозначен в примере 1. Этапы проверки соотношения  $D \models \varphi$  согласно алгоритму  $\Pi$  устроены так:

1. Последовательно вычисляются сигналы, изображённые на рисунке 4 и соответствующие подформулам формулы  $\varphi$ , включая саму формулу  $\varphi$ . При вычислении сигнала, соответствующего подформуле  $\circ(d\mathbf{X}b)$ , используются сигналы  $D^{\circ}(b)$  и  $D^{\circ}(d)$ . Эти сигналы изображены в пятой и шестой строках рисунка 4.
2. Для сигнала  $s = \varphi[[D]]$  проверяется равенство  $\mathbf{v}_0^s = 1$ .  
 В данном примере равенство не выполнено ( $\mathbf{v}_0^s = *$ ), а значит,  $D \not\models \varphi$ .

## 6. Выразительные возможности формул

При помощи оператора  $\mathbf{U}$  обычным образом [1] можно определить другие темпоральные операторы. В будущем  $\varphi$  станет истинным:  $\mathbf{F}\varphi = 1\mathbf{U}\varphi$ . Всегда в будущем истинно  $\varphi$ :  $\mathbf{G}\varphi = \neg\mathbf{F}\neg\varphi$ . Используя оператор  $\circ$ , можно определить ана-

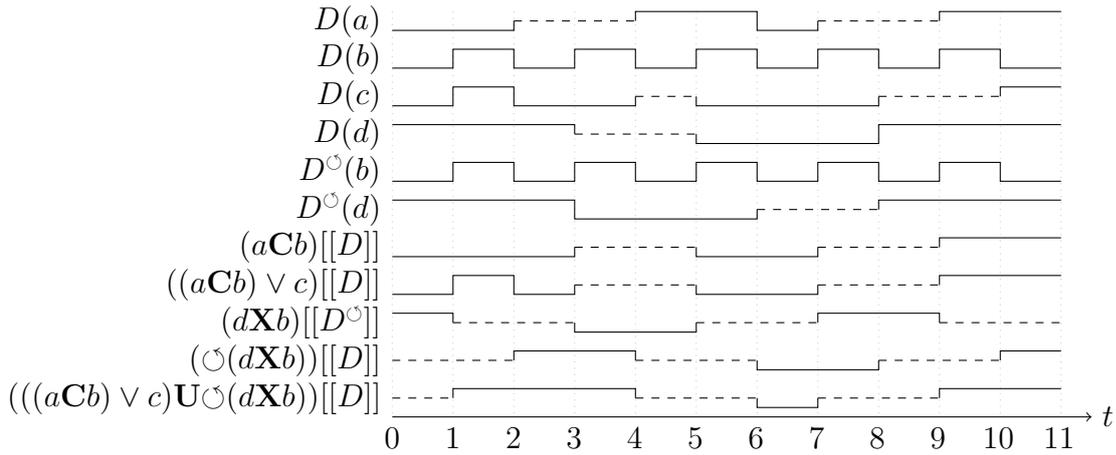


Рис. 4. Пример выполнения основного этапа алгоритма верификации диаграмм  
Fig. 4. An execution example for the main stage of the verification algorithm

логи имеющихся темпоральных операторов, рассуждающие о прошедшем времени [1,8,14]. В прошлом было истинным  $\psi$ , и с тех пор истинно  $\varphi$ :  $\varphi U^- \psi = \circ(\circ\varphi U \circ\psi)$ . В прошлом  $\varphi$  было истинным:  $F^- \varphi = 1U^- \varphi$ . В прошлом  $\varphi$  всегда было истинным:  $G^- \varphi = \neg F^- \neg \varphi$ . Комбинируя имеющиеся операции, можно определить и другие операторы, полезные для записи свойств диаграмм. Во время следующего заднего фронта формулы  $\psi$  истинно  $\varphi$ :  $\varphi X^- \psi$ . Во время предыдущего переднего фронта формулы  $\psi$  истинно  $\varphi$ :  $\varphi X^- \psi = \circ(\circ\varphi X \circ\psi)$ . Формула  $\varphi$  истинна на следующем такте формулы  $\psi$ :  $\varphi C_x \psi = (\varphi C \psi) X \psi$ . Значение  $\varphi$  изменяется только в моменты передних фронтов формулы  $\psi$ :  $\varphi S \psi = G(\varphi \Leftrightarrow \varphi C \psi)$ .

Далее приведено два простых, но показательных примера, демонстрирующих применение логики троичных сигналов для записи свойств правильности “реальных” диаграмм. Отдельно отметим, что в рамках логик, предлагаемых во всех известных нам работах, в том числе всех упомянутых в тексте, невозможно точно и полно выразить даже такие несложные свойства.

**D-триггер.** Функционирование D-триггера и пример соответствующей правильной диаграммы его выполнения обсуждаются во введении к работе. Свойство правильности диаграммы выполнения триггера можно записать в виде двух формул:

$$outSclk \quad \text{и} \quad G(inX^- clk \sqsubseteq out).$$

Содержательное прочтение последней формулы: если значение  $in$  в момент последнего переднего фронта  $clk$  определено, то оно равно текущему значению  $out$ . Этой формулой учитываются, в числе прочего, произвольность значения  $out$  до первого переднего фронта сигнала  $clk$  в диаграмме и эффект метастабильности [2]: если в момент переднего фронта  $clk$  значение  $in$  изменяется (фронтально), то сохраняется произвольное (неопределённое) значение.

**Счётчик чётности.** Рассмотрим схему с входными сигналами  $in$ ,  $clk$  и выходным сигналом  $out$ , функционирующую так: если в момент переднего фронта сигнала  $clk$  сигнал  $in$  имеет значение 1, то значение  $out$  изменяется на противоположное; в остальные моменты значение  $out$  не изменяется. Свойство правильности диаграмм выполнения такой схемы может быть записано двумя формулами:

$$outSclk \quad \text{и} \quad \mathbf{G}(\neg(out \leftrightarrow inXclk) \sqsubseteq outC_xclk).$$

Содержательное прочтение последней формулы: если текущее значение  $out$  и значение  $in$  в момент следующего переднего фронта сигнала  $clk$  определены, то значение  $out$  на следующем такте сигнала  $clk$  равно сумме по модулю два этих двух значений.

## Заключение

В работе предложена система понятий, утверждений и алгоритмов, нацеленная на формализацию и автоматическую проверку свойств правильности диаграмм троичных цифровых сигналов и включающая в себя определения троичного цифрового сигнала и диаграммы, логический язык описания свойств диаграмм (логику троичных сигналов), постановку задачи верификации диаграмм относительно формул этой логики и конструктивное алгоритмическое решение этой задачи. В определениях учтён ряд особенностей диаграмм, возникающих на практике при отладке кода схем на языках описания аппаратуры: неопределённые значения, мгновенные фронты сигналов и действительное модельное время. Предложенная логика похожа на известные темпоральные логики, но при этом содержит особые операторы ( $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{O}$  и другие), предназначенные для формализации свойств поведения схемных сигналов и для единообразного расширения логики операторами прошедшего времени. Операторы, аналогичные  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{X}$  и производным от них, нехарактерны для известных нам логик как дискретного, так и реального времени. Устройством и “естественностью” оператора  $\mathbf{X}$  подчёркивается промежуточное положение логики троичных сигналов между логиками дискретного времени и реального времени.

## Список литературы / References

- [1] Baier C., Katoen, J. P., *Principles of model checking*, The MIT Press, Cambridge, USA, 2008.
- [2] Harris S., Harris D., *Digital design and computer architecture, second edition*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, USA, 2012.
- [3] Meinel C., Theobald T., *Algorithms and data structures in VLSI design: OBDD — foundations and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [4] Kern C., Greenstreet M. R., “Formal verification in hardware design: a survey”, *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems*, **4:2** (1999), 123–193.
- [5] Kropf T., *Introduction to formal hardware verification*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1999.
- [6] Bryant R. E., Seger C.J. H., “Formal verification of digital circuits using symbolic ternary system models”, *Computer-Aided Verification, CAV 1990*, Lecture Notes in Computer Science, **531**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1991, 33–43.
- [7] Baldor K., Niu J., “Monitoring dense-time, continuous-semantics, metric temporal logic”, *Runtime Verification, RV 2012*, Lecture Notes in Computer Science, **7687**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2013, 245–259.
- [8] Basin D., Klaedtke F., Zălinescu E., “Algorithms for monitoring real-time properties”, *Acta Informatica*, **55:4** (2018), 309–338.
- [9] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, Наука, Москва, 1986; [Yablonsky S.V., *Vvedenie v diskretnuju matematiku*, Nauka, Moscow, Russia, 1986, (in Russian).]

- [10] Kleene S. C., “On notation for ordinal numbers”, *The Journal of Symbolic Logic*, **3:4** (1938), 150–155.
- [11] Kleene S. C., *Introduction to metamathematics*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, Netherlands, 1952.
- [12] Bruns G., Godefroid P., “Model checking partial state spaces with 3-valued temporal logics”, *Computer-Aided Verification, CAV 1999*, Lecture Notes in Computer Science, **1633**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1999, 274–287.
- [13] Chechik M., Devereux B., Gurfinkel A., “Model-checking infinite state-space systems with fine-grained abstractions using SPIN”, *Model Checking Software, SPIN 2001*, Lecture Notes in Computer Science, **2057**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001, 16–36.
- [14] Laroussinie F., Markey N., Schnoebelen P., “Temporal logic with forgettable past”, *Proceedings of the 17th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2002, 383–392.

---

**Kutsak N. Yu., Podymov V. V.**, "Formal Verification of Three-Valued Digital Waveforms", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26:3** (2019), 332–350.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-332-350

**Abstract.** We investigate a formal verification problem (mathematically rigorous correctness checking) for digital waveforms used in practical development of digital microelectronic devices (digital circuits) at early design stages. According to modern methodologies, a digital circuit design starts at high abstraction levels provided by hardware description languages (HDLs). One of essential steps of an HDL-based circuit design is an HDL code debug, similar to the same step of program development in means and importance. A popular way of an HDL code debug is based on extraction and analysis of a waveform, which is a collection of plots for digital signals: functional descriptions of value changes related to selected circuit places in real time. We propose mathematical means for automation of correctness checking for such waveforms based on notions and methods of formal verification against temporal logic formulae, and focus on such typical features of HDL-related digital signals and corresponding (informal) properties, such as real time, three-valuedness, and presence of signal edges. The three-valuedness means that at any given time, besides basic logical values 0 and 1, a signal may have a special undefined value: one of the values 0 and 1, but which one of them is either not known, or not important. An edge point of a signal is a time point at which the signal changes its value. The main results are mathematical notions, propositions, and algorithms which allow to formalize and solve a formal verification problem for considered waveforms, including: definitions for signals and waveforms which the mentioned typical digital signal features; a temporal logic suitable for formalization of waveform correctness properties, and a related verification problem statement; a solution technique for the verification problem, which is based on reduction to signal transformation and analysis; a corresponding verification algorithm together with its correctness proof and “reasonable” complexity bounds.

**Keywords:** formal verification, digital signal, temporal logic, three-valued logic

**On the authors:**

Nina Yu. Kutsak, [orcid.org/0000-0002-0832-3635](https://orcid.org/0000-0002-0832-3635), bachelor student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1-52, Leninskiye Gory, Moscow, GSP-1, 119991 Russia, e-mail: [nina\\_svetik@mail.ru](mailto:nina_svetik@mail.ru)

Vladislav V. Podymov, [orcid.org/0000-0002-2041-7634](https://orcid.org/0000-0002-2041-7634), PhD in Mathematics, researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1-52, Leninskiye Gory, Moscow, GSP-1, 119991 Russia, e-mail: [valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

**Acknowledgments:**

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-01-00854.

©Кононова А. И., Гагарина Л. Г., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-351-359

УДК 004.94

## Динамическая модель развития пиринговой файлообменной сети

Кононова А. И., Гагарина Л. Г.

*Поступила в редакцию 3 июня 2019*

*После доработки 29 августа 2019*

*Принята к публикации 31 августа 2019*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается модель развития пиринговой файлообменной сети, организуемой одним торрент-трекером. Модель построена на основе обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены фазовые переменные, описывающие состояние торрент-трекера и организуемой им сети (в первом приближении – это количество пользователей трекера, активно участвующих в информационном обмене, и количество активных раздач), проанализированы факторы, влияющие на изменение количества пользователей и количества раздач. На основе анализа разработана система дифференциальных уравнений, в первом приближении описывающая эволюцию файлообменной сети, организуемой торрент-трекером, – жёсткая динамическая модель эволюции торрент-трекера. Исследованы особые точки жёсткой модели эволюции трекера, описано их возможное количество и тип. Описаны все конфигурации общего положения, возможные в жёсткой модели эволюции торрент-трекера. Изображён фазовый портрет жёсткой модели. На основе анализа жёсткой модели получена система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию файлообменной сети с учётом зависимости интенсивности притока новых пользователей от общего количества потенциальной аудитории торрент-трекера, а также зависимости скорости вымирания раздач от приходящегося на одну раздачу количества пользователей – мягкая динамическая модель эволюции торрент-трекера. Исследованы особые точки мягкой модели эволюции трекера, описано их возможное количество и тип. Описаны все конфигурации общего положения, возможные в мягкой модели эволюции торрент-трекера. Изображены фазовые портреты каждой конфигурации. Получено соотношение параметров, необходимое для устойчивости стабильного состояния трекера. Проанализировано влияние различных административных мер на запас устойчивости трекера в целом. Показана необходимость поддержки раздач администрацией на узкоспециализированных торрент-трекерах с малой потенциальной аудиторией.

**Ключевые слова:** файлообменные сети, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, устойчивость

**Для цитирования:** Кононова А. И., Гагарина Л. Г., "Динамическая модель развития пиринговой файлообменной сети", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 351–359.

### Об авторах:

Кононова Александра Игоревна, [orcid.org/0000-0002-4178-3828](https://orcid.org/0000-0002-4178-3828), канд. техн. наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», пл. Шокина, г. Москва, г. Зеленоград, 124498 Россия, e-mail: [illinc@bk.ru](mailto:illinc@bk.ru)

Гагарина Лариса Геннадьевна, [orcid.org/0000-0003-2371-9045](https://orcid.org/0000-0003-2371-9045), доктор техн. наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», пл. Шокина, г. Москва, г. Зеленоград, 124498 Россия, e-mail: [gagar@bk.ru](mailto:gagar@bk.ru)

## Введение

В настоящее время огромное количество информации распространяется при помощи децентрализованных сетей. В частности, для распространения файлов широко применяется протокол BitTorrent [1], где для распространения информации используется сложная система (пиринговая сеть), не сохраняющая распространяемые файлы на централизованных серверах (наборы из нескольких логически связанных файлов, распространяемых вместе, согласно протоколу BitTorrent, объединяются в непрерывный поток, поэтому в дальнейшем такой набор также будем называть файлом), и включающая:

- множество пользователей, хранящих файлы на своих локальных носителях;
- для каждого распространяемого файла — подсистему, включающую, в свою очередь:
  - информацию о характеристиках распространяемого файла (торрент-файл);
  - площадку для получения торрент-файла (элемент каталога);
  - множества пользователей, хранящих файл и предоставляющих доступ к нему (сидеров) и пользователей, скачивающих этот файл (личеров); участники информационного обмена — сидеры и личеры — в совокупности называемых пирами;
  - распределённую инфраструктуру, оперативно обновляющую и распространяющую информацию о сидерах и личерах, а также организующую информационный обмен между ними;

всё это объединяется понятием раздачи файла (также раздачей называют и процесс распространения файла в пиринговой сети);

- глобальную инфраструктуру, обеспечивающую информационный обмен между пользователями и функционирование раздач — торрент-трекер. Понятие трекера также часто расширяется и применяется и к сообществу его пользователей, и к множеству всех поддерживаемых раздач.

Наиболее значимыми характеристиками торрент-трекера, а значит, и организуемой им пиринговой файлообменной сети, является количество его активных пользователей (не только зарегистрированных, но и участвующих в информационном обмене) и количество поддерживаемых ими раздач.

Существуют универсальные трекеры и специализированные, распространяющие контент определённой направленности. В свою очередь, специализированные трекеры могут выступать агрегаторами контента разнообразного происхождения или распространять авторский контент, производимый администрацией.

Регулярно основываются новые трекеры. Часть из них успешно развивается и растёт, часть после короткого подъёма, вызванного энтузиазмом после открытия, теряет активных пользователей и закрывается. Чем же вызвано различие в развитии торрент-трекеров?

# 1. Жёсткая модель эволюции торрент-трекера

Рассмотрим эволюцию пиринговой файлообменной сети, работающей по протоколу BitTorrent и организуемой некоторым торрент-трекером.

В качестве фазовых переменных [2, 3], описывающих состояние сети, логично выбрать количество  $n$  активных пользователей торрент-трекера и количество  $w$  активных раздач. Рассмотрим основные факторы, влияющие на их изменение.

По принципу предпочтительного присоединения новые пользователи охотнее регистрируются на крупных трекерах, уже имеющих множество активных пользователей; кроме того, новых пользователей привлекает большое количество раздач на трекере ( $\dot{n} \sim nw$ , точкой обозначаем производную по времени). Также и пользователи создают новые раздачи ( $\dot{w} \sim n$ ).

Кроме того, разочаровавшись, часть пользователей постоянно покидают торрент-трекер и больше не участвуют в информационном обмене. Также часть раздач, как показано в [4], со временем теряет сидеров и становится непригодной для скачивания файла (вымирает). Так как пользователи принимают решение об уходе независимо друг от друга, аналогично и раздачи вымирают независимо друг от друга, убыль пользователей и раздач в первом приближении описывается моделью радиоактивного распада  $\left( \begin{cases} \dot{n} \sim -n \\ \dot{w} \sim -w \end{cases} \right)$ .

Таким образом, получаем первое приближение модели эволюции торрент-трекера:

$$\begin{cases} \dot{n} = k_1nw - b_1n \\ \dot{w} = k_2n - b_2w \end{cases}, \quad (1)$$

где  $b_1 > 0$  и  $b_2 > 0$  характеризуют скорости убыли пользователей и раздач,  $k_1 > 0$  и  $k_2 > 0$  — скорости притока. Выбором единиц измерения  $n$  и  $w$  можно сделать  $k_1 = k_2 = 1$ . Тогда (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{n} = nw - b_1n \\ \dot{w} = n - b_2w \end{cases}. \quad (2)$$

Это, согласно классификации Арнольда [5], жёсткая модель, то есть она применима на достаточно ограниченном этапе развития.

## 1.1. Особые точки жёсткой модели

Найдём особые точки системы (2).

Очевидно, при  $n = 0$  из стационарности второго уравнения (2) получим  $w = 0$ , то есть начало координат  $(0, 0)$  всегда будет особой точкой. Можно показать, что это всегда притягивающий узел.

Если  $n \neq 0$ , из стационарности первого уравнения получаем  $w = b_1$ . Затем из стационарности второго  $n = b_1b_2$ . Особая точка  $(n^*, w^*) = (b_1b_2, b_1)$  всегда является седлом.

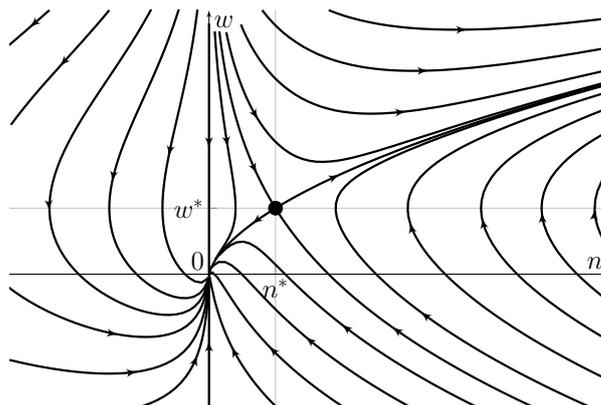


Рис. 1. Фазовый портрет жёсткой системы (2)  
 Fig. 1. Hard model phase portrait

## 1.2. Фазовый портрет жёсткой модели

В соответствии с философией общего положения [6] сепаратрисы седла  $(n^*, w^*)$  должны разделять бассейны единственного притягивающего узла  $(0, 0)$  и бесконечности. Фазовый портрет жёсткой системы (рис. 1) подтверждает этот вывод.

То есть, если торрент-трекер успеет набрать достаточное количество пользователей и раздач на волне энтузиазма после создания и к моменту перехода к этапу, описываемому моделью (2), его состояние  $(n, w)$  окажется выше сепаратрисы, то далее количество пользователей и раздач будет бесконечно расти, если нет — будет стремиться к нулю.

На практике бесконечный рост невозможен. Соответственно, необходимо уточнение жёсткой модели и превращение её в мягкую.

## 2. Смягчение модели эволюции торрент-трекера

Рост количества пользователей трекера всегда ограничен сверху некоторым объёмом  $n_{max}$ . Темпы роста в этом случае описываются логистической динамикой Ферхюльста ( $\dot{n} \sim \frac{n_{max}-n}{n_{max}}$ ).

Кроме того, в [4] показано, что вероятность вымирания раздачи зависит от размера её потенциальной аудитории, так что интенсивность убыли раздач  $b_2$  не может быть постоянной и растёт при уменьшении количества пользователей, приходящихся на раздачу.

С учётом этого составим смягчённый вариант системы (2):

$$\begin{cases} \dot{n} &= nw \frac{n_{max}-n}{n_{max}} - b_1 n \\ \dot{w} &= n - b_2 w \left( 1 + b_{2N} e^{-\frac{n}{wN_0}} \right) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $n_{max} > 0$  — потолок роста числа пользователей,  $N_0 > 0$  — среднее число пользователей, приходящихся на одну раздачу, при котором поддержание активности всех раздач невозможно (катастрофическая пропорция),  $b_{2N} \gg 1$  характеризует увеличение скорости вымирания в этом случае.

Второе уравнение модели (3) не определено при  $w = 0$  (на оси  $On$ ). Доопределим его. При  $n \neq 0$  и стремлении  $w$  к нулю из первого и третьего квадрантов (то есть при  $\frac{n}{w} \rightarrow +\infty$ ) значение в скобках стремится к единице. Так как все физически реализуемые траектории принадлежат первому квадранту, примем, что при  $w = 0$  второе уравнение (3) превращается в  $\dot{w} = n - b_2 w$ , а при  $n = w = 0$  его правая часть равна нулю. Тогда при всех физически реализуемых значениях  $n$  и  $w$  динамика системы определена и непрерывна (эта непрерывность нарушается при стремлении к оси  $On$  и началу координат из нереализуемых второго и четвёртого квадрантов).

## 2.1. Особые точки мягкой модели

Количество особых точек (3) уже не будет постоянным.

При  $w = 0$  из стационарности первого уравнения (3) получаем  $n = 0$ . По данному в предыдущем разделе доопределению второе уравнение при  $n = w = 0$  также будет стационарно. Таким образом, будем считать начало координат  $(0, 0)$  особой точкой модели (3).

При  $w \neq 0$  обозначим  $\frac{n}{w} = x$  и рассмотрим стационарность второго уравнения (3). Получим уравнение  $\frac{x}{b_2} = 1 + b_2 N e^{-\frac{x}{N_0}}$ , которое при любых положительных параметрах имеет единственный корень  $x^*$ , лежащий между  $b_2$  и  $b_2(1 + b_2 N)$ . Стационарность первого уравнения при условии  $\frac{n}{w} = x^*$  даёт квадратное уравнение  $n_{max} w - x^* w^2 - b_1 n_{max} = 0$ , которое в зависимости от дискриминанта  $1 - \frac{4b_1 x^*}{n_{max}}$  может не иметь вещественных решений, иметь одно или два решения  $w_{1,2}^* = \frac{n_{max}}{2x^*} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_1 x^*}{n_{max}}} \right)$ . Соответственно,  $n_{1,2}^* = w_{1,2}^* \cdot x^* = \frac{n_{max}}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_1 x^*}{n_{max}}} \right)$ .

При  $\frac{4b_1 x^*}{n_{max}} \ll 1$  получим  $\sqrt{1 - \frac{4b_1 x^*}{n_{max}}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4b_1 x^*}{n_{max}}$ , то есть

$$\begin{cases} w_1^* \approx b_1 & = w^* \\ w_2^* \approx \frac{n_{max}}{x^*} - b_1 & = \frac{n_{max}}{x^*} - w^* \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\begin{cases} n_1^* \approx b_1 x^* > b_1 b_2 = n^* \\ n_2^* \approx \left( \frac{n_{max}}{x^*} - b_1 \right) x^* & = n_{max} - n_1^* \end{cases} \quad (5)$$

Точка  $(n_1^*, w_1^*)$  соответствует седлу жёсткой модели,  $(n_2^*, w_2^*)$  — «потолку» роста трека и является притягивающим обобщённым узлом.

При  $\frac{4b_1 x^*}{n_{max}} = 1$  седло и узел сливаются в вырожденную особую точку — седлоузел  $\left( \frac{n_{max}}{2}, \frac{n_{max}}{2x^*} \right)$ .

Все ненулевые особые точки модели (3), если они существуют, расположены в первом квадранте координатной плоскости.

## 2.2. Фазовый портрет мягкой модели

Рассмотрим фазовый портрет модели (3) при различных значениях  $\frac{4b_1 x^*}{n_{max}}$  (рис. 2). Случай седлоузла не описывается философией общего положения и не показан на рис. 2.

Отметим, что при приближении к началу координат из первого и третьего квадрантов начало координат  $(0, 0)$  ведёт себя как притягивающий узел. Траектории

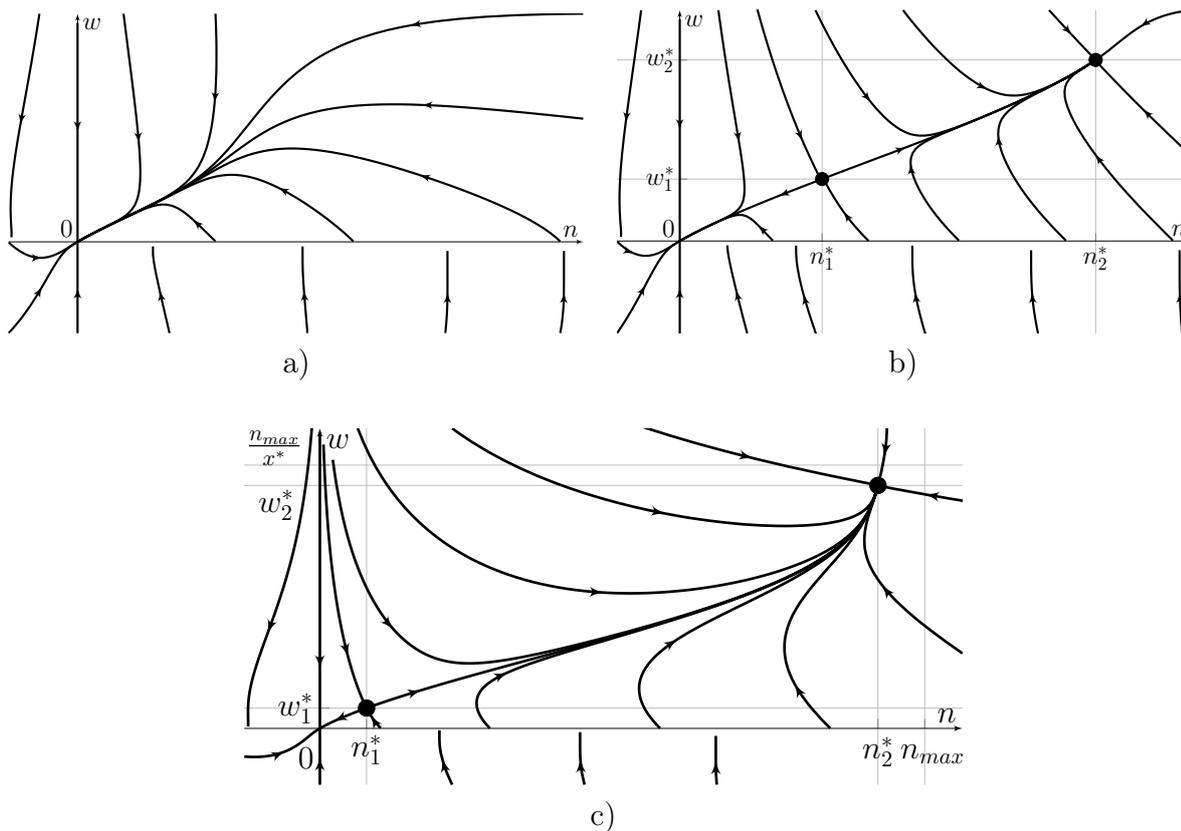


Рис. 2. Фазовый портрет мягкой системы (3):  
 а) при  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} > 1$ , б) при  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} < 1$ , в) при  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} \ll 1$   
 Fig. 2. Soft model phase portrait:  
 а) at  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} > 1$ , б) at  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} < 1$ , в) at  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} \ll 1$

отходят от оси  $On$  (то есть из состояния, когда нет раздач, но есть некоторое количество пользователей, что в принципе реализуемо) под наклоном  $-b_1$ .

Во втором и четвёртом квадрантах траектории входят в ось  $On$  вертикально; поведение при стремлении  $n$  и  $w$  к нулю не определено.

Если начальное состояние системы (3) находится на оси  $Ow$  (когда нет пользователей, а есть только раздачи, что физически нереализуемо), траектория лежит строго на оси  $Ow$  и направлена в начало координат к физически реализуемому состоянию  $(0, 0)$ .

Поведение траекторий второго, третьего и четвёртого квадрантов качественно не зависит от наличия и положения ненулевых особых точек. Траектории второго и четвёртого квадрантов заканчиваются на оси  $On$ , третьего — в начале координат  $(0, 0)$ .

При  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} > 1$ , когда ненулевых особых точек нет, все траектории первого квадранта также заканчиваются в начале координат  $(0, 0)$ .

При  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} < 1$  сепаратрисы седла  $(n_1^*, w_1^*)$  разбивают первый квадрант координатной плоскости на бассейны притяжения начала координат  $(0, 0)$  и притягивающего обобщённого узла  $(n_2^*, w_2^*)$ .

### 2.3. Устойчивость мягкой модели

В отличие от жёсткой модели, для (3) не при всех значениях параметров возможно устойчивое существование торрент-трекера.

При  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} > 1$ , сколько бы ни было на трекере пользователей и раздач, со временем он опустеет и будет закрыт (как правило, администрация закрывает трекер, не дожидаясь стабилизации в нулевом состоянии). При  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} = 1$ , хотя теоретически возможна стабилизация в седлоузле, но малейшее изменение состояния или параметров может привести к попаданию в бассейн начала координат, что означает постепенную потерю всех пользователей и закрытие.

При  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} < 1$  при достаточном начальном количестве пользователей и раздач имеется возможность стабилизации в ненулевом состоянии  $(n_2^*, w_2^*)$ . Необходимо отметить, что при недостаточном их количестве, в случае, когда начальное состояние торрент-трекера при переходе к модели (3) лежит ниже сепаратрисы седла — устойчивое состояние  $(n_2^*, w_2^*)$  достигнуто не будет, хотя оно потенциально возможно. Далее предполагается, что на начальном этапе развития трекера накоплено достаточно для стабилизации количество пользователей и раздач, и рассматривается устойчивость состояния  $(n_2^*, w_2^*)$ .

В случае, когда  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}}$  незначительно меньше единицы, то есть система (3) имеет две расположенные рядом ненулевые особые точки, стабилизация торрент-трекера в состоянии  $(n_2^*, w_2^*)$  возможна, причём это состояние достигается достаточно быстро, но оно не слишком устойчиво. Торрент-трекер, как и любая система, всегда подвержен случайным внешним воздействиям, вследствие чего есть возможность либо потери части пользователей и перескока из устойчивого состояния  $(n_2^*, w_2^*)$  в бассейн начала координат (и дальнейшего исчезновения всех пользователей), либо изменения параметров так, что текущее состояние трекера уже окажется в бассейне начала координат новой системы [7, 8].

Наоборот, при  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} \ll 1$  при достаточном начальном количестве пользователей трекер будет долгое время устойчиво расти, а затем стабилизируется в обобщённом узле  $(n_2^*, w_2^*)$ . Чем дальше узел  $(n_2^*, w_2^*)$  от седла  $(n_1^*, w_1^*)$  и его сепаратрис, тем устойчивее будет достигнутое стабильное состояние торрент-трекера.

Таким образом, для достижения максимальной устойчивости трекера необходимо достичь  $\frac{4b_1x^*}{n_{max}} \ll 1$  или, что то же самое,

$$n_{max} \gg 4b_1x^*. \quad (6)$$

С учётом того, что  $x^* < b_2(1 + b_{2N})$ , условие (6) заведомо будет выполняться при  $n_{max} \gg 4b_1b_2(1 + b_{2N})$ , а с учётом  $b_{2N} \gg 1$  его можно переписать как

$$n_{max} \gg 4b_1b_2b_{2N}. \quad (7)$$

Для выполнения этого условия при нерегулируемых  $b_1, b_2, b_{2N}$  необходимо огромное значение  $n_{max}$ . Это выполняется на крупных универсальных и специализированных трекерах (в частности, rutracker.org, thepiratebay.org, pornolab.net).

Чтобы усилить разрыв между левой и правой частями (7) также желательно уменьшить параметры оттока  $b_1, b_2, b_{2N}$ . Отток пользователей  $b_1$  можно уменьшить как разнообразными не связанными с информационным обменом мерами (рекламные акции, бонусы, торрентовки), так и наличием на трекере уникального контента.

Таким образом, для понижения  $b_1$  необходимо увеличить количество раздач с редким контентом или, во всяком случае, максимально долго сохранить имеющиеся. Как показано в [4], система учёта рейтинга негативно влияет на устойчивость таких раздач, поэтому от неё желательно отказаться. Также устойчивость раздач редкого контента можно укрепить, введя повышенный коэффициент таймбонуса за их сидирование.

Для уменьшения вымирания раздач  $b_2$  и  $b_{2N}$ , как показано в [4], администрация трекера может использовать учёт таймбонуса (времени сидирования), поглощение дублирующих раздач и обратную связь с ранее скачивавшими и ушедшими с раздачи пользователями.

Для узкоспециализированных торрент-трекеров (при относительно небольшом  $n_{max}$ ) для выполнения условия (7) необходимо иметь крайне малые параметры оттока  $b_1, b_2, b_{2N}$ . Этого не всегда можно добиться описываемыми выше мерами. Если торрент-трекер распространяет контент, производимый администрацией, то администрация обычно выполняет не только регулирование, но и сидирование раздач (в частности, `debian.org`, `baibako.tv`). Таким образом, раздачи никогда не вымирают полностью и  $b_2 \rightarrow 0$ , что делает такие трекеры устойчивыми.

Напротив, узкоспециализированный трекер, рассчитанный на самоорганизацию, вероятнее всего, имеет  $n_{max} \approx 4b_1b_2b_{2N}$  и через какое-то время будет закрыт (в частности, не существующий в настоящее время `cultscar.go.net`). Более устойчивым решением данной задачи будет тематический раздел на крупном универсальном торрент-трекере.

## Заключение

На основе анализа факторов, влияющих на количество пользователей и количество раздач в файлообменной сети, была построена жёсткая динамическая модель (2). На её основе была создана смягчённая модель (3).

Исследование модели показало, что запас устойчивости файлообменной сети в целом можно повысить, расширяя целевую аудиторию и используя для регулирования раздач систему таймбонусов, связь администрации с ранее скачивавшими файл пользователями и поглощение раздач-дубликатов, но не систему учёта рейтинга.

Узкоспециализированные файлообменные сети должны либо сохранять устойчивость за счёт сидирования раздач администрацией, либо вливаться в более крупные сети как тематические разделы.

## Список литературы / References

- [1] Cohen B., "The BitTorrent Protocol Specification", 2008, [https://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003.html](https://www.bittorrent.org/beps/bep_0003.html).
- [2] Андронов А. А. и др., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966; [Andronov A. A. et al., *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo porjadka*, Nauka, M., 1966, (in Russian).]
- [3] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., *Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1990; [Bautin N. N., Leontovich E. A.,

*Metody i priomy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Nauka, M., 1990, (in Russian).]

- [4] Кононова А. И., “Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:4 (2018), 421–434; [Kononova A. I., “Dynamic Model of single Torrent with File-Sharing P2P Network”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:4 (2018), 421–434, (in Russian).]
- [5] Арнольд В. И., “Жёсткие” и “мягкие” математические модели, МЦНМО, М., 2008; [Arnold V. I., ““Hard” and “soft” mathematical models”, *Butl. Soc. Catalana Mat.*, **13**:1 (1998), 7–26, (in English)]
- [6] Ильяшенко Ю. С., “Аттракторы динамических систем и философия общего положения”, *Математическое просвещение*, **12**, 2008, 13–22; [Ilyashenko Yu. I., “Attractors of dynamical systems and philosophy of generic position”, *Images de Mathematique*, **18**, 2006, 58–63, (in French)]
- [7] Макаров И. М., Менский Б. М., *Линейные автоматические системы: Элементы теории, методы расчета и справочный материал*, Машиностроение, 1982; [Makarov I. M., Menskij B. M., *Linejnye avtomaticheskie sistemy: Elementy teorii, metody rascheta i spravochnyj material*, Mashinostroenie, 1982, (in Russian).]
- [8] Ye K. Z., Portnov E. M., Gagarina L. G., Lin K. Z., “Method for increasing reliability for transmission state of power equipment energy”, *IEEE GlobalSIP*, 2015, 433–437.

**Kononova A. I., Gagarina L. G.**, "Dynamic Model of Growing File-Sharing P2P Network", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 351–359.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-351-359

**Abstract.** In this work, the model of development of the P2P file exchange network organized by a torrent tracker is considered. The model is constructed on the basis of ordinary differential equations. The phase variables describing a status of a torrent tracker and the network organized by it (in first approximation is the number of the users of the tracker who are actively participate in information exchange, and the number of active torrents) are defined, the factors influencing the change of users number and the number of torrents are analyzed. On the basis of the analysis the system of differential equations, in first approximation describing evolution of the file exchange network organized by the torrent tracker — a hard dynamic model of evolution of the torrent tracker is written. Equilibrium points of hard model of evolution of the tracker are investigated, their possible quantity and type is described. All configurations of the general provision, possible in a hard model of evolution of the torrent tracker are described. The phase portrait of the hard model is represented. On the basis of the analysis of the hard model the system of differential equations describing evolution of a file exchange network with accounting of dependence of new users inflow intensity on a total quantity of potential audience of the torrent tracker, and also dependences of speed of torrents extinction on the number of users falling on one torrent — a soft dynamic model of evolution of a torrent tracker is written. Equilibrium points of a soft model of tracker evolution are investigated, their possible quantity and type is described. All configurations of the general provision, possible in a soft model of evolution of the torrent tracker are described. Phase portraits of each configuration are represented. The ratio of parameters necessary for the stability of the tracker a stable status is received. The influence of different administrative measures on a stock of the tracker stability in whole is analyzed. The need of support of torrents by administration at highly specialized torrent trackers with small potential audience is shown.

**Keywords:** file-sharing network, ODEs, dynamical systems, stability

**On the authors:**

Alexandra I. Kononova, orcid.org/0000-0002-4178-3828, PhD,  
 National Research University of Electronic Technology,  
 1 Shokin sq., Moscow, Zelenograd, 124498, Russia, e-mail: illinc@bk.ru

Larisa G. Gagarina, orcid.org/0000-0003-2371-9045, Doctor of Engineering Sciences,  
 National Research University of Electronic Technology,  
 1 Shokin sq., Moscow, Zelenograd, 124498, Russia, e-mail: gagar@bk.ru

©Аникин Н. А., Мускатин А.Ю., Кузьминский М.Б., Русаков А.И., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-360-364

УДК 004.4: 004.7

## GRID-система на основе европейских стандартов EGI для крупномасштабных расчетов по оригинальному ускоренному методу квантовой химии

Аникин Н. А., Мускатин А.Ю., Кузьминский М.Б., Русаков А.И.

Поступила в редакцию 9 июля 2019

После доработки 2 сентября 2019

Принята к публикации 4 сентября 2019

**Аннотация.** На основе анализа современных средств создания ИС GRID-типа, входящих в ставший европейским EGI-“стандартом” репозиторий UMD (включая новые версии Globus Toolkit, ARC, dCache и др.), кратко рассмотрено применение GRID-систем для задач вычислительной химии. Созданная авторами GRID-система объединяет два кластера с Linux CentOS 7 и базируется на программном обеспечении из UMD-4. Актуальность и эффективность применения систем пакетной обработки (у нас используется Torque 4.2.10) в квантовохимических расчетах повышается для массовых расчетов докинг-комплексов (в т.ч. для задач моделирования лекарств), для чего был предложен усовершенствованный полуэмпирический метод с более эффективными аппроксимациями, реализованный в программном комплексе LSSDOCK на Fortran-95. Для таких расчетов разработаны новые методы аппроксимаций, в т.ч. для функционалов DFT, и осуществляется их программная реализация. Разработаны конверторы результатов расчетов по LSSDOCK в естественный для GRID, основанный на XML, формат CML версии 3. С использованием CML-формата на базе программных средств dCache реализовано единое дерево виртуальной файловой GRID-системы, распределённой между гетерогенными узлами, которое используется для хранения результатов расчетов по LSSDOCK.

**Ключевые слова:** GRID, UMD, Web-сервисы, распределенная файловая система, CML, квантовая химия, докинг-комплексы

**Для цитирования:** Аникин Н. А., Мускатин А.Ю., Кузьминский М.Б., Русаков А.И., "GRID-система на основе европейских стандартов EGI для крупномасштабных расчетов по оригинальному ускоренному методу квантовой химии", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 360–364.

### Об авторах:

Аникин Николай Алексеевич, [orcid.org/0000-0002-5724-8969](https://orcid.org/0000-0002-5724-8969), кандидат химических наук, Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского Российской академии наук, Ленинский проспект, 47, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: [nikan@swf.chem.ac.ru](mailto:nikan@swf.chem.ac.ru)

Мускатин Александр Юрьевич, [orcid.org/0000-0002-3596-2782](https://orcid.org/0000-0002-3596-2782), Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского Российской академии наук, Ленинский проспект, 47, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: [amus74@mail.ru](mailto:amus74@mail.ru)

Кузьминский Михаил Борисович, [orcid.org/0000-0002-3944-8203](https://orcid.org/0000-0002-3944-8203), кандидат химических наук, Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского Российской академии наук, Ленинский проспект, 47, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: [kus@free.net](mailto:kus@free.net)

Русаков Александр Ильич, [orcid.org/0000-0001-8893-4577](https://orcid.org/0000-0001-8893-4577), доктор химических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [alex@yars.free.net](mailto:alex@yars.free.net)

### Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00657.

Построение распределенных ИС с использованием GRID-технологии активно развивается в настоящее время для решения самых разных задач, например, для создания инфраструктуры хранения и обработки данных, и включает центры обработки данных вплоть до суперкомпьютерного уровня (см., например, [1]). Вычислительная химия стала традиционной областью высокопроизводительных вычислений (HPC), и особенно актуальными там представляются задачи моделирования лекарств, что планируется делать, например, на будущей экзафлопсной суперЭВМ мира Cray Frontier в знаменитой в суперкомпьютерном мире Национальной лаборатории Ок-Риджа Министерства энергетики США [2]. Для решения таких задач применяется молекулярный докинг, требующий расчетов энергий взаимодействия тысяч лигандов с протеином.

Традиционный для этого расчет методом молекулярной механики (см., например, [3]) не учитывает квантовых эффектов (в т.ч. межмолекулярный перенос электронной плотности), актуальных для повышения точности. Поэтому расчеты энергий взаимодействия квантовохимическими методами представляются более универсальными и перспективными [4–6]. Настоящая работа ориентирована на разработку и применение усовершенствованных методов и программных средств, относящихся к области квантовой химии.

При таком подходе встает задача обработки большого числа пакетных заданий, которые можно эффективно выполнять в GRID-среде. Одним из преимуществ такого подхода является возможность интеграции вычислительных мощностей различных кластеров, что особенно актуально в случае дефицита настроенных на задачи вычислительной химии суперкомпьютерных ресурсов, в т.ч. в РФ.

Для построения современных GRID-систем необходимо обеспечение высокого уровня интероперабельности и поддержание современных мировых стандартов используемых программных средств. По этой причине в нашей стране естественно ориентироваться на использование репозитория UMD, дающего максимальную интероперабельность на современном европейском уровне EGI [7] и высокое протестированное качество отобранных средств [8].

Современные программные средства построения GRID-систем быстро развиваются, причем одни из самых широко употребляемых средств могут заменяться другими. Так, в 2018 году Globus Toolkit практически прекратили свое развитие и заменены рядом других программных продуктов, в т.ч. доступных в UMD [7]. А EGI теперь поддерживает еще и новые средства CMD для облачных вычислений. В 2019 году появились новые версии UMD 4.8 (последняя – 4.8.5). В их состав входят, например, новые версии классических средств управления заданиями на вычислительных GRID-узлах Globus Gram5 14.1.0, средств передачи данных по протоколу GridFTP 13.8.1 и промежуточного программного обеспечения (ППО) ARC 15.3.19 [9].

Следует отметить, что GRID-системы уже используются для задач вычислительной химии и не только для квантовой химии. В качестве примера можно указать на применение GRID-систем для молекулярной динамики [10]. То, что GRID естественно использовать для моделирования лекарств, указано, например, в [11]. Однако публикаций по применению GRID в задачах квантовой химии не так много. Известно, что обычные GRID-системы используются для выполнения расчетов по высокоэффективным комплексам квантовохимических программ, например, Gaussian [12]. Наиболее известной ориентированной именно на задачи вычислитель-

ной химии можно считать GRID-систему (научный портал) MoSGrid (Molecular Simulation Grid) [13], в которой Gaussian интегрирован со средствами молекулярной динамики GROMACS, а функции квантовохимических рабочих процессов реализуются через среду выполнения Parallel Grid и среду разработки Web-сервисов, и передаются в UNICORE (входившей ранее в состав UMD).

Необходимые для задач моделирования лекарств массовые квантовохимические расчеты докинг-комплексов, содержащих большие протеины и маленькие молекулы лигандов, требуют огромных вычислительных ресурсов. Так, наш одноточечный расчет наиболее быстрым полуэмпирическим квантовохимическим методом нулевого дифференциального перекрывания (НДП) только одного относительно небольшого протеина из 1663 атомов по программе Gaussian-09 с быстродействующим алгоритмом, заменяющим лимитирующую время расчета диагонализацию матрицы алгоритмом с линейным масштабированием времени расчета от ее размера, требует примерно 6 часов на одном ядре старого процессора Xeon E3-1240/3,3 ГГц (для более точного метода DFT – больше месяца). Это делает массовые расчеты серий, состоящих из тысяч докинг-комплексов протеин-лиганд, требующими слишком больших времен, если не использовать специальную методику для кардинального ускорения таких расчетов.

В рамках методов НДП нами предложена новая методика для дополнительного ускорения, специализированная на массовые расчеты комплексов протеина с лигандами [4], дающая в нашем программном (на Fortran-95) комплексе LSSDOCK сверхвысокое быстродействие. Тогда указанный выше расчет требует порядка минуты на один докинг-комплекс. Эта методика основана на нашем общем аппроксимационном подходе с явным учетом в локальном гамильтониане лиганда с прилегающей активной частью протеина специфики данной задачи (расчеты тысяч комплексов одного и того же крупного протеина с большим числом разнообразных, но относительно небольших молекул-лигандов), при котором точность расчета практически не ухудшается.

Указанный выше подход может быть внедрен в более точные, но требующие значительно больше вычислительных ресурсов, неэмпирические квантовохимические методы, в первую очередь, в распространенный метод DFT и в моделирующие гамильтониан DFT более быстрые методы, в т.ч. в SCC-DFTB.

Такие массовые расчеты могут быть успешно разработаны в форме пакетной обработки заданий и их возможно эффективно реализовать в GRID-системах. Наш GRID-сервер был развернут на базе CentOS 7 с ППО ARC 15.3.19 (из UMD-4.8.2), которое остаётся на данный момент наиболее универсальным ППО из дистрибутива UMD, включая ARC Resource-coupled EXecution service (A-REX), обеспечивающий интерфейс с локальными пакетными системами; сервер GridFTP (GFS) и Enhanced Grid Information Indexing Service (EGIS). ARC поддерживает все основные языки описания задач (с которыми обеспечивается интерфейс в системах пакетных заданий), используемые в GRID-системах – xRSL, JSDL и JDL. В качестве системы пакетной обработки у нас применяется Torque 4.2.10, которая используется и для интеграции в GRID-систему высокопроизводительного сервера ЯпГУ NVIDIA DGX-1 с 8 GPU архитектуры V100SXM (с пиковой производительностью 7.8 TFLOPS DP каждый), работающего с Ubuntu 16.04.

Были развёрнуты также программные средства dCache 3.2.21 из UMD-4.7.0, ко-

торые обеспечивают сохранность больших объёмов данных и оптимизируют скорость доступа к ним. Для хранения служебной информации используется СУБД PostgreSQL. dCache предоставляет возможность получить информацию о состоянии системы и данных в формате GRID-стандартов GLUE 1.3 и 2.0. Данные результатов квантовохимических расчётов размещаются в естественном для GRID, основанном на XML-формате CML версии 3 [14]. Разработана система поиска результатов квантовохимических расчетов по имени лиганда и его контекстной части, элементам периодической системы, индексам протеина и др.

Однако бывают ситуации, когда точности используемых в LSSDOCK методов может быть недостаточно, а требуется использование более точных неэмпирических методов квантовой химии [5]. Поэтому в настоящее время нами ведется разработка и программная реализация ускоренного метода с явной физико-математически корректной аппроксимацией самого гамильтониана DFT, а не его матричных элементов, что существенно точнее SCC-DFTB.

Предложенные методы и разрабатываемые программные средства для массовых квантовохимических расчетов докинг-комплексов можно эффективно применять в создаваемой GRID-среде, интегрирующей кластеры в ИОХ РАН и ЯрГУ.

## Список литературы / References

- [1] Биктимиров М. Р., и др., “Использование информационных технологий и инфраструктур для агрегации научной информации. Опыт Канады, Нидерландов, Германии”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **22:1** (2015), 114–126; [Biktimirov M. R., et al., “Information Technologies and Infrastructures for Research Data Aggregation. The Experience of Canada, Netherlands and Germany”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22:1** (2015), 114–126, (in Russian).]
- [2] <https://www.olcf.ornl.gov/frontier/>.
- [3] Фарков М. А., Легалов А. И., “Применение методов оптимизации для выполнения молекулярного докинга на графических процессорах”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21:5** (2014), 93–101; [Farkov M. A., Legalov A. I., “Application of Numerical Optimization Methods to Perform Molecular Docking on Graphics Processing Units”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21:5** (2014), 93–101, (in Russian).]
- [4] Аникин Н. А., и др., “Новый подход к ускорению массовых квантово-химических расчетов докинг-комплексов”, *Известия Академии наук. Серия химическая*, **6** (2018), 1100–1103; [Anikin N. A., et al., “A New Approach for the Acceleration of Large-scale Serial Quantum Chemical Calculations of Docking Complexes”, *Russian Chemical Bulletin*, 2018, № 6, 1100–1103, (in Russian).]
- [5] Caldararu O., et al., “Binding Free Energies in the SAMPL5 Octa-acid Host–guest Challenge Calculated with DFT-D3 and CCSD(T)”, *Journal of Computer-Aided Molecular Design*, **31:1** (2017), 87–106.
- [6] Yilmazer N. D., Korth M., “Recent Progress in Treating Protein–Ligand Interactions with Quantum-Mechanical Methods”, *International Journal of Molecular Sciences*, **17:5** (2016), Article ID 742.
- [7] Мускатин А. Ю., Кузьминский М. Б., Русаков А. И., “На пути к унифицированным грид-системам”, *Открытые системы. СУБД*, **1** (2019), 10–14; [Muskatin A. Y., Kuz'minskii M. B., Rusakov A. I., “Towards Unified Grid Systems”, *Open Systems. DBMS*, **1** (2019), 10–14, (in Russian).]
- [8] Fernandez P. O., et al., “umd-verification: Automation of Software Validation for the EGI Federated e-Infrastructure”, *Journal of Grid Computing*, **16:4** (2018), 683–696.
- [9] [http://repository.egi.eu/category/umd\\_releases/](http://repository.egi.eu/category/umd_releases/).

- [10] Merelli I., "Infrastructure for High-Performance Computing: Grids and Grid Computing", *Encyclopedia of Bioinformatics and Computational Biology: ABC of Bioinformatics*, 2018, 230–235.
- [11] Grunzke R., et al., "Managing Complexity in Distributed Data Life Cycles Enhancing Scientific Discovery", *IEEE 11th International Conference on e-Science*, 2015, 371–380.
- [12] Bhanwar S., Bawa S., "TUX-INTERO: A Portal for Secure Interoperation of Grids", *Int. J. Eng. Sci. Technol.*, **2**:7 (2010), 3335–3343.
- [13] Herres-Pawlis S., et al., "Quantum Chemical Meta-workflows in MoSGrid", *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, **27**:2 (2015), 344–357.
- [14] <http://www.xml-cml.org/>.

---

**Anikin N. A., Muskatina A. Y., Kuzminsky M. B., Rusakov A. I.**, "GRID-system Based on European EGI Standards for Large-scale Calculations Using the Original Accelerated Method of Quantum Chemistry", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 360–364.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-360-364

**Abstract.** Based on the analysis of modern tools for creating GRID-type information systems that are part of the European EGI "standard" – UMD repository (including new versions of Globus Toolkit, ARC, dCache, etc.), the applying of GRID systems for computational chemistry is briefly discussed. The GRID system created by the authors combines two clusters with Linux CentOS 7 and is based on software from UMD-4. The relevance and effectiveness of batch processing systems (we use Torque 4.2.10) in quantum chemical calculations is increased for mass calculations of docking complexes (including for drug modeling problems), for which an improved semiempirical method with more efficient approximations was proposed, implemented in the Fortran-95 LSSDOCK software package. For such calculations, new approximation methods have been developed, including for DFT functionals, and their software implementation is carried out. Converters of calculation results by LSSDOCK into a natural for GRID XML-based format CML version 3 are developed. Using the CML format based on dCache software, a single tree of a virtual GRID filesystem distributed between heterogeneous nodes is used to store the results of LSSDOCK calculations.

**Keywords:** GRID, UMD, Web services, distributed file system, CML, quantum chemistry, docking complexes

**On the authors:**

Nikolay A. Anikin, [orcid.org/0000-0002-5724-8969](https://orcid.org/0000-0002-5724-8969), PhD,  
N. D. Zelinsky Institute of Organic Chemistry RAS,  
47 Leninsky Prospect, Moscow 119991, Russia, e-mail: [nikan@swf.chem.ac.ru](mailto:nikan@swf.chem.ac.ru)

Alexander Y. Muskatina, [orcid.org/0000-0002-3596-2782](https://orcid.org/0000-0002-3596-2782), PhD,  
N. D. Zelinsky Institute of Organic Chemistry RAS,  
47 Leninsky Prospect, Moscow 119991, Russia, e-mail: [amus74@mail.ru](mailto:amus74@mail.ru)

Mikhail B. Kuzminsky, [orcid.org/0000-0002-3944-8203](https://orcid.org/0000-0002-3944-8203), PhD,  
N. D. Zelinsky Institute of Organic Chemistry RAS,  
47 Leninsky Prospect, Moscow 119991, Russia, e-mail: [kus@free.net](mailto:kus@free.net)

Alexandr I. Rusakov, [orcid.org/0000-0001-8893-4577](https://orcid.org/0000-0001-8893-4577), PhD,  
P. G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [alex@yars.free.net](mailto:alex@yars.free.net)

**Acknowledgments:**

This work was funded by the RFBR according to the research № 18-07-00657.

©Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-365-404

УДК 517.926

## Новый подход к моделированию генных сетей

Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.

*Поступила в редакцию 5 августа 2019*

*После доработки 9 сентября 2019*

*Принята к публикации 11 сентября 2019*

**Аннотация.** Статья посвящена математическому моделированию искусственных генных сетей. Рассматривается феноменологическая модель простейшей трехзвенной осцилляторной генной сети — так называемого репрессилатора. Эта сеть содержит три элемента, однонаправленно связанных в кольцо. Первый из них ингибирует синтез второго, второй ингибирует синтез третьего, а третий, который замыкает цикл, ингибирует синтез первого. Взаимодействие концентраций белка и концентрации мРНК удивительно похоже на функционирование биоценоза, состоящего из шести экологических популяций — трех хищников и трех жертв. Это позволяет предложить новую феноменологическую модель, которая представлена системой однонаправленно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе изучена задача существования и устойчивости у этой системы релаксационного периодического решения, инвариантного по отношению к циклическим перестановкам координат. Для нахождения асимптотики этого решения строится специальная релейная система. В статье доказывается, что периодическое решение релейной системы дает асимптотическое приближение орбитально асимптотически устойчивого релаксационного цикла рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** искусственная генная сеть, репрессилатор, самосимметричный цикл, асимптотика, устойчивость

**Для цитирования:** Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Новый подход к моделированию генных сетей", *Моделирование и анализ информационных систем*, 26:3 (2019), 365–404.

### Об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич, [orcid.org/0000-0002-6403-4061](https://orcid.org/0000-0002-6403-4061), доктор физ.-мат. наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [glyzin@uniyar.ac.ru](mailto:glyzin@uniyar.ac.ru)

Колесов Андрей Юрьевич, [orcid.org/0000-0001-5066-0881](https://orcid.org/0000-0001-5066-0881), доктор физ.-мат. наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [kolesov@uniyar.ac.ru](mailto:kolesov@uniyar.ac.ru)

Розов Николай Христович, [orcid.org/0000-0002-9330-549X](https://orcid.org/0000-0002-9330-549X), доктор физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова 119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, e-mail: [fpo.mgu@mail.ru](mailto:fpo.mgu@mail.ru)

### Благодарности:

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

## 1. Постановка задачи и описание результатов

Искусственные генетические осцилляторы, объединенные в сети различной архитектуры, вызывают значительный интерес в связи с тем, что они могут моделировать ряд ключевых биологических процессов, среди которых клеточные циклы

и циркадные ритмы. В работе [1] предложен простейший генетический осциллятор, названный репрессилатором, который состоит из трех элементов  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Каждый из этих элементов однонаправленно ингибирует соседний. А именно, элемент  $A_1$  подавляет синтез  $A_2$ , элемент  $A_2$  подавляет синтез  $A_3$ , а третий элемент  $A_3$ , замыкая цикл, подавляет синтез  $A_1$ .

Математическая модель упомянутой генной сети имеет вид

$$\dot{p}_j = -p_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma} + \alpha_0, \quad \dot{u}_j = \beta(p_j - u_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $u_0 = u_3$ . Следуя работе [1], считаем, что каждый элемент осциллятора  $A_j$  представляет собой набор из мРНК (матричной рибонуклеиновой кислоты) с концентрацией  $p_j$  и белка с концентрацией  $u_j$ . Предполагаем, далее, что изменение во времени концентраций  $p_j$  характеризуется процессами синтеза и деградации. Первый из этих процессов описывается функцией  $\alpha/(1 + u_{j-1}^\gamma)$ , где  $u_{j-1}$  — концентрация белка-репрессора для  $j$ -ой мРНК,  $\gamma = \text{const} > 0$  — коэффициент кооперативности,  $\alpha = \text{const} > 0$  — скорость транскрипции в отсутствие репрессора. Второй же процесс описывается линейным слагаемым « $-p_j$ ». И наконец, аддитивная добавка  $\alpha_0 > 0$  в уравнении для  $p_j$  отвечает за утечку промотора.

В случае концентрации белков  $u_j$  ситуация проще. А именно, предполагаем, что их динамика характеризуется линейными процессами синтеза (слагаемое « $\beta p_j$ » в уравнении для  $u_j$  из системы (1)) и деградации (слагаемое « $-\beta u_j$ » в том же уравнении). Здесь  $\beta = \text{const} > 0$  — отношение скорости деградации белка к скорости деградации мРНК.

Как правило, исследование модели (1) проводится в предположении о малости  $\beta$  и  $\alpha_0$ . В этой ситуации после замены  $\beta t \rightarrow t$  и отбрасывания добавки  $\alpha_0$  получается сингулярно возмущенная система, к которой затем применяется известный принцип сведения А. Н. Тихонова [2]. Результатом такого сведения оказывается система

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3. \quad (2)$$

Вопрос об автоколебаниях системы (2) изучался многими авторами (см., например, [3–10]). В указанных работах рассматривался случай, когда ее устойчивый цикл возникает в результате бифуркации Андронова-Хопфа, а также случай  $\gamma \gg 1$ .

Помимо модели (2) к настоящему времени предложена целая серия более общих систем, описывающих искусственные генные сети. Например, в статьях [6, 7] введено в рассмотрение четыре класса таких систем, причем необязательно кольцевых. Если же ограничиться простейшими кольцевыми системами, то типовыми представителями упомянутых классов будут модели

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + \delta_1 u_{j-1}^{\gamma_1} + \delta_2 u_{j-2}^{\gamma_2} + \dots + \delta_s u_{j-s}^{\gamma_s}}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{(1 + \delta_1 u_{j-1}^{\gamma_1})(1 + \delta_2 u_{j-2}^{\gamma_2}) \dots (1 + \delta_s u_{j-s}^{\gamma_s})}, \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^{\gamma_1} u_{j-2}^{\gamma_2} \dots u_{j-s}^{\gamma_s}}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (5)$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{1 + \delta_k u_{j-k}^{\gamma_k}}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Во всех случаях (3) – (6) предполагается, что  $m > s + 1$ ,  $u_{-k} = u_{m-k}$  при  $k = 0, 1, \dots, s - 1$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ ,  $\alpha_k, \delta_k, \gamma_k = \text{const} > 0$ ,  $k = 1, \dots, s$ .

Бегущими волнами систем (3) – (6) будем называть специальные периодические решения, допускающие представления вида

$$u_j = u(t + (j - 1)\Delta), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \Delta = \text{const} > 0. \quad (7)$$

Следует добавить, что бегущие волны (7) являются наиболее естественными аттракторами кольцевых цепочек однонаправленно связанных уравнений. Однако в таких цепочках возможны и более сложные колебания. В качестве примера сошлемся на статью [11], в которой с помощью численного анализа показана реализуемость хаотического автоколебательного режима в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов. Необходимо также отметить целую серию работ (см., например, [12–14]), посвященных проблеме перехода к хаосу в однонаправленно связанных цепочках осцилляторов при подходящем увеличении числа звеньев.

В работах [15, 16] был предложен новый подход к моделированию искусственных генных сетей. А именно, было замечено, что описанный выше характер взаимодействия концентраций  $u_j$  и  $p_j$  напоминает взаимодействие шести экологических популяций — трех хищников и трех жертв. Действительно, предположим, что  $u_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  — это плотности численности популяций хищников и жертв соответственно. Тогда в силу (1) каждый хищник  $u_j$  питается только одной жертвой  $p_j$  (при  $p_j \equiv 0$  численность  $u_j$  затухает по экспоненциальному закону) и в то же время оказывает давление только на жертву  $p_{j+1}$ . Последнее выражается в том, что при увеличении  $u_j$  уменьшается скорость роста численности  $p_{j+1}$ . Кроме того, при отсутствии хищника–репрессора ( $u_{j-1} \equiv 0$ ) численность  $p_j$  стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к пороговому значению  $p_j = \alpha + \alpha_0$ .

Приведенная экологическая интерпретация позволяет для математического моделирования интересующей нас генной сети воспользоваться методикой Ю. С. Колесова [18]. В рамках описанного выше характера взаимодействия хищников и жертв упомянутая методика приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= \frac{r_1}{1+a} [1 + a(1 - u_{j-1}) - p_j] p_j + \alpha, & \dot{u}_j &= r_2 [p_j - u_j] u_j, \\ j &= 1, 2, 3, & u_0 &= u_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где все постоянные  $r_1, r_2, a, \alpha$  положительны. Подчеркнем, что в уравнение для  $p_j$ , нарушая его вольтеровскую структуру, мы специально включили слагаемое « $+a$ », аналогичное добавке  $\alpha_0$  из (1). Как будет показано ниже, в отличие от системы (1), где можно положить  $\alpha_0 = 0$ , в нашем случае требование  $\alpha > 0$  является обязательным.

Как и система (1), новая математическая модель репрессиллятора (8) допускает некоторое упрощение. А именно, предположим сначала, что  $r_2 \gg 1$ ,  $r_1 = r \sim 1$ . Тогда согласно принципу сведения [2] при  $r_2 \rightarrow +\infty$  имеем  $p_j = u_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Что же касается компонентов  $u_j$ , то для них выходит система

$$\dot{u}_j = \frac{r}{1+a} [1 + a(1 - u_{j-1}) - u_j] u_j + \alpha, \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3, \quad (9)$$

представляющая собой альтернативу известной модели (2).

В силу инвариантности системы (9) по отношению к циклическим перестановкам координат естественным образом возникают вопросы о существовании и устойчивости у нее цикла типа бегущей волны вида

$$(u_1, u_2, u_3) = (u(t), u(t+h), u(t+2h)), \quad (10)$$

где  $h > 0$  — фазовый сдвиг, с периодом  $T = 3h$ .

Ранее в работе [15] эта задача изучалась при  $a \rightarrow \infty$  и  $\alpha \ll 1$ , в свою очередь, в работах [16, 17] рассматривался случай, когда  $r \gg 1$ ,  $\alpha \ll 1$ , а параметр  $a$  имеет порядок единицы. Точнее говоря, при условии, что

$$a = \text{const} > 1, \quad \alpha = r \exp(-br), \quad r \gg 1, \quad b = \text{const} > 0. \quad (11)$$

В настоящей статье эти вопросы изучаются при дополнительных предположениях

$$r \gg 1, \quad \alpha = r \exp(-br), \quad \frac{1}{1+a} = \exp(-cr), \quad b, c = \text{const} > 0. \quad (12)$$

Основное внимание ниже уделяется наиболее интересному с математической точки зрения случаю

$$c < b, \quad (13)$$

когда форма колебаний является максимально сложной (о случае  $c > b$  будет сказано отдельно в заключительной части работы). Неравенство (13) позволяет ввести в рассмотрение на плоскости  $(t, \omega)$  кривую

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = & \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq c, \omega = t\} \cup \{(t, \omega) : c \leq t \leq b, \omega = c\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : t = b, -b \leq \omega \leq c\} \cup \{(t, \omega) : b \leq t \leq b+c, \omega = -t\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : b+c \leq t \leq 2b, \omega = -b-c\} \cup \{(t, \omega) : t = 2b, -b-c \leq \omega \leq -b\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : 2b \leq t \leq 3b, \omega = t-3b\}, \end{aligned} \quad (14)$$

вид которой изображен на рис. 1. Как оказывается, кривая (14), продолженная с отрезка  $0 \leq t \leq 3b$  на всю ось  $t$  по закону  $3b$ -периодичности, а также кривые, получающиеся из нее в результате сдвигов вдоль оси  $t$  на  $b$  и  $2b$  соответственно, являются нулевыми приближениями при  $r \rightarrow +\infty$  для компонентов  $\omega_j = (1/r) \ln u_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  некоторого периодического решения системы (9). А именно, справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Найдется такое достаточно большое  $r_0 > 0$ , что при условиях (12), (13) и при всех  $r \geq r_0$  система (9) допускает самосимметричный цикл*

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_*(t, r), u_*(t+h(r), r), u_*(t+2h(r), r)), \quad u_*(0, r) \equiv 1 \quad (15)$$

периода  $T = 3h(r)$ . При  $r \rightarrow +\infty$  для этого цикла выполняются асимптотические представления

$$\begin{aligned} h(r) = & b + \frac{\ln r}{r} + \frac{\ln c}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad H(\Gamma(r), \Gamma_0) = O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \\ \max_{0 \leq t \leq 3h(r)} & u_*(t, r) = O(\exp(cr)), \quad \min_{0 \leq t \leq 3h(r)} u_*(t, r) = O(\exp(-(b+c)r)), \end{aligned} \quad (16)$$

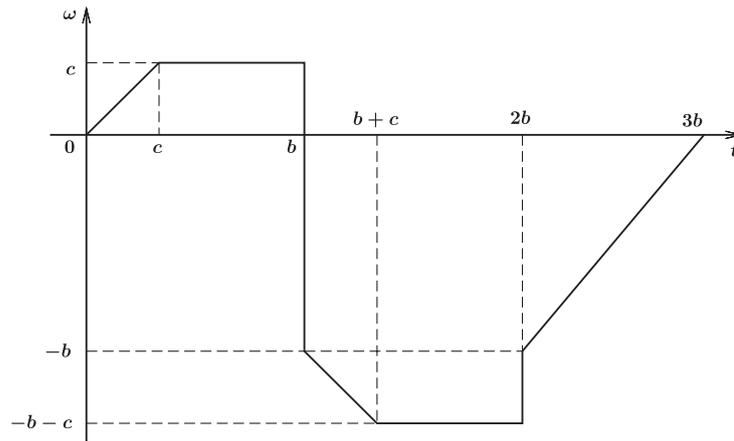


Рис. 1. Кривая  $\Gamma_0$   
 Fig. 1 Curve  $\Gamma_0$

где  $\Gamma_0$  — кривая (14),

$$\Gamma(r) = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq 3h(r), \omega = (1/r) \ln u_*(t, r)\}, \tag{17}$$

а через  $H(*, *)$  обозначено хаусдорфово расстояние между компактами.

**Теорема 2.** Цикл (15), о котором идет речь в предыдущей теореме, экспоненциально орбитально устойчив.

Доказательство теоремы 1 базируется на том факте, что фигурирующая в (15) функция  $u_*(t, r)$  удовлетворяет вспомогательному уравнению с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - (1 - \exp(-cr))u(t - h) - \exp(-cr)u]u + r \exp(-br). \tag{18}$$

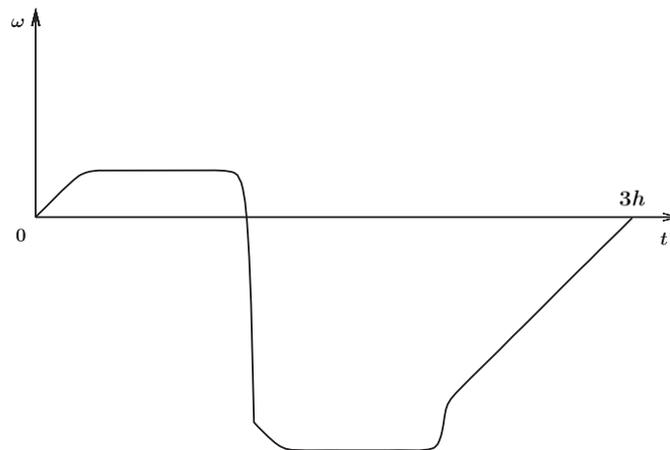


Рис. 2. Кривая  $\Gamma(r)$  при  $b = 4, c = 1, r = 10$   
 Fig. 2 Curve  $\Gamma(r)$  for  $b = 4, c = 1, r = 10$

Тем самым проблема существования периодического режима (15) сводится к отысканию периодического решения этого уравнения, имеющего период  $3h$  и обладающего свойствами (16). Что же касается устойчивости цикла (15), то она устанавливается отдельно посредством асимптотического анализа соответствующей линейной системы в вариациях.

Наглядное представление о релаксационных свойствах цикла (15) дает график кривой (17), построенный численно при  $b = 4$ ,  $c = 1$ ,  $r = 10$  (см. рис. 2).

## 2. Доказательство теоремы 1

### 2.1. Общая схема исследования

Как уже было сказано выше, обоснование теоремы 1 связано с анализом вспомогательного уравнения (18), а точнее говоря, с отысканием у него непостоянного  $3h$ -периодического решения.

При условии (13) выполним в этом уравнении замену  $u = \exp(r\omega)$  и положим  $\varepsilon = 1/r \ll 1$ . В результате для новой переменной  $\omega = \omega(t)$  приходим к уравнению

$$\dot{\omega} = 1 - \exp\left(\frac{\omega - c}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{b + \omega}{\varepsilon}\right) - \left(1 - \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right)\right) \exp\left(\frac{\omega(t - h)}{\varepsilon}\right). \quad (19)$$

Всюду ниже считаем, что запаздывание  $h$  в нем пробегает множество

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} [b - \delta_0, b + \delta_0], \quad (20)$$

где значение постоянной  $\delta_0 > 0$  в последующем будет уточнено. Пока же предполагаем выполненным неравенство

$$\delta_0 < b - c. \quad (21)$$

Опишем теперь класс начальных условий для уравнения (19). В связи с этим фиксируем достаточно малую постоянную  $\sigma_0 > 0$ , удовлетворяющую условиям

$$\sigma_0 < \frac{1}{2}(h - c) \quad \forall h \in \Omega, \quad \sigma_0 < c \quad (22)$$

(эти неравенства возможны, поскольку в силу (21) имеем  $h > c$  при всех  $h \in \Omega$ ). Далее, введем в рассмотрение множество непрерывных по  $t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0]$  начальных функций  $\varphi(t)$ , задающееся равенством

$$S = \{\varphi(t) : -q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2 \text{ при } t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0], \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0\}, \quad (23)$$

где  $q_1 > q_2 > 0$  — некоторые универсальные (не зависящие от  $t, \varepsilon, h, \varphi$ ) постоянные, выбором которых распорядимся в дальнейшем.

Рассмотрим решение  $\omega = \omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$ ,  $t \geq -\sigma_0$  уравнения (19) с произвольным начальным условием  $\varphi(t) \in S$  при  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ , обозначим через  $t = T_\varphi(\varepsilon, h)$  второй положительный корень уравнения

$$\omega_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon, h) = -\sigma_0 \quad (24)$$

(если он существует) и зададим оператор  $\Pi$ , действующий из  $S$  в пространство  $C[-h - \sigma_0, -\sigma_0]$  непрерывных при  $t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0]$  функций по правилу

$$\Pi(\varphi) = \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon, h), \varepsilon, h), \quad t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0]. \quad (25)$$

Как будет показано в последующем, при подходящем выборе параметров  $q_1, q_2, \delta_0, \sigma_0$  оператор (25) определен на множестве (23) и, более того,  $\Pi(S) \subset S$ ,  $T_\varphi(\varepsilon, h) > h$  при всех  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$ . Далее, поскольку множество  $S$  замкнуто, ограничено и выпукло, а оператор  $\Pi$  в силу неравенства  $T_\varphi > h$  компактен, то согласно принципу Шаудера он имеет в  $S$  хотя бы одну неподвижную точку  $\varphi = \tilde{\varphi}(t, \varepsilon, h)$ . Ясно также, что решение  $\tilde{\omega}(t, \varepsilon, h) = \omega_\varphi|_{\varphi=\tilde{\varphi}}$  уравнения (19) является периодическим с периодом  $\tilde{T}(\varepsilon, h) = T_\varphi|_{\varphi=\tilde{\varphi}}$ . Что же касается имеющегося в запасе параметра  $h$  из множества (20), то он определяется из уравнения

$$\tilde{T}(\varepsilon, h) = 3h. \quad (26)$$

Как оказывается, уравнение (26) допускает решение  $h = h(\varepsilon)$ , ограниченное по  $\varepsilon$  и такое, что  $\lim h(\varepsilon) = b$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . А отсюда, в свою очередь, следует, что у вспомогательного уравнения (19) при  $h = h(\varepsilon)$  существует интересующее нас  $3h(\varepsilon)$ -периодическое решение  $\omega(t, \varepsilon) = \tilde{\omega}(t, \varepsilon, h)|_{h=h(\varepsilon)}$ .

## 2.2. Асимптотическое интегрирование вспомогательного скалярного уравнения

Для того чтобы реализовать описанную в предыдущем пункте программу действий, необходимо знать равномерную по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$  на промежутке времени

$$-\sigma_0 \leq t \leq 2h + b - \sigma_0/2. \quad (27)$$

В процессе построения этой асимптотики отрезок (27) разбивается на 11 частей.

Для пояснения сути дела, забегаая вперед, отметим, что на указанном отрезке график функции  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$  асимптотически близок к аналогичной (14) кривой

$$\begin{aligned} \Gamma(h) = & \{(t, \omega) : -\sigma_0 \leq t \leq c, \omega = t\} \cup \{(t, \omega) : c \leq t \leq h, \omega = c\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : t = h, -b \leq \omega \leq c\} \cup \{(t, \omega) : h \leq t \leq h + c, \omega = h - b - t\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : h + c \leq t \leq 2h, \omega = -b - c\} \cup \{(t, \omega) : t = 2h, -b - c \leq \omega \leq -b\} \cup \\ & \cup \{(t, \omega) : 2h \leq t \leq 2h + b - \sigma_0/2, \omega = t - 2h - b\} \end{aligned}$$

(при  $h = b$ ,  $0 \leq t \leq 3b - \sigma_0/2$  она совпадает с  $\Gamma_0$  и имеет вид, показанный на рис. 1). Ясно, что при обосновании этой близости в специальном рассмотрении нуждаются промежутки изменения  $t$ , примыкающие к изломам кривой  $\Gamma(h)$ , а также промежутки, на которых график  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$  асимптотически близок к одному из вертикальных участков  $\Gamma(h)$ . Исследование каждого из получившихся в итоге промежутков представляет собой отдельный этап, которому будет соответствовать своя лемма.

Этап 1 связан с отрезком времени

$$-\sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0. \quad (28)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** На отрезке (28) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполняется равномерное по  $t, h, \varphi$  асимптотическое представление

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = c + \varepsilon y_0(\tau)|_{\tau=(t-c)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (29)$$

где

$$y_0(\tau) = -\ln(1 + \exp(-\tau)). \quad (30)$$

Здесь и ниже одной и той же буквой  $q$  обозначаются некоторые универсальные (не зависящие от  $t, \varepsilon, h, \varphi$ ) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

*Доказательство.* Поскольку длина отрезка (28) равна  $h$ , то автоматически  $\omega(t-h) = \varphi(t-h)$ , а значит, в силу (23) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\exp\left(\frac{\omega(t-h)}{\varepsilon}\right) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (31)$$

Предположим, далее, что на рассматриваемом отрезке справедлива априорная оценка вида

$$\omega + b \geq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (32)$$

где, как и в случае буквы  $q$ , здесь и в последующем символом  $\text{const}$  будем обозначать различные не зависящие от  $t, \varepsilon, h, \varphi$  положительные константы.

Выполняя в (19) замены

$$\omega = c + \varepsilon y(\tau), \quad \tau = \frac{t-c}{\varepsilon} \quad (33)$$

и учитывая соотношения (31), (32), для отыскания  $y$  приходим к задаче Коши вида

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - \exp y + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad y|_{\tau=-(c+\sigma_0)/\varepsilon} = -\frac{c+\sigma_0}{\varepsilon}. \quad (34)$$

Непосредственная проверка показывает, что функция (30) удовлетворяет задаче (34) с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  по невязке. Принимая во внимание это обстоятельство и полагая в (34)

$$y = y_0(\tau) + \Delta, \quad (35)$$

для остатка  $\Delta$  в первом приближении получаем линейную неоднородную задачу Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\tau} &= -\exp(y_0(\tau))\Delta + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ \Delta|_{\tau=-(c+\sigma_0)/\varepsilon} &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Анализ задачи (36) не вызывает затруднений. Действительно, считая остаток порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  в уравнении из (36) известной функцией, имеем

$$\begin{aligned}
 |\Delta| &\leq M_1 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \exp\left(-\int_{-(c+\sigma_0)/\varepsilon}^{\tau} \exp(y_0(s)) ds\right) + \\
 &+ M_2 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right) \int_{-(c+\sigma_0)/\varepsilon}^{\tau} \exp\left(-\int_s^{\tau} \exp(y_0(\sigma)) d\sigma\right) ds \leq \\
 &\leq M_3 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right),
 \end{aligned} \tag{37}$$

где  $M_1, M_2, M_3 = \text{const} > 0$ . Далее, объединяя соотношения (35), (37), для решения задачи (34) получаем равномерное по переменной  $\tau$  из множества  $[-(c + \sigma_0)/\varepsilon, (h - c - \sigma_0)/\varepsilon]$  и по  $h \in \Omega, \varphi \in S$  асимптотическое представление

$$y = y_0(\tau) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

А отсюда и из (33) требуемое равенство (29) вытекает автоматически.

Для завершения обоснования леммы осталось проверить справедливость условия (32). Объединяя явную формулу для  $y_0(\tau)$  (см. (30)) с асимптотическим представлением (29) (пока априорным), заключаем, что это условие действительно выполняется с любой фиксированной постоянной  $M \in (0, b - \sigma_0)$ . Тем самым при указанном выборе  $M$  все наши предыдущие построения, носившие условный характер, обретают законную силу и, в частности, имеет место требуемое асимптотическое равенство (29).  $\square$

Обратим внимание на один характерный момент данного этапа, который будет повторяться и на последующих этапах. А именно, нам удалось найти решение  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$  в явном виде с точностью до экспоненциально малой добавки (т.е. величины порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$ , где  $\beta = \text{const} \in (0, 1]$ ). Что же касается обоснования указанного порядка малости упомянутой добавки, то как на данном этапе, так и в дальнейшем оно проводится однотипно по приведенной выше схеме. В связи с этим в последующих леммах соответствующие фрагменты доказательств будут опускаться.

Интересно отметить, что на отрезках  $-\sigma_0 \leq t \leq c - \sigma_0, c + \sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0$  (длина второго из которых в силу условий (22) положительна) формула (29) допускает упрощение. Действительно, из очевидных асимптотических свойств

$$y_0(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad y_0(\tau) = O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty$$

вытекает, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, h, \varphi$

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = t + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad -\sigma_0 \leq t \leq c - \sigma_0, \tag{38}$$

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = c + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad c + \sigma_0 \leq t \leq h - \sigma_0. \tag{39}$$

Этап 2 состоит в рассмотрении отрезка

$$h - \sigma_0 \leq t \leq h + \beta_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (40)$$

где  $\beta_1$  — произвольно фиксированная постоянная из интервала  $(0, 1)$ . При указанных  $t$  в силу условия  $c - \sigma_0 > 0$  (см. (22)) имеют место включения  $t - h \in [-\sigma_0, \beta_1 \varepsilon \ln(1/\varepsilon)] \subset [-\sigma_0, c - \sigma_0]$ . А отсюда и из (38) вытекает равномерное по  $t, h, \varphi$  асимптотическое равенство

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = t - h + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (41)$$

Что же касается функции  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$ , то для нее справедлива следующая

**Лемма 2.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  из отрезка (40) и по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  выполняется асимптотическое представление

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = c + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (42)$$

где

$$v_0(\tau) = \tau - \exp \tau - \ln[1 - \exp(-\exp \tau)]. \quad (43)$$

*Доказательство.* Как и в случае леммы 1, обоснование формул (42), (43) проведем сначала при априорном предположении (32), а затем проверим справедливость и самого этого предположения.

Учтем в правой части уравнения (19) соотношения (32), (41). В результате оно преобразуется к виду

$$\dot{\omega} = 1 - \exp\left(\frac{t-h}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{\omega-c}{\varepsilon}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (44)$$

Согласно предыдущему этапу (см. (39)) это уравнение следует дополнить начальным условием

$$\omega|_{t=h-\sigma_0} = c + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (45)$$

Далее, нетрудно показать, что функция

$$\omega = c + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} \quad (46)$$

удовлетворяет задаче Коши (44), (45) с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  по невязке. Поэтому, рассуждая как и при обосновании леммы 1, убеждаемся в том, что при априорном условии (32) асимптотическое представление (42) действительно имеет место.

Для проверки условия (32) привлечем асимптотические свойства

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_0(\tau) &= \tau - \exp \tau + O(\exp(-\exp \tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая их в формуле (46), приходим к выводу, что неравенство (32) выполняется в данном случае с любой фиксированной постоянной  $M$  из интервала  $(0, b + c)$ .  $\square$

На этапе 3 рассмотрим значения  $t$  из отрезка

$$t = h + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad -(1 - \beta_1) \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq s \leq \ln(b + c) + \frac{2\varepsilon}{b + c} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon^{\beta_2}, \quad (48)$$

где  $\beta_2 = \text{const} \in (0, 1)$ , а  $s$  — новая независимая переменная. В данной ситуации в силу (38), (42), (43), (47) имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right), \quad (49)$$

$$\omega|_{s=-(1-\beta_1)\ln(1/\varepsilon)} = c - \varepsilon^{1-\beta_1} + \beta_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{\beta_1}} \right) \right). \quad (50)$$

Эта информация позволяет установить следующее утверждение.

**Лемма 3.** На отрезке (48) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо равномерное по  $t, h, \varphi$  асимптотическое представление

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = \left( c - \exp s + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \Big|_{s=(t-h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right). \quad (51)$$

Здесь и в последующих формулах показатель степени  $\beta$  задается равенством  $\beta = \min(\beta_1, 1 - \beta_2)$ .

*Доказательство.* Обоснование формулы (51) проведем при априорных предположениях

$$\omega - c \leq -M_1 \varepsilon^{1-\beta_1}, \quad \omega + b \geq M_2 \varepsilon^{\beta_2}, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0, \quad (52)$$

а затем убедимся в справедливости самих условий (52).

Учтем соотношения (49), (52) в правой части уравнения (19), перейдем в нем к переменной  $s$  (см. (48)) и дополним его начальным условием (50). В результате приходим к задаче Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{ds} &= \varepsilon - \exp s + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \\ \omega|_{s=-(1-\beta_1)\ln(1/\varepsilon)} &= c - \varepsilon^{1-\beta_1} + \beta_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{\beta_1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Далее, несложная проверка показывает, что функция

$$\omega = c - \exp s + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (54)$$

удовлетворяет задаче Коши (53) с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$  по невязке. А отсюда, в свою очередь, следует, что при условиях (52) требуемое асимптотическое равенство (51) действительно выполняется.

Отдельно остановимся на проверке априорных предположений (52). В связи с этим обратим внимание, что для функции (54) соответствующие оценки имеют место с постоянными  $M_1 \in (0, 1)$ ,  $M_2 \in (0, b + c)$ . Тем самым, выбирая изначально в (52) константы  $M_1, M_2$  описанным образом, убеждаемся в том, что эти оценки справедливы и для решения  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$ . А это значит, что асимптотическое представление (51), носившее до этого условный характер, обретает законную силу.  $\square$

Этап 4 состоит в рассмотрении отрезка времени

$$t = h + \varepsilon \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln(b+c) + \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right), \quad -\varepsilon^{-(1-\beta_2)} \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_3}, \quad (55)$$

где  $\beta_3 = \text{const} \in (0, 1)$ . Снова опираясь на формулу (38), заключаем, что в данном случае

$$\omega_\varphi(t-h, \varepsilon, h) = \varepsilon \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln(b+c) + \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right). \quad (56)$$

Далее, положим

$$v_\varphi(\theta, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + \varepsilon \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon} \Big|_{t=h+\varepsilon(\ln(1/\varepsilon)+\ln(b+c)+2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)/(b+c)+\varepsilon\theta)}. \quad (57)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $-\varepsilon^{-(1-\beta_2)} \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_3}$ ,  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  для функции (57) имеет место асимптотическое представление

$$v_\varphi(\theta, \varepsilon, h) = v_*(\theta, \varepsilon) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \quad (58)$$

где

$$v_*(\theta, \varepsilon) = -\psi(\theta, \varepsilon) + \ln \left( b+c + \int_{-\varepsilon^{-(1-\beta_2)}}^\theta \exp(\psi(s, \varepsilon)) ds \right), \quad (59)$$

$$\psi(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon\theta + \frac{b+c}{\varepsilon} \left( \exp \left[ \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right] - 1 - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\varepsilon^2}{(b+c)^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (60)$$

*Доказательство.* Выполним в уравнении (19) замену времени (55), подставим в его правую часть соотношение (56) и положим

$$\omega = -b - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon v. \quad (61)$$

В результате для отыскания  $v = v_\varphi(\theta, \varepsilon, h)$  приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} = & \varepsilon - (b+c) \exp \left[ \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right] + \exp(-v) - \\ & - \varepsilon^2 \exp \left( -\frac{b+c}{\varepsilon} + v \right) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Согласно формулам (51), (61) его следует дополнить начальным условием

$$\begin{aligned} v|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\beta_2)}} = & \left\{ \frac{b+c}{\varepsilon} \left( 1 - \exp \left[ \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right] \right) + \ln(b+c) + \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \right. \\ & \left. + 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta \right\} \Big|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\beta_2)}} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Для анализа получившейся задачи Коши (62), (63) нам потребуются некоторые самые общие свойства функции  $v_*(\theta, \varepsilon)$ . Опираясь на формулы (59), (60), последовательно выводим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, \varepsilon) > 0, \quad v_*(\theta, \varepsilon) = \ln \left( (b+c) \exp(-\psi(\theta, \varepsilon)) + \right. \\ \left. + \int_{-\varepsilon^{-(1-\beta_2)}}^{\theta} \exp[\psi(s, \varepsilon) - \psi(\theta, \varepsilon)] ds \right) \leq \ln \left( (b+c) \exp(-\psi(\theta, \varepsilon)) \Big|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\beta_2)}} + \right. \\ \left. + \theta + \varepsilon^{-(1-\beta_2)} \right) \leq \frac{M}{\varepsilon^{1-\beta_2}}, \quad M = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Далее, принимая во внимание оценки (64), убеждаемся в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место соотношение  $\exp(v_*(\theta, \varepsilon) - (b+c)/\varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon))$ . Тем самым функция (59) удовлетворяет уравнению (62) с точностью до величин порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon))$ , а начальному условию (63) — с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$ . Указанное обстоятельство позволяет для получения требуемого асимптотического представления (58) воспользоваться схемой, описанной при обосновании леммы 1.  $\square$

Отдельно остановимся на информации о функции  $v_*(\theta, \varepsilon)$ , которую можно извлечь из формулы (59). Для этого обратим внимание, что функция (60) раскладывается в сходящийся ряд вида

$$\psi(\theta, \varepsilon) = (b+c)\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^{k+1} \psi_{k,s}(\theta) \ln^s \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^k, \quad (65)$$

где  $\psi_{k,s}(\theta)$  — алгебраические полиномы степени  $k+1-s$ , причем

$$\psi_{1,0}(\theta) = -\theta + \frac{b+c}{2}\theta^2, \quad \psi_{1,1}(\theta) = 2\theta - \frac{2}{b+c}, \quad \psi_{1,2}(\theta) = \frac{2}{b+c}. \quad (66)$$

Подставляя затем ряд (65) в (59) и проводя перерасложение по  $\varepsilon$ , для функции  $v_*(\theta, \varepsilon)$  получаем аналогичный ряд

$$v_*(\theta, \varepsilon) = v_{0,*}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^{2k} v_{k,s,*}(\theta) \ln^s \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^k, \quad (67)$$

который в отличие от ряда (65) носит лишь равномерный по переменной  $-\varepsilon^{-(1-\beta_2)} \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_3}$  асимптотический характер.

Несложный подсчет с использованием формул (66) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}
 v_{0,*}(\theta) &= -(b+c)\theta + \ln x_*(\theta), \\
 v_{1,0,*}(\theta) &= \frac{1}{x_*(\theta)} \left( (b+c)\theta - \frac{(b+c)^2}{2}\theta^2 - \frac{\theta}{b+c} \exp(b+c)\theta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(b+c)^2} \exp(b+c)\theta \right), \\
 v_{1,1,*}(\theta) &= \frac{2}{x_*(\theta)} \left( 1 - (b+c)\theta - \frac{1}{(b+c)^2} \exp(b+c)\theta \right), \\
 v_{1,2,*}(\theta) &= -\frac{2}{x_*(\theta)},
 \end{aligned} \tag{68}$$

где  $x_*(\theta) = b+c + (b+c)^{-1} \exp(b+c)\theta$ . В общем же случае, опираясь на формулы (68) и метод математической индукции, получаем асимптотические представления:

$$\begin{aligned}
 v_{k,s,*}(\theta) &= P_{k,s,*}(\theta) + O(\exp(q\theta)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad s = 0, 1, \dots, k+1, \\
 v_{k,s,*}(\theta) &= O(\exp(q\theta)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad s = k+2, \dots, 2k,
 \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
 v_{k,s,*}(\theta) &= Q_{k,s,*}(\theta) + O(\exp(-q\theta)), \quad \theta \rightarrow +\infty, \quad s = 0, 1, \dots, k, \\
 v_{k,s,*}(\theta) &= O(\exp(-q\theta)), \quad \theta \rightarrow +\infty, \quad s = k+1, \dots, 2k,
 \end{aligned} \tag{70}$$

где  $q = \text{const} \in (0, b+c)$ , а  $P_{k,s,*}(\theta)$ ,  $Q_{k,s,*}(\theta)$  — некоторые алгебраические полиномы степени не выше  $k+1-s$  и  $k-s$  соответственно.

Разложения (67), (69), (70) доставляют полную асимптотику функции (59). Из упомянутых разложений следует, что в дополнение к формуле (58) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned}
 v_*(\theta, \varepsilon) &= v_{0,*}(\theta) + \varepsilon \left( v_{1,0,*}(\theta) + v_{1,1,*}(\theta) \ln \frac{1}{\varepsilon} + v_{1,2,*}(\theta) \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \right) + \\
 &\quad + \begin{cases} O(\varepsilon^{3\beta_2-1}) & \text{при } -\varepsilon^{-(1-\beta_2)} \leq \theta \leq 0, \\ O(\varepsilon^{2-2\beta_3}) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_3}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{71}$$

На этапе 5 рассмотрению подлежат значения  $t$  из промежутка

$$t = h + \varepsilon \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln(b+c) + \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma \right), \quad \bar{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\bar{\sigma}}, \tag{72}$$

где

$$\bar{\sigma} = \varepsilon^{1-\beta_3}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = \frac{c-\sigma_0}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln(b+c) - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{73}$$

В этом случае в силу (38)

$$\omega_\varphi(t-h, \varepsilon, h) = \varepsilon \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln(b+c) + \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma \right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \tag{74}$$

а для функции

$$v_\varphi(\sigma, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + \varepsilon \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon} \Bigg|_{t=h+\varepsilon(\ln(1/\varepsilon)+\ln(b+c)+2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)/(b+c)+\sigma)} \tag{75}$$

справедлива следующая

**Лемма 5.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполняется равномерное по  $\sigma \in [\bar{\sigma}, \bar{\bar{\sigma}}]$ ,  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое равенство

$$v_\varphi(\sigma, \varepsilon, h) = v_*(\sigma, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad (76)$$

где

$$v_*(\sigma, \varepsilon) = -\psi(\sigma, \varepsilon) + \ln\left(b + c + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon^{\beta_2}}^{\sigma} \exp(\psi(s, \varepsilon)) ds\right), \quad (77)$$

$$\psi(\sigma, \varepsilon) = -\sigma + \frac{b+c}{\varepsilon} \left( \exp\left[\frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma\right] - 1 - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\varepsilon^2}{(b+c)^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (78)$$

*Доказательство.* Обоснование данной леммы аналогично доказательству леммы 4. А именно, выполним в уравнении (19) замену времени (72), учтем в его правой части равенство (74) и перейдем к новой переменной  $v$  по формуле (61). В результате для отыскания функции (75) получаем аналогичное (62) уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{d\sigma} = & \varepsilon - (b+c) \exp\left[\frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)\right] + \exp(-v) - \\ & - \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{b+c}{\varepsilon} + v\right). \end{aligned} \quad (79)$$

В силу предыдущего асимптотического представления (58) его следует дополнить начальным условием

$$v|_{\sigma=\bar{\sigma}} = v_*(\theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-\beta_3}} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \quad (80)$$

Для анализа задачи Коши (79), (80) необходима некоторая информация о функции (77). Непосредственная проверка показывает, что она является решением упрощенной задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{d\sigma} = & \varepsilon - (b+c) \exp\left[\frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma\right] + \exp(-v), \\ v|_{\sigma=\bar{\sigma}} = & v_*(\theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-\beta_3}}. \end{aligned} \quad (81)$$

Далее, учитывая, что функция (78) монотонно возрастает по  $\sigma$ , из (77) имеем

$$\begin{aligned} v_*(\sigma, \varepsilon) = & \ln\left[(b+c) \exp(-\psi(\sigma, \varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon^{\beta_2}}^{\sigma} \exp\{\psi(s, \varepsilon) - \psi(\sigma, \varepsilon)\} ds\right] \leq \\ \leq & \ln\left[(b+c) \exp(-\psi(\bar{\sigma}, \varepsilon)) + \frac{\sigma + \varepsilon^{\beta_2}}{\varepsilon}\right] \leq \ln\left[(b+c) \exp(-\psi(\bar{\sigma}, \varepsilon)) + \frac{\bar{\sigma} + \varepsilon^{\beta_2}}{\varepsilon}\right]. \end{aligned}$$

А отсюда и из явного вида  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\bar{\sigma}}$  (см. (73)) вытекает, что

$$v_*(\sigma, \varepsilon) \leq M \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Приведенная информация позволяет утверждать, что

$$\exp\left(-\frac{b+c}{\varepsilon} + v_*(\sigma, \varepsilon)\right) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

и, следовательно, после подстановки в (79), (80) равенства  $v = v_*(\sigma, \varepsilon)$  и переноса всех слагаемых из левых частей получившихся выражений в правые выходят невязки порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon)) \exp \sigma$  и  $O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$  соответственно. А это значит (см. аналогичное место в доказательстве леммы 1), что на отрезке (72) асимптотическое представление (76) действительно выполняется.  $\square$

Как и на предыдущем этапе, отдельно остановимся на выявлении асимптотических свойств функции (77). В связи с этим обратим внимание, что в случае задачи Коши (81) мы находимся в рамках применимости известных результатов А. Н. Тихонова [2]. Из упомянутых результатов вытекает, что для  $v_*(\sigma, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо равномерное по  $\sigma \in [\bar{\sigma}, +\infty)$  асимптотическое представление

$$v_*(\sigma, \varepsilon) = v_{0,*}(\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k v_{k,s,*}(\sigma) \ln^s \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^k. \quad (82)$$

Как известно [2], члены ряда (82) вычисляются посредством подстановки его в уравнение из (81) и приравнивания коэффициентов при степенях  $\varepsilon^k \ln^s(1/\varepsilon)$ . В результате для функций  $v_{k,s,*}(\sigma)$  выходит рекуррентная последовательность алгебраических уравнений, первое из которых нелинейно, а остальные линейны. Из упомянутых уравнений данные функции определяются однозначно. На этом пути, в частности, получаются формулы

$$v_{0,*}(\sigma) = -\sigma - \ln(b+c), \quad v_{1,0,*}(\sigma) = \frac{2}{b+c} \exp(-\sigma), \quad v_{1,1,*}(\sigma) = -\frac{2}{b+c}. \quad (83)$$

В последующем нам потребуется информация о поведении функции  $v_*(\sigma, \varepsilon)$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Для того чтобы разобраться с этим вопросом, положим в уравнении из (81)  $v = -\sigma + \tilde{v}$ . В результате для  $\tilde{v}$  имеем дело с уравнением

$$\varepsilon \left( \frac{d\tilde{v}}{d\sigma} - 2 \right) \exp(-\sigma) = -(b+c) \exp \left( \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + \exp(-\tilde{v}). \quad (84)$$

Далее, несложный анализ уравнения (84) приводит к равномерному по  $\varepsilon$  асимптотическому представлению

$$\tilde{v} = -\ln(b+c) - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-\sigma)), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

А отсюда вытекает итоговая формула

$$v_*(\sigma, \varepsilon) = -\sigma - \ln(b+c) - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-\sigma)), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (85)$$

Завершая этап 5, приведем аналог равенства (71). Принимая во внимание соотношения (82), (83), (85), убеждаемся в том, что в данном случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $\bar{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$

$$v_*(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} v_{0,*}(\sigma) + \varepsilon (v_{1,0,*}(\sigma) + v_{1,1,*}(\sigma) \ln \frac{1}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^2 \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}) & \text{при } \bar{\sigma} \leq \sigma \leq 1, \\ -\sigma - \ln(b+c) - \frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-\sigma)) & \text{при } 1 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}. \end{cases} \quad (86)$$

Из формул (75), (76), (86), в свою очередь, следует, что при дополнительном условии

$$\sigma_0 < \frac{c}{2} \quad (87)$$

на параметр  $\sigma_0$  (которое всюду ниже считаем выполненным) и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место равномерное по  $t, h, \varphi$  асимптотическое представление

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = h - b - t + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad h + \sigma_0 \leq t \leq h + c - \sigma_0. \quad (88)$$

Этап 6 связан с рассмотрением отрезка времени

$$h + c - \sigma_0 \leq t \leq 2h - \sigma_0. \quad (89)$$

В данном случае согласно формулам (29), (30) имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = c + \varepsilon y_0(\tau)|_{\tau=(t-c-h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (90)$$

Далее, обратимся к функции

$$y_\varphi(\tau, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + c}{\varepsilon} \Big|_{t=c+h+\varepsilon\tau}, \quad \bar{\tau} \leq \tau \leq \bar{\bar{\tau}}, \quad (91)$$

где  $\bar{\tau} = -\sigma_0/\varepsilon$ ,  $\bar{\bar{\tau}} = (h - c - \sigma_0)/\varepsilon$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 6.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция (91) допускает равномерное по  $\tau$  из отрезка  $[\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}]$  и по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое представление

$$y_\varphi(\tau, \varepsilon, h) = -y_0(\tau) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad (92)$$

где  $y_0(\tau)$  — функция (30).

*Доказательство.* Перейдем в уравнении (19) к новой независимой переменной  $\tau = (t - c - h)/\varepsilon$ , учтем в его правой части равенство (90) и выполним замену

$$\omega = -b - c + \varepsilon y(\tau). \quad (93)$$

В результате для отыскания функции (91) приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy}{d\tau} &= \mu - \frac{1 - \mu}{1 + \exp(-\tau)} + \exp(-y) - \\ &- \exp\left(-\frac{b + 3c - \varepsilon y}{\varepsilon}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (94)$$

где  $\mu = \exp(-c/\varepsilon)$ . Согласно равенствам (88), (93) дополним его начальным условием

$$\begin{aligned} y|_{\tau=\bar{\tau}} &= \bar{y}_\varphi(\varepsilon, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + c}{\varepsilon} \Big|_{t=h+c-\sigma_0}, \\ \bar{y}_\varphi(\varepsilon, h) &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \end{aligned} \quad (95)$$

Изучим сначала упрощенную задачу Коши

$$\mu \frac{dy}{d\tau} = \mu - \frac{1 - \mu}{1 + \exp(-\tau)} + \exp(-y), \quad y|_{\tau=\bar{\tau}} = \bar{y}_\varphi(\varepsilon, h). \quad (96)$$

Нетрудно убедиться, что для ее решения  $y_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h)$  справедливы формулы

$$y_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h) = \ln z, \quad (97)$$

$$z = \exp \left\{ \bar{y}_\varphi(\varepsilon, h) + \tau - \bar{\tau} - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp \bar{\tau}} \right\} + \frac{1}{\mu} \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp \left\{ \tau - s - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp s} \right\} ds. \quad (98)$$

Далее, учитывая в (97), (98) асимптотическое представление для  $\bar{y}_\varphi(\varepsilon, h)$  (см. (95)), равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp \left\{ \tau - s - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp s} \right\} ds = \\ & = \frac{1}{1 - \mu} \left( \exp(-y_0(\tau)) - (1 + \exp \bar{\tau}) \exp \left\{ \tau - 2\bar{\tau} - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp \bar{\tau}} \right\} \right) + \\ & + O \left( \exp \left( -\frac{c - 2\sigma_0}{\varepsilon} \right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и оценки

$$\exp \left\{ \tau - s - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp s} \right\} \leq 1, \quad \exp \left\{ 2\tau - 2s - \frac{1 - \mu}{\mu} \ln \frac{1 + \exp \tau}{1 + \exp s} \right\} \leq 1$$

$$\bar{\tau} \leq s \leq \tau \leq \bar{\bar{\tau}},$$

приходим к выводу, что равномерно по  $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}]$ ,  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$

$$y_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h) = -y_0(\tau) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (99)$$

Обратный переход от задачи (96) к (94), (95) стандартен: из установленного равенства (99) вытекает, что

$$\exp \left( -\frac{b + 3c - \varepsilon y_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h)}{\varepsilon} \right) = O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

и в силу этого функция  $y_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h)$  удовлетворяет уравнению (94) с точностью до  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  по невязке. А отсюда, в свою очередь, следует справедливость требуемого асимптотического представления (92).  $\square$

Завершая рассмотрение этапа 6, добавим, что на более узком чем (89) отрезке  $h + c + \sigma_0 \leq t \leq 2h - \sigma_0$  формулы (91), (92) допускают упрощение. Опираясь на очевидное

свойство  $y_0(\tau) = O(\exp(-\tau))$ ,  $\tau \rightarrow +\infty$ , при указанных значениях времени получаем равномерное по  $t, h, \varphi$  асимптотическое равенство

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = -b - c + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (100)$$

На этапе 7 обратимся к значениям  $t$  из отрезка

$$2h - \sigma_0 \leq t \leq 2h + \beta_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (101)$$

где величина  $\beta_1$  та же самая, что и в (40). Поскольку в этом случае аргумент  $t - h$  меняется на отрезке (40), то в силу (42) здесь имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = c + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-2h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (102)$$

где  $v_0(\tau)$  — функция (43). Далее, введем в рассмотрение аналогичную (91) функцию

$$v_\varphi(\tau, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + c}{\varepsilon} \Big|_{t=2h+\varepsilon\tau}, \quad \bar{\tau} \leq \tau \leq \bar{\bar{\tau}}, \quad (103)$$

где теперь  $\bar{\tau} = -\sigma_0/\varepsilon$ ,  $\bar{\bar{\tau}} = \beta_1 \ln(1/\varepsilon)$ . Справедлива следующая

**Лемма 7.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  для функции (103) выполняется равномерное по  $\tau$  из отрезка  $[\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}]$  и по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое равенство

$$v_\varphi(\tau, \varepsilon, h) = -v_0(\tau) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \quad (104)$$

*Доказательство.* Обоснование данной леммы аналогично доказательству леммы 6. А именно, выполним в уравнении (19) замену времени  $\tau = (t - 2h)/\varepsilon$ , учтем в его правой части соотношение (102) и перейдем к новой переменной  $v$  по аналогичному (93) правилу  $\omega = -b - c + \varepsilon v$ . В результате получаем аналогичное (94) уравнение

$$\begin{aligned} \mu \frac{dv}{d\tau} = & \mu - (1 - \mu) \frac{\exp(\tau - \exp \tau)}{1 - \exp(-\exp \tau)} + \exp(-v) - \\ & - \exp\left(-\frac{b + 3c - \varepsilon v}{\varepsilon}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (105)$$

где по-прежнему  $\mu = \exp(-c/\varepsilon)$ . Согласно предыдущему этапу его следует дополнить начальным условием

$$v|_{\tau=\bar{\tau}} = \bar{v}_\varphi(\varepsilon, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_\varphi(2h - \sigma_0, \varepsilon, h) + b + c}{\varepsilon}, \quad (106)$$

где в силу (100)

$$\bar{v}_\varphi(\varepsilon, h) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (107)$$

Как и выше, рассмотрим сначала упрощенную задачу Коши

$$\mu \frac{dv}{d\tau} = \mu - (1 - \mu) \frac{\exp(\tau - \exp \tau)}{1 - \exp(-\exp \tau)} + \exp(-v), \quad v|_{\tau=\bar{\tau}} = \bar{v}_\varphi(\varepsilon, h). \quad (108)$$

Нетрудно увидеть, что ее решение  $v_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h)$  задается аналогичными (97), (98) явными формулами

$$v_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h) = \ln z, \quad z = \exp \left\{ \bar{v}_\varphi(\varepsilon, h) + \tau - \bar{\tau} - \frac{1-\mu}{\mu} \ln \frac{1 - \exp(-\exp \tau)}{1 - \exp(-\exp \bar{\tau})} \right\} + \frac{1}{\mu} \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp \left\{ \tau - s - \frac{1-\mu}{\mu} \ln \frac{1 - \exp(-\exp \tau)}{1 - \exp(-\exp s)} \right\} ds. \quad (109)$$

Далее, объединяя соотношения (107), (109) с формулой

$$\frac{1}{\mu} \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp \left\{ \tau - s - \frac{1-\mu}{\mu} \ln \frac{1 - \exp(-\exp \tau)}{1 - \exp(-\exp s)} \right\} ds = \frac{1}{1-\mu} \left( \exp(-v_0(\tau)) - \exp(-\bar{\tau} + \exp \bar{\tau})(1 - \exp(-\exp \bar{\tau})) \exp \left\{ \tau - \bar{\tau} - \frac{1-\mu}{\mu} \ln \frac{1 - \exp(-\exp \tau)}{1 - \exp(-\exp \bar{\tau})} \right\} \right) + O \left( \exp \left( -\frac{c - \sigma_0}{\varepsilon} \right) \right),$$

после несложных преобразований приходим к выводу, что равномерно по  $\tau, h, \varphi$

$$v_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h) = -v_0(\tau) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (110)$$

Заключительный этап обоснования леммы, связанный с переходом от задачи (108) к (105), (106), не вызывает затруднений. Действительно, принимая во внимание равенство (110), убеждаемся в том, что функция  $v_{*,\varphi}(\tau, \varepsilon, h)$  удовлетворяет уравнению (105) с точностью до величин порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon))$  по невязке. Опираясь затем на изложенную при доказательстве леммы 1 стандартную схему, получаем интересующее нас асимптотическое представление (104).  $\square$

На этапе 8 имеем дело с отрезком времени

$$t = 2h + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad \bar{s} \leq s \leq \bar{\bar{s}}, \quad (111)$$

где  $\bar{s} = -(1 - \beta_1) \ln(1/\varepsilon)$ ,  $\bar{\bar{s}} = \ln c - \varepsilon^{\beta_4}$ , а постоянная  $\beta_4$  принадлежит интервалу  $(1 - \beta, 1)$ . При указанных  $t$  в силу равенства (51) запаздывающая компонента  $\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h)$  задается формулой

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = c - \exp s + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right). \quad (112)$$

Что же касается функции

$$v_\varphi(s, \varepsilon, h) = \left( \omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + c + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \Big|_{t=2h+\varepsilon(s+\ln(1/\varepsilon))}, \quad (113)$$

то для нее справедливо следующее утверждение.

**Лемма 8.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция (113) допускает равномерное по  $s$  из отрезка  $[\bar{s}, \bar{s}]$  и по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое представление

$$v_\varphi(s, \varepsilon, h) = -\varepsilon s + \exp s + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right). \quad (114)$$

*Доказательство.* Выполним в уравнении (19) замену времени (111) и подставим в его правую часть равенство (112). Полагая затем

$$\omega = -b - c - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + v, \quad (115)$$

для новой переменной  $v$  приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \mu \frac{dv}{ds} = & \varepsilon \mu + \exp\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) - (1 - \mu) \exp\left\{s - \frac{\exp s}{\varepsilon}\right\} \left[1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right)\right] - \\ & - \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{b + 3c - v}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (116)$$

где  $\mu = \exp(-c/\varepsilon)$ . Согласно формулам (103), (104), (115) его следует дополнить начальным условием вида

$$v|_{s=\bar{s}} = (1 - \beta_1)\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{1-\beta_1} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \quad (117)$$

Как обычно, рассмотрим сначала отвечающую задаче (116), (117) упрощенную задачу Коши

$$\begin{aligned} \mu \frac{dv}{ds} = & \varepsilon \mu + \exp\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) - (1 - \mu) \exp\left\{s - \frac{\exp s}{\varepsilon}\right\}, \\ v|_{s=\bar{s}} = & (1 - \beta_1)\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{1-\beta_1} \end{aligned} \quad (118)$$

и заметим, что ее решение  $v_*(s, \varepsilon)$  может быть выписано в явном виде. А именно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_*(s, \varepsilon) = & \varepsilon \ln z, \\ z = & \exp\left\{\bar{v}(\varepsilon) + s - \bar{s} - \frac{1 - \mu}{\mu} \left(\exp\left(-\frac{\exp \bar{s}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\right)\right\} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon \mu} \int_{\bar{s}}^s \exp\left\{s - \sigma - \frac{1 - \mu}{\mu} \left(\exp\left(-\frac{\exp \sigma}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\right)\right\} d\sigma, \end{aligned} \quad (119)$$

где  $\bar{v}(\varepsilon) = -\bar{s} + \varepsilon^{-1} \exp \bar{s}$ . Далее, опираясь на формулу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon \mu} \int_{\bar{s}}^s \exp\left\{s - \sigma - \frac{1 - \mu}{\mu} \left(\exp\left(-\frac{\exp \sigma}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\right)\right\} d\sigma = \\ & = \frac{1}{1 - \mu} \exp\left(-s + \frac{\exp s}{\varepsilon}\right) \left[1 - \exp\left\{2s - 2\bar{s} + \frac{\exp \bar{s}}{\varepsilon} - \frac{\exp s}{\varepsilon} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 - \mu}{\mu} \left(\exp\left(-\frac{\exp \bar{s}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\right)\right\} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

нетрудно показать, что интересующее нас решение (119) упрощенной задачи (118) допускает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерную по  $\bar{s} \leq s \leq \bar{s}$  асимптотику

$$v_*(s, \varepsilon) = -\varepsilon s + \exp s + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right). \quad (120)$$

Для завершения доказательства леммы отметим, что в силу (120) при  $v = v_*(s, \varepsilon)$  слагаемое  $\varepsilon^2 \exp(-(b + 3c - v)/\varepsilon)$  из правой части уравнения (116) имеет порядок  $O(\exp(-q/\varepsilon))$ . Тем самым функция  $v_*(s, \varepsilon)$  удовлетворяет данному уравнению с точностью до величин порядка малости  $\exp(s - \varepsilon^{-1} \exp s)O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$ . Начальному же условию (117) она удовлетворяет с точностью до  $O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\beta_4}))$ . А поскольку  $\beta > 1 - \beta_4$ , то требуемое асимптотическое равенство (114) действительно выполняется.  $\square$

Этап 9 связан с отрезком времени

$$t = 2h + \varepsilon \left( \ln c + \varepsilon\theta + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad -\varepsilon^{-(1-\beta_4)} \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_5}, \quad (121)$$

где  $\beta_5 = \text{const} \in (0, 1)$ . В этом случае согласно равенству (51) имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) = \varepsilon \left( \ln c + \varepsilon\theta + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) - c(\exp(\varepsilon\theta) - 1) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \quad (122)$$

Далее, рассмотрим функцию

$$w_\varphi(\theta, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b + \varepsilon \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon} \Bigg|_{t=2h+\varepsilon(\ln c + \varepsilon\theta + \ln(1/\varepsilon))}. \quad (123)$$

Ее асимптотические свойства описывает следующая

**Лемма 9.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  для функции (123) выполняется равномерное по  $\theta$  из отрезка (121) и по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое равенство

$$w_\varphi(\theta, \varepsilon, h) = w_*(\theta, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right), \quad (124)$$

где

$$w_*(\theta, \varepsilon) = \gamma(\theta, \varepsilon) + \ln \left( \int_{-1/\varepsilon}^{\theta} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds \right), \quad (125)$$

$$\gamma(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\theta + \exp\left(-c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon}\right). \quad (126)$$

*Доказательство.* Схема обоснования леммы стандартна: сначала выполняем в уравнении (19) замену времени (121), затем подставляем в его правую часть равенство (122) и переходим к новой переменной  $w$  по формуле

$$\omega = -b - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon w. \quad (127)$$

В результате для  $w$  получаем уравнение

$$\frac{dw}{d\theta} = \varepsilon + \exp(-w) - c \left( 1 + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right) \right) \exp \left\{ \varepsilon\theta - c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} \right\} - \varepsilon^2 \exp \left( -\frac{b+c}{\varepsilon} + w \right). \quad (128)$$

В силу соотношений (113), (114), (127) его необходимо дополнить начальным условием вида

$$w|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\beta_4)}} = \left( -\ln c - \varepsilon\theta + c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} \right) \Big|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\beta_4)}} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}} \right) \right). \quad (129)$$

Убедимся, далее, что функция  $w = w_*(\theta, \varepsilon)$  удовлетворяет уравнению (128) с точностью до величин порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon^\beta))$  по невязке. Для этого обратимся к вытекающим из явных формул (125), (126) оценкам

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(\theta, \varepsilon) < 0, \quad w_*(\theta, \varepsilon) = \ln \left( \int_{-1/\varepsilon}^{\theta} \exp\{\gamma(\theta, \varepsilon) - \gamma(s, \varepsilon)\} ds \right) \leq \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \theta \right)$$

при  $-\varepsilon^{-(1-\beta_4)} \leq \theta \leq 0$ ;  $w_*(\theta, \varepsilon) \leq \gamma(\theta, \varepsilon) + \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} + \theta \right)$  при  $0 \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_5}$ .

Объединяя их с условием  $\beta > 1 - \beta_4$ , приходим к выводу, что

$$\exp \left( -\frac{b+c}{\varepsilon} + w_*(\theta, \varepsilon) \right) = O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right),$$

$$O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right) \exp \left\{ \varepsilon\theta - c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} \right\} = O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right).$$

А отсюда требуемый факт следует автоматически.

Покажем теперь, что функция  $w = w_*(\theta, \varepsilon)$  удовлетворяет с экспоненциальной точностью и начальному условию (129). Для проверки этого свойства необходимо знать асимптотическое поведение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  интеграла

$$I(\theta, \varepsilon) = \int_{-1/\varepsilon}^{\theta} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds, \quad -\varepsilon^{-(1-\beta_4)} \leq \theta \leq 0. \quad (130)$$

Проводя двукратное интегрирование по частям, последовательно выводим:

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{c} \exp \left\{ -\varepsilon s + c \frac{\exp(\varepsilon s) - 1}{\varepsilon} - \gamma(s, \varepsilon) \right\} \Big|_{s=-1/\varepsilon}^{s=\theta} + \Delta(\theta, \varepsilon), \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\theta, \varepsilon) &= \\ &= \frac{1}{c} \int_{-1/\varepsilon}^{\theta} (2\varepsilon - c \exp(\varepsilon s)) \exp \left\{ -3\varepsilon s + 2c \frac{\exp(\varepsilon s) - 1}{\varepsilon} \right\} d\{\exp(\varepsilon s - \gamma(s, \varepsilon))\} = \\ &= O \left( \exp \left\{ 2c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} - \gamma(\theta, \varepsilon) \right\} \right), \end{aligned} \quad (132)$$

где остаток равномерен по  $\theta \in [-\varepsilon^{-(1-\beta_4)}, 0]$ . Учитывая затем соотношения (130)–(132) при  $\theta = -\varepsilon^{-(1-\beta_4)}$  в формуле (125), убеждаемся в том, что при подстановке в (129) функции  $w = w_*(\theta, \varepsilon)$  получается с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\beta_4}))$  верное равенство. И наконец, следует добавить, что приведенная информация о  $w_*(\theta, \varepsilon)$  позволяет установить асимптотическое представление (124) по уже неоднократно упоминавшейся стандартной схеме (см. обоснование леммы 1).  $\square$

Выявление детальных асимптотических свойств функции (125) представляет собой отдельную проблему. Для ее решения привлечем очевидное разложение

$$\gamma(\theta, \varepsilon) = \gamma_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\theta) \varepsilon^k, \quad (133)$$

где  $\gamma_0(\theta) = \exp(-c\theta)$ ,  $\gamma_1(\theta) = \theta - (c\theta^2/2) \exp(-c\theta)$  и т.д. Подставляя, далее, ряд (133) в (125), приходим к асимптотическому разложению

$$w_*(\theta, \varepsilon) = w_{0,*}(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} w_{k,*}(\theta) \varepsilon^k, \quad (134)$$

где

$$w_{0,*}(\theta) = \exp(-c\theta) + \ln \Delta_*(\theta), \quad \Delta_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \exp(-\exp(-cs)) ds, \quad (135)$$

$$w_{1,*}(\theta) = \frac{1}{\Delta_*(\theta)} \int_{-\infty}^{\theta} \Delta_*(s) \left( 1 + \frac{c^2 s^2}{2} \exp(-cs) - cs \exp(-cs) \right) ds.$$

Отметим, что в отличие от сходящегося ряда (133) разложение (134) является лишь асимптотическим и пригодным равномерно по  $\theta$  из промежутка  $[-\varepsilon^{-(1-\beta_4)}, \varepsilon^{-\beta_5}]$ .

Остановимся на поведении членов ряда (134) при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ . В силу формул (131), (132) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow -\infty$ ,  $\theta \geq -\varepsilon^{-(1-\beta_4)}$  функция (125) допускает асимптотическое представление

$$w_*(\theta, \varepsilon) = -\ln c - \varepsilon\theta + c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} + O\left(\exp\left(c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon}\right)\right).$$

Поэтому для  $w_{k,*}(\theta)$  справедливы равенства

$$w_{k,*}(\theta) = O(\theta^{k+1}), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad k \geq 0. \quad (136)$$

В случае  $\theta \rightarrow +\infty$  сначала, опираясь на явный вид фигурирующей в (135) функции  $\Delta_*(\theta)$ , устанавливаем асимптотическое представление

$$\Delta(\theta) = \theta + d_* + O(\exp(-c\theta)), \quad \theta \rightarrow +\infty, \quad (137)$$

где

$$d_* = \int_{-\infty}^0 \exp(-\exp(-cs)) ds + \int_0^{+\infty} (\exp(-\exp(-cs)) - 1) ds. \quad (138)$$

Далее, из (137), (138) и из явных выражений для  $w_{0,*}(\theta)$ ,  $w_{1,*}(\theta)$  вытекает, что

$$w_{0,*}(\theta) = O(\ln \theta), \quad w_{1,*}(\theta) = O(\theta), \quad \theta \rightarrow +\infty. \quad (139)$$

И наконец, опираясь на равенства (137)–(139) и метод математической индукции, убеждаемся в том, что

$$w_{k,*}(\theta) = O(\theta^k), \quad \theta \rightarrow +\infty, \quad k \geq 1. \quad (140)$$

Завершая этап 9, приведем простейший вариант асимптотического равенства для  $w_*(\theta, \varepsilon)$ , который можно получить из разложения (134). А именно, опираясь на установленные выше явные формулы (135) и свойства (136), (140), заключаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$w_*(\theta, \varepsilon) = w_{0,*}(\theta) + \varepsilon w_{1,*}(\theta) + \begin{cases} O(\varepsilon^{3\beta_4-1}) & \text{при } -\varepsilon^{-(1-\beta_4)} \leq \theta \leq 0, \\ O(\varepsilon^{2-2\beta_5}) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \varepsilon^{-\beta_5}. \end{cases} \quad (141)$$

Этап 10 соответствует отрезку времени

$$t = 2h + \varepsilon \left( s + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad \bar{s} \leq s \leq \bar{\bar{s}}, \quad (142)$$

где  $\bar{s} = \ln c + \varepsilon^{1-\beta_5}$ ,  $\bar{\bar{s}} = \sigma_0/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)$ . В этом случае в силу (51), (57), (58), (75), (76) имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) \leq -M\varepsilon^{1-\beta_5}, \quad M = \text{const} \in (0, c). \quad (143)$$

Учитывая, далее, соотношения (142), (143) в уравнении (19) и переходя в нем к новой переменной  $z$  по формуле

$$\omega = -b + \varepsilon z, \quad (144)$$

получаем уравнение вида

$$\frac{dz}{ds} = 1 + \exp(-z) - \exp\left(-\frac{b+c}{\varepsilon} + z\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_5}}\right)\right). \quad (145)$$

В силу равенств (123), (124), (144) его следует дополнить начальным условием

$$z|_{s=\bar{s}} = -\ln \frac{1}{\varepsilon} + w_*(\theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-\beta_5}} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right). \quad (146)$$

При анализе задачи Коши (145), (146) нам потребуется асимптотическое равенство для  $w_*(\theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-\beta_5}}$ , более детальное чем то, которое дает формула (141). В связи с этим обратим внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{-1/\varepsilon}^{\varepsilon^{-\beta_5}} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds &= \int_{-1/\varepsilon}^{+\infty} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds - \int_{\varepsilon^{-\beta_5}}^{+\infty} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds = \\ &= \int_{-1/\varepsilon}^{+\infty} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds - \int_{\varepsilon^{-\beta_5}}^{+\infty} \exp\{-\varepsilon s\} ds + \int_{\varepsilon^{-\beta_5}}^{+\infty} \exp\{-\varepsilon s\}(1 - \exp\{\varepsilon s - \gamma(s, \varepsilon)\}) ds = \\ &= \int_{-1/\varepsilon}^{+\infty} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds - \frac{\exp(-\varepsilon^{1-\beta_5})}{\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_5}}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\int_{-1/\varepsilon}^{+\infty} \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds = \int_{-1/\varepsilon}^0 \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds + \int_0^{+\infty} \exp\{-\varepsilon s\} ds +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \exp\{-\varepsilon s\} (\exp\{\varepsilon s - \gamma(s, \varepsilon)\} - 1) ds = \frac{1}{\varepsilon} + d_*(\varepsilon),$$

где

$$d_*(\varepsilon) = \int_{-1/\varepsilon}^0 \exp\{-\gamma(s, \varepsilon)\} ds + \int_0^{+\infty} \exp\{-\varepsilon s\} (\exp\{\varepsilon s - \gamma(s, \varepsilon)\} - 1) ds.$$

Заметим еще, что функция  $d_*(\varepsilon)$  раскладывается в асимптотический ряд по целым степеням  $\varepsilon$ , а при  $\varepsilon = 0$  совпадает с постоянной (138). И наконец, учитывая приведенные соотношения в формуле (125), приходим к выводу, что

$$w_*(\theta, \varepsilon)|_{\theta=\varepsilon^{-\beta_5}} = \varepsilon^{1-\beta_5} + \ln \left( \frac{1 - \exp(-\varepsilon^{1-\beta_5})}{\varepsilon} + d_*(\varepsilon) \right) + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{\beta_5}} \right) \right). \quad (147)$$

Для того чтобы сформулировать отвечающий данному этапу строгий результат, подставим получившееся равенство (147) в (146) и перейдем затем от (145), (146) к упрощенной задаче Коши

$$\frac{dz}{ds} = 1 + \exp(-z), \quad z|_{s=\bar{s}} = \varepsilon^{1-\beta_5} + \ln[1 - \exp(-\varepsilon^{1-\beta_5}) + \varepsilon d_*(\varepsilon)].$$

Заметим, далее, что решение этой задачи выписывается явно посредством формулы

$$z = s - \ln c + \ln[1 - c \exp(-s) + \varepsilon d_*(\varepsilon)]. \quad (148)$$

А так как функция (148) удовлетворяет задаче (145), (146) с точностью до величин порядка  $O(\exp(-q/\varepsilon^{\beta_*}))$  (здесь и ниже показатель степени  $\beta_*$  задается равенством  $\beta_* = \min(1 - \beta_4, \beta_5)$ ), то справедливо следующее утверждение.

**Лемма 10.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  для функции

$$z_\varphi(s, \varepsilon, h) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) + b}{\varepsilon} \Big|_{t=2h+\varepsilon(s+\ln(1/\varepsilon))} \quad (149)$$

имеет место равномерное по  $\bar{s} \leq s \leq \bar{\bar{s}}$ ,  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотическое представление

$$z_\varphi(s, \varepsilon, h) = s - \ln c + \ln[1 - c \exp(-s) + \varepsilon d_*(\varepsilon)] + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}} \right) \right). \quad (150)$$

Этап 11, являющийся заключительным, связан с отрезком времени

$$2h + \sigma_0 \leq t \leq 2h + b - \sigma_0/2. \quad (151)$$

Будем считать выполненным дополнительное ограничение

$$\delta_0 < \frac{3\sigma_0}{2} \quad (152)$$

на параметр  $\delta_0$ . Данное условие гарантирует, что длина отрезка (151) меньше запаздывания  $h$ . В этом случае в силу предыдущих равенств (75), (76), (91), (92), (103), (104), (113), (114), (123), (124), (149), (150) имеем

$$\omega_\varphi(t - h, \varepsilon, h) \leq -M, \quad M = \text{const} \in (0, b - \sigma_0). \quad (153)$$

Кроме того, в дополнение к (153) считаем, что на отрезке (151) справедливы априорные условия

$$\omega + b \geq M_1, \quad \omega - c \leq -M_2, \quad (154)$$

где  $M_1, M_2 = \text{const} > 0$ .

С учетом неравенств (153), (154) интересующее нас уравнение (19) преобразуется к весьма простому виду

$$\dot{\omega} = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (155)$$

Далее, согласно (149), (150) дополним его начальным условием

$$\omega|_{t=2h+\sigma_0} = -b + \sigma_0 - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \ln c + \varepsilon \ln(1 + \varepsilon d_*(\varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon \beta_*}\right)\right). \quad (156)$$

Несложный анализ получившейся задачи Коши (155), (156) приводит к выводу, что, во-первых, ее решение задается равенством

$$\omega_\varphi(t, \varepsilon, h) = t - 2h - b - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \ln c + \varepsilon \ln(1 + \varepsilon d_*(\varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon \beta_*}\right)\right); \quad (157)$$

во-вторых, для функции  $\omega = t - 2h - b$  нужные оценки (154) выполняются с константами  $M_1 \in (0, \sigma_0)$ ,  $M_2 \in (0, c + \sigma_0/2)$ . А это значит, что формула (157) обретает законную силу и справедлива заключительная

**Лемма 11.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$  допускает асимптотическое представление (157), равномерное по  $t$  из отрезка (151) и по аргументам  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$ .

Отдельно остановимся на геометрической интерпретации всех одиннадцати этапов построения асимптотики функции  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$ . Для этого нам потребуется корень  $t = T_\varphi(\varepsilon, h)$  уравнения (24), о котором говорилось в п. 2.1. Из лемм 1–11 и условий (22) вытекает, что момент времени  $t = T_\varphi(\varepsilon, h) - \sigma_0$  принадлежит отрезку (151). В силу представления (157) и равенства (155) упомянутый корень является простым и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  обладает равномерной по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$  асимптотикой

$$T_\varphi(\varepsilon, h) = 2h + b + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \ln c - \varepsilon \ln(1 + \varepsilon d_*(\varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon \beta_*}\right)\right). \quad (158)$$

В свою очередь, наличие корня (158) позволяет определить на плоскости  $(t, \omega)$  кривую

$$\Gamma_\varphi(\varepsilon, h) = \{(t, \omega) : -\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi(\varepsilon, h) - \sigma_0/2, \omega = \omega_\varphi(t, \varepsilon, h)\}.$$

Геометрический смысл лемм 1–11 состоит в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $h \in \Omega$ ,  $\varphi \in S$

$$H(\Gamma_\varphi(\varepsilon, h), \Gamma(h)) = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (159)$$

где  $\Gamma(h)$  — кривая, введенная в рассмотрение в начале данного пункта, а  $H$  — хаусдорфово расстояние. Действительно, выше близость между кривыми  $\Gamma_\varphi(\varepsilon, h)$  и  $\Gamma(h)$  последовательно установлена на одиннадцати различных участках и из полученных на этих участках асимптотических представлений для  $\Gamma_\varphi(\varepsilon, h)$  требуемое равенство (159) вытекает автоматически.

### 2.3. Завершение доказательства теоремы 1

Приступим к реализации описанной в п. 2.1. схемы. В связи с этим обратимся к оператору (25). Из наших построений следует, что он корректно определен на множестве (23). Покажем теперь, что при подходящем выборе констант  $q_1, q_2$  в (23) справедливо включение  $\Pi(S) \subset S$ .

Действительно, опираясь на асимптотическую формулу (159), нетрудно увидеть, что неравенства

$$-q_1 \leq \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon, h), \varepsilon, h) \leq -q_2 \quad \forall t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0]$$

заведомо выполняются с любыми фиксированными константами

$$q_1 > b + c, \quad q_2 \in (0, \sigma_0). \quad (160)$$

А это значит, что при условиях (21), (22), (87), (152), (160) на параметры  $\sigma_0, q_1, q_2, \delta_0$  имеет место требуемое включение  $\Pi(S) \subset S$ . Далее, в силу вытекающего из (158) неравенства  $T_\varphi(\varepsilon, h) > h$  оператор  $\Pi$  является компактным. Тем самым, согласно принципу Шаудера, у него существует в  $S$  хотя бы одна неподвижная точка  $\varphi = \tilde{\varphi}(t, \varepsilon, h)$ . Как уже было сказано в п. 2.1., соответствующее решение  $\tilde{\omega}(t, \varepsilon, h) = \omega_\varphi|_{\varphi=\tilde{\varphi}}$  уравнения (19) оказывается периодическим с периодом  $\tilde{T}(\varepsilon, h) = T_\varphi|_{\varphi=\tilde{\varphi}}$ . Добавим еще, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для  $\tilde{T}(\varepsilon, h)$  из равенства (158) вытекает равномерное по  $h \in \Omega$  асимптотическое представление

$$\tilde{T}(\varepsilon, h) = 2h + b + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \ln c - \varepsilon \ln(1 + \varepsilon d_*(\varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon \beta_*}\right)\right). \quad (161)$$

Обратимся, далее, к уравнению (26) для отыскания свободного параметра  $h \in \Omega$ . Опираясь на асимптотическую формулу (161), заключаем, что упомянутое уравнение допускает решение  $h = h(\varepsilon)$  с асимптотикой

$$h(\varepsilon) = b + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \ln c - \varepsilon \ln(1 + \varepsilon d_*(\varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon \beta_*}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (162)$$

Прделанные в данном пункте построения вместе с содержащимся в п. 2.2. асимптотическим анализом позволяют разобраться с нашей главной проблемой – обоснованием теоремы 1. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\omega(t, \varepsilon) = \tilde{\omega}(t, \varepsilon, h)|_{h=h(\varepsilon)}, \quad (163)$$

которая по построению является периодической с периодом  $3h(\varepsilon)$ . Далее, рассмотрим корень  $t = t_0(\varepsilon)$  уравнения  $\omega(t, \varepsilon) = 0$ , асимптотически близкий к нулю. Из представления (38) и формулы  $\dot{\omega}_\varphi = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon))$ , имеющей место на отрезке  $-\sigma_0 \leq t \leq c - \sigma_0$ , вытекает, что этот корень является простым и обладает асимптотикой

$$t_0(\varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (164)$$

Полагая затем

$$\begin{aligned} u_*(t, r) &= \exp(r \omega_*(t, r)), \quad \omega_*(t, r) = \omega(t + t_0(\varepsilon), \varepsilon)|_{\varepsilon=1/r}, \\ h(r) &= h(\varepsilon)|_{\varepsilon=1/r}, \end{aligned} \quad (165)$$

получаем искомый цикл (15) системы (9), (12).

В заключение отметим, что найденное периодическое решение допускает асимптотику (16). Действительно, нужная формула для  $h(r)$  очевидным образом следует из (162), асимптотическое представление для  $H(\Gamma(r), \Gamma_0)$  вытекает из (159), (162), (164), а формулы для максимума и минимума функции  $u_*(t, r)$  получаются из (165) с учетом установленного в п. 2.2. асимптотического поведения решения  $\omega_\varphi(t, \varepsilon, h)$ . Теорема 1 полностью доказана.

### 3. Доказательство теоремы 2

#### 3.1. Общий план исследования

Для анализа свойств устойчивости цикла (15) выполним в системе (9) при условиях (12), (13) замены переменных  $u_j = \exp(r\omega_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  и положим  $r = 1/\varepsilon$ . В результате приходим к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j = & 1 - \exp\left(\frac{\omega_j - c}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{b + \omega_j}{\varepsilon}\right) - \\ & - \left(1 - \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right)\right) \exp\left(\frac{\omega_{j-1}}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, 2, 3, \quad \omega_0 = \omega_3. \end{aligned} \quad (166)$$

Заметим, далее, что в рамках системы (166) самосимметричному циклу (15) соответствует периодическое решение

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega(t, \varepsilon), \omega(t + h, \varepsilon), \omega(t + 2h, \varepsilon)), \quad (167)$$

где  $h = h(\varepsilon)$ ,  $\omega(t, \varepsilon)$  — функции (162), (163). В свою очередь, за устойчивость цикла (167) отвечают мультипликаторы линейной системы в вариациях

$$\dot{g}_j = -A(t + (j - 1)h, \varepsilon)g_j - B(t + (j - 1)h, \varepsilon)g_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad g_0 = g_3 \quad (168)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \left( \exp\left(\frac{\omega(t, \varepsilon) - c}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{b + \omega(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \right), \\ B(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right) \right) \exp\left(\frac{\omega(t - h, \varepsilon)}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (169)$$

Обратим внимание, что система (166) представляет собой частный случай кольцевой системы однонаправленно связанных уравнений, а цикл (167) — это периодический режим типа бегущей волны. Для таких периодических решений в работах [14–16] разработан специальный метод анализа свойств устойчивости, суть которого излагается ниже.

Наряду с (168) рассмотрим вспомогательное скалярное линейное уравнение с запаздыванием

$$\dot{g} = -A(t, \varepsilon)g - \varkappa B(t, \varepsilon)g(t - h), \quad (170)$$

где  $h$  — фазовый сдвиг из (167),  $g(t)$  — комплекснозначная функция,  $\varkappa \in \mathbb{C}$  — произвольный параметр. Точнее говоря, нас будут интересовать его мультипликаторы  $\nu_l(\varkappa, \varepsilon)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , занумерованные в порядке убывания модулей.

Поясним смысл термина «мультипликатор» применительно к уравнению (170). В связи с этим рассмотрим банахово пространство  $E$  непрерывных при  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$  комплекснозначных функций  $g(t)$  с нормой

$$\|g\|_E = \max_{-h-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g(t)|. \quad (171)$$

Далее, оператором монодромии уравнения (170) назовем ограниченный линейный оператор  $V(\varkappa, \varepsilon) : E \rightarrow E$ , действующий на произвольную функцию  $g_0(t) \in E$  по правилу:

$$V(\varkappa, \varepsilon)g_0 = g(t + 3h, g_0, \varkappa, \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (172)$$

где через  $g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)$  обозначено решение уравнения (170) на отрезке времени  $-\sigma_0 \leq t \leq 3h - \sigma_0$  с начальной функцией  $g_0(t)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ . Отметим, что в силу компактности оператора  $V(\varkappa, \varepsilon)$  его спектр заведомо дискретен. Что же касается мультипликаторов уравнения (170), то таковыми, по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений, будем называть собственные значения оператора (172).

Остановимся на вопросе о связи между мультипликаторами системы (168) и уравнения (170). Имеет место следующее утверждение (см. [14–16]).

**Лемма 12.** *Каждый мультипликатор  $\nu \in \mathbb{C}$  системы (168) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^3, \quad (173)$$

где  $\varkappa$  – корень одного из уравнений

$$\nu_l(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^3, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (174)$$

И обратно, если при некотором  $l = l_0$  уравнение (174) имеет ненулевой корень  $\varkappa = \varkappa_0$ , то у исходной системы (168) существует мультипликатор  $\nu = \varkappa_0^3$ .

В следующих двух пунктах мы проведем асимптотическое вычисление мультипликаторов  $\nu_l(\varkappa, \varepsilon)$  и проанализируем уравнения (174). На этом пути для мультипликаторов  $\nu_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, 3$  системы (168) будут получены соотношения вида

$$\nu_1(\varepsilon) \equiv 1, \quad |\nu_k(\varepsilon)| \leq \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\delta}\right), \quad k = 2, 3, \quad q, \delta = \text{const} > 0, \quad (175)$$

означающие, что цикл (15) экспоненциально орбитально устойчив.

### 3.2. Анализ вспомогательного линейного уравнения

Фиксируем произвольно постоянную  $L > 0$  и рассмотрим множество

$$B = \{g_0(t) \in E : \|g_0\| \leq L\}, \quad (176)$$

где  $\|*\|$  – норма (171). Нас будет интересовать фигурирующее в (172) решение  $g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)$  уравнения (170) с произвольной начальной функцией  $g_0(t)$  из множества (176). Интегрируя уравнение (170) методом шагов, нетрудно увидеть, что на отрезке

$$-\sigma_0 \leq t \leq 3h - \sigma_0 \quad (177)$$

зависимость  $g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)$  от  $\varkappa$  кубическая, т.е.

$$g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon) = g_1(t, g_0, \varepsilon) + \varkappa g_2(t, g_0, \varepsilon) + \varkappa^2 g_3(t, g_0, \varepsilon) + \varkappa^3 g_4(t, g_0, \varepsilon). \quad (178)$$

Отметим также, что

$$g_k(t, g_0, \varepsilon) \equiv 0 \text{ при } t \in [-\sigma_0, (k-2)h - \sigma_0], \quad k = 3, 4. \quad (179)$$

Ниже устанавливаются асимптотические свойства фигурирующих в формуле (178) функций  $g_k(t, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , равномерные по  $t$  из отрезка (177) и по начальному условию  $g_0$  из множества (176). Соответствующие построения разбиваются на те же самые 11 этапов, что и в п. 2.2. Поэтому, опуская технические детали, здесь ограничимся сводкой итоговых результатов.

На этапе 1, когда  $t$  меняется на отрезке (28), в силу (23), (29), (30), (169) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$A(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \exp(-\tau)} \Big|_{\tau=(t-c)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad B(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right).$$

Принимая во внимание эти обстоятельства и учитывая равенства (179), приходим к равномерным по  $t, g_0$  асимптотическим формулам

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= \frac{g_0(-\sigma_0)}{1 + \exp \tau} \Big|_{\tau=(t-c)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad g_k(t, g_0, \varepsilon) \equiv 0, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \quad (180)$$

На этапе 2 для коэффициентов уравнения (170) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp(v_0(\tau)) \Big|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp \tau \Big|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned}$$

где  $v_0(\tau)$  — функция (43). Объединяя их с уже известной информацией (180), убеждаемся в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  из отрезка (40) и по  $g_0 \in B$

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad g_3(t, g_0, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad g_4(t, g_0, \varepsilon) \equiv 0, \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) \left(1 - \frac{\exp \tau}{1 - \exp(-\exp \tau)}\right) \Big|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \quad (181)$$

На этапе 3 для  $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаются равенства

$$A(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \quad B(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \exp s \Big|_{s=(t-h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right),$$

а запаздывающие компоненты  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  задаются вытекающими из (180) равенствами

$$\begin{aligned} g_1(t-h, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad g_2(t-h, g_0, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ \varepsilon \rightarrow 0, \quad g_k(t-h, g_0, \varepsilon) &\equiv 0, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \quad (182)$$

Из приведенных формул и предыдущих равенств (181), в свою очередь, следует, что для функций  $g_k(t, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  выполняются при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерные по  $t$  из отрезка (48) и по  $g_0 \in B$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), & g_3(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \\ g_4(t, g_0, \varepsilon) &\equiv 0, \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) \left(1 - \frac{\exp s}{\varepsilon}\right) \Big|_{s=(t-h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \end{aligned} \quad (183)$$

На этапе 4 коэффициенты уравнения (170) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приобретают вид

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-v_*(\theta, \varepsilon)) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} (b+c) \exp\left[\frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\theta\right] + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \end{aligned} \quad (184)$$

где  $\varepsilon\theta = (t-h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon) - \ln(b+c) - 2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)/(b+c)$ , а для  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  сохраняются соотношения (182). Учитывая эти обстоятельства и опираясь на предыдущие формулы (183), убеждаемся в том, что на отрезке (55) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, g_0$

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), & g_3(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \\ g_4(t, g_0, \varepsilon) &\equiv 0, \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= \frac{g_0(-\sigma_0)}{\varepsilon} \frac{\partial v_*}{\partial \theta}(\theta, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right). \end{aligned} \quad (185)$$

Здесь  $v_*(\theta, \varepsilon)$  — функция (59), а переменная  $\theta$  та же самая, что и в (184).

На этапе 5 рассматриваются значения  $t$  из отрезка (72). В этом случае при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left\{-v_*(\sigma, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right)\right\} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} (b+c) \exp\left\{\frac{2\varepsilon}{b+c} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \sigma + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right)\right\}, \end{aligned} \quad (186)$$

где  $\sigma = (t-h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon) - \ln(b+c) - 2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)/(b+c)$ ,  $v_*(\sigma, \varepsilon)$  — функция (77), а для  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  по-прежнему остаются в силе соотношения (182). Объединяя эти факты с предыдущими формулами (185), заключаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, g_0$

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), & g_3(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \\ g_4(t, g_0, \varepsilon) &\equiv 0, \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) \frac{\partial v_*}{\partial \sigma}(\sigma, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right), \end{aligned} \quad (187)$$

где  $\sigma$  — переменная из (186).

Этап 6 связан с отрезком времени (89), на котором при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + y_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-c-h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right) \right\} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + y_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-c-h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $y_0(\tau)$  – функция (30). Что же касается запаздывающих компонентов  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , то для них имеют место равенства, получающиеся из (180) при замене  $t$  на  $t-h$ . Принимая во внимание эти обстоятельства и опираясь на предыдущие формулы (187), приходим к выводу, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, g_0$

$$\begin{aligned} g_1(t, g_0, \varepsilon) &= O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \quad g_3(t, g_0, \varepsilon) = O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \\ g_4(t, g_0, \varepsilon) &\equiv 0, \\ g_2(t, g_0, \varepsilon) &= - \frac{g_0(-\sigma_0)}{1 + \exp \tau} \Big|_{\tau=(t-c-h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right). \end{aligned} \tag{188}$$

На этапе 7 имеем дело с отрезком времени (101). Здесь для коэффициентов (169) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + v_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-2h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right) \right\} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + v_0(\tau) \Big|_{\tau=(t-2h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $v_0(\tau)$  – функция (43), а функции  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  задаются формулами (181) (в которых  $t$  следует заменить на  $t-h$ ). Перечисленные факты вместе с равенствами (188) из предыдущего этапа позволяют заключить, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, g_0$  имеют место асимптотические представления

$$\begin{aligned} g_k(t, g_0, \varepsilon) &= O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right), \quad k = 1, 2, 4, \quad g_3(t, g_0, \varepsilon) = \\ &= -g_0(-\sigma_0) \left( 1 - \frac{\exp \tau}{1 - \exp(-\exp \tau)} \right) \Big|_{\tau=(t-2h)/\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right). \end{aligned} \tag{189}$$

На этапе 8 рассматривается отрезок времени (111). На нем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  коэффициенты (169) допускают представления

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + s - \frac{\exp s}{\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}} \right) \right) \right\} + \\ &\quad + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon} \right) \right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ \frac{c}{\varepsilon} + s - \frac{\exp s}{\varepsilon} + O \left( \exp \left( -\frac{q}{\varepsilon^\beta} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \tag{190}$$

где  $s = (t-2h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)$ , а для  $g_k(t-h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  справедливы асимптотические равенства (183) (при замене в них  $t$  на  $t-h$ ). Опираясь на эти факты

и соотношения (189), при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем равномерные по  $t, g_0$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} g_k(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right), \quad k = 1, 2, 4, \\ g_3(t, g_0, \varepsilon) &= -g_0(-\sigma_0)\left(1 - \frac{\exp s}{\varepsilon}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right), \end{aligned} \quad (191)$$

где  $s$  — переменная из (190).

На этапе 9 рассматривается отрезок времени (121). В данном случае коэффициенты (169) допускают при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left\{-w_*(\theta, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right)\right\} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ B(t, \varepsilon) &= \frac{c}{\varepsilon^2} \exp\left\{\varepsilon\theta - c \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^\beta}\right)\right)\right\}, \end{aligned} \quad (192)$$

где  $\varepsilon\theta = (t - 2h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon) - \ln c$ , а функции  $g_k(t - h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  задаются равенствами вида (183) после замены в них  $t$  на  $t - h$  и подстановки  $s = \ln c + \varepsilon\theta$ . Опираясь на эти факты, и учитывая предыдущие формулы (191), убеждаемся в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t, g_0$

$$\begin{aligned} g_k(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right), \quad k = 1, 2, 4, \\ g_3(t, g_0, \varepsilon) &= \frac{g_0(-\sigma_0)}{\varepsilon} \frac{\partial w_*}{\partial \theta}(\theta, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\beta_4}}\right)\right), \end{aligned} \quad (193)$$

где  $w_*(\theta, \varepsilon)$  — функция (125), а  $\theta$  — переменная из (192).

Этап 10 связан с отрезком времени (142), на котором при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{c}{\varepsilon} \exp\left\{-s - \ln[1 - c \exp(-s) + \varepsilon d_*(\varepsilon)] + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right)\right\} + \\ &+ O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad B(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_5}}\right)\right), \end{aligned} \quad (194)$$

где  $s = (t - 2h)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)$ . А отсюда, в свою очередь, с учетом уже известных из предыдущих этапов равенств для  $g_k(t - h, g_0, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  и формул (193) нетрудно вывести, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы равномерные по  $t, g_0$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} g_k(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right), \quad k = 1, 2, 4, \\ g_3(t, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) \left(1 + \frac{c \exp(-s)}{1 - c \exp(-s) + \varepsilon d_*(\varepsilon)}\right) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right), \end{aligned} \quad (195)$$

где переменная  $s$  та же самая, что и в (194).

Этап 11, являющийся заключительным, соответствует отрезку времени  $2h + \sigma_0 \leq t \leq 3h - \sigma_0$ . При указанных значениях  $t$  имеем

$$A(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad B(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

А отсюда и из (195) очевидным образом вытекают равномерные по  $t, g_0$  асимптотические представления

$$\begin{aligned} g_k(t, g_0, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right)\right), \quad k = 1, 2, 4, \\ g_3(t, g_0, \varepsilon) &= g_0(-\sigma_0) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (196)$$

### 3.3. Завершение доказательства теоремы 2

Прежде всего локализуем значения параметра  $\varkappa$ , при которых следует рассматривать уравнения (174). В связи с этим обратим внимание, что из соотношений (172), (178) вытекает представление

$$V(\varkappa, \varepsilon) = V_0(\varepsilon) + \varkappa V_1(\varepsilon) + \varkappa^2 V_2(\varepsilon) + \varkappa^3 V_3(\varepsilon), \quad (197)$$

где  $V_j(\varepsilon) : E \rightarrow E$ ,  $0 \leq j \leq 3$  — ограниченные линейные операторы. Более того, полагая в множестве (176) постоянную  $L$  равной 1 и опираясь на проделанный в п. 3.2. асимптотический анализ решения  $g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)$ , убеждаемся в справедливости оценок вида

$$\begin{aligned} \|V_0(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} &\leq M_1 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right), & \|V_1(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} &\leq M_2 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right), \\ \|V_2(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} &\leq \frac{M_3}{\varepsilon}, & \|V_3(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} &\leq M_4 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right), \end{aligned} \quad (198)$$

где  $M_j = \text{const} > 0$ ,  $0 \leq j \leq 3$ .

Обратимся, далее, к уравнениям (174) и покажем, что при фиксированном достаточно большом  $R > 0$  они не имеют корней в множестве  $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| > R/\varepsilon\}$ . Действительно, из (197), (198) заключаем, что

$$\begin{aligned} \sup_{l \geq 1} |\nu_l(\varkappa, \varepsilon)| &\leq \sum_{j=0}^3 |\varkappa|^j \|V_j(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} \leq \\ &\leq M_1 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right) + |\varkappa| M_2 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right) + |\varkappa|^2 \frac{M_3}{\varepsilon} + |\varkappa|^3 M_4 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right). \end{aligned}$$

А поскольку при достаточно большой фиксированной константе  $R$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  выполняется оценка

$$\begin{aligned} M_1 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right) + \frac{R}{\varepsilon} M_2 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right) + \\ + \frac{R^2}{\varepsilon^3} M_3 + \frac{R^3}{\varepsilon^3} M_4 \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon\beta_*}\right) < \frac{R^3}{\varepsilon^3}, \end{aligned} \quad (199)$$

то заведомо

$$\sup_{l \geq 1} |\nu_l(\varkappa, \varepsilon)| < |\varkappa|^3 \quad \forall \varkappa \in \mathbb{C}, \quad |\varkappa| > \frac{R}{\varepsilon}.$$

Тем самым уравнения (174) действительно не имеют корней  $\varkappa$ , удовлетворяющих неравенству  $|\varkappa| > R/\varepsilon$ .

Приступим теперь непосредственно к асимптотическому вычислению спектра оператора (172). Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 13.** Для любых  $R > 0$ ,  $\delta \in (0, \beta_*)$  найдутся такие постоянные  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(R, \delta) > 0$ ,  $q_j = q_j(R, \delta) > 0$ ,  $j = 1, 2$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и

$$\varkappa \in \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varkappa \in \mathbb{C} : \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^\delta}\right) \leq |\varkappa| \leq \frac{R}{\varepsilon} \right\} \quad (200)$$

выполняется неравенство

$$\sup_{l \geq 2} |\nu_l(\varkappa, \varepsilon)| \leq \exp\left(-\frac{q_1}{\varepsilon^{\beta_*}}\right). \quad (201)$$

Что же касается мультипликатора  $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ , то при  $\varkappa \in \Lambda$  он является простым, аналитически зависящим от  $\varkappa$  и допускает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерные по  $\varkappa$  асимптотические представления

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^2 + O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right), \quad \frac{\partial \nu_1}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) = 2\varkappa + O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right). \quad (202)$$

*Доказательство.* Фиксируем произвольно  $R > 0$ ,  $\delta \in (0, \beta_*)$  и будем считать, что параметр  $\varkappa$  из (172) принадлежит множеству (200). Далее, представим оператор (172) в виде

$$\begin{aligned} V(\varkappa, \varepsilon) &= U_1(\varkappa, \varepsilon) + U_2(\varkappa, \varepsilon), \quad U_1(\varkappa, \varepsilon)g_0 = g(t + 3h, \tilde{g}_0, \varkappa, \varepsilon), \\ U_2(\varkappa, \varepsilon)g_0 &= g_0(-\sigma_0)g_*(t + 3h, \varkappa, \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \end{aligned} \quad (203)$$

где  $\tilde{g}_0(t) = g_0(t) - g_0(-\sigma_0)$ ,  $g_*(t, \varkappa, \varepsilon) = g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)|_{g_0 \equiv 1}$ . Из проделанного в 3.2. асимптотического анализа решения  $g(t, g_0, \varkappa, \varepsilon)$  и из равенства  $\tilde{g}_0(-\sigma_0) = 0$  вытекает, что фигурирующие в (203) операторы  $U_j(\varkappa, \varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$  допускают оценки

$$\begin{aligned} \max_{\varkappa \in \Lambda} \|U_1(\varkappa, \varepsilon)\|_{E \rightarrow E} + \max_{\varkappa \in \Lambda} \left\| \frac{\partial U_1}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) \right\|_{E \rightarrow E} &\leq \exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right), \\ \max_{\varkappa \in \Lambda} \|U_2(\varkappa, \varepsilon)\|_{E \rightarrow E} + \max_{\varkappa \in \Lambda} \left\| \frac{\partial U_2}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) \right\|_{E \rightarrow E} &\leq \frac{M}{\varepsilon^3}, \quad M = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (204)$$

Изучим сначала спектральные свойства оператора  $U_2(\varkappa, \varepsilon)$ . Из формул (203) следует, что он является конечномерным, а его спектр состоит из двух точек — простого собственного значения  $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$ , где  $\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = g_*(3h - \sigma_0, \varkappa, \varepsilon)$ , и собственного значения  $\nu = 0$  бесконечной кратности. Что же касается собственного значения  $\nu_*(\varkappa, \varepsilon)$ , то для него из представлений (196) (относящихся к случаю  $g_0(t) \equiv 1$ ) вытекают равномерные по  $\varkappa \in \Lambda$  асимптотические равенства

$$\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^2 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right), \quad \frac{\partial \nu_*}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) = 2\varkappa + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right). \quad (205)$$

Обратимся теперь к исходному оператору  $V(\varkappa, \varepsilon)$  и заметим, что в силу соотношения

$$(\nu I - V(\varkappa, \varepsilon))^{-1} = (I - (\nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon))^{-1}U_1(\varkappa, \varepsilon))^{-1}(\nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon))^{-1},$$

где  $I$  — единичный оператор в пространстве  $E$ , любое значение  $\nu \in \mathbb{C}$ , для которого

$$\|( \nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon) )^{-1} U_1(\varkappa, \varepsilon) \|_{E \rightarrow E} < 1, \quad (206)$$

принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Напомним, далее, что оператор  $U_1(\varkappa, \varepsilon)$  допускает оценку из (204). В случае же оператора  $(\nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon))^{-1}$ , опираясь на его явный вид

$$(\nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon))^{-1} g_0 = \frac{g_0(t)}{\nu} + \frac{g_0(-\sigma_0)}{\nu(\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon))} g_*(t + 3h, \varkappa, \varepsilon), \quad -h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$$

и вторую оценку из (204), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|(\nu I - U_2(\varkappa, \varepsilon))^{-1}\|_{E \rightarrow E} &\leq \frac{M(1 + \varepsilon^3|\nu|)}{\varepsilon^3|\nu| \cdot |\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon)|} \\ \forall \nu \in \mathbb{C}, \quad \nu \neq 0, \quad \nu_*(\varkappa, \varepsilon), \quad \forall \varkappa \in \Lambda, \end{aligned} \quad (207)$$

где постоянная  $M > 0$  не зависит от  $\varepsilon, \nu, \varkappa$ .

На завершающем этапе доказательства леммы 13 объединим оценки (204), (207) с асимптотическими представлениями (205). В результате убеждаемся в том, что условие (206) выполняется при любых  $\varkappa \in \Lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \{O_1 \cup O_2\}$ , где

$$O_1 = \{\nu : |\nu| < \exp(-q/\varepsilon^{\beta_*})\}, \quad O_2 = \{\nu : |\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon)| < \exp(-q/\varepsilon^{\beta_*})\}, \quad (208)$$

а постоянная  $q > 0$  фиксирована и достаточно мала. Тем самым спектр оператора (172) заведомо принадлежит шарам (208). А отсюда неравенство (201) вытекает очевидным образом.

Для обоснования соотношений (202) заметим, что при возмущении оператора  $U_2(\varkappa, \varepsilon)$  аналитической по  $\varkappa$  добавкой  $U_1(\varkappa, \varepsilon)$  порядка малости  $O(\exp(-q/\varepsilon^{\beta_*}))$  собственное значение  $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$  перейдет в простое и аналитически зависящее от  $\varkappa \in \Lambda$  собственное значение  $\nu = \nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ , причем

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) - \nu_*(\varkappa, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\beta_*}}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (209)$$

(в  $C^1$ -метрике по переменной  $\varkappa$ ). Объединяя затем соотношения (205), (209), заключаем, что при  $\varkappa \in \Lambda$  мультипликатор  $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$  обладает всеми требуемыми свойствами.  $\square$

Завершающий этап доказательства теоремы 2 связан с анализом уравнений (174). Фиксируем постоянную  $R > 0$ , удовлетворяющую условию (199). Тогда при рассмотрении этих уравнений мы заведомо можем ограничиться значениями  $\varkappa \in \mathbb{C}, |\varkappa| \leq R/\varepsilon$ . Далее, фиксируем произвольно  $\delta \in (0, \beta_*)$  и рассмотрим множество (200). В силу соотношений (201), (202) уравнение (174) при  $l = 1$  допускает в множестве  $\Lambda$  один простой корень  $\varkappa = 1$ , а уравнения (174) при  $l \geq 2$  не имеют корней, принадлежащих  $\Lambda$ .

Подчеркнем, что наличие корня  $\varkappa = 1$  у соответствующего уравнения (174) гарантируется тождеством  $\nu_1(1, \varepsilon) \equiv 1$ . Справедливость данного тождества вытекает из существования при  $\varkappa = 1$  у уравнения (170) единичного мультипликатора (в этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (19) на цикле (163)).

Итак, за исключением значения  $\varkappa = 1$  все корни уравнений (174) лежат в множестве  $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq \exp(-1/\varepsilon^\delta)\}$ . А отсюда и из (173) для мультипликаторов исходной системы (168) получаем требуемые свойства (175). Теорема 2 полностью доказана.

## 4. Заключение

Прежде всего обсудим вопрос о границах применимости модели (9). Отметим, что в отличие от системы (1) в ней нельзя пренебречь утечкой промотора, т.е. положить  $\alpha = 0$ . Действительно, при  $a > 2$ ,  $\alpha = 0$  система (9) имеет устойчивый гомоклинический треугольник, образованный седлами  $O_1 = (1 + a, 0, 0)$ ,  $O_2 = (0, 1 + a, 0)$ ,  $O_3 = (0, 0, 1 + a)$  и соответствующими сепаратрисами. Ясно также, что такого рода стационарный режим небологичен, поскольку он соответствует вымиранию одного из генов. При учете же утечки промотора, т.е. при  $\alpha > 0$ , устойчивый гомоклинический треугольник переходит в устойчивый цикл, лежащий в конусе  $\mathbb{R}_+^3 = \{(u_1, u_2, u_3) : u_j > 0, j = 1, 2, 3\}$ . Иными словами, происходит требуемая регуляризация автоколебаний.

В заключение сформулируем результат о существовании и устойчивости релаксационного цикла у системы (9) при условиях (12) и при

$$c > b. \quad (210)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Найдется такое достаточно большое  $r_0 > 0$ , что при выполнении условий (12), (210) и при всех  $r \geq r_0$  система (9) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида (15) и периода  $T = 3h$ . При  $r \rightarrow +\infty$  для этого цикла справедливы асимптотические представления*

$$h(r) = b + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad H(\Gamma(r), \Gamma_0) = O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad (211)$$

$$\max_{0 \leq t \leq 3h(r)} u_*(t, r) = O(\exp(br)), \quad \min_{0 \leq t \leq 3h(r)} u_*(t, r) = O(\exp(-2br)),$$

где  $H(*, *)$  — хаусдорфово расстояние,  $\Gamma(r)$  — кривая (17), а  $\Gamma_0$  имеет вид

$$\Gamma_0 = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq b, \omega = t\} \cup \{(t, \omega) : t = b, -b \leq \omega \leq b\} \cup$$

$$\cup \{(t, \omega) : b \leq t \leq 2b, \omega = -t\} \cup \{(t, \omega) : t = 2b, -2b \leq \omega \leq -b\} \cup$$

$$\cup \{(t, \omega) : 2b \leq t \leq 3b, \omega = t - 3b\}.$$

Как и в случае теоремы 1, доказательство существования цикла (15), обладающего свойствами (211), связано с отысканием  $3h$ -периодического решения у вспомогательного уравнения (19). При условии (210) процесс асимптотического интегрирования этого уравнения разбивается на 10 этапов. Что же касается устойчивости цикла (15), то она устанавливается по схеме, изложенной в разделе 3.

## Список литературы

- [1] Elowitz M. B., Leibler S., “A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators”, *Nature*, **403** (2000), 335–338.
- [2] Тихонов А. Н., “Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных”, *Матем. сб.*, **31(73)**:3 (1952), 575–586; [Tikhonov A. N., “Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives”, *Mat. Sb. (N.S.)*, **31(73)**:3 (1952), 575–586, (in Russian).]

- [3] Волокитин Е. П., “О предельных циклах в простейшей модели гипотетической геной сети”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **7:3** (2004), 57–65; [Volokitin E. P., “On limit cycles in the simplest model of a hypothetical gene network”, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **7:3** (2004), 57–65, (in Russian).]
- [4] Buse O., Kuznetsov A., Pérez R. A., “Existence of limit cycles in the repressilator equations”, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, **19:12** (2009), 4097–4106.
- [5] Buse O., Pérez R., Kuznetsov A., “Dynamical properties of the repressilator model”, *Phys. Rev. E*, **81** (2010), 066206, 066206-1–066206-7.
- [6] Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И., “Задачи теории функционирования геной сетей”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6:2** (2003), 64–80; [Likhoshvai V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I., “Problems in the theory of the functioning of genetic networks”, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **6:2** (2003), 64–80, (in Russian).]
- [7] Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И., “Математическое моделирование регулярных контуров геной сетей”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44:12** (2004), 2276–2295; [Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I., “Mathematical modeling of regular contours of gene networks”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44:12** (2004), 2166–2183, (in Russian).]
- [8] Фадеев С. И., Лихошвай В. А., “О гипотетических геной сетях”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6:3** (2003), 134–153; [Fadeev S. I., Likhoshvai V. A., “On hypothetical gene networks”, *Sibirsk. Zh. Industr. Mat.*, **6:3** (2003), 134–153, (in Russian).]
- [9] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А., “Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых геной сетях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **80:3** (2016), 67–94; [Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., Sadovnichii V. A., “Periodic solutions of travelling-wave type in circular gene networks”, *Izv. Math.*, **80:3** (2016), 523–548, (in English).]
- [10] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Существование и устойчивость релаксационного цикла в математической модели репрессилатора”, *Матем. заметки*, **101:1** (2017), 58–76; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Existence and stability of the relaxation cycle in a mathematical repressilator model”, *Math. Notes*, **101:1** (2017), 71–86, (in English).]
- [11] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46:10** (2006), 1809–1821; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Chaos phenomena in a circle of three unidirectionally connected oscillators”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46:10** (2006), 1724–1736, (in English).]
- [12] Kapitaniak T., Chua L. O., “Hyperchaotic attractors of unidirectionally-coupled Chua’s circuits”, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **4:2** (1994), 477–482.
- [13] I. P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, V. Pérez-Villar, E. Sánchez, M. A. Matías, “Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells”, *Physica D*, **128** (1999), 224–235.
- [14] Perlikowski P., Yanchuk S., Wolfrum M., Stefanski A., Mosiolek P., Kapitaniak T., “Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems”, *Chaos*, **20:013111** (2010), 1–10.
- [15] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Об одном подходе к моделированию искусственных геной сетей”, *ТМФ*, **194:3** (2018), 547–568; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “An approach to modeling artificial gene networks”, *Theoret. and Math. Phys.*, **194:3** (2018), 471–490, (in English).]
- [16] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Квазиустойчивые структуры в кольцевых геной сетях”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58:5** (2018), 682–704; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Quasi-stable structures in circular gene networks”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **58:5** (2018), 659–679, (in English).]
- [17] Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Quasi-stable solutions of the genetic networks models”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1163** (2019), 012070.

- [18] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., “Релаксационные колебания в математических моделях экологии”, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 3–124; [Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S., “Relaxational oscillations in mathematical models of ecology”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **199** (1995), 1–126, (in English).]
- [19] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77:2** (2013), 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay”, *Izv. Math.*, **77:2** (2013), 271–312, (in English).]
- [20] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений”, *ТМФ*, **175:1** (2013), 62–83; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Periodic traveling-wave-type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **175:1** (2013), 499–517, (in English).]
- [21] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78:4** (2014), 73–108; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators”, *Izv. Math.*, **78:4** (2014), 708–743, (in English).]

**Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.**, "New Approach to Gene Network Modeling", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26:3** (2019), 365–404.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-365-404

**Abstract.** The article is devoted to the mathematical modeling of artificial genetic networks. A phenomenological model of the simplest genetic network called repressilator is considered. This network contains three elements unidirectionally coupled into a ring. More specifically, the first of them inhibits the synthesis of the second, the second inhibits the synthesis of the third, and the third, which closes the cycle, inhibits the synthesis of the first one. The interaction of the protein concentrations and of mRNA (message RNA) concentration is surprisingly similar to the interaction of six ecological populations — three predators and three preys. This allows us to propose a new phenomenological model, which is represented by a system of unidirectionally coupled ordinary differential equations. We study the existence and stability problem of a relaxation periodic solution that is invariant with respect to cyclic permutations of coordinates. To find the asymptotics of this solution, a special relay system is constructed. It is proved in the paper that the periodic solution of the relay system gives the asymptotic approximation of the orbitally asymptotically stable relaxation cycle of the problem under consideration.

**Keywords:** artificial gene network, repressilator, self-symmetric cycle, asymptotics, stability

**On the authors:**

Sergey D. Glyzin, [orcid.org/0000-0002-6403-4061](https://orcid.org/0000-0002-6403-4061), professor  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [glyzin@uniyar.ac.ru](mailto:glyzin@uniyar.ac.ru)

Andgey Yu. Kolesov, [orcid.org/0000-0001-5066-0881](https://orcid.org/0000-0001-5066-0881), professor  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [kolesov@uniyar.ac.ru](mailto:kolesov@uniyar.ac.ru)

Nikolay Kh. Rozov, [orcid.org/0000-0002-9330-549X](https://orcid.org/0000-0002-9330-549X), professor  
M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: [fpo.mgu@mail.ru](mailto:fpo.mgu@mail.ru)

**Acknowledgments:**

<sup>1</sup> The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-29-10055.

©Медведева Н. С., Смирнов А. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-405-419

УДК 519.174.7

## NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа

Медведева Н. С., Смирнов А. В.<sup>1</sup>

*Поступила в редакцию 14 августа 2019*

*После доработки 11 сентября 2019*

*Принята к публикации 13 сентября 2019*

**Аннотация.** В данной статье рассматривается задача о двухшаговой раскраске произвольного неориентированного связного графа. Она состоит в нахождении такой раскраски в заданное число цветов, при которой ни одна пара вершин на расстоянии 1 или 2 друг от друга не будет окрашена в одинаковый цвет. Также в работе ставится соответствующая задача распознавания.

Данная задача тесно связана с классической задачей о раскраске графа. В статье рассматривается и обосновывается полиномиальное сведение задач друг к другу. В частности, это позволяет доказать NP-полноту задачи о двухшаговой раскраске. Кроме того, определяются некоторые ее свойства.

Отдельно исследуется задача о двухшаговой раскраске в приложении к прямоугольным графам решетки. Максимальная степень вершины таких графов может принимать значение от 0 до 4, и для каждого возможного случая была определена и обоснована функция двухшаговой раскраски в минимальное число цветов. Полученные функции строятся таким образом, что каждая вершина графа может быть раскрашена независимо от остальных, а время раскраски прямоугольного графа решетки полиномиально при последовательном переборе вершин.

**Ключевые слова:** двухшаговая раскраска графа, NP-полнота, граф решетки, прямоугольный граф решетки

**Для цитирования:** Медведева Н. С., Смирнов А. В., "NP-полнота и один полиномиальный подкласс задачи о двухшаговой раскраске графа", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 405–419.

**Об авторах:**

Медведева Наталья Сергеевна, [orcid.org/0000-0002-1632-5411](https://orcid.org/0000-0002-1632-5411), студент,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: medvedeva270598@mail.ru

Смирнов Александр Валерьевич, [orcid.org/0000-0002-0980-2507](https://orcid.org/0000-0002-0980-2507), канд. физ.-мат. наук., доцент,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alexander\_sm@mail.ru

**Благодарности:**

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00823 А.

## Введение

В данной статье рассматривается задача о двухшаговой раскраске графа, то есть такой раскраске, при которой все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2 друг от друга должны быть окрашены в разные цвета.

Подобная задача возникает при распределении временных слотов (тайм-слотов) в сетях, использующих принцип множественного доступа с временным разделением (см. [1]). В частности, при таком распределении возникает проблема скрытых узлов. Два узла сети могут находиться в зоне видимости третьего узла, но быть при этом невидимыми друг другу. Если эти два узла получают одинаковый номер тайм-слота, они будут передавать данные одновременно, что приведет к проблемам на третьем узле. По сути, каждые три узла сети, для которых возникает описанная проблема, должны получить разные номера тайм-слотов, что в точности соответствует условию двухшаговой раскраски вершин графа.

Очевидно, что рассматриваемая задача обобщает классическую задачу о раскраске графа (см., например, [2]). Связь между двумя задачами представляет определенный интерес и освещается в статье.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольный связный неориентированный граф  $G(V, E)$ . Перед тем как формулировать основную задачу, введем необходимые определения.

**Определение 1.** Будем называть вершину  $v_2 \in V$  соседом первого порядка для некоторой вершины  $v_1 \in V$ , если  $v_1$  и  $v_2$  – смежные вершины, то есть существует ребро  $\{v_1, v_2\} \in E$ . Множество всех соседей первого порядка для вершины  $v \in V$  будем обозначать через  $N_v^1$ .

**Определение 2.** Соседом второго порядка для  $v_1 \in V$  назовем такую вершину  $v_2 \in V$ , что кратчайшее расстояние между  $v_1$  и  $v_2$  равно двум. Иначе говоря,  $v_1$  и  $v_2$  – соседи второго порядка, если  $\{v_1, v_2\} \notin E$  и найдется такая вершина  $v_3 \in V$ , что  $\{v_1, v_3\} \in E$  и  $\{v_2, v_3\} \in E$ . Множество соседей второго порядка для  $v \in V$  обозначим через  $N_v^2$ .

**Определение 3.** Множество соседей первого и второго порядка для некоторой вершины  $v \in V$  будем называть соседями  $v$  и обозначать через  $N_v = N_v^1 \cup N_v^2$ .

Теперь может быть сформулирована задача о двухшаговой раскраске графа в общем виде.

**Задача 1.** Пусть заданы связный неориентированный граф  $G(V, E)$  и натуральное число  $K$  – количество цветов. Требуется получить раскраску  $G$  в  $K$  цветов таким образом, чтобы для каждой вершины  $v \in V$  ни один из ее соседей первого или второго порядка не был окрашен в тот же цвет.

Иными словами, требуется определить функцию  $f : V \rightarrow \{1, \dots, K\}$  так, что для любой вершины  $v \in V$  и для любой вершины  $v' \in N_v$  выполнено

$$f(v) \neq f(v').$$

В такой постановке задача требует существования алгоритма, который для любой пары  $(G, K)$  либо находит раскраску  $G$  в  $K$  цветов, либо определяет, что раскраски не существует. Мы заведомо предполагаем, что для данной задачи не существует алгоритма с полиномиальной трудоемкостью. Для доказательства этого факта рассмотрим соответствующую задачу распознавания.

**Задача 2.**

*УСЛОВИЕ.* Задан произвольный связный неориентированный граф  $G(V, E)$  и положительное число  $K$ .

*ВОПРОС.* Можно ли раскрасить граф  $G$  в  $k$  цветов,  $k \leq K$ , таким образом, чтобы для каждой вершины  $v \in V$  ни один из ее соседей первого или второго порядка не был окрашен в тот же цвет?

Задачу о двухшаговой раскраске графа будем обозначать как *РАСКРАСКА-2*.

## 2. Сведение задачи РАСКРАСКА-2 к классической задаче о раскраске графа

Для начала напомним постановку классической задачи о раскрашиваемости графа (см., например, [2]). Далее будем обозначать данную задачу как *РАСКРАСКА*. Отметим, что задача *РАСКРАСКА* NP-полна (см. [3]).

**Задача 3.** Задан произвольный неориентированный граф  $G(V, E)$  и натуральное число  $K$ . Требуется найти раскраску (для задачи распознавания определить, существует ли раскраска) графа  $G$  в  $K$  цветов так, чтобы любые две смежные вершины имели различные цвета.

Несложно заметить, что ограничения задачи *РАСКРАСКА* слабее, чем задачи *РАСКРАСКА-2*, то есть любая двухшаговая раскраска является и обычной раскраской, но не всякая раскраска является двухшаговой. Следовательно, с помощью наложения дополнительных ограничений на параметры любая индивидуальная задача о двухшаговой раскраске может быть сведена к классической задаче, то есть любой граф может быть модифицирован таким образом, что задача о двухшаговой раскраске для него может быть решена с помощью алгоритма обычной раскраски.

Пусть заданы граф  $G(V, E)$  и натуральное число  $K$  – параметры индивидуальной задачи *РАСКРАСКА-2*. Будем строить по графу  $G$  новый граф  $G'(V, E \cup E')$  так, чтобы решение задачи *РАСКРАСКА* с параметрами  $(G', K)$  было в точности решением исходной задачи.

Пусть в  $G$  найдутся три вершины  $v_1, v_2, v_3 \in V$  такие, что  $\{v_1, v_2\} \in E$  и  $\{v_1, v_3\} \in E$  (рис. 1). По условиям задачи о двухшаговой раскраске данные вершины должны иметь различные цвета, однако ограничения классической задачи допускают для вершин  $v_2$  и  $v_3$  одинаковые цвета. Чтобы это исправить, добавим в  $G'$  ребро  $\{v_2, v_3\}$  (рис. 2).

Заметим, что никакие другие ограничения на раскраску в графе  $G'$  после введения нового ребра не добавляются. Можно гарантировать, что после добавления новых ребер во все подграфы вышеописанного вида, любые две вершины являются смежными в графе  $G'$  тогда и только тогда, когда они являются соседями первого или второго порядка в графе  $G$ .

**Теорема 1.** Раскраска графа  $G'$ , полученного путем добавления ребер в  $G$  по вышеописанным правилам, в  $K$  цветов в точности есть двухшаговая раскраска графа  $G$  в  $K$  цветов.

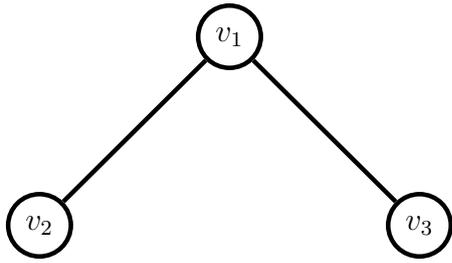


Рис. 1. Некоторый подграф  $S$  графа  $G$   
Fig. 1. Some subgraph  $S$  of the graph  $G$

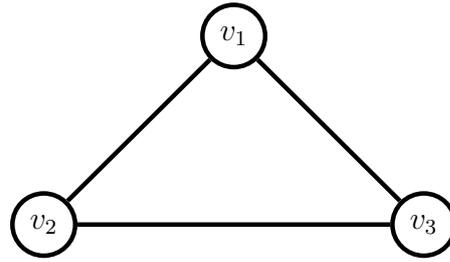


Рис. 2. Соответствующий ему подграф  $S'$  графа  $G'$   
Fig. 2. Corresponding subgraph  $S'$  of the graph  $G'$

Справедливость теоремы следует непосредственно из предшествующих рассуждений.

**Пример 1.** Пусть задан некоторый граф  $G$  (рис. 3) и  $K = 4$ .

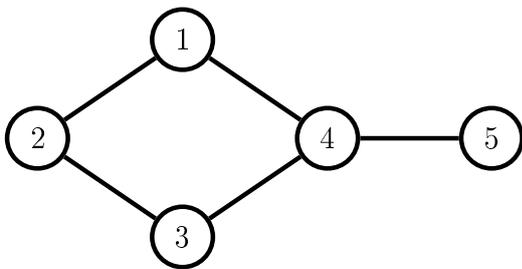


Рис. 3. Исходный граф  $G$   
Fig. 3. The initial graph  $G$

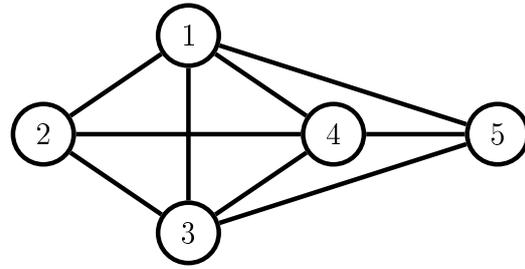


Рис. 4. Построенный по  $G$  граф  $G'$   
Fig. 4. Graph  $G'$  constructed from the graph  $G$ .

Построим по нему граф  $G'$ . Для этого найдем в  $G$  все тройки вершин, индуцирующие подграфы, которые могут быть достроены до клики размерности 3 с помощью одного ребра, и добавим эти ребра в граф. В результате получим новый граф  $G'$  (рис. 4) с множеством ребер  $E \cup E'$ , где  $E' = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$ .

Определим для вершин графа  $G'$  цвета по правилам классической задачи о раскраске (рис. 5, номера цветов указаны рядом с соответствующими вершинами), а затем наложим полученную раскраску на исходный граф (рис. 6). Несложно убедиться, что в результате получена корректная двухшаговая раскраска графа  $G$ .

### 3. Свойства задачи

**Свойство 1** (необходимое условие двухшаговой раскраски). Пусть заданы граф  $G$  и натуральное число цветов  $K$ . Если граф содержит хотя бы одну вершину, степень которой не менее  $K$ , задача о двухшаговой раскраске для него не имеет решения. Иначе говоря, если максимальная степень вершины в графе равна  $M$ , то для раскраски данного графа понадобится не менее  $M + 1$  цвета.

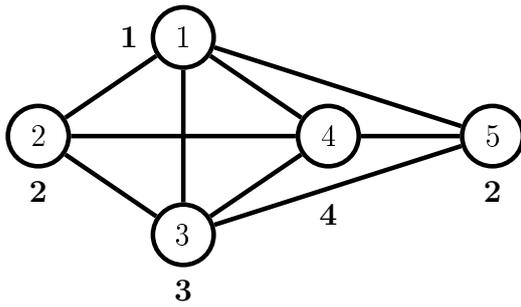


Рис. 5. Раскраска графа  $G'$   
 Fig. 5. Colouring of the graph  $G'$

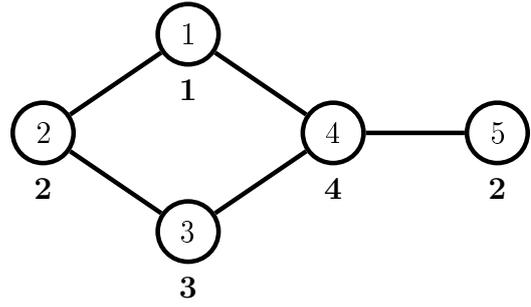


Рис. 6. Двухшаговая раскраска графа  $G$   
 Fig. 6. Two-step colouring of the graph  $G$

В этом несложно убедиться. Рассмотрим подграф  $G$ , содержащий вершину  $v$  степени не менее  $K$ . Для определенности будем считать, что  $\deg(v) = K + n$ ,  $n \geq 0$ . На рис. 7 изображен такой подграф. Для удобства соседи первого порядка вершины  $v$  пронумерованы.

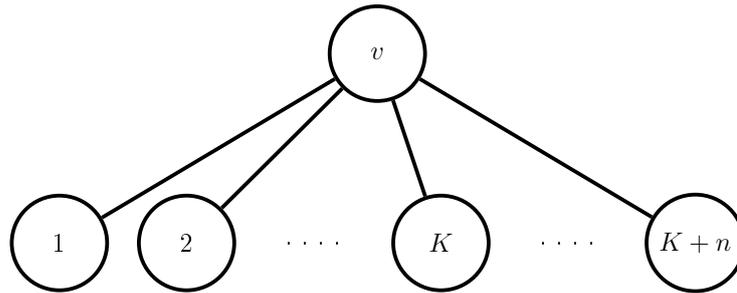


Рис. 7. Подграф графа  $G$ , индуцированный вершиной  $v$  и ее соседями первого порядка  
 Fig. 7. A subgraph of the graph  $G$  induced by the vertex  $v$  and its first-order neighbors

Определим для вершины  $v$  цвет, пусть это будет цвет 0. Далее для каждого из ее соседей, начиная с 1, будем определять цвет. Заметим, что цвет очередной вершины не должен совпадать ни с одним из ранее использованных цветов, так как для каждой вершины данного подграфа любая другая является соседом. Тогда при рассмотрении вершины  $K$  окажется, что не осталось неиспользованных цветов, поэтому вершина не может быть раскрашена без нарушения условий задачи. Это справедливо для всех нераскрашенных вершин данного подграфа. Таким образом, решения задачи для графа  $G$  и заданного  $K$  не существует.

Данное условие является необходимым для двухшаговой раскраски графа, но не достаточным. Зачастую для графов с наибольшей степенью вершины, равной  $M$ , не удастся найти двухшаговую раскраску в  $M + 1$  цвет. В ряде случаев происходит это в силу следующего свойства.

**Свойство 2.** Пусть имеется граф  $G$ . По нему с помощью преобразований, описанных в разделе 2, строится граф  $G'$ . Если максимальная размерность клики,

содержащейся в  $G'$ , равна  $K$ , то для двухшаговой раскраски графа  $G$  потребуется не менее  $K$  цветов.

Справедливость данного утверждения следует из теоремы 1 и того факта, что для раскраски клики потребуется число цветов, равное ее размерности (см. [2]).

В отличие от первого свойства, которое может быть проверено для заданного графа за полиномиальное время, проверить данное свойство в общем случае не удастся, так как задача поиска в графе клики заданной размерности является NP-полной (см. [3]). На рис. 8 приведены примеры графов, для двухшаговой раскраски которых потребуется больше цветов чем  $\max_{v \in V}(\deg v) + 1$ .

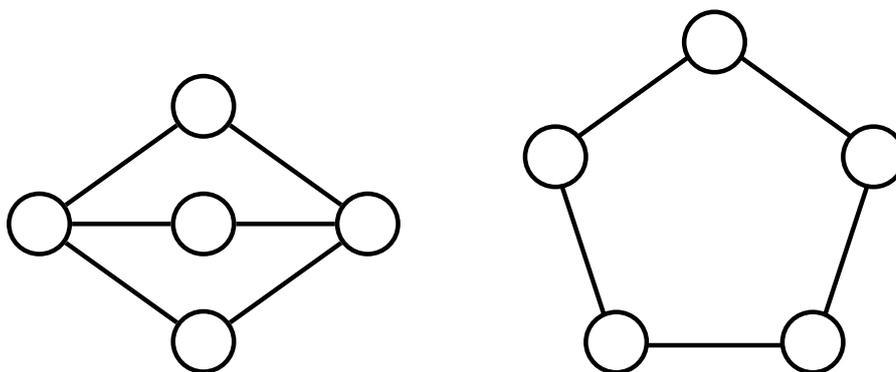


Рис. 8. Графы, для двухшаговой раскраски которых потребуется 5 цветов  
Fig. 8. Graphs that require 5 colours for two-step colouring

#### 4. NP-полнота задачи

Для доказательства NP-полноты задачи РАСКРАСКА-2 мы построим полиномиальное сведение NP-полной задачи РАСКРАСКА к задаче РАСКРАСКА-2. Обе задачи в данном разделе мы будем рассматривать в постановке задачи распознавания. Сначала введем следующую операцию на графе.

**Определение 4** (см., например, [4]). *Операцией под разбиения ребра  $\{v_i, v_j\}$  произвольного графа  $G$  на  $n$  вершинах назовем такую операцию, в результате которой в множество вершин добавляется новая вершина  $v_{n+1}$ , а ребро  $\{v_i, v_j\}$  заменяется ребрами  $\{v_i, v_{n+1}\}$  и  $\{v_{n+1}, v_j\}$ .*

**Теорема 2.** *Задача РАСКРАСКА-2 является NP-полной.*

**Доказательство.** Пусть дан произвольный граф  $G(V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , для которого требуется получить раскраску не более чем в  $K$  цветов. Решением данной задачи будем считать набор пар вида  $(v, c)$ , где  $v \in V$ ,  $c \in \{1, \dots, K\}$  – номер цвета, определенный для вершины  $v$  так, что  $c_1 \neq c_2$  для любых двух пар  $(v_1, c_1)$ ,  $(v_2, c_2)$  таких, что  $\{v_1, v_2\} \in E$ . Построим по графу  $G$  граф  $G'(V \cup V', E')$  следующим образом.

1. Добавим в граф все вершины из  $V$ .

2. Пусть ребра в графе  $G$  пронумерованы, то есть каждому ребру  $\{v_i, v_j\} \in E$  поставлен во взаимно-однозначное соответствие номер  $t \in \{1, \dots, m\}$ . Выполним для каждого ребра операцию подразделения, добавив в граф  $G'$   $m$  новых вершин и  $2m$  новых ребер следующим образом:

$$V' = \{v'_t \mid t \in \{1, \dots, m\}\};$$

$$E' = \{\{v_i, v'_t\}, \{v'_t, v_j\} \mid \{v_i, v_j\}_t \in E\}.$$

3. Каждую вершину  $v' \in V'$  соединим с каждой другой вершиной из множества  $V'$ , добавив в  $E'$  набор ребер

$$\{\{v'_i, v'_j\} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j\}.$$

Для полученного графа  $G'$  можно выделить следующие свойства:

- степени вершин из  $V$  при переходе в  $G'$  не изменились;
- все вершины из  $V'$  имеют степень  $m + 1$  (каждая вершина смежна с  $m - 1$  вершиной из  $V'$  и с двумя некоторыми вершинами из  $V$ );
- вершины из множества  $V'$  индуцируют клику размерности  $m$ ;
- для каждой вершины из  $V$  все вершины из  $V'$  являются соседями первого или второго порядка, а также соседями второго порядка являются те вершины из  $V$ , которые были смежны в графе  $G$ ;
- для каждой вершины из  $V'$  соседями первого или второго порядка являются все остальные вершины в графе.

Следовательно, при двухшаговой раскраске полученного графа должны выполняться такие условия:

- каждая вершина из  $V'$  должна иметь цвет, отличный от цвета любой другой вершины в графе;
- цвет каждой вершины из  $V$  должен отличаться от цвета любой вершины из  $V'$  и вершин-соседей второго порядка из  $V$ .

Таким образом, получена новая задача о двухшаговой раскраске для графа  $G'$  с параметром  $m + K$ . Заметим, что решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда существует решение исходной задачи о раскраске графа  $G$  с параметром  $K$ .

Предположим, что для задачи РАСКРАСКА-2 данного вида найдено решение и каждой вершине  $v \in V \cup V'$  поставлен в соответствие номер цвета из множества  $C = \{1, \dots, m + K\}$ :

$$R' = \{(v, c) \mid c \in C, v \in V \cup V'\}.$$

Тогда решением исходной задачи РАСКРАСКА является множество

$$R = \{(v, c) \in R' \mid v \in V\}.$$

Так как каждая вершина из  $V'$  имеет уникальный цвет, а  $|V'| = m$ , то для раскраски множества  $V$  может быть использовано не более  $K$  цветов, потому полученное решение не противоречит условиям.

Наоборот, если получено решение задачи РАСКРАСКА и каждой вершине  $v \in V$  поставлен в соответствие номер цвета из множества  $C = \{1, \dots, K\}$ :

$$R = \{(v, c) \mid c \in C, v \in V \cup V'\},$$

то решением задачи РАСКРАСКА-2 будет

$$R' = R \cup \{(v_i, K + i) \mid i \in \{1, \dots, m\}, v_i \in V'\}.$$

Таким образом, построена функция  $f$  сведения задачи РАСКРАСКА с параметрами  $(G(V, E), K)$  к задаче РАСКРАСКА-2 с параметрами  $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$ .

Оценим трудоемкость данной функции.

1. Операция подразбиения ребер требует перебор всех ребер, поэтому трудоемкость данного шага равна  $O(m)$ . Число ребер  $m$  не превосходит  $n(n - 1)/2$ , тогда трудоемкость шага равна  $O(n^2)$ .
2. Введение новых ребер потребует перебор всех возможных пар из множества  $V'$ , то есть  $C_m^2$  операций.  $C_m^2 = (m - 1)m/2$ , тогда трудоемкость шага равна  $O(m^2) = O(n^4)$ .

Следовательно, трудоемкость функции  $f$  есть  $O(n^4)$ .

Таким образом, задача РАСКРАСКА с произвольными параметрами  $(G(V, E), K)$  полиномиально сводится к задаче РАСКРАСКА-2 с параметрами  $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$ . Значит, задача РАСКРАСКА-2 с параметрами  $(G'(V \cup V', E'), |E| + K)$  является NP-полной. Отсюда следует, что задача РАСКРАСКА-2 с произвольными параметрами также является NP-полной.

Теорема 2 доказана.

**Пример 2.** Рассмотрим пример сведения индивидуальной задачи раскраски графа к задаче о двухшаговой раскраске. Пусть задан граф  $G$  (рис. 9) и число  $K = 3$ .

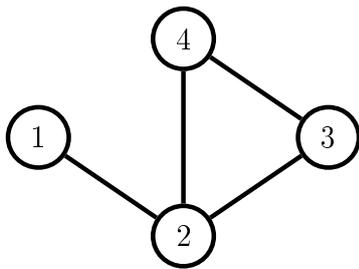


Рис. 9. Исходный граф  $G$   
 Fig. 9. The initial graph  $G$

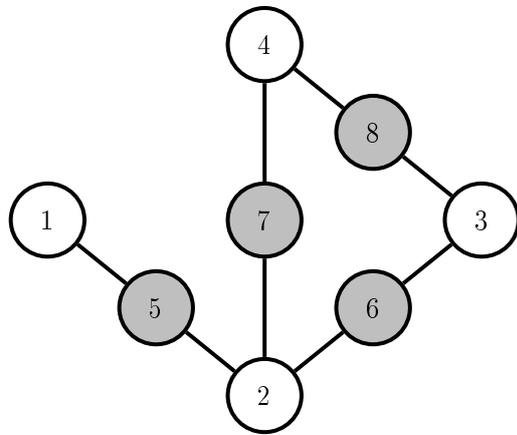


Рис. 10. Граф  $G$  после выполнения операции подразбиения для всех его ребер  
 Fig. 10. Graph  $G$  after subdivision of all its edges

Будем строить по нему граф  $G'$ . На первом шаге преобразования выполним операцию подразбиения для всех ребер исходного графа. На рис. 10 изображен результат выполнения этого шага. Добавленные вершины выделены цветом.

Далее соединим все новые вершины между собой так, чтобы они образовали клику размерности 4. Результат представлен на рис. 11. Таким образом, получен граф  $G'$ .

Теперь найдем двухшаговую раскраску для графа  $G'$  (рис. 11) в 7 цветов. Заметим, что для каждой из вершин 5–8 определяется уникальный цвет, а остальные вершины раскрашиваются в три цвета по правилам двухшаговой раскраски.

На последнем шаге найдем раскраску исходного графа. Для этого определим каждой вершине графа  $G$  цвет, который получила соответствующая вершина в  $G'$  (рис. 12).

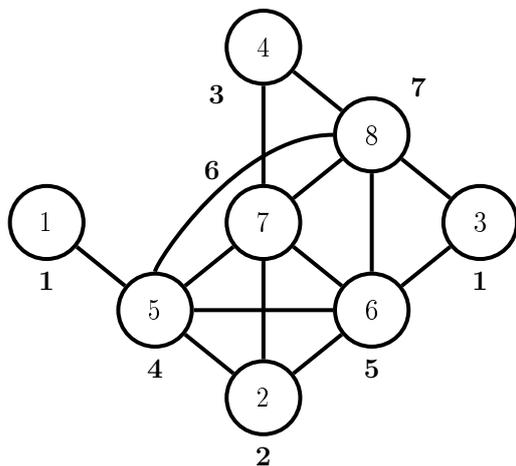


Рис. 11. Двухшаговая раскраска графа  $G'$

Fig. 11. Two-step colouring of the graph  $G'$

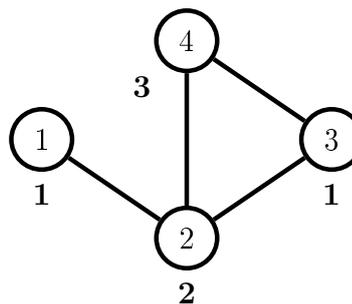


Рис. 12. Раскраска графа  $G$

Fig. 12. Colouring of the graph  $G$

## 5. Двухшаговая раскраска прямоугольного графа решетки

**Определение 5** (см. [5]). Графы решетки – графы, которые могут быть нарисованы так, что их вершины лежат на узлах целочисленной решетки, а ребра соединяют все возможные пары вершин, расположенных на единичном расстоянии друг от друга.

Графы решетки бывают произвольными и прямоугольными, с дырами и без.

**Определение 6** (см. [6]). Прямоугольный граф  $R(n, m)$  – подграф бесконечного графа решетки, индуцированный множеством вершин  $V(n, m) = \{v \mid 1 \leq v_x \leq n, 1 \leq v_y \leq m\}$ , где  $v_x$  и  $v_y$  соответствуют координатам вершины на плоскости. Граница такого графа представляет собой прямоугольник. По определению прямоугольный граф не может иметь дыр.

Для начала отметим важные для двухшаговой раскраски особенности графов решетки.

1. Степень любой вершины графа не превосходит 4 (см. [5]). Тогда по свойству 1 для раскраски графа решетки в общем случае требуется не менее 5 цветов.

2. Понятия соседей первого и второго порядка для графов решетки могут быть переопределены. Пусть граф решетки  $G$  задается множеством вершин  $V$ . Соседями первого порядка для  $v(v_x, v_y) \in V$  являются такие вершины  $v'(v'_x, v'_y)$ , что

$$|v_x - v'_x| + |v_y - v'_y| = 1.$$

Соседями второго порядка для  $v(v_x, v_y) \in V$  являются такие вершины  $v'(v'_x, v'_y)$ , что

$$|v_x - v'_x| + |v_y - v'_y| = 2.$$

Пусть  $R(n, m)$  – произвольный прямоугольный граф решетки, и каждой вершине  $v$  соответствует пара целых чисел  $(v_x, v_y)$ . Количество цветов, в которые может быть раскрашен граф  $R$  зависит от его размерности. Рассмотрим все возможные ситуации.

Наиболее простой является ситуация  $\min\{n, m\} = 1$ . Возможны следующие варианты.

1.  $\max\{n, m\} = 1$ . Граф состоит из одной вершины, для раскраски которой достаточно одного цвета.
2.  $\max\{n, m\} = 2$ . Граф состоит из двух соединенных ребром вершин, которые могут быть раскрашены в два цвета.
3.  $\max\{n, m\} > 2$ . Граф представляет собой цепь. Степень любой из вершин не превосходит 2, поэтому  $R$  может быть раскрашен в три цвета. Пусть имеются цвета с номерами 0, 1 и 2. Тогда определим цвет  $c_v$  для каждой вершины по формуле

$$c(v_x, v_y) = (v_x + v_y) \pmod{3}.$$

В данном графе одна из координат фиксирована, а последовательный перебор значений второй координаты приведет к циклическому присвоению цветов 0, 1, 2 в раскраске.

Второй случай возникает при  $\min\{n, m\} = 2$ . Здесь максимальная степень вершины равна 3, поэтому предположим, что граф может быть раскрашен в 4 цвета. Возможны два варианта.

1.  $n = 2$ , то есть координата  $x$  вершины может принимать только значение 1 или 2. На рис. 13 представлен пример двухшаговой раскраски графа решетки такого вида.

Пусть заданы четыре цвета с номерами от 0 до 3. Тогда цвет  $c_v$  для каждой вершины может быть определен по формуле

$$c(v_x, v_y) = (2 \cdot v_x + v_y) \pmod{4}. \quad (1)$$

Геометрический смысл данной формулы заключается в том, что вершины одинакового цвета лежат на прямых

$$v_y = -2 \cdot v_x + c + 4 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где  $c$  – цвет вершины (рис. 14).

Пусть вершина  $v$  определяется парой  $(v_x, v_y)$ . Убедимся, что ее цвет не совпадает с цветами соседей первого и второго порядка. Пусть  $v'(v'_x, v'_y)$  – некоторый сосед вершины  $v$ .

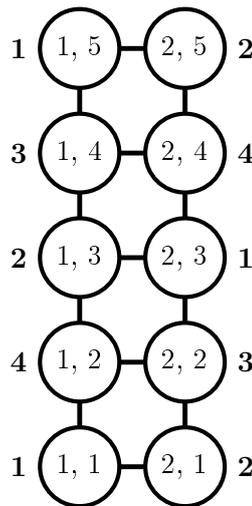


Рис. 13. Двухшаговая раскраска графа  $R(2, 5)$   
 Fig. 13. Two-step colouring of the graph  $R(2, 5)$

- Если  $v'$  – сосед первого порядка, расположенный слева или справа от  $v$ , то  $(v_x = v'_x \pm 1)$  и  $(v_y = v'_y)$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y) \pmod 4 = (c(v_x, v_y)v \pm 2) \pmod 4.$$

- Если  $v'$  – сосед первого порядка, расположенный сверху или снизу от  $v$ , то  $(v_x = v'_x)$  и  $(v_y \pm 1 = v'_y)$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot v_x + v_y \pm 1) \pmod 4 = (c_v \pm 1) \pmod 4.$$

- Если  $v'$  – сосед второго порядка, расположенный по диагонали от  $v$ , то  $(v_x \pm 1 = v'_x)$  и  $(v_y \pm 1 = v'_y)$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y \pm 1) \pmod 4 = (c_v \pm 2 \pm 1) \pmod 4.$$

Поскольку  $0 < |\pm 2 \pm 1| < 4$ , то  $(c_v \pm 2 \pm 1) \pmod 4 \neq c_v$ .

- Если  $v'$  – сосед второго порядка, расположенный сверху или снизу от  $v$ , то  $(v_x = v'_x)$  и  $(v_y \pm 2 = v'_y)$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (2 \cdot v_x + v_y \pm 2) \pmod 4 = (c_v \pm 2) \pmod 4.$$

Во всех рассмотренных случаях цвета вершин  $v$  и  $v'$  различны, значит, для графов данного вида найдена корректная функция двухшаговой раскраски в 4 цвета.

2.  $n \neq 2, m = 2$ , то есть координата  $y$  каждой вершины принимает значение 1 или 2. На рис. 15 изображен пример двухшаговой раскраски графа такого вида.

Пусть заданы четыре цвета с номерами от 0 до 3. Тогда цвет  $c_v$  для каждой вершины может быть определен по формуле

$$c(v_x, v_y) = (v_x + 2 \cdot v_y) \pmod 4. \quad (2)$$

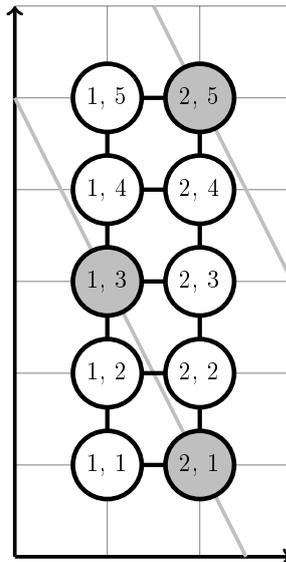


Рис. 14. Геометрический смысл формулы (1)  
 Fig. 14. Geometric sense of formula (1)

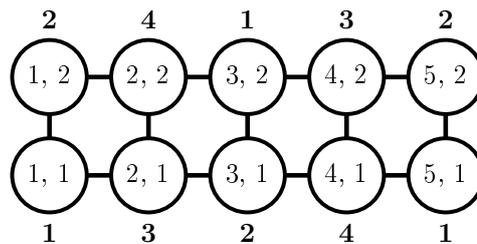


Рис. 15. Двухшаговая раскраска графа  $R(5, 2)$   
 Fig. 15. Two-step colouring of the graph  $R(5, 2)$

Геометрический смысл данной формулы заключается в том, что вершины одинакового цвета лежат на прямых

$$v_y = -\frac{1}{2} \cdot v_x + \frac{1}{2} \cdot c + 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где  $c$  – цвет вершины (рис. 16).

Доказательство корректности полученной функции раскраски можно выполнить по аналогии с предыдущим случаем.

Таким образом, мы получили функции раскраски в 4 цвета для графов решетки с наибольшей степенью вершины равной 3.

В общем случае  $\min\{n, m\} > 3$ , значит, хотя бы одна вершина графа имеет степень 4. Следовательно, такой граф может быть раскрашен не менее чем в 5 цветов. Пусть имеется 5 цветов с номерами от 0 до 4. Тогда граф можно раскрасить любым из двух способов:

$$c_v = c(v_x, v_y) = (-2 \cdot v_x + v_y) \pmod{5}; \tag{3}$$

$$c_v = c(v_x, v_y) = (2 \cdot v_x + v_y) \pmod{5}. \tag{4}$$

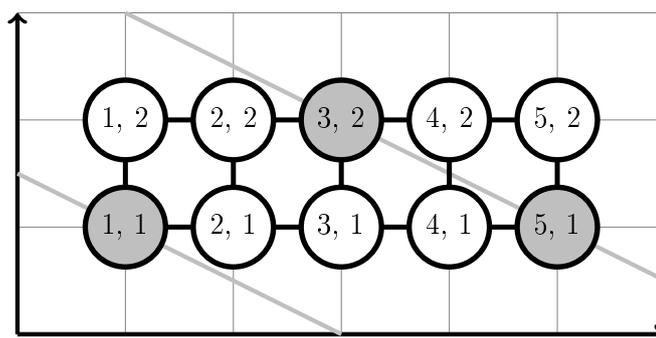


Рис. 16. Геометрический смысл формулы (2)

Fig. 16. Geometric sense of formula (2)

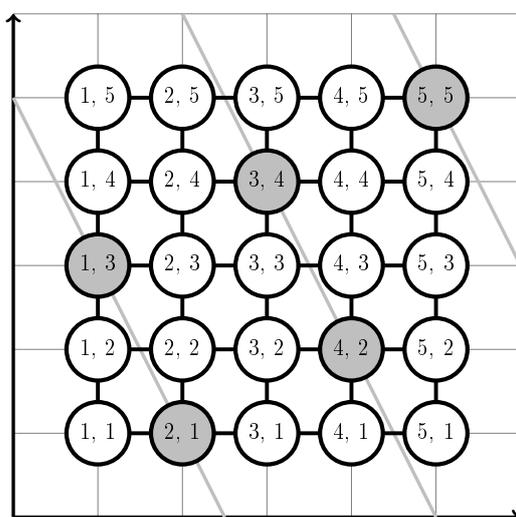


Рис. 17. Геометрический смысл формулы (3)

Fig. 17. Geometric sense of formula (3)

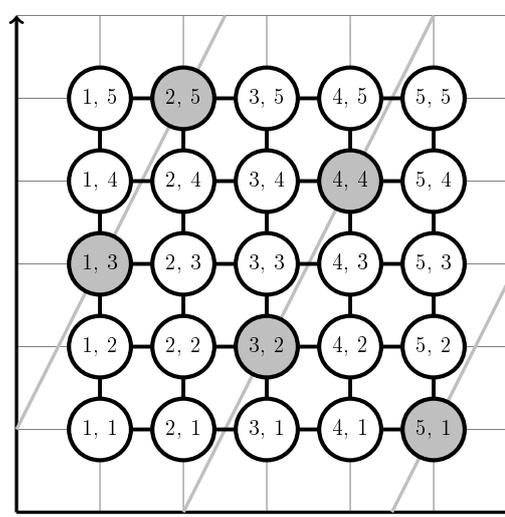


Рис. 18. Геометрический смысл формулы (4)

Fig. 18. Geometric sense of formula (4)

Рис. 17 и 18 иллюстрируют геометрический смысл данных формул.

Докажем корректность формулы (3). Пусть вершина  $v$  определяется парой  $(v_x, v_y)$ . Убедимся, что ее цвет не совпадает с цветами соседей первого и второго порядка. Пусть  $v'(v'_x, v'_y)$  – некоторый сосед вершины  $v$ .

- Если  $v'$  – сосед первого порядка, находящийся слева или справа от  $v$ , то  $v_x = v'_x \pm 1$ ,  $v_y = v'_y$ . Найдем номер цвета для  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y) \pmod{5} = (c_v \pm 2) \pmod{5}.$$

- Если  $v'$  – сосед первого порядка, находящийся снизу или сверху от  $v$ , то  $v_x = v'_x$ ,  $v_y \pm 1 = v'_y$ . Определим цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot v_x + v_y \pm 1) \pmod{5} = (c_v \pm 1) \pmod{5}.$$

- Если  $v'$  – сосед второго порядка, расположенный по диагонали от  $v$ ,

то  $v_x \pm 1 = v'_x$ ,  $v_y \pm 1 = v'_y$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 1) + v_y \pm 1) \pmod 5 = (c_v \pm 2 \pm 1) \pmod 5.$$

Поскольку  $0 < |\pm 2 \pm 1| < 4$ , то  $(c_v \pm 2 \pm 1) \pmod 5 \neq c_v$ .

- Если  $v'$  – сосед второго порядка, расположенный слева или справа от  $v$ , то  $v_x \pm 2 = v'_x$ ,  $v_y = v'_y$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot (v_x \pm 2) + v_y) \pmod 5 = (c_v \pm 4) \pmod 5.$$

- Если  $v'$  – сосед второго порядка, расположенный сверху или снизу от  $v$ , то  $v_x = v'_x$ ,  $v_y \pm 2 = v'_y$ . Цвет  $v'$ :

$$c(v'_x, v'_y) = (-2 \cdot v_x + v_y \pm 2) \pmod 5 = (c_v \pm 2) \pmod 5.$$

Во всех рассмотренных случаях цвета вершин  $v$  и  $v'$  различны, значит, формула (3) задает корректную функцию раскраски графа решетки в 5 цветов. Формула (4) обосновывается аналогично.

Отметим, что полученный набор формул позволяет раскрасить прямоугольный граф решетки в минимальное число цветов за полиномиальное время (порядка  $O(n \cdot m)$  при последовательном присвоении цвета каждой вершине). При этом цвет каждой вершины определяется независимо от остальных вершин.

Для произвольного графа решетки  $G$  задача РАСКРАСКА-2 может быть решена следующим образом. Нужно взять минимальный прямоугольный граф решетки  $R(n, m)$  такой, что  $G \subseteq R(n, m)$ , и раскрасить его в минимально возможное количество цветов. После этого полученную раскраску наложить на граф  $G$ . Однако решение будет не всегда оптимальным по количеству использованных цветов. В частности, можно построить такой граф решетки  $G$ , что максимальная степень вершины в нем равна 3,  $n \geq 3$  и  $m \geq 3$  в соответствующем графе  $R(n, m)$ , а задача РАСКРАСКА-2 имеет решение с параметром  $K = 4$ , но предложенный метод с наложением раскраски прямоугольного графа находит решение с пятью цветами.

Выше мы рассмотрели случай, когда граф решетки представляет собой цепь. Тогда он может быть раскрашен в 3 цвета. Заметим, что, кроме цепей, существует только один класс графов, которые могут быть раскрашены в 3 цвета методом двухшаговой раскраски. Эти графы представляют собой простые циклы (степени всех вершин равны 2), причем количество вершин  $|V|$  в графе кратно трем.

## Заключение

В данной статье были исследованы некоторые свойства задачи о двухшаговой раскраске графа, рассмотрена связь с классической задачей о раскраске, доказана NP-полнота исследуемой задачи.

Для прямоугольных графов решетки были найдены функции раскраски, позволяющие за полиномиальное время раскрашивать вершины графа на основе их координат (безотносительно положения остальных вершин).

## Список литературы / References

- [1] Korsakov S. V., Smirnov A. V., Sokolov V. A., “Principles of Organizing the Interoperability of Equipollent Nodes in a Wireless Mesh-Network with Time Division Multiple Access”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:6 (2016), 415–422.
- [2] Harary F., *Graph theory*, Addison-Wesley Pub. Co., 1969.
- [3] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [4] Рублев В. С., *Элементы теории графов. Изоморфизм, планарность, маршруты в графах*, Ярославль: ЯрГУ, 2010; [Rublev V. S., *Elementy teorii grafov. Izomorfizm, planarnost', marshruty v grafakh*, Yaroslavl: YSU, 2010, (in Russian).]
- [5] Umans C., Lenhart W., “Hamiltonian Cycles in Solid Grid Graphs”, *Proceedings of the 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 1997, 496–505.
- [6] Keshavarz-Kohjerdi F., Bagheri A., “An efficient parallel algorithm for the longest path problem in meshes”, *The Journal of Supercomputing*, **65**:2 (2013), 723–741.

---

Medvedeva N. S., Smirnov A. V., "NP-completeness and One Polynomial Subclass of the Two-Step Graph Colouring Problem", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 405–419.

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-405-419

**Abstract.** In this paper, we study the two-step colouring problem for an undirected connected graph. It is required to colour the graph in a given number of colours in a way, when no pair of vertices has the same colour, if these vertices are at a distance of 1 or 2 between each other. Also the corresponding recognition problem is set. The problem is closely related to the classical graph colouring problem. In the article, we study and prove the polynomial reduction of the problems to each other. So it allows us to prove NP-completeness of the problem of two-step colouring. Also we specify some of its properties. Special interest is paid to the problem of two-step colouring in application to rectangular grid graphs. The maximum vertex degree in such a graph is between 0 and 4. For each case, we elaborate and prove the function of two-vertex colouring in the minimum possible number of colours. The functions allow each vertex to be coloured independently from others. If vertices are examined in a sequence, colouring time is polynomial for a rectangular grid graph.

**Keywords:** two-step graph colouring, NP-completeness, grid graph, rectangular grid graph

**On the authors:**

Medvedeva Natalya Sergeevna, [orcid.org/0000-0002-1632-5411](https://orcid.org/0000-0002-1632-5411), Student,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: medvedeva270598@mail.ru

Smirnov Alexander Valeryevich, [orcid.org/0000-0002-0980-2507](https://orcid.org/0000-0002-0980-2507), PhD, Associate Professor  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: alexander\_sm@mail.ru

**Acknowledgments:**

<sup>1</sup> The reported study was funded by RFBR according to the research project № 17-07-00823 A.

©Лагутина Н. С., Лагутина К. В., Бойчук Е. И., Воронцова И. А., Парамонов И. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-420-440

УДК 004.912

## Автоматизированный поиск средств ритмизации художественного текста для сравнительного анализа оригинала и перевода на материале английского и русского языков

Лагутина Н. С., Лагутина К. В., Бойчук Е. И., Воронцова И. А., Парамонов И. В.

*Поступила в редакцию 12 августа 2019  
После доработки 11 сентября 2019  
Принята к публикации 13 сентября 2019*

**Аннотация.** Анализ функциональной эквивалентности перевода, основанный на достижении ритмической эквивалентности, представляет собой чрезвычайно важную задачу современной лингвистики. При этом ритмическая составляющая является неотъемлемой частью функциональной эквивалентности, которая не может быть достигнута без передачи ритмических характеристик текста. Для анализа ритмических средств в оригинальном тексте и переводе художественного произведения авторами был разработан программный инструмент ProseRhythmDetector, позволяющий находить и визуализировать лексические и синтаксические средства в англоязычных и русскоязычных прозаических текстах: анафору, эпифору, симплоку, анадиплосис, эпаналепсис, редупликацию, эпистрофу, многосоюзе и апозиопезу. Целью данной работы является представление результатов апробации ProseRhythmDetector на двух произведениях английских авторов и их переводах на русский язык: Ш. Бронте «Городок» (Ch. Bronte “Villette”) и А. Мердок «Черный принц» (I. Murdoch “The Black Prince”). На основе результатов работы инструмента авторы сопоставили ритмические характеристики в оригинале текста и его переводе и сравнили как аспекты ритма, так и их контексты. Данный эксперимент позволил выявить особенности передачи стиля автора художественного произведения переводчиком, обнаружить и объяснить случаи несовпадения ритмических средств оригинала и перевода. Применение программного инструмента ProseRhythmDetector позволило существенно сократить объем работы экспертов-лингвистов за счет автоматизированного выявления лексических и синтаксических средств с достаточно высокой точностью (от 62% до 93%) для различных ритмических средств.

**Ключевые слова:** ритм текста, анализ ритма, обработка естественного языка, ритмические средства, автоматизация

**Для цитирования:** Лагутина Н. С., Лагутина К. В., Бойчук Е. И., Воронцова И. А., Парамонов И. В., "Автоматизированный поиск средств ритмизации художественного текста для сравнительного анализа оригинала и перевода на материале английского и русского языков", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 420–440.

### Об авторах:

Лагутина Надежда Станиславовна, [orcid.org/0000-0002-6137-8643](https://orcid.org/0000-0002-6137-8643), канд. физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [lagutinans@rambler.ru](mailto:lagutinans@rambler.ru)

Лагутина Ксения Владимировна, [orcid.org/0000-0002-1742-3240](https://orcid.org/0000-0002-1742-3240), аспирант, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [lagutinakv@mail.ru](mailto:lagutinakv@mail.ru)

Бойчук Елена Игоревна, [orcid.org/0000-0001-6600-2971](https://orcid.org/0000-0001-6600-2971), доктор фил. наук, доцент, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского,

ул. Республиканская, д. 108/1, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: elena-boychouk@rambler.ru

Воронцова Инна Алексеевна, orcid.org/0000-0001-5897-9299, канд. фил. наук, доцент,  
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского,  
ул. Республиканская, д. 108/1, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: arinna1@yandex.ru

Парамонов Илья Вячеславович, orcid.org/0000-0003-3984-8423, канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: Пуа.Paramonov@fruct.org

#### **Благодарности:**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00243.

## Введение

В современной лингвистике существует задача определения и анализа ритма художественных произведений. Под ритмом обычно понимается регулярное повторение сходных и соизмеримых единиц естественного языка, выполняющих структурирующую, текстообразующую и экспрессивно-эмоциональную функции. Ритмические средства прозы и стихов имеют самостоятельные характеристики и не только являются феноменом организации и восприятия художественного текста, но и отражают особенности стиля автора произведения [1].

Работы в области автоматического анализа ритма в основном посвящены исследованию стихотворных текстов и основаны на определении чередования ударных и безударных слогов и простых количественных характеристиках, таких как длина предложений и частота встречаемости слов. Однако средства ритмики включают в себя большое количество аспектов на фонетическом, лексическом, морфологическом и синтаксическом уровнях. В связи с этим интересной и трудной задачей становится создание методов и инструментов определения ритма, позволяющих выразить его в конкретных параметрах. По таким параметрам можно сравнивать ритм текстов, созданных разными писателями, разных частей текста, ритмы оригинального текста и перевода [2]. Лингвисты также отмечают важность сохранения авторского ритма при переводе произведения на другой язык и частое искажение этого ритма переводчиками прозаических текстов [3].

Особенностью исследований, посвященных ритму в художественном переводе, являются чрезвычайная комплексность самого объекта исследования — ритма прозы, сложность и многоаспектность феномена художественного перевода, а также ограниченность математического инструментария и отсутствие эффективных автоматизированных систем оценки параметров ритма оригинального и переведенного текстов. Тем не менее, математические методы применяются для оценки средств ритмизации в исследованиях [4].

Учитывая все вышесказанное, авторы статьи поставили перед собой задачу построить систему автоматизированного определения комплекса ритмических средств художественных произведений и применить её к сравнительному анализу оригинального текста на английском языке и русскоязычного перевода. Важной особенностью разрабатываемого инструмента является визуализация результатов поиска средств ритмики конкретного произведения с целью проведения экспертного анализа отдельных аспектов.

## 1. Рассматриваемые ритмические средства

В данной работе ритмические характеристики текста определяются, исходя из употребления средств создания ритма, в основе которых находится повтор в определенной конфигурации, в определенной позиции, с определенным количеством повторяющихся элементов. На основе этого выделяются следующие ритмические средства:

1. Анафора — скрепление речевых отрезков (частей фразы, стихов) с помощью повтора слова или словосочетания в начальной позиции.
2. Эпифора — скрепление речевых отрезков (частей фразы, стихов) с помощью повтора слова или словосочетания в конечной позиции.
3. Симплога — фигура синтаксического параллелизма в смежных стихах или фразах, у которых одинаковые начало и конец при разной середине или наоборот, разные начало и конец при одинаковой середине.
4. Анадиплосис — риторическая фигура, в которой следующее предложение начинается теми же словами, которыми оканчивается предыдущее.
5. Эпаналепсис — фигура речи, состоящая в повторении одного и того же слова или словосочетания с небольшими вариациями.
6. Редупликация — фигура речи, заключающаяся в удвоении одного и того же слова или выражения.
7. Эпистрофа — стилистическая фигура, заключающаяся в повторении одного и того же слова или выражения в длинной фразе или периоде.
8. Многосоюзиe — стилистическая фигура, состоящая в намеренном увеличении количества союзов в предложении, обычно для связи однородных членов.
9. Апозиопеза — умолчание, неоконченность мысли, внезапная остановка в устной или письменной речи, чаще прерывание предложения и начало нового.

Выбор данных средств для анализа ритма, а именно для их автоматизированного поиска и количественной обработки обусловлен тем, что это наиболее частотные ритмические средства, употребляемые в прозаических текстах, и именно они выделяются в качестве ритмических средств на лексико-грамматическом уровне большинством лингвистов, проводящих исследования в области ритмизации текста.

## 2. Обзор смежных работ

Определение ритмических свойств текста чаще всего основывается на фонетических средствах ритмики, опирающихся на структурный анализ произведения на уровне слогов, его метроритмические параметры, определение рифмы. На этом подходе основаны доступные инструменты SPARSAR<sup>1</sup> для английского языка [6], Metricalizer<sup>2</sup>

<sup>1</sup><https://sparsar.wordpress.com>

<sup>2</sup><https://www.poetron-zone.de/metricalizer.php>

для немецкого [7], Rhymes<sup>3</sup> и RitmInMe<sup>4</sup> для русского. Все эти инструменты работают с поэтическими текстами.

Аналогичный подход часто применяют и к прозаическому тексту. Фонетический ритм английских, румынских и французских текстов анализируется в цикле работ [8, 9], на его основе определяется стиль: стихи, художественная литература и политическая речь. Аналогичная работа проделана для русскоязычных текстов [10]. Бойчук Е. И. и соавторы [11] анализируют ритм французской художественной литературы с целью определения авторского стиля писателя. Авторы работы [12] преобразуют текст в набор сигналов, разбивая его на буквы, а затем исследуют ритм текста, применяя математические методы разложения сигналов на функции (Empirical Mode Decomposition). Такой подход анализирует текст на уровне слогов, букв и звуков, реже слов, и удобен тем, что позволяет легко использовать аппарат математической статистики для расчета частоты, периодичности, корреляции и т. п. Однако для углубленного исследования ритма прозы требуется работа на более высоком смысловом уровне словосочетаний (синтагм), предложений, абзацев.

Исследователи в области компьютерной лингвистики говорят о необходимости изучения различных фигур речи естественного языка и обращают внимание на сложность формализации определения таких фигур и построения методов их автоматического поиска [13]. Авторы этой работы описывают процесс создания онтологии и базы данных метафор, риторических вопросов, противопоставлений, а также фигур речи, основанных на повторении слов и фраз. Они обращают внимание на то, что взаимодействие лингвистов и специалистов в области информационных технологий дает возможность получить глубокое понимание человеческого языка с точки зрения его структуры и функционирования.

К сожалению, на сегодняшний момент существует недостаточно работ, посвященных автоматизации поиска и применения лексических и синтаксических аспектов ритмики текста. Авторы работы [14] предлагают метод обнаружения анадипозиса, анафоры, антиметаболы (повторения во второй фразе слов первой, но в другом порядке и значении) и эпифоры, основанный на применении регулярных выражений. Эксперимент проведен на корпусе из более чем 163 тысяч фрагментов текстов, однако рассчитана только частота встречаемости каждого из рассмотренных средств ритмики, а точность и полнота результатов не оцениваются.

Российские ученые [15] сравнивают шесть программных систем обнаружения анафоры. Для автоматизации процесса поиска в системах использовались методы машинного обучения, морфологические и синтаксические анализаторы, онтологии и правила. В ходе экспериментов с общим корпусом из 85 текстов лучшие показатели F-меры были достигнуты с использованием лингвистических алгоритмов, основанных на правилах и онтологиях.

Подробно описано исследование методов поиска хиазмов (крестообразное изменение последовательности элементов в двух параллельных рядах слов), эпифор и эпанафор (повтор начальных и конечных слов в соседних фразах или предложениях) в работе [16]. Авторы отмечают сложность определения и формализации параметров текста и его частей для качественного поиска фигур речи. Поверхностный анализ структуры текста даёт слишком много «ложных» результатов, так как на-

<sup>3</sup><http://rifmovnik.ru>

<sup>4</sup><http://www.ritminme.ru>

ходит фрагменты текста, содержащие повторяющиеся элементы, но не соответствующие смыслу ритмического средства, что особенно характерно для хиазма. Проявления ритмических средств могут быть очень редкими, например, одна фигура на несколько сотен страниц текста. Для отбора кандидатов авторы выбрали линейную модель, используя которую разработали детекторы, настраиваемые вручную. После того, как была накоплена достаточно большая обучающая выборка, систему обучали, используя логистическую регрессию. В результате значение F-меры оказалось в большинстве случаев более 60%. Авторы позиционируют свой инструмент как помощник лингвиста, дополняющий традиционный ручной анализ в условиях огромного количества литературных произведений.

Таким образом, построение и исследование алгоритмов автоматического анализа текстов на уровне смысловых конструкций, таких как ритмические средства, является важной и малоисследованной задачей компьютерной лингвистики. Решение этой задачи включает в себя разработку инструментов для лингвистов. Эти инструменты необходимы для проведения экспериментов с корпусами текстов большого объёма, поскольку их ручная обработка не представляется возможной. В качестве результатов исследований в этом случае выступают как параметры оценки произведений, так и материалы для использования в методах машинного обучения.

### 3. Алгоритмы поиска ритмических средств

Для того, чтобы проанализировать ритм прозаического произведения и сравнить его с ритмом перевода, был разработан комплекс алгоритмов, автоматически находящих в тексте ритмические средства, а именно лексические и синтаксические.

Входными данными для всех алгоритмов является необработанный текст. Текст  $T$  состоит из  $n$  предложений  $\langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ , каждое предложение является набором слов  $\langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$ . В качестве выходных данных каждый алгоритм возвращает список аспектов  $A$  заданного ритмического средства:  $A_{anph}$  — анафора,  $A_{eph}$  — эпифора,  $A_{sym}$  — симплока,  $A_{andp}$  — анадиплозис,  $A_{epnl}$  — эпаналепсис,  $A_{redpl}$  — редупликация,  $A_{epstr}$  — эпистрофа,  $A_{poly}$  — многосоюзиe,  $A_{aps}$  — апозиопеза.

Каждый аспект  $a = \langle W, S \rangle$ ,  $a \in A$ , состоит из слова или словосочетания  $W$ , повторяющегося в нескольких предложениях  $S = \langle s | s \in T, W \in s, |S| > 1 \rangle$ . Список предложений  $S$  является контекстом для аспекта  $a$ . По контекстам эксперт-лингвист может сравнить оригинал текста и его перевод, чтобы проанализировать, как именно переводчик отражает ритмические средства автора текста. Также по контексту можно определить, верно ли выделен аспект.

Приведем пример появления ритмического средства в тексте и связанных с ним обозначений: *He does. He is fond of you. You are his favourite.*

Здесь имеется анадиплозис. Его появление считается аспектом  $a \in A_{andp}$ .  $a = \langle W, S \rangle$ , где повторяющиеся слова  $W = \langle you \rangle$ , контекст  $S = \langle \text{«He is fond of you», «You are his favourite»} \rangle$ .

Рассмотрим подробнее алгоритмы поиска ритмических средств.

### 3.1. Алгоритмы поиска анафоры, эпифоры и симплоги

На первом шаге составляется список кандидатов в анафоры:  $K = \langle k_1, \dots, k_l \rangle$ , где каждое  $k \in K$  имеет вид  $\langle w, S' \rangle$  и состоит из слова  $w$  и списка соседних предложений  $S' = \langle s | s \in T, |s| > 1, s = \langle w, w_1, w_2, \dots, w_m \rangle \rangle$ .

Для каждого  $k$  составляем аспект  $a = \langle W, S \rangle$ . Аспект составляется циклически: изначально  $W = \langle w \rangle$ , затем на каждом  $j$ -м шаге к  $W$  добавляется очередное слово  $w_j$ , такое, что  $w_j \in s$  верно для нескольких предложений  $s \in S'$ . Если таких  $w_j$  оказывается несколько для разных предложений, берется  $w_j$ , соответствующее большему числу предложений. После добавления  $w_j$  в  $W$  фильтруется  $S'$ , а именно, остаются  $s$ , удовлетворяющие условию:

$$s = \langle w, w_1, w_2, \dots, w_j, w_{j+1}, \dots, w_m \rangle,$$

т. е. предложения, начинающиеся с набора слов  $W$ , но не состоящие из него полностью. Как только не удастся найти подходящее  $w_j$ , цикл заканчивается,  $a_i = \langle W, S \rangle$ , где  $W$  — список повторяющихся слов, а  $S = S'$  после работы алгоритма.

Поиск эпифоры организуется аналогично, отличие заключается только в том, что формирование  $W$  ведется не с начала предложения, а с конца.

Список симплог  $A_{sym}$ , составляется из списков анафоры и эпифоры:  $A_{anph}$  и  $A_{eph}$  соответственно. Между собой сравниваются все пары аспектов  $\langle b, c \rangle$  таких, что  $b \in A_{anph}$ ,  $c \in A_{eph}$ . Если  $b = c$ , это значит, что в одном и том же контексте предложения имеют одинаковые начала и одинаковые окончания, значит, найдена симплога. Тогда  $b$  удаляется из  $A_{anph}$ ,  $c$  — из  $A_{eph}$ ,  $b$  добавляется в  $A_{sym}$ .

Алгоритм заканчивает работу, как только перебраны все пары  $\langle b, c \rangle$ .

### 3.2. Алгоритм поиска анадиплозиса

Представим текст как набор слов  $w$  и знаков препинания  $p$ :  $T = \langle w_1, p_1, w_2, \dots, p_q \rangle$ . Алгоритм ищет анадиплозис циклически, на каждом шаге выявляя аспекты с наибольшим  $|W|$ .

На первом шаге алгоритм поиска анадиплозиса перебирает текст и ищет в нем списки вида:  $l = \langle w, p, w \rangle$ , то есть два одинаковых слова, разделенных одним знаком препинания. Из  $l$  составляется аспект  $a = \langle W, S \rangle$ , где  $W = \langle w \rangle$ , а  $S = \langle s \rangle$  и  $l \in s$  или  $S = \langle s_1, s_2 \rangle$ ,  $s_1 = \langle w_{11}, \dots, w \rangle$ ,  $s_2 = \langle w, w_{21}, \dots, w_{2m} \rangle$ , если  $p$  обозначает конец предложения.

Следующий шаг практически полностью аналогичен предыдущему, за исключением того, что  $l = \langle w_1, w_2, p, w_1, w_2 \rangle$ , то есть ищутся уже пары одинаковых слов, разделенных одним знаком препинания. И тогда  $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ .

В общем случае на  $i$ -м шаге алгоритм ищет список вида:

$$l = \langle w_1, w_2, \dots, w_i, p, w_1, w_2, \dots, w_i \rangle,$$

а  $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_i \rangle$ . Работа алгоритма прекращается после шага с номером  $i_{\max} = \max_{s \in T} |s|$ .

### 3.3. Алгоритмы поиска эпаналепсиса, редупликации и эпистрофы

В алгоритмах поиска редупликации и эпистрофы перебираются все слова  $w \in T$ . Ищутся все наборы последовательных слов  $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ ,  $k > 0$ , которые формируют список  $l = \langle w_1, \dots, w_k, \dots, w_1, \dots, w_k \rangle$ ,  $l \in T$ , то есть  $W$  встречается в  $T$  несколько раз, при этом  $W$  не может полностью состоять из предлогов или союзов.

Если найден список вида  $l = \langle w_1, \dots, w_k, w_1, \dots, w_k \rangle$ , то есть  $W$  дублируется, и при этом  $W \in s$  ( $W$  дублируется в рамках одного предложения), а для любого  $a' \in A_{andp}$ ,  $W \notin a'$  (найден не анадиплозис), то обнаружена редупликация. Тогда формируется аспект  $a = \langle W, S \rangle$ , где  $S = \langle s \rangle$ , и  $a$  помещается в  $A_{redpl}$ .

Если найден список вида  $l = \langle w_1, \dots, w_k, w, \dots, w_1, \dots, w_k \rangle$ , при этом  $l = \langle s \rangle$  или  $l = \langle s_i, s_{i+1} \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , то есть  $W$  повторяется в начале и конце предложения или пары предложений, и, возможно, в их середине, то обнаружена эпистрофа. Тогда формируется аспект  $a = \langle W, S \rangle$ , где  $S = l$ , и  $a$  помещается в  $A_{epstr}$ .

Если найден список вида  $l = \langle w_1, \dots, w_k, w, \dots, w_1, \dots, w_k \rangle$ , то есть между повторяющимися  $W$  имеется хотя бы одно слово  $w$ , и при этом  $W \in s$  или  $W \in s_i$ ,  $W \in s_{i+1}$ ,  $i = 1 \dots n - 1$ , и также для любого  $a' \in A_{anph}, A_{eph}, A_{sym}, A_{andp}, A_{epstr}$ ,  $W \notin a'$ , то обнаружен эпаналепсис. Тогда формируется аспект  $a = \langle W, S \rangle$ , где  $S = \langle s \rangle$  или  $S = \langle s_i, s_{i+1} \rangle$ , и  $a$  помещается в  $A_{epnl}$ .

### 3.4. Алгоритмы поиска синтаксических средств: многосоюзия и апозиопезы

Для поиска многосоюзия алгоритму необходимы списки союзов: список обычных союзов  $C_1 = \langle \text{but, till, as, if, after, until, because, and, or, nor, so, before, since, that, till, until, unless, whether, while, where, when, why, what, how, whenever, although, though, once, than, whereas, thus} \rangle$  и список парных союзов  $C_2 = \langle \langle \text{both, and} \rangle, \langle \text{either, or} \rangle, \langle \text{not only, but} \rangle, \langle \text{not only, but also} \rangle, \langle \text{rather, or} \rangle, \langle \text{just as, so} \rangle, \langle \text{neither, nor} \rangle, \langle \text{whether, or} \rangle, \langle \text{if, then} \rangle \rangle$ , а также список союзных наречий  $C_3 = \langle \text{after all, as a result, for example, in addition, in fact, in other words, on the other hand} \rangle$ . Аналогичные списки имеются и для русского языка.

Каждый из списков  $C_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ , обрабатывается следующим образом.

Для каждого союза или союзного наречия  $c \in C_i$  и каждого предложения  $s \in T$  проверяется условие  $l \in s$ , где  $l$  имеет один из видов:

$$l = \langle w_1, \dots, c, \dots, c, \dots, w_m \rangle,$$

$$l = \langle c, \dots, c, \dots, w_m \rangle,$$

$$l = \langle w_1, \dots, c, \dots, c \rangle,$$

$$l = \langle c, \dots, c \rangle,$$

то есть  $c$  появляется в  $s$  более одного раза, возможно, в начале или в конце предложения. Если условие выполняется, в список аспектов  $A_{poly}$  добавляется аспект  $a = \langle W, S \rangle$ , где  $W = \langle c \rangle$ ,  $S = \langle s \rangle$ .

Алгоритм для апозиопезы, возвращает список аспектов  $A_{aps}$ , где аспект  $a \in A_{aps}$  состоит только из предложения  $s \in T$ . Это самый простой из всех алгоритмов поиска ритмических средств, так как он заключается в поиске  $s \in T$ , которые содержат

многоточие, и добавлении  $a = \langle \emptyset, s \rangle$  в список аспектов  $A_{aps}$ . Эти аспекты не содержат повторяющихся слов.

### 3.5. Программная реализация алгоритмов

Описанные алгоритмы поиска ритмических средств реализованы в веб-приложении ProseRhythmDetector. Оно разработано при помощи технологий HTML, CSS, JavaScript и опубликовано на GitHub<sup>5</sup>.

Приложение позволяет загрузить текст произведения на русском или английском языке, ищет в тексте ритмические средства при помощи описанных алгоритмов. Затем оно отображает текст и выделяет в нем найденные аспекты и их контекст различными цветами. Кроме того, ProseRhythmDetector подсчитывает частоту встречаемости ритмических средств в тексте и выводит список аспектов заданного средства в отдельной панели. Главный экран приложения с обработанной главой произведения Ш. Бронте «Городок» представлен на рис. 1.

The screenshot shows the main interface of the ProseRhythmDetector application. It features a menu on the left with options like 'Load File', 'Load ban file', 'Settings', and 'Download JSON'. The main area displays a text excerpt from 'Городок - глава 3' with highlighted rhythmic aspects. A 'Word's list' table on the right shows word counts for various words. Below the text, a 'RESULTS' section contains a table of detected aspects and their counts.

Word	Count
и	170
она	138
не	132
я	110
в	98
на	84
что	79
с	66
он	63

Selected lexical aspects	Anaphora	Epiphora	Symploce	Anadiplosis	Epistrophe	Reduplication	Epanalepsis
<input checked="" type="checkbox"/> Anaphora <input checked="" type="checkbox"/> Epiphora <input checked="" type="checkbox"/> Symploce <input checked="" type="checkbox"/> Anadiplosis <input checked="" type="checkbox"/> Epistrophe	7	3	0	0	1	0	142

**Anaphora's examples:**  
 1. "Грэм"  
 Грэм отдал ей картинку, она же бросилась прочь, подобно преследуемому кредитору, и нашла убежище на коленях отца.  
 Грэм вскочил, изображая ярость, и последовал за ней.  
 2. "Она"  
 Она тотчас же оказалась около него. – Лайте я посмотрю ваш глаз. – Я вовсе не собиралась попасть в него, я хотела ударить по губам, я не предполагала, что ударю так ужасно

Рис. 1. Главный экран приложения ProseRhythmDetector

Fig 1. Main page of the ProseRhythmDetector application

В результате работы с данным приложением лингвист-исследователь получает возможность оценить стиль текста произведения в целом, просматривая и анализируя встречающиеся в нем лексические и синтаксические средства. Также у него появляется возможность провести эксперименты с изучением особенностей нескольких произведений за гораздо меньшее время, чем потребовалось бы для исследования их вручную без автоматизации.

<sup>5</sup><https://github.com/text-processing/html-tool>

Таблица 1. Количество ритмических средств в оригинале произведения  
Ш. Бронте «Городок» и в его переводе

Table 1. The number of rhythmic features in the original text  
of Ch. Bronte's "Villette" and in its translation

Средство	оригинал	перевод	разность	совпадения
Анафора	68	211	143	10
Эпифора	10	26	16	2
Симплока	0	2	2	0
Анадиплосис	12	27	15	4
Эпистрофа	0	24	24	0
Редупликация	0	486	486	0
Эпаналепсис	1649	4518	2869	119
Многосоюзие	179	847	668	2
Апозиопеза	3	57	54	0
Всего	1 921	6198	4277	137

## 4. Эксперименты

Целью проводимых в данной работе экспериментов была оценка степени передачи при переводе перечисленных выше ритмических средств. Эксперименты проводились на материале двух произведений: Ш. Бронте «Городок» (Ch. Bronte "Villette") и в его переводе на русский язык Н. Михальской, и А. Мердок «Черный принц» (I. Murdoch "The Black Prince") и его переводе, выполненном И. Бернштейн и А. Поливановой.

В ходе экспериментов точность поиска инструментом ритмических средств составила от 62 % до 93 %. В таблицах 1 и 2 приведены количественные результаты поиска средств ритмики и их совпадений для этих произведений и их переводов. Ниже более детально рассмотрены выявленные ритмические средства и выполнено их сравнение в оригинальном тексте и его переводе.

### 4.1. Анафора

В тексте романа Ш. Бронте «Городок» и в его переводе из 68 оригинальных контекстов наблюдается 10 случаев полного совпадения анафорических повторов без изменения позиции в тексте, а также без изменения количества повторяющихся элементов. 8 из 10 случаев — употребление местоименной анафоры (местоимения в функции подлежащего I, she, it), которая наиболее точно передана в тексте перевода. Однако есть случаи замены одного местоимения другим и введения дополнительной конструкции в препозиции к его употреблению:

*She had a pale face, hair like night, broad strong eyebrows, decided features, and a dark, mutinous, sinister eye: I noted that*

*Я внимательно взгляделась в нее: бледное лицо, иссиня-черные волосы, широкие выразительные брови, резкие чер-*

Таблица 2. Количество ритмических средств в оригинале произведения  
 А. Мердок «Черный принц» и в его переводе

Table 2. The number of rhythmic features in the original text  
 of I. Murdoch's "The Black Prince" and in its translation

Средство	оригинал	перевод	разность	совпадения
Анафора	585	346	239	102
Эпифора	149	53	96	35
Симплока	9	3	6	3
Анадиплосис	37	37	0	2
Эпистрофа	78	0	78	0
Редупликация	23	8	15	2
Эпаналепсис	3340	2901	439	1001
Многосоюзие	219	366	147	98
Апозиопеза	0	0	0	0
Всего	4440	3966	474	1250

*she sat close by a little door, which door,  
 I was well aware, opened into a small  
 closet where books were kept. She was  
 standing up for the purpose of conducting  
 her clamour with freer energies.*

*ты лица и темные, мятежные, мрач-  
 ные глаза. Я заметила, что она си-  
 дит около небольшой двери, которая,  
 как я знала, ведет в маленький чулан,  
 где хранились книги. Ученица встала,  
 дабы получить большую свободу дей-  
 ствий.*

В тексте произведения А. Мердок «Черный принц» и в его переводе из 585 контекстов оригинальной анафоры 102 контекста воспроизведены с большей или меньшей количественной и позиционной точностью. В 45 контекстах количество и позиция повторяющихся элементов соответствуют полностью, например:

*I have never tried to please at the  
 expense of truth. I have known, for long  
 periods, the torture of a life without self-  
 expression.*

*Я никогда не стремился к приятно-  
 сти за счет правды. Я знал долгие му-  
 чительные полосы жизни без самовы-  
 ражения.*

В 22 контекстах позиция анафор сохранена, количество повторяющихся элемен-  
 тов меньше на 1–4 элемента из 4–6, например:

*I waited. I tried to develop a new routine:  
 monotony, out of which value springs. I  
 waited, I listened.*

*Я ждал. Я снова постарался вы-  
 работать упорядоченный образ жиз-  
 ни, создать монотонность, из кото-  
 рой рождаются всплески. Я выжидал,  
 вслушивался.*

В 31 контексте незначительно изменена позиция анафоры (перенос на одно пред-  
 ложение вперед или назад) и в 18 из них изменено количество повторяющихся эле-  
 ментов, преимущественно в сторону их уменьшения, например:

*And I was suddenly deeply frightened by the possibility of having my sister on my hands. I simply did not love her enough to be of any use to her, and it seemed wiser to make this plain at once. I waited for about ten minutes, trying to calm and clear my mind, and then went back to the bedroom door. I did not really expect that Priscilla would have got dressed and be ready to leave. I did not know what to do. I felt fear and disgust at the idea of mental breakdown, the semi-deliberate refusal to go on organizing one's life which is regarded with such tolerance in these days. I peered into the room.*

*Я боялся, как бы сестра не оказалась вдруг у меня на руках. Я просто-напросто не настолько любил ее, чтобы она могла на меня рассчитывать, и, видимо, лучше всего было сказать ей об этом прямо. Переждав минут десять, пока успокоятся мои нервы и прояснится голова, я встал и подошел к двери в спальню. В сущности, я и не надеялся, что застаю Присциллу одетой и готовой к уходу. Что мне делать, я не знал. Мне противна и страшна была сама мысль о «нервном расстройстве», этом наполовину сознательном уходе от упорядоченной жизни, к которому в наши дни принято относиться с такой терпимостью. Я заглянул в комнату.*

В двух случаях в переводе число повторяющихся элементов больше, чем в оригинале (три против двух в оригинале).

Четыре контекста содержат меньшее количество элементов, повторяющихся не подряд, из чего следует, что повтор перестает восприниматься как анафорический, а переходит в эпаналепсис, например:

*I went out of the room and closed the door quietly behind me. I heard a soft bound and then the key turning in the lock. I went down the stairs feeling very shaken and, yes, she had been right, disgusted.*

*Я спустился по лестнице с чувством растерянности и — да, она была права — отвращения. За это время стемнело, солнце больше не сияло на улице, и все в доме стало коричневым и холодным. Я вошел в гостиную, где сидели и беседовали Арнольд с Фрэнсисом.*

В 483 контекстах оригинала анафорический повтор при переводе либо утрачен, либо заменен другим средством ритмизации, преимущественно эпаналепсисом, например:

*Arnold Baffin wrote too much, too fast. Arnold Baffin was really just a talented journalist.*

*Арнольд Баффин писал слишком много, слишком быстро. По существу, Арнольд Баффин был всего лишь талантливым журналистом.*

## 4.2. Эпифора

В тексте романа Ш. Бронте «Городок» и в его переводе из 10 выявленных случаев употребления эпифоры в оригинале отмечено 3 совпадения контекстов. Полного совпадения с точки зрения позиции в предложении и аналогичного употребления

ритмического средства в переводе не наблюдается, что связано в первую очередь со спецификой грамматической структуры языков:

*“No, Missy,” said the nurse: “you are to share this young lady’s room,” designating me. Missy did not leave her seat, but I saw her eyes seek me.*      *И она указала на **меня**. Мисси не встала с места, но отыскивала **меня** глазами.*

В приведенном примере эпитетический повтор местоимения *me* (меня) в русском языке теряет финальную позицию в связи со сменой подлежащего в придаточном предложении (*ее глаза искали меня / Мисси отыскивала меня глазами*).

Замена инфинитива формой глагола в повелительном наклонении также не способствует сохранению эпитетического повтора в переводе:

*Go to sleep. I cannot go to sleep.*      *Спи! – Я не могу спать.*

Более точный перевод данного фрагмента мог бы способствовать сохранению ритмического средства: *Иди **спать!** – Я не могу пойти **спать**.*

Переход из одной части речи в другую, в приведенном ниже примере из существительного *love* в формы: *влюблен, любят, любовь*, способствует переходу эпитеты в оригинальном тексте в полиптотон и деривацию в переводе:

*He perhaps was not in love; but how many people ever do love, or at least marry for love, in this world.*      *Он, по-видимому, не был **влюблен** в нее, но разве так уж много людей в этом мире **любят** по-настоящему или женятся по **любви**?*

В этом случае не сохраняется ритмическое средство, оно переходит в иной статус.

В тексте произведения А. Мердок «Черный принц» и в его переводе на 149 случаев оригинальной эпитеты найдено 35 совпадений. В 24 контекстах оригинальная эпитета при переводе заменена другими видами повтора. Самой частотной является замена эпитеты на эпанафору (13 случаев):

*You’d better get your own doctor tomorrow. Oh, I think I shall be better tomorrow.*      *Вам надо будет **завтра** самому вызвать доктора. – О, **завтра**, я думаю, мне будет лучше.*

Далее следует замена на смысловую повтор (замена на синоним), иногда в сочетании с изменением порядка слов (5 случаев):

*Roger has become a devil. Some sort of devil.*      *В Роджера просто **дьявол** вселился. Какой-то **демон**.*

Обнаружено по 2 случая замены эпитеты на анадиплозис и градационный повтор. В переводе присутствуют контексты с эпитетой, которой нет в зеркальных оригинальных предложениях, что может рассматриваться как попытка частично компенсировать утрату эпитеты по сравнению с оригиналом.

### 4.3. Анадиплозис

Четыре случая анадиплозиса в тексте романа Ш. Бронте «Городок» точно воспроизведены в переводе. Повтор на стыке предложений или частей предложения довольно

сложно разграничить с редупликацией, которая рассматривается как повтор одного и того же слова в начале предложения, в связи с этим при переводе часто одно заменяется другим:

*Her features worked, — “I am sorry; I am sorry!”*      *Прости, прости.*

При этом часто разработанный инструмент смешивает данные ритмические средства, что нарушает статистику. В этом случае задача разграничения данных средств лежит на исследователе.

При передаче анадиплозиса повтор может быть передан с изменением позиции его компонентов, а также некоторым изменением состава повторяющейся конструкции:

*I grant I was not looking well, but, on the contrary, thin, haggard, and hollow-eyed; like a sitter-up at night, like an overwrought servant, or a placeless person in debt. In debt, however, I was not; <... >*

*К этому времени нервы у меня расшатались, но немного, совсем немного. Полагаю, и выглядела я неважно: худая, изможденная, с ввалившимися глазами, похожая на сиделку, проводящую ночи у постели больного, на переутомленную служанку или запутавшегося в долгах безработного. Однако я не запуталась в долгах и не оказалась в крайней бедности безработного <... >.*

Также при переводе может осуществляться замена анадиплозиса анафорой:

*He is fond of you. You are his favourite.*      *Ты ему нравишься. Ты его любимица.*

Количество повторяющихся элементов при этом не изменяется, их позиция в тексте также остается неизменной, но изменяется позиция элементов средства (в начале частей предложения).

Анадиплозис может быть утерян при переводе:

*“I? I couldn’t do it!” (sinking into a chair).*      *«Я? Ни за что в жизни» (падает в кресло).*

Из 37 случаев анадиплозиса в оригинале произведения А. Мердок «Черный принц» два точно воспроизведены в переводе, например:

*Art is imagination. Imagination changes, fuses.*      *Искусство – это воображение! Воображение пресуществляет, плавит в своем горниле.*

Так же как и в первом произведении анадиплозис может заменяться другим средством, например, эпаналепсисом:

*I mean to indicate the curiously controlled rhythmic screaming which goes with a certain kind of hysterics.*

*Этим термином я обозначил странно ритмичные, рассчитанные вопли, сопровождающие некоторые истерические состояния. Истерика пугает*

*Hysterics is terrifying because of its willed and yet not willed quality.*

*тем, что она произвольна и непроизвольна в одно и то же время.*

#### 4.4. Эпаналепсис

Эпаналепсис — наиболее частотное ритмическое средство для текста романа Ш. Бронте «Городок». Количество повторяющихся элементов в переводе сохранено, однако их позиция несколько изменена, что в некоторой степени сказывается на характере ритма:

*Bretton and I sat alone in the drawing-room waiting her coming; John Graham Bretton being absent on a visit to one of his schoolfellows who lived in the country.*

*В гостиной остались лишь миссис Бреттон и я, так как Джон Грэм Бреттон гостил в деревне у своего однокашника.*

Диапазон между повторяющимися элементами в переводе меньше, чем в оригинале текста в два раза (12 и 6 слов), что усиливает ритм русского текста.

В следующем примере также несколько изменяется позиция повторяющихся элементов, однако оригинальный вариант сопровождается возрастанием количества слогов в синтагмах: 4–5–6, что способствует восприятию ритма на фонетическом уровне:

*Tie my sash straight; make my hair smooth, please. Your sash is straight enough.*

*Пожалуйста, поправьте мне пояс и пригладьте волосы. — Но пояс у вас в порядке.*

Сравнительно-сопоставительный анализ оригинальных и переведенных контекстов романа А. Мердок «Черный принц» позволил сделать заключение о том, что эпаналепсис полностью воспроизводится при переводе примерно в 25 % случаев (834 контекста):

*I learnt later with abhorrence that he had set up in business as a self-styled psychoanalyst. Later still I heard he had taken to drink.*

*Позже я с отвращением узнал, что он завел себе практику в качестве самозваного «психоаналитика». Еще позже я слышал, что он пьет.*

Иногда в переводе утрачивается один-два элемента, если количество повторяющихся элементов сравнительно велико (более 4).

Еще в 5 % случаев (167 контекстов) эпаналепсис заменяется другим средством ритмизации, что, тем не менее, способствует сохранению ритмического рисунка авторского текста. В проанализированных примерах были выявлены случаи замены эпаналепсиса на смысловой повтор в сочетании с синтаксическим параллелизмом и позиционной компенсацией эпаналепсиса, например:

*He was stout (the raincoat failed to button) and not tall, with copious greyish longish frizzy hair and a round face and a slightly hooked nose and big very red lips and eyes set very close together.*

*Он был толст (макинтош явно не застегивался), невысок ростом, волосы густые и курчавые, давно не стриженные, с проседью, лицо круглое, со слегка крючковатым носом, толстыми, очень красными губами и уди-*

*вительно* близко посаженными глазами.

Замена на анадиплозис с позиционной компенсацией эпаналепсиса:

*Real bears, I believe, have eyes rather wide apart, but caricatured bears usually have close eyes, possibly to indicate bad temper or cunning.*

*Он походил, как я потом подумал, на карикатурного медведя. Не на настоящего — у настоящих медведей глаза, по-моему, расставлены широко, а вот на карикатурах их рисуют с близко посаженными глазами — вероятно, для того, чтобы выразить их свирепость и коварство.*

#### 4.5. Многосоюзиe

Совпадение контекстов в романе Ш. Бронте «Городок» составляет 24 из 179, однако точная передача ритмического средства — только в 2 случаях, при этом основным союзом, который обеспечивает употребление данного ритмического средства, является союз *and* (*и*):

*My visits to her resembled the sojourn of Christian and Hopeful beside a certain pleasant stream, with “green trees on each bank, and meadows beautified with lilies all the year round.” The charm of variety there was not, nor the excitement of incident; but I liked peace so well, and sought stimulus so little, that when the latter came I almost felt it a disturbance, and wished rather it had still held aloof. One day a letter was received of which the contents evidently caused Mrs. Bretton surprise and some concern.*

*Жизнь моя не отличалась пленительным разнообразием и волнующими приключениями, но мне нравился этот покой, и, избегая всяческих перемен, я даже любое письмо воспринимала как нарушение привычного хода вещей и предпочитала, чтобы оно вовсе не приходило. Однажды миссис Бреттон получила письмо, содержание которого явно удивило и несколько обеспокоило ее.*

Многосоюзиe вполне успешно воспроизводится при переводе произведения А. Мердок «Черный принц». Точная передача данного ритмического средства составила порядка 45 % (98 контекстов). Следует отметить, что практически во всех переведенных контекстах появлялись дополнительные средства многосоюзия: 219 примеров в оригинале и 366 в переводе, например:

*Both taxman and dentist only too readily image forth the deeper horrors of human life: that we must pay, perhaps ruinously, for our pleasures, that our resources are lent, not given, and that our most irreplaceable faculties decay even as they grow.*

*И* зубной врач, *и* налоговый инспектор, естественно, символизируют для нас подспудные ужасы жизни; они говорят о том, что мы должны платить, даже если цена разорительная, за все наши удовольствия, что блага даются нам в долг, а не дару-

ются, **что** наши самые невосполнимые богатства гниют уже в процессе роста.

Инструмент выделяет одинаковые союзы, расположенные в рамках одного абзаца, что несколько расширяет границы самого ритмического средства, которое определяется не только как повтор союзов при однородных членах предложения, но также выделяет различные группы однородных членов.

#### 4.6. Симплока, эпистрофа и редупликация

Случаев употребления симплоки, эпистрофы и редупликации в романе Ш. Бронте «Городок» обнаружено не было.

Один из девяти случаев симплоки, найденных в оригинальном тексте произведения А. Мердок «Черный принц», имеет зеркальное совпадение в тексте перевода:

<i>I turned back and drove the other way, through the village, past <b>the church</b>. I even stopped and went into <b>the church</b>.</i>	<i>Я повернул назад и поехал через деревню мимо <b>церкви</b>. Я даже остановился и зашел в <b>церковь</b>.</i>
--	---

Другие средства ритмизации не были утрачены, но подверглись стилистическим преобразованиям. Таким образом, из восьми оставшихся случаев пять раз симплока заменена на эпаналепсис:

<i>She kept drawing it out without telling me and <b>buying clothes</b>. She went mad over <b>buying clothes</b>.</i>	<i>А она втихомолку тянула фунт за фунтом и покупала себе <b>тряпки</b>. Она на этих <b>тряпках</b> просто помешалась.</i>
---	--

Два раза симплока заменена на эпифору и сочетание эпифоры и эпаналепсиса:

<i>What did you say? <b>What could I say?</b></i>	<i>А вы <b>что ответили?</b> <b>Что я могла ответить?</b></i>
---	---

Один раз сохранен синтаксический параллелизм:

<i>I write <b>whether</b> I feel like it <b>or not</b>. I complete things <b>whether</b> I think they're perfect <b>or not</b>.</i>	<i>Я пишу независимо от того, легко мне <b>или</b> трудно. И завершаю любую работу, удалась она мне <b>или</b> не удалась.</i>
---	--

Три случая симплоки, зафиксированные в тексте перевода, употреблены переводчиком самостоятельно, возможно, в порядке компенсации утраченных средств ритмизации.

В оригинальном тексте выявлено 23 случая редупликации, из них два совпали при переводе. Случаев применения эпистрофы в переведенном тексте инструмент не зафиксировал.

## 5. Обсуждение результатов

Следует отметить, что детальный анализ большого количества ритмических аспектов (почти две тысячи аспектов в одном произведении и более четырёх тысяч в дру-

гом) стал возможен только с использованием автоматизации поиска и визуализации результатов. Разработанный программный инструмент позволил лингвистам сосредоточиться на аналитической части исследования, более детально сравнить каждый аспект ритмики с переводом и сделать выводы о причинах его утраты или замены.

Количественный анализ передачи ритмических средств в переводе романа Ш. Бронте «Городок» показал, что наибольшую степень близости к оригиналу имеет передача такого средства, как анадиплозис (33,3 %), далее следуют эпифора (20 %), анафора (14,7 %), эпаналепсис (7,2 %) и многосоюзиe (1,1 %). В целом процент совпадений при употреблении ритмических средств довольно низкий — 7,1 %. В переводе произведения А. Мердок «Черный принц» степень передачи ритмических средств отличается: многосоюзиe (44,7 %), симплока (33,3 %), эпаналепсис (30 %), эпифора (23,5 %), анафора (17,4 %), редупликация (8,7 %), анадиплозис (5,4 %). Общий процент совпадений существенно выше: 28,2 %.

Из всех рассмотренных средств анафора наиболее точно передана при переводе с точки зрения позиции в тексте и количества повторяющихся элементов. Большое количество наблюдаемых в тексте аспектов этого ритмического средства позволило обобщить и сформулировать следующие причины утраты анафоры.

1. Невозможность ее воспроизведения в силу объективного расхождения грамматических возможностей английского и русского языков. Для проанализированных примеров это часто разница в употреблении залоговых форм, например, для русского языка исключена возможность употребления страдательного залога с непереходными глаголами, глаголами с предложным управлением, в то время как для английского языка это норма:

*I was upset and annoyed when my father once approached the subject, and although I could see that he had been made utterly miserable, I resolutely refused to discuss it.*

*Когда мой отец попытался однажды заговорить со мной о Присцилле, мне это было крайне неприятно, и я, хотя и видел, как он расстроен, решительно отказался обсуждать эту тему.*

В этом примере один из элементов анафорического повтора *I* теряется.

2. Опасность нарушения узуса (общепринятого носителями данного языка употребление языковых единиц) переводящего языка. Например, перевод словосочетания *He needed* как *ему был нужен*, а не *он нуждался*.
3. Наличие формульных (клишированных) фраз:

*I am 58. I still dream about it at least once a week.*

*Мне 58. Он и по сию пору снится мне примерно раз в неделю.*

4. «Агрессивность» (назойливость) повтора в 5–6 элементах может приводить к нарушению стилистики речи. Кроме того, повтор местоимений-подлежащих (ими английский текст избыточен, особенно *I*) является избыточным для русского языка, где значение грамматических категорий дублируется через спря-

жение глаголов, изменение корневых гласных, согласных, свойственное для местоимений определенных лиц и чисел и др.

*I waited, I listened.*

*Я выждал, вслушивался.*

Утрата контекстов с эпитетическим повтором ожидаема с точки зрения разницы в позиции ремы (то новое, что сообщается о теме в данном высказывании) в английском и русском языках. Например, безударные личные местоимения в конце предложения или фразы на английском языке, которые могут составлять эпитету, не несут смысловой нагрузки, в то время как финальное слово в предложении или фразе русского языка автоматически получает фразовое ударение и воспринимается как рема. Для сохранения правильного тема-рематического членения предложения необходимо прибегать к перестановке элементов предложения или фразы, что неизбежно ведет к утрате эпитету. В значительном числе контекстов она компенсируется другими средствами ритмизации.

В большинстве случаев анадиплозис утрачен без какой-либо ритмической компенсации в составе предложений. Однако общее количество анадиплозисов в переведенном тексте (в тексте романа Ш. Бронте 12 оригинальных, 4 соответствуют оригиналу, 23 употреблены переводчиком самостоятельно; в тексте романа А. Мердок 37 оригинальных, 4 полностью или частично соответствуют оригиналу, 33 употреблены переводчиком самостоятельно) позволяет говорить о равновесном употреблении данного ритмического средства в оригинале и переводе, пусть и в порядке позиционной компенсации.

Эпаналепсис — наиболее часто встречающееся ритмическое средство для обоих исследуемых произведений. В большинстве случаев эпаналепсис при переводе утрачивается с последующей его компенсацией в предложениях, оригиналы которых эпаналепсиса в своем составе не имеют. Чаще всего в составе этих предложений имеются другие ритмические фигуры, в отдельных случаях предложения не содержат повтора вообще. Среди наиболее частотных причин утраты эпаналепсиса следует назвать невозможность с точки зрения узуса стопроцентного воспроизводства личного местоимения *I* в роли подлежащего, а также притяжательных местоимений, в особенности в препозиции к существительным, обозначающим части тела, предметы одежды, термины родства и др.

Многосоюзие наиболее полно передано в переводе произведения А. Мердок «Черный принц». Во многих контекстах это средство компенсируется смысловым повтором (через употребление синонимичного союза) или утрачивается, например:

*The shop sold daily papers and magazines, writing paper and so on, and horrible gifts.*

*Они продавали газеты и журналы, бумагу всевозможных сортов, а также безобразные «подарки».*

Остальные ритмические средства достаточно редко встречаются в оригинальном тексте или не встречаются вообще, что не даёт возможность сделать существенные выводы об особенностях перевода этих аспектов. Интересно, что хотя редупликация полностью отсутствует в оригинале романа Ш. Бронте «Городок», она выявлена в переводе в довольно большом количестве. Возможно это зависит от индивидуального стиля переводчика.

В целом основной причиной низкой степени передачи ритмических средств в переводе с английского на русский язык являются особенности лексико-грамматической структуры языков оригинала и перевода, относящихся к разным языковым группам. Кроме того, можно указать другие факторы утраты или замены аспектов ритмики текста, например, стратегии, избранные переводчиком, а также качество перевода и степень адекватности передачи ритмических характеристик. Детальный анализ этих факторов требует дальнейших исследований.

Следует отметить высокую трудоёмкость таких исследований и экспериментов. Особенно тяжело для человека сочетать трудоемкий поиск большого количества разнообразных ритмических средств, встречающихся в тексте с совершенно разной частотой, со сравнительным анализом оригинала и перевода. Разработанный авторами программный инструмент *ProseRhythmDetector* продемонстрировал высокую эффективность, позволяя осуществить трудоемкий процесс поиска таких ритмических средств, как анафора, эпифора, симплока, анадиплозис, эпистрофа, редупликация, эпаналепсис, апозиопеза, многосоюзие. Большое значение при этом имеет визуализация результатов поиска, позволяющая эксперту легко ориентироваться в тексте произведения. Применение инструмента дало возможность провести эксперимент с большими художественными произведениями, который практически невозможно выполнить вручную, и оценить степень ритмичности текста с точки зрения лексико-грамматического уровня реализации ритма.

## Заключение

В данной работе авторы выполнили алгоритмизацию таких сложных лингвистических понятий, как средства ритмики прозаического текста. Разработанный в результате программный инструмент позволил автоматизировать значительную часть обработки текста на естественном языке, связанную с поиском и подсчётом целого комплекса ритмических аспектов художественных произведений. Использование инструмента лингвистами позволило провести сравнительный анализ оригиналов и переводов двух объемных романов и сделать выводы об особенностях передачи ритмики прозаического текста при переводе с английского на русский язык.

Степень совпадения или несовпадения передачи ритмических средств оригинала художественного произведения в его переводе является одним из маркеров адекватности выполненного перевода, но по большей части позволяет судить о специфике языковой структуры в целом, в особенности о характере передачи тех или иных ритмических средств, об их формах, вариациях, заменах. Это позволяет оценить специфику ритма как комплексного явления и обобщить возможные варианты способов перевода определенных ритмических средств.

## Список литературы / References

- [1] Голякова Л. А., “Ритм художественного произведения: коммуникативно-прагматический аспект”, *Вестник Пермского университета. Российская и зарубежная филология*, 2011, №3, 94–99; [Golyakova L. A., “Ritm hudozhestvennogo proizvedeniya: kommunikativno-pragmaticheskij aspekt”, *Vestnik Permskogo universiteta. Rossijskaya i zarubezhnaya filologiya*, 2011, №3, 94–99, (in Russian).]

- [2] Голубева-Монаткина Н. И., “К проблеме ритма прозы”, *Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка*, **76:2** (2017), 16–27; [Golubeva-Monatkina N. I., “K probleme ritma prozy”, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya literatury i yazyka*, **76:2** (2017), 16–27, (in Russian).]
- [3] Голубева-Монаткина Н. И., “О ритме художественной прозы в свете идей М. М. Бахтина и переводе”, *Русский язык и культура в зеркале перевода*, 2016, № 1, 105–113; [Golubeva-Monatkina N. I., “O ritme hudozhestvennoj prozy v svete idej M. M. Bahtina i perevode”, *Russkij yazyk i kul'tura v zerkale perevoda*, 2016, № 1, 105–113, (in Russian).]
- [4] Иванова-Лукьянова Г. Н., “Ритм прозы в реальности и восприятии”, *Труды Института русского языка им. В. В. Виноградова*, **7:7** (2016), 365–382; [Ivanova-Luk'yanova G. N., “Ritm prozy v real'nosti i vospriyatii”, *Trudy Instituta russkogo yazyka im. V. V. Vinogradova*, **7:7** (2016), 365–382, (in Russian).]
- [5] Фененко Н. А., “Лингвокультурная адаптация текста при переводе: пределы возможного и допустимого”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Лингвистика и межкультурная коммуникация*, **1** (2001), 70–75; [Fenenko N. A., “Lingvokul'turnaya adaptaciya teksta pri perevode: predely vozmozhnogo i dopustimogo”, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Lingvistika i mezhkul'turnaya kommunikaciya*, **1:7** (2001), 70–75, (in Russian).]
- [6] Delmonte R., “Computing Poetry Style”, *Proceedings of 1st International Workshop ESSEM 2013/ CEUR Workshop Proc.*, 2013, 148–155.
- [7] Bobenhausen K., Hammerich B., “Literary metrics, Linguistic metrics, and the algorithmic analysis of German poetry using Metricalizer (2)”, *Langages*, 2015 3, 67–88.
- [8] Niculescu I., Trausan-Matu S., “Rhythm analysis of texts using Natural Language Processing”, *RoCHI*, 2016, 107–112.
- [9] Niculescu I., Trausan-Matu S., “Rhythm analysis in chats using Natural Language Processing”, *RoCHI*, 2017, 69–74.
- [10] Кишалова Л. В., “Анализ особенностей ритмической структуры текстов разных стилей речи”, *Вестник Брянского государственного университета*, 2016, № 1 (27), 257–261; [Kishalova L. V., “Analiz osobennostej ritmicheskoj struktury tekstov raznyh stilej rechi”, *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2016, № 1 (27), 257–261, (in Russian).]
- [11] Boychuk E. et al., “Automated approach for rhythm analysis of French literary texts”, *Proceedings of 15th Conference of Open Innovations Association FRUCT*, IEEE, 2014, 15–23.
- [12] Damasevicius R., Kapociute-Dzikiene J., Wozniak M., “Towards Rhythmicity analysis of text using empirical mode decomposition”, *Proceeding of the 9th International Joint Conference on Knowledge Discovery, Knowledge Engineering and Knowledge Management*, **1**, IC3K, 2017, 310–317.
- [13] Kelly A. R. et al., “Toward an ontology of rhetorical figures”, *Proceedings of the 28th ACM International Conference on Design of Communication*, ACM, 2010, 123–130.
- [14] Hromada D. D., “Initial experiments with multilingual extraction of rhetoric figures by means of PERL-compatible regular expressions”, *Proceedings of the Second Student Research Workshop associated with RANLP 2011*, 2011, 85–90.
- [15] Toldova S. et al., “Error analysis for anaphora resolution in Russian: new challenging issues for anaphora resolution task in a morphologically rich language”, *Proceedings of the Workshop on Coreference Resolution Beyond OntoNotes*, 2016, 74–83.
- [16] Dubremetz M., Nivre J., “Rhetorical Figure Detection: Chiasmus, Epanaphora, Epiphora”, *Frontiers in Digital Humanities*, **5**, 2018.

---

**Lagutina N.S., Lagutina K.V., Boychuk E.I., Vorontsova I.A., Paramonov I.V.**, "Automated Search of Rhythm Figures in a Literary Text for Comparative Analysis of Originals and Translations Based on the Material

of the English and Russian Languages", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26:3** (2019), 420–440.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-420-440

**Abstract.** Analysis of the functional equivalence of an original text and its translation based on the achievement of rhythm equivalence is an extremely important task of modern linguistics. Moreover, the rhythm component is an integral part of functional equivalence that cannot be achieved without communication of rhythm figures of the text. To analyze rhythm figures in an original literary text and its translation, the authors developed the ProseRhythmDetector software tool that allows to find and visualize lexical and syntactic figures in English- and Russian-language prose texts: anaphora, epiphora, symplote, anadiplosis, epanalepsis, reduplication, epistrophe, polysyndeton, and aposiopesis. The goal of this work is to present the results of ProseRhythmDetector testing on two works by English authors and their translations into Russian: Ch. Bronte “Villette” and I. Murdoch “The Black Prince”. Basing on the results of the tool, the authors compared rhythm figures in an original text and its translation both in aspects of the rhythm and their contexts. This experiment made it possible to identify how the features of the author’s style are communicated by the translator, to detect and explain cases of mismatch of rhythm figures in the original and translated texts. The application of the ProseRhythm-Detector software tool made it possible to significantly reduce the amount of linguists-experts work by automated detection of lexical and syntactic figures with quite high precision (from 62 % to 93 %) for various rhythm figures.

**Keywords:** text rhythm, rhythm analysis, natural language processing, rhythm figures, automation

**On the authors:**

Lagutina Nadezhda Stanislavovna, [orcid.org/0000-0002-6137-8643](https://orcid.org/0000-0002-6137-8643), PhD, associate professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: [lagutinans@rambler.ru](mailto:lagutinans@rambler.ru)

Lagutina Ksenia Vladimirovna, [orcid.org/0000-0002-1742-3240](https://orcid.org/0000-0002-1742-3240), postgraduate student, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: [lagutinakv@mail.ru](mailto:lagutinakv@mail.ru)

Boychuk Elena Igorevna, [orcid.org/0000-0001-6600-2971](https://orcid.org/0000-0001-6600-2971), PhD, associate professor, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D.Ushinsky, Respublikanskaya street, 108/1, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: [elena-boychouk@rambler.ru](mailto:elena-boychouk@rambler.ru)

Vorontsova Inna Alekseevna, [orcid.org/0000-0001-5897-9299](https://orcid.org/0000-0001-5897-9299), Dr.Sc., associate professor, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D.Ushinsky, Respublikanskaya street, 108/1, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: [arinna1@yandex.ru](mailto:arinna1@yandex.ru)

Paramonov Ilya Vyacheslavovich, [orcid.org/0000-0003-3984-8423](https://orcid.org/0000-0003-3984-8423), PhD, associate professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: [Ilya.Paramonov@fruct.org](mailto:Ilya.Paramonov@fruct.org)

**Acknowledgments:**

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 19-07-00243.

= Discrete mathematics in relation to computer science =

©Невский М. В., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-441-449

УДК 514.17+517.51+519.6

## Геометрические оценки при интерполяции на $n$ -мерном шаре

Невский М. В.

Поступила в редакцию 25 января 2019  
После доработки 9 июня 2019  
Принята к публикации 17 июня 2019

**Аннотация.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  — евклидов единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ , задаваемый неравенством  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Под  $C(B_n)$  мы понимаем пространство непрерывных функций  $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $\|f\|_{C(B_n)} := \max_{x \in B_n} |f(x)|$ , под  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — совокупность многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq 1$ , т. е. линейных функций на  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$  — вершины  $n$ -мерного невырожденного симплекса  $S \subset B_n$ . Интерполяционный проектор  $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , соответствующий симплексу  $S$ , определяется равенствами  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ . Через  $\|P\|_{B_n}$  обозначим норму  $P$  как оператора из  $C(B_n)$  в  $C(B_n)$ . Определим  $\theta_n(B_n)$  как минимальную величину  $\|P\|_{B_n}$  при условии  $x^{(j)} \in B_n$ . Описывается подход, при котором норму проектора удаётся оценить снизу через объём симплекса. Пусть  $\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$  — стандартизованный многочлен Лежандра степени  $n$ . В статье доказывается неравенство  $\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\text{vol}(B_n)}{\text{vol}(S)}\right)$ . Из этой оценки выводится эквивалентность  $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$ . Даются оценки констант из неравенств отмеченного вида, а также сравнение с аналогичными соотношениями для линейной интерполяции на единичном  $n$ -мерном кубе  $[0, 1]^n$ . Полученные результаты могут иметь приложения в полиномиальной интерполяции и вычислительной геометрии.

**Ключевые слова:** симплекс, шар, объём, линейная интерполяция, проектор, норма, оценка

**Для цитирования:** Невский М. В., "Геометрические оценки при интерполяции на  $n$ -мерном шаре", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 441–449.

**Об авторах:**

Невский Михаил Викторович, [orcid.org/0000-0002-6392-7618](https://orcid.org/0000-0002-6392-7618), доктор физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

### 1. Основные определения и обозначения

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Элемент  $x \in \mathbb{R}^n$  будем записывать в виде  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Обозначим

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \quad Q_n := [0, 1]^n.$$

Запись  $L(n) \asymp M(n)$  означает, что существуют  $c_1, c_2 > 0$ , не зависящие от  $n$ , для которых верно  $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$ . Под  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  будем понимать совокупность многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq 1$ , т. е. линейных функций на  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$  с вершинами  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ . Рассмотрим невырожденную матрицу вершин (матрицу узлов)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Верно равенство  $\text{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!}$ . Положим  $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$ . Определим  $\lambda_j$  как многочлены из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , коэффициенты которых составляют столбцы  $\mathbf{A}^{-1}$ , т. е.  $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ . Мы называем  $\lambda_j$  базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу  $S$ . Числа  $\lambda_j(x)$  являются барицентрическими координатами точки  $x \in \mathbb{R}^n$  относительно  $S$ .

Для выпуклого тела  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  через  $C(\Omega)$  обозначим пространство непрерывных функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Будем говорить, что интерполяционный проектор  $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  соответствует симплексу  $S \subset \Omega$ , если узлы интерполяции совпадают с вершинами  $x^{(j)}$  этого симплекса. Проектор  $P$  определяется равенствами  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ . Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x). \quad (1)$$

Обозначим через  $\|P\|_{\Omega}$  норму  $P$  как оператора из  $C(\Omega)$  в  $C(\Omega)$ . Из (1) следует, что

$$\|P\|_{\Omega} = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Если  $\Omega$  — выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$  (например,  $\Omega = Q_n$ ), то это равенство эквивалентно

$$\|P\|_{\Omega} = \max_{x \in \text{ver}(\Omega)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|,$$

где  $\text{ver}(\Omega)$  — совокупность вершин  $\Omega$ .

Через  $\theta_n(\Omega)$  обозначим минимальную величину  $\|P\|_{\Omega}$  при условии  $x^{(j)} \in \Omega$ . В случае  $\Omega = Q_n$  различные соотношения для чисел  $\theta_n(\Omega)$ , в том числе эквивалентность  $\theta_n(\Omega) \asymp \sqrt{n}$ , были доказаны автором ранее (эти результаты систематизированы в [1]). В дальнейшем ряд оценок удалось улучшить (см. [2, 3] и ссылки в этих работах).

В настоящей статье рассматривается случай  $\Omega = B_n$ . Описывается подход, при котором норму интерполяционного проектора  $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  удаётся оценить снизу через объём соответствующего симплекса. Существенной чертой этого подхода является применение классических многочленов Лежандра. Устанавливается, что  $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$ . Иными словами, интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в граничную сферу, имеет норму, эквивалентную минимальной.

## 2. Оценка нормы проектора через объём симплекса

Стандартизованным многочленом Лежандра степени  $n$  называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$$

(формула Родрига). По поводу свойств  $\chi_n$  см., например, [5, 6]. Многочлены Лежандра ортогональны на  $[-1, 1]$  с весом  $w(t) = 1$ . Известно, что  $\chi_n(1) = 1$ ; если  $n \geq 1$ , то  $\chi_n(t)$  возрастает при  $t \geq 1$ . Обозначим через  $\chi_n^{-1}$  функцию, обратную к  $\chi_n$  на полуоси  $[1, +\infty)$ .

Появление многочленов Лежандра в круге наших вопросов связано с их следующим свойством. Для  $\gamma \geq 1$  введём в рассмотрение множество

$$E_{n,\gamma} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

В 2003 г. автор установил, что

$$\text{mes}_n(E_{n,\gamma}) = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!} \quad (2)$$

(доказательство приводится и в [1]). С помощью этого равенства удалось получить нижние оценки для норм проекторов при линейной интерполяции на единичном кубе  $Q_n$ . Справедливы соотношения

$$\theta_n(Q_n) \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{1}{\nu_n} \right) = \chi_n^{-1} \left( \frac{n!}{h_n} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\nu_n$  — максимальный объём симплекса, содержащегося в кубе  $Q_n$ ,  $h_n$  — величина максимального определителя порядка  $n$ , состоящего из 0 и 1. С привлечением свойств  $\chi_n$  из (3) был получен ряд более обзримых неравенств, например,  $\theta_n(Q_n) > \frac{1}{e} \sqrt{n-1}$ . Последняя оценка оказалась точной по порядку  $n$ , что привело к соотношению  $\theta_n(Q_n) \asymp \sqrt{n}$ .

Ниже мы распространим этот подход на линейную интерполяцию функций, заданных на единичном шаре  $B_n$ . Пусть  $\varkappa_n := \text{vol}(B_n)$ . Через  $\sigma_n$  обозначим объём правильного симплекса, вписанного в  $B_n$ .

**Теорема 1.** Для любого интерполяционного проектора  $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , соответствующего симплекса  $S \subset B_n$  и матрицы узлов  $\mathbf{A}$  справедливы соотношения

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right) = \chi_n^{-1} \left( \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|} \right). \quad (4)$$

*Доказательство.* Правильный симплекс, вписанный в шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре (см. [8–10]). Поэтому  $\text{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} \leq \sigma_n$ . Для каждого  $i = 1, \dots, n$  вычтем из  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{A}$  её  $(n+1)$ -ю строку. Обозначим через  $\mathbf{B}$  подматрицу порядка  $n$ , которая будет располагаться в первых  $n$  строках и столбцах полученной матрицы. Тогда

$$|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n! \text{vol}(S) \leq n! \sigma_n.$$

Иначе говоря,

$$\frac{n! \sigma_n}{|\det(\mathbf{B})|} \geq 1. \quad (5)$$

Пусть  $x^{(j)}$  — вершины,  $\lambda_j$  — базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S$ . Поскольку  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$  суть барицентрические координаты точки  $x$ , имеем

$$\|P\|_{B_n} = \max_{x \in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n \right\}.$$

Заменим  $\beta_{n+1}$  на равную величину  $1 - \sum_{j=1}^n \beta_j$ . Условие  $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n$  эквивалентно  $\sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B' := B_n - x^{(n+1)}$ . Таким образом,

$$\|P\|_{B_n} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |\beta_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j \right| \right\}. \quad (6)$$

Максимум в (6) берётся по числам  $\beta_j$ , для которых  $\sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B'$ .

Рассмотрим невырожденный линейный оператор  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сопоставляющий точке  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  точку  $x = (x_1, \dots, x_n)$  по правилу

$$x = F(\beta) := \sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}).$$

Справедливо матричное равенство  $F(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{B}$  — введённая выше  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$ . Положим

$$\gamma^* := \chi_n^{-1} \left( \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|} \right).$$

Так как  $\varkappa_n \geq \sigma_n$ , то в силу (5) число  $\gamma^*$  определено корректно. Заметим, что

$$\chi_n(\gamma^*) = \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}. \quad (7)$$

Пусть теперь  $1 \leq \gamma < \gamma^*$ ,

$$E_{n,\gamma} = \left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |\beta_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

Покажем, что  $B' \not\subset F(E_{n,\gamma})$ . Достаточно проверить, что  $\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(B') = \varkappa_n$ . Это действительно так:

$$\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \text{mes}_n(E_{n,\gamma^*}) = |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = \varkappa_n.$$

Мы применили (2) и (7). Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует точка  $x^{(\varepsilon)}$  со свойствами

$$x^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(\varepsilon)} (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B', \quad \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(\varepsilon)}| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j^{(\varepsilon)} \right| \geq \gamma^* - \varepsilon.$$

В силу (6) это даёт  $\|P\|_{B_n} \geq \gamma^* - \varepsilon$ . Ввиду произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем

$$\|P\| \geq \gamma^* = \chi_n^{-1} \left( \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|} \right) = \chi_n^{-1} \left( \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|} \right) = \chi_n^{-1} \left( \frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right).$$

Теорема доказана. □

**Следствие 1.** Для любого  $n$

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right). \quad (8)$$

*Доказательство.* Пусть  $P$  — произвольный интерполяционный проектор. Так как объём соответствующего симплекса не превышает  $\sigma_n$ , то в силу (4)

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right) \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right).$$

Отсюда следует (8). □

Как известно,

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n!} \sqrt{n+1} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad (9)$$

$$\varkappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!} = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!} \quad (10)$$

(см., например, [7], [1]). Поэтому оценку (8) можно конкретизировать.

**Следствие 2.** При любом  $n$

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\pi^{\frac{n}{2}} n!}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sqrt{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \right). \quad (11)$$

Если  $n = 2k$ , то (11) эквивалентно неравенству

$$\theta_{2k}(B_{2k}) \geq \chi_{2k}^{-1} \left( \frac{\pi^k (2k)!}{k! \sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right). \quad (12)$$

При  $n = 2k + 1$  выполняется

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) \geq \chi_{2k+1}^{-1} \left( \frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \right). \quad (13)$$

*Доказательство.* Достаточно применить (8), (9) и (10). □

**Следствие 3.** Пусть  $P$  — минимальный интерполяционный проектор, т. е. такой, для которого  $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$ . Тогда

$$\text{vol}(S) \geq \frac{\varkappa_n}{\chi_n(\sqrt{n+1})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\chi_n(\sqrt{n+1})}. \quad (14)$$

*Доказательство.* Как доказано в [4], справедлива оценка  $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$ . Поэтому для минимального проектора выполняются неравенства

$$\sqrt{n+1} \geq \|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)}\right).$$

Мы применили (4). Остаётся сравнить крайние величины и привлечь (9). □

Так как  $|\det(\mathbf{A})| = n!\text{vol}(S)$ , то из (14) получается и оценка для определителя матрицы узлов минимального проектора. Именно,  $|\det(\mathbf{A})| \geq \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_n$  в  $n!$  раз превосходит правую часть (14). Без указания значения  $\varepsilon_n$  это ограничение использовалось в [4].

### 3. Соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$

Из формулы Стирлинга  $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\zeta_n}{12n}}$ ,  $0 < \zeta_n < 1$ , имеем

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}. \quad (15)$$

Нам потребуются также следующие оценки  $\chi_n^{-1}(s)$  для чётных и для нечётных  $n$ , доказанные в [1, п. 3.4.2]:

$$\chi_{2k}^{-1}(s) > \left(\frac{(k!)^2 s}{(2k)!}\right)^{\frac{1}{2k}}, \quad \chi_{2k+1}^{-1}(s) > \left(\frac{(k+1)!k!s}{(2k+1)!}\right)^{\frac{1}{2k+1}}. \quad (16)$$

**Теорема 2.** Существует константа  $c > 0$ , не зависящая от  $n$ , такая что

$$\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}. \quad (17)$$

Неравенство (17) выполняется, например, при

$$c = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} = 0.2135\dots$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $n = 2k$  — чётное. Применяя (12) и (16), получим

$$\theta_{2k}(B_{2k}) \geq \chi_{2k}^{-1}\left(\frac{\pi^k(2k)!}{k!\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k}\right) > \left(\frac{\pi^k(2k)!(k!)^2}{k!\sqrt{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k(2k)!}\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \left( \frac{\pi^k k!}{\sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Оценим  $k!$  снизу с помощью (15):

$$\theta_{2k}(B_{2k}) > \left( \frac{\pi^k \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right)^{\frac{1}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \left( \frac{2\pi k}{2k+1} \right)^{\frac{1}{4k}} \sqrt{\frac{2k}{2k+1}} \cdot \sqrt{k}.$$

Так как  $n = 2k$ , то при любом чётном  $n$

$$\theta_n(B_n) > \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \left( \frac{\pi n}{n+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt{n} > \sqrt{\frac{\pi}{3e}} \cdot \sqrt{n}. \quad (18)$$

Мы учли неравенства  $\frac{\pi n}{n+1} > 1$ ,  $\frac{n}{n+1} > \frac{2}{3}$ . Заметим, что  $\sqrt{\frac{\pi}{3e}} = 0.6206\dots$

Пусть теперь  $n$  — нечётное,  $n = 2k + 1$ . В этом случае оценки (13) и (16) дают

$$\begin{aligned} \theta_{2k+1}(B_{2k+1}) &\geq \chi_{2k+1}^{-1} \left( \frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \right) > \\ &> \left( \frac{2(k!)(4\pi)^k (k+1)!k!}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}} (2k+1)!} \right)^{\frac{1}{2k+1}} = A^{\frac{1}{2k+1}} \cdot B^{\frac{1}{2k+1}}; \\ A &:= \frac{(k!)^2 (k+1)!}{(2k+1)!}, \quad B := \frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} A &> \frac{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi(k+1)} \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)} \left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k+1} e^{\frac{1}{12(2k+1)}}} = \\ &= 2\pi e^{-k - \frac{1}{12(2k+1)}} k^{2k+1} (k+1)^{k+1+\frac{1}{2}} (2k+1)^{-\frac{1}{2} - (2k+1)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$A^{\frac{1}{2k+1}} > (2\pi)^{\frac{1}{2k+1}} e^{-\frac{k}{2k+1} - \frac{1}{12(2k+1)^2}} k(k+1)^{\frac{k+1+\frac{1}{2}}{2k+1}} (2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)} - 1}.$$

Справедливы соотношения

$$(2\pi)^{\frac{1}{2k+1}} > 1, \quad \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{12(2k+1)^2} < \frac{1}{2},$$

$$k(2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)} - 1} = \frac{k}{2k+1} (2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} > \frac{1}{3} (2k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}}.$$

Значит,

$$A^{\frac{1}{2k+1}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} (k+1)^{\frac{k+1+\frac{1}{2}}{2k+1}} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} \sqrt{k+1}.$$

Теперь оценим  $B^{\frac{1}{2k+1}}$ :

$$\begin{aligned} B^{\frac{1}{2k+1}} &= \left( \frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2k+1}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2k+1}} (4\pi)^{\frac{k}{2k+1}} \sqrt{\frac{2k+1}{2k+2}} (k+1)^{-\frac{1}{2(2k+1)}} > \\ &> \sqrt[3]{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) > A^{\frac{1}{2k+1}} \cdot B^{\frac{1}{2k+1}} > \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} \cdot \sqrt{k+1} = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{6e}\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{k+1}.$$

Так как  $n = 2k + 1$ , то  $\sqrt{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2k+2} > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$ . Таким образом, при любом нечётном  $n$  справедливо неравенство

$$\theta_n(B_n) > \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{n}. \quad (19)$$

Константа 0.2135... из правой части этого неравенства меньше, чем константа из полученного выше неравенства (18) для чётных  $n$ . Таким образом, соотношение (19) верно для каждого натурального  $n$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 4.** Справедливо соотношение  $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$ .

*Доказательство.* В [4] установлено, что  $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$ . Таким образом, нижняя оценка  $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$  является точной по размерности  $n$ .  $\square$

Пусть  $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в граничную сферу  $\|x\| = 1$ .

**Следствие 5.** С константами, не зависящими от  $n$ , имеет место эквивалентность  $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$ .

*Доказательство.* Как показано в [4], верны неравенства  $\sqrt{n} \leq \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$ . Остаётся принять во внимание предыдущее следствие.  $\square$

Итак, наши результаты означают, что норма интерполяционного проектора  $P$ , соответствующего вписанному правильному симплексу, эквивалентна минимальной. Равенство  $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$  пока остаётся доказанным для  $1 \leq n \leq 4$ .

Автор выражает благодарность А. Ю. Ухалову за полезные компьютерные вычисления.

## Список литературы / References

- [1] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpoliyacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]

- [2] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 770–782.
- [3] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Об оптимальной интерполяции линейными функциями на  $n$ -мерном кубе”, *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:3 (2018), 291–311; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On optimal interpolation by linear functions on an  $n$ -dimensional cube”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **52**:7 (2018), 828–842.
- [4] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Линейная интерполяция на евклидовом шаре в  $\mathbb{R}^n$ ”, *Модел. и анализ информ. систем*, **26**:2 (2019), 279–296; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “Linear interpolation on a Euclidean ball in  $\mathbb{R}^n$ ”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 279–296, (in Russian).]
- [5] Сегё Г., *Ортогональные многочлены*, Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962; [Szegő G., *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, New York, 1959, (in English).]
- [6] Суетин П. К., *Классические ортогональные многочлены*, Москва: Наука, 1979; [Suetin P. K., *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny*, Moscow: Nauka, 1979, (in Russian).]
- [7] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3*, Москва: Физматлит, 2001; [Fikhtengol'ts G. M., *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenia. Tom 3*, Moscow: Fizmatlit, 2001, (in Russian).]
- [8] Fejes Tóth L., *Regular figures*, New York: Macmillan/Pergamon, 1964.
- [9] Slepian D., “The content of some extreme simplices”, *Pacific J. Math*, **31** (1969), 795–808.
- [10] Vandev D., “A minimal volume ellipsoid around a simplex”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **45**:6 (1992), 37–40.

**Nevskii M. V.**, “Geometric Estimates in Interpolation on an  $n$ -Dimensional Ball”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:3 (2019), 441–449.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-441-449

**Abstract.** Suppose  $n \in \mathbb{N}$ . Let  $B_n$  be a Euclidean unit ball in  $\mathbb{R}^n$  given by the inequality  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|x\| := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . By  $C(B_n)$  we mean a set of continuous functions  $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$  with the norm  $\|f\|_{C(B_n)} := \max_{x \in B_n} |f(x)|$ . The symbol  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  denotes a set of polynomials in  $n$  variables of degree  $\leq 1$ , i. e., linear functions upon  $\mathbb{R}^n$ . Assume that  $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$  are vertices of an  $n$ -dimensional nondegenerate simplex  $S \subset B_n$ . The interpolation projector  $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  corresponding to  $S$  is defined by the equalities  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ . Denote by  $\|P\|_{B_n}$  the norm of  $P$  as an operator from  $C(B_n)$  onto  $C(B_n)$ . Let us define  $\theta_n(B_n)$  as the minimal value of  $\|P\|_{B_n}$  under the condition  $x^{(j)} \in B_n$ . We describe the approach in which the norm of the projector can be estimated from the bottom through the volume of the simplex. Let  $\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$  be the standardized Legendre polynomial of degree  $n$ . We prove that  $\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{\text{vol}(B_n)}{\text{vol}(S)} \right)$ . From this, we obtain the equivalence  $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$ . Also we estimate the constants from such inequalities and give the comparison with the similar relations for linear interpolation upon the  $n$ -dimensional unit cube. These results have applications in polynomial interpolation and computational geometry.

**Keywords:** simplex, ball, linear interpolation, projector, norm, estimate

**On the authors:**

Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

©Чуканов С. Н., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-3-450-468

УДК 004.932.2

## Сравнение диффеоморфных изображений на основе формирования персистентных гомологий

Чуканов С. Н.<sup>1,2</sup>

Поступила в редакцию 11 мая 2019

После доработки 29 августа 2019

Принята к публикации 31 августа 2019

**Аннотация.** Анализ формы объекта – проблема, которая связана такими областями, как геометрия, топология, обработка изображений, машинное обучение или вычислительная анатомия. При анализе формы оценивается деформация между исходной и терминальной формой объекта. Наиболее используемой моделью анализа формы является модель диффеоморфного метрического отображения больших деформаций (Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping – LDDMM). Модель LDDMM может быть дополнена функциональной негеометрической информацией объектов (объем, цвет, момент времени формирования). В работе рассмотрены алгоритмы построения множеств баркодов для сравнения диффеоморфных изображений, которые являются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных. Предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях, который объединяет технологии персистентных гомологий с внедренной негеометрической информацией, представленной в виде функций от симплициальных комплексов. Предлагаемая структура расширенных баркодов с использованием когомологий повышает эффективность методов персистентных гомологий. Предложена модификация метода Вассерштейна для нахождения расстояния между изображениями введением негеометрической информации. Рассмотрена возможность формирования баркодов изображений инвариантных к преобразованиям вращения, сдвига и подобия.

**Ключевые слова:** распознавание образов, диффеоморфные преобразования, персистентные (ко)гомологии, расстояние Вассерштейна

**Для цитирования:** Чуканов С. Н., "Сравнение диффеоморфных изображений на основе формирования персистентных гомологий", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:3** (2019), 450–468.

**Об авторах:**

Чуканов Сергей Николаевич, [orcid.org/0000-0002-8106-9813](https://orcid.org/0000-0002-8106-9813), д-р техн. наук, профессор, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал  
ул. Певцова, д.13, г. Омск, 644043 Россия, e-mail: [ch\\_sn@mail.ru](mailto:ch_sn@mail.ru)

**Благодарности:**

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18–07–00526 и № 18–08–01284.

<sup>2</sup> Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1., проект № 0314-2019-0020.

## Введение

Существуют различные методы решения задачи сравнения форм исходного изображения и терминального (целевого) изображения [1, 2]. Для анализа деформаций изображения от исходного к целевому в [3] рассматривается группа диффеоморфизмов, а деформация рассматривается как геодезическая (кратчайший путь) между исходным и целевым изображениями. Задача сравнения исходного и целевого изображений решается на основе метода построения минимизируемого функционала [3], характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории. Для решения задачи сравнения применяется метод частиц-ориентиров (наиболее важных точек на изображении) [4]. В работе приводится постановка задачи, основанная на построении и решении уравнений Гамильтона для группы диффеоморфизмов частиц – точечных ориентиров изображения.

В случае анализа формы объекта используются геометрические, спектральные, топологические характеристики объекта. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и являются инвариантными при диффеоморфных преобразованиях. Основные методы топологии заключаются в создании сжатых комбинаторных представлений форм (например, триангуляции) и измерении формы объекта с помощью гомологических сигнатур.

В работе применяются алгоритмы построения множеств персистентных баркодов [5] для сравнения диффеоморфных изображений, которые являются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Нахождение персистентных баркодов форм объектов позволяет изучать как непрерывные, так и дискретные структуры, что делает их использование полезным в вычислительной топологии. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии [6] является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных. В дополнение к геометрической информации, существует широкий спектр негеометрической информации, которая ассоциируется с симплексами, представляющими изображение (цвет, момент времени формирования, давление пера и т.д.), которая не описывается персистентной гомологией. Желательно иметь математическую основу для систематического внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания. Для этого предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях, который объединяет технологии персистентных гомологий с внедренной негеометрической информацией, представленной в виде функций от симплицальных комплексов. Для это баркоды персистентных гомологий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации. Предлагаемая структура расширенных баркодов с использованием когомологий повышает эффективность методов персистентных гомологий.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается метод Леонида Вассерштейна модифицировать и в формулу для расстояния между изображениями, определяемого по баркодам персистентных гомо-

логий, ввести негеометрическую информацию о расстоянии между изображениями, обусловленную неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов.

## Гамильтонова механика точечных ориентиров изображения

Представление диффеоморфного отображения изображений можно рассмотреть как эволюцию точечных ориентиров (наиболее важных точек) изображения на основе гамильтоновой механики. Рассмотрим параметризацию формы изображения с помощью частиц – точечных ориентиров. Пусть  $q_i(t), i = 1, \dots, N$ , используется для обозначения вектора положения  $i$ -й частицы и  $p_i(t), i = 1, \dots, N$ , – для соответствующего вектора импульса в момент времени  $t$ . Если формально принять, что импульсы и скорости частиц связаны соотношением:  $p_i = \mathcal{L} \cdot v_i$ , где  $\mathcal{L}$  – линейный обратимый оператор (в механике соответствует инертной массе), то обратное соотношение:  $v_i = \mathcal{L}^{-1} \cdot p_i = \mathcal{K}p_i$ . Скалярное произведение векторов  $p_i$  и  $v_i$ , соответствующее метрике С.Л. Соболева [7], можно представить в виде:  $\langle p_i, v_i \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L}v_i, v_i \rangle_{L^2}$ . Для оператора  $\mathcal{L} = \text{id} - \alpha \nabla^2$  в пространстве  $\Omega = \mathbb{R}^2$  обратным оператором формально является оператор  $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$ , который можно аппроксимировать скалярной функцией Гаусса [2]:

$$K(q_i - q_j) = \beta e^{-\alpha^{-2}(q_i - q_j)^T(q_i - q_j)}.$$

Построим минимизируемый функционал, который соответствует деформации изображения, представленного совокупностью точечных ориентиров, в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j \right\} dt.$$

Минимизация  $J_0$  должна осуществляться по значениям векторов  $q_i, q_j$  и  $p_i, p_j$ . Но значения векторов  $q_i, q_j$  определяются начальными значениями  $q_i(0), q_j(0)$ , поэтому минимизация осуществляется по начальным неизвестным значениям векторов  $p_i(0), p_j(0)$ . Задачу минимизации  $J_0$  можно представить как задачу оптимального управления, связанную с гамильтонианом:  $H_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j$ .

Если минимизируемый функционал  $J_0$  принять в виде (3), а гамильтониан системы в форме:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - \nu_i(q))^2 = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

то уравнения Гамильтона для производных компонент  $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N), \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j^T \nabla_{q_i} K(q_i - q_j) p_j; \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K(q_i - q_j) p_j + \sigma^2 p_i. \end{aligned} \tag{1}$$

В функции Гамильтона  $H(q, p)$  вводится штраф  $\sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - \nu_i(q))^2$  при наличии рассогласования  $(\dot{q}_i - \nu_i(q))$ .

## Построение комплекса Вьеториса-Рипса

На основе оценивания функционала (см. (3)) можно построить алгоритм распознавания изображений [7], но этот алгоритм требует проведения предварительной нормализации изображения и не является инвариантным по отношению преобразованиям координат. Поэтому алгоритмы распознавания, инвариантные по отношению к преобразованиям координат (coordinate-free), являются актуальными [8–10]; к таким алгоритмам относятся алгоритмы вычислительной топологии [11, 12] (см. Приложение 1).

Для сравнения изображений, представленных множеством точечных ориентиров, в настоящей работе предлагается построение комплекса Вьеториса-Рипса из точечных облаков этих ориентиров, построенных вокруг этих ориентиров. Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков вложенных в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть задано множество точечных ориентиров  $S = \{q_1, \dots, q_k\}, q_i \in \mathbb{R}^2$ . Комплекс Вьеториса-Рипса  $R(r)$  представляет собой симплициальный комплекс, построенный на множестве точек  $S$ ; комплекс Вьеториса-Рипса имеет симплекс тогда, когда все пары точек находятся на расстоянии, не превышающем  $2r$  (см. Приложение 1):

$$R(r) = \{\sigma = S \mid \|q_i - q_j\| \leq 2r, \forall i, j\}$$

При  $r = 0$ , числа Бетти множества  $k$  точек равны  $\beta_0 = k, \beta_i = 0, i \geq 1$ ; характеристика Эйлера  $\chi = \beta_0$ . При диффеоморфных преобразованиях множества  $k$  точек эти топологические характеристики не изменяются. При изменении  $r \in \mathbb{R}^+$  значения чисел Бетти и характеристик Эйлера сформированного комплекса Вьеториса-Рипса изменяются при соответствующих диффеоморфных преобразованиях. Существуют точки появления  $r_b$  (birth) и точки исчезновения  $r_d$  (death) нетривиальных классов гомологии (см. Приложение 1) и соответствующих чисел Бетти и характеристик Эйлера. Горизонтальные полуинтервалы в 2D полуплоскости называются баркодами  $\{[b_i \dots d_i] \mid d_i \geq b_i \geq 0\}$  (здесь  $i$  – номер баркода). Баркоды, числа Бетти и характеристики Эйлера для точечных облаков можно определить с помощью пакета JavaPlex [13].

Персистентная гомология сохраняет следы появления  $b_i$  и исчезновения  $d_i$  классов гомологии вдоль фильтрации симплициального комплекса, обусловленной сортировкой  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_l\}$ , которая включает в себя информацию о гомологии каждого фиксированного симплициального комплекса при фильтрации  $\{X(x_i)\}$ . Группы гомологий  $H_k(X(x_i))$  могут быть представлены в виде векторных пространств. Карта включения, связывающая группы, индуцирует последовательность линейных преобразований на векторных пространствах:

$$H_k(X(x_0)) \rightarrow H_k(X(x_1)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(X(x_l)).$$

Если существует функционал  $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$ , который принимает значения на цепи  $\mathcal{X}$ , что можно записать в виде  $\mathcal{Y}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$ , то определение кограничного оператора

$d_n : C^{n-1} \rightarrow C^n$  принимает форму определения сопряженного линейного оператора:

$$\langle d_n \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \partial_n \mathcal{X} \rangle, \mathcal{X} \in C_n, \mathcal{Y} \in C^{n-1}; d_{n+1} d_n = 0.$$

Определим группы  $n$ -мерных коциклов  $Z^n = \text{Ker}(d_n)$  и  $n$ -мерных кограниц  $B^n = \text{Im}(d_{n-1})$ . Факторгруппа  $H^n = Z^n/B^n$  называется  $n$ -мерной группой когомологий коцепного комплекса. Для персистентных когомологий можно построить диаграмму (см. Приложение 2):

$$H^k(X(x_0), \mathbb{R}) \leftarrow H^k(X(x_1), \mathbb{R}) \leftarrow \dots \leftarrow H^k(X(x_l), \mathbb{R}).$$

Из теоремы универсальности коэффициентов [6] для когомологий следует, что существует изоморфизм между группой гомологий  $H_k(X)$  и группой когомологий  $H^k(X, \mathbb{R})$ . Это свойство означает, что персистентные гомологии и персистентные когомологии имеют одинаковые баркоды.

**Пример 1.** В таблице 1 приведен пример построения комплекса Вьеториса-Рипса для четырех облаков точек с центрами в вершинах  $q_1 = (0, 1)$ ,  $q_2 = (-1, 0)$ ,  $q_3 = (0, -1)$ ,  $q_4 = (1, 0)$ , при  $r = 1.0$ ,  $r = 1.5$  и  $r = 2.5$  с указанием чисел Бетти и характеристик Эйлера.

Для полученного комплекса Вьеториса-Рипса можно получить следующие баркоды: в размерности 0:  $3[0 \dots 1.414)$ ;  $[0 \dots \infty)$ ; в размерности 1:  $[1.414 \dots 2)$ .

## Модифицированное расстояние Вассерштейна

С учетом когомологий на симплексах (точках, отрезках, треугольниках ...) в работе предлагается расширить баркоды соответствующими значениями коцепей. Расширенный баркод может быть представлен тремя элементами: значением появления баркода  $b$  (birth), значением исчезновения баркода  $d$  (death) и значением функции на заданной цепи симплекса  $f$ . Для заданных расширенных баркодов одинаковой размерности  $B = \{\{b_i, d_i, f_i\}\}_{i \in I}$ ;  $B' = \{\{b'_j, d'_j, f'_j\}\}_{j \in J}$ , где  $j \in J$  – номер симплекса, полученный отображением симплекса с номером  $i \in I$ :  $j = \phi(i)$ , можно вычислить расстояние между  $B$  и  $B'$ , аналогичное расстоянию Вассерштейна. Определяем расстояние между двумя соответствующими баркодами:

$$\Delta_b([b, d], [b', d']) = \max\{|b - b'|, |d - d'|\},$$

и расстояние между функциями  $f_j$  и  $f'_j$ :

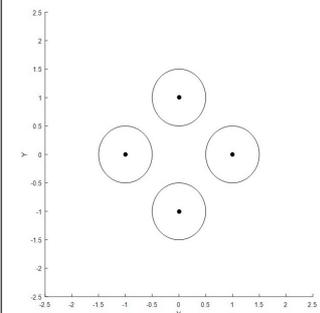
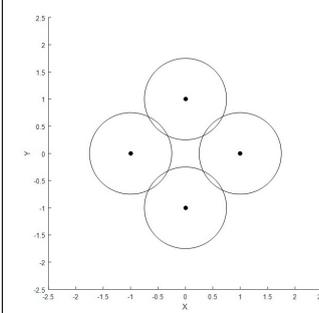
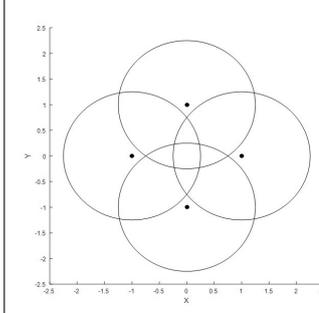
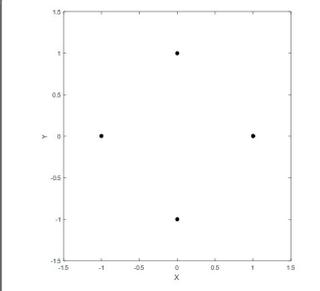
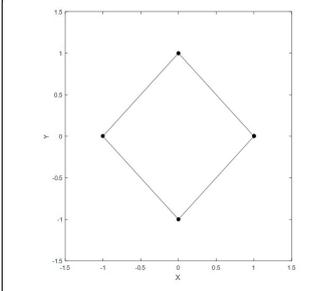
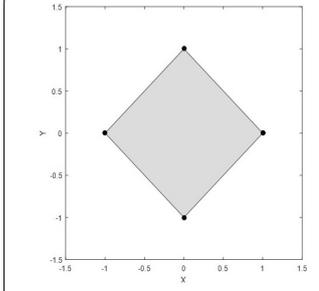
$$\Delta_f(f, f') = \left| (d - b)^{-1} \int_b^d f(x) dx - (d' - b')^{-1} \int_{b''}^{d'} f'(x) dx \right|.$$

При  $f(x) = \text{const}$ ,  $f'(x) = \text{const}$  можно записать:

$$\Delta_f(f_i, f'_j) = |f_i - f'_j|. \quad (2)$$

Определим расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений (расстояние Вассерштейна):

Таблица 1. Пример построения комплекса Вьеториса-Рипса  
 Table 1: An example of building a Vietoris-Rips complex

	$r = 1, 0$	$r = 1, 5$	$r = 2, 5$
Точечные облака			
Комплекс Вьеториса-Рипса			
Числа Бетти	$\beta_0 = 4; \beta_1 = 0$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 1$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 0$
Характеристика Эйлера	$\chi = 4$	$\chi = 0$	$\chi = 1$

$d_{W,2}(B, B') = \left( \sum_{i \in I} \left( \Delta_b \left( [b_i, d_i], [b'_{\phi(i)}, d'_{\phi(i)}] \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов:

$$d_f(B, B') = \left( \sum_{i \in I} (\Delta_f(f_i, f'_{\phi(i)}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Модифицированное расстояние Вассерштейна можно определить из соотношения для евклидовой метрики:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = (\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B')^2 + \mu_f \cdot d_f(B, B')^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где  $\mu_b$  – весовой параметр для  $d_{W,2}(B, B')$  и  $\mu_f$  – весовой параметр для  $d_f(B, B')$ .

**Пример 2.** Рассмотрим (в нотации JavaPlex) объект из 5 точек:

$$\text{points\_House} = [-1, 0; 1, 0; 1, 2; 0, 3; -1, 2],$$

аналогичный примеру «House example» из [13], и объект из 5 точек:

$$\text{points\_House1} = [1, 3; -1, 3; -1, 1; 0, 0; 1, 1],$$

полученный вращением относительно точки  $[0; 0]$  на угол  $\pi$  с переносом на вектор  $[0; 3]$ . На рисунках 1.a и 1.b представлены изображения объектов House и House1.

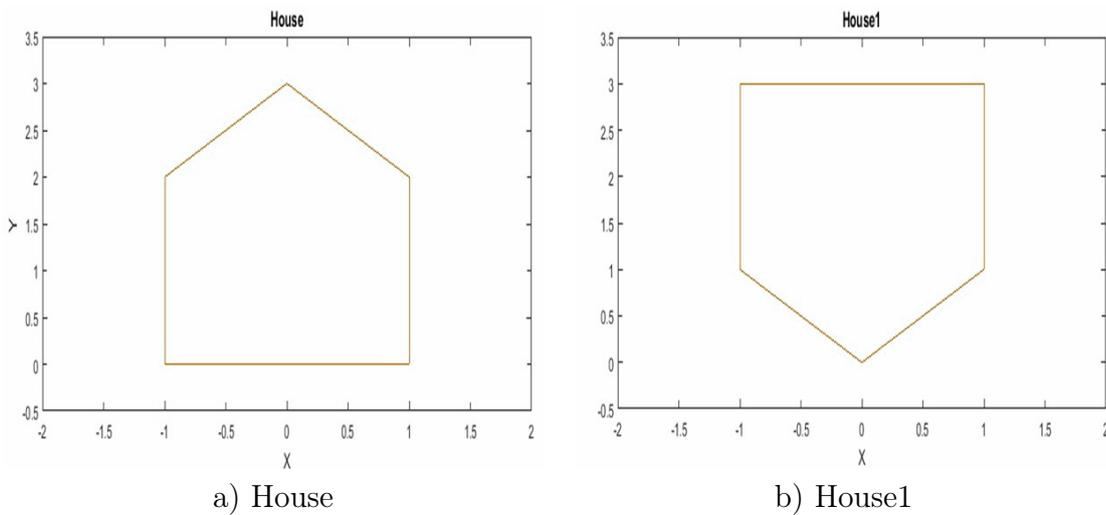


Рис. 1. Изображения объектов House и House1  
 Fig. 1. Images of House and House1 objects

На рисунках 2.a и 2.b представлены баркоды персистентных гомологий изображений объектов House и House1.

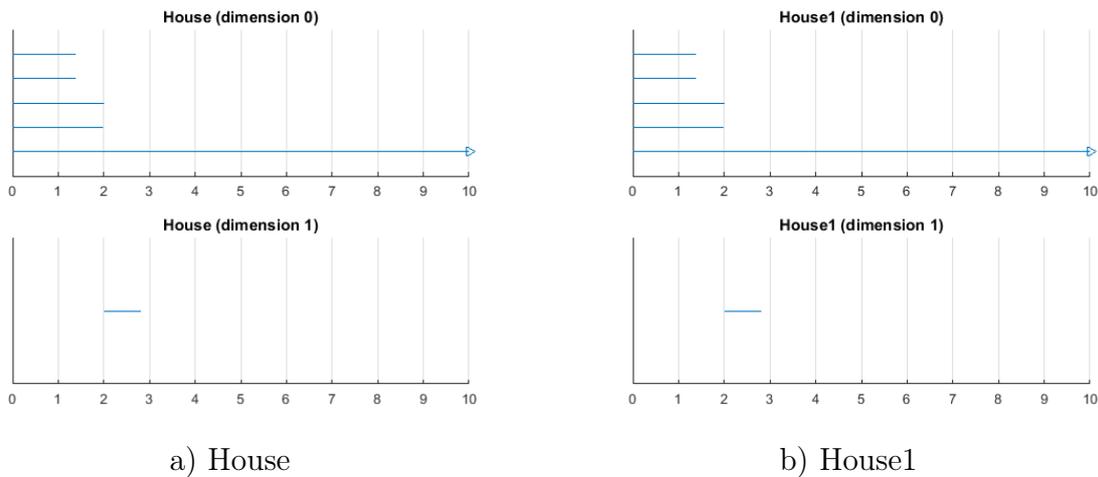


Рис. 2. Баркоды персистентных гомологий изображений House и House1  
 Fig. 2. Barcodes of persistent homologies of images of House and House1

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений House и House1, равно  $d_{W,2}(B, B') = 0$ , то есть гомологические характеристики объектов House и House1 совпадают.

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции в соответствии с таблицей 2. Значение функции для объекта House возрастает при обходе против часовой стрелки, для объекта House1 – возрастает при обходе по часовой стрелке.

Модифицированное расстояние Вассерштейна между объектами House и House1 в этом случае равно расстоянию, обусловленному неравенствами функций исходного и терминального изображений:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_f(B, B') = 4, 47; \mu_b = 1, \mu_f = 1.$$

Таблица 2. Сопоставление значения функции каждой точке объектов House и House1

Table 2. Matching the function value to each point of House and House1 objects

№ точки	Координаты точки $\mathcal{X}$ объекта House	Значение функции $f$	Координаты точки $\phi(\mathcal{X})$ объекта House1	Значение функции $f'$
1	$[-1 \ 0]^T$	$f(1) = 1$	$[1 \ 3]^T$	1
2	$[1 \ 0]^T$	$f(2) = 2$	$[-1 \ 3]^T$	5
3	$[1 \ 2]^T$	$f(3) = 3$	$[-1 \ 1]^T$	4
4	$[0 \ 3]^T$	$f(4) = 4$	$[0 \ 0]^T$	3
5	$[-1 \ 2]^T$	$f(5) = 5$	$[1 \ 1]^T$	2

## Инвариантность по отношению к преобразованию подобия

Построение баркодов инвариантно по отношению действию евклидовой группы на точки симплицеального комплекса, но по отношению к преобразованиям подобия инвариантность отсутствует.

Значение функции подобия  $S(p, q)$  больше, когда две точки  $p, q$  находятся ближе друг к другу. Свойства подобия: 1) положительная определенность  $S(p, q) \geq 0, \forall (p, q)$ ; 2)  $S(p, q) = S(p, p) \Leftrightarrow p = q, \forall (p, q)$ ; 3)  $S(p, q) = S(q, p), \forall (p, q)$ . Расстояние между точками  $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)$  в евклидовом  $n$ -мерном пространстве определяется по формуле Пифагора:  $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$ . Функция

расстояния между точками обладает свойствами подобия, но дополнительно инвариантна по отношению действию евклидовой группы (сдвиг, вращение, отражение).

Обеспечим инвариантность баркодов по отношению к преобразованиям группы изотропного подобия  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : d(f(p), f(q)) = r \cdot d(p, q); r \in \mathbb{R}^+$ . Будем считать, что отображение можно представить в виде:

$$f(p) = r \cdot A \cdot p + t, \quad (5)$$

где  $A \in O^n(\mathbb{R})$  – ортогональная матрица ( $A^T = A^{-1}$ );  $t \in \mathbb{R}^n$  – вектор сдвига. Так как баркоды инвариантны по отношению к действию группы вращений и группы сдвигов, то модифицируем симплицеальные комплексы с целью обеспечения инвариантности по отношению к преобразованию подобия в виде:  $f(p) = r \cdot p$ .

Рассмотрим симплицеальный комплекс  $m$  точек с координатами  $x_1, \dots, x_m; x_i \in \mathbb{R}^n; i \in [1 \dots m]$ , для которого найдем максимальное расстояние  $d_{\max} = \max(d(x_i, x_j)); i, j \in [1 \dots m]$ . Центр этого комплекса определим из соотношения  $x_c = m^{-1} \sum_{i=1}^m x_i$ . Модифицируем точки комплекса:  $x_i^m = (x_i - x_c) \cdot d_{\max}^{-1}; i \in [1 \dots m]$ . Тогда баркоды модифицированного комплекса будут инварианты не только по отношению действию евклидовой группы, но и к преобразованию подобия [14].

Для точек `points_House = [ -1,0; / 1,0; / 1,2; / 0,3; / -1,2 ]` из примера 2 получим  $d_{\max} = \sqrt{10}$ ,  $x_c = [0, 1.4]$  и модифицированные точки:

$$\text{points\_House\_modified} = [ -0.32,-0.44; 0.32,-0.044; 0.32,0.19; 0,0.51; -0.32,0.19 ]$$

Сформируем другой комплекс, преобразованный из `points_House`, отображением с  $r = 2$ ,  $A = I$ ,  $t = 0$ : `points_House2 = [ -2,0; 2,0; 2,4; 0,6; -2,4 ]` с  $d_{\max} = 2\sqrt{10}$ ,  $x_c = [0, 2.4]$ . Тогда

$$\text{points\_House2\_modified} = [ -0.32,-0.44; 0.32,-0.044; 0.32,0.19; 0,0.51; -0.32,0.19 ]$$

и баркоды комплекса `points_House2_modified` совпадают с баркодами `points_House_modified`, то есть инвариантны по отношению к преобразованию подобия.

**Пример 3.** Рассмотрим

- эллипс с полуосями  $a = 1, b = 0.866$ , который может быть аппроксимирован 16 точками:

$$\text{points} = [ 1,0; 0.92,0.33; 0.71,0.61; 0.38,0.8; 0,0.87; -0.71,0.61; -0.92,0.33; -1,0; -0.92,-0.33; -0.71,-0.61; -0.38,-0.80; 0,-0.87; 0.38,-0.80; 0.71,-0.61; 0.92,-0.33; 1,0];$$

- окружность с радиусом  $r = a = b = 1$ , которая может быть аппроксимирована 16 точками с координатами:

$$\text{points} = [1,0; 0.92,0.38; 0.71,0.71; 0.38,0.92; 0,1; -0.71,0.71; -0.92,0.38; -1,0; -0.92,-0.38; -0.71,-0.71; -0.38,-0.92; 0,-1; 0.38,-0.92; 0.71,-0.71; 0.92,-0.38; 1,0];$$

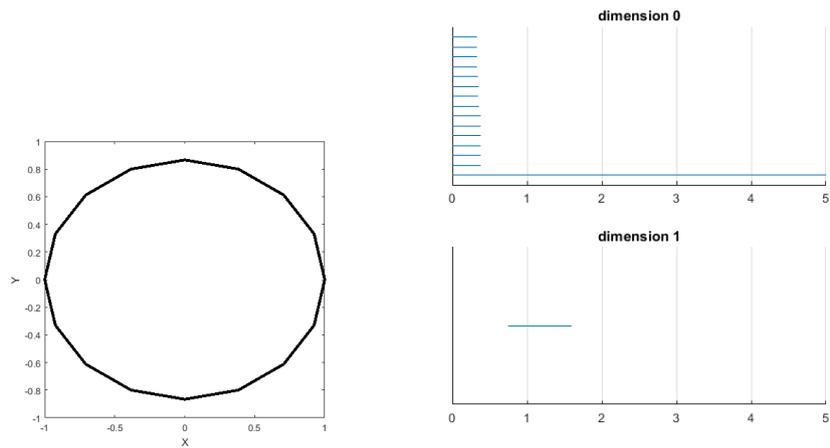


Рис. 3. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды  
 Fig. 3. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

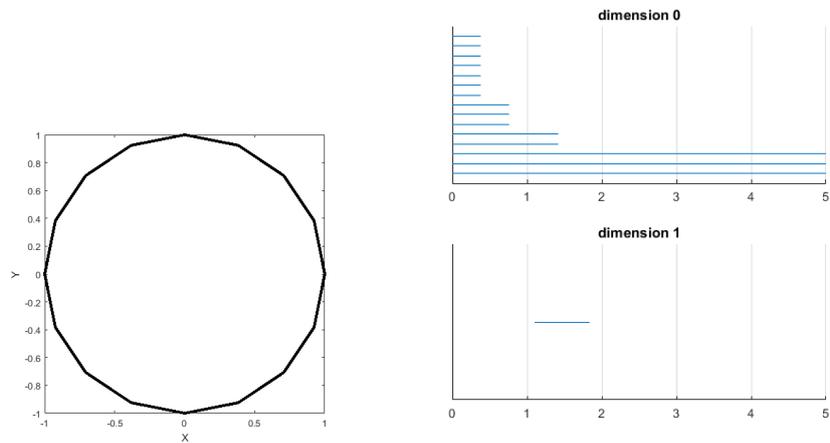


Рис. 4. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды  
 Fig. 4. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

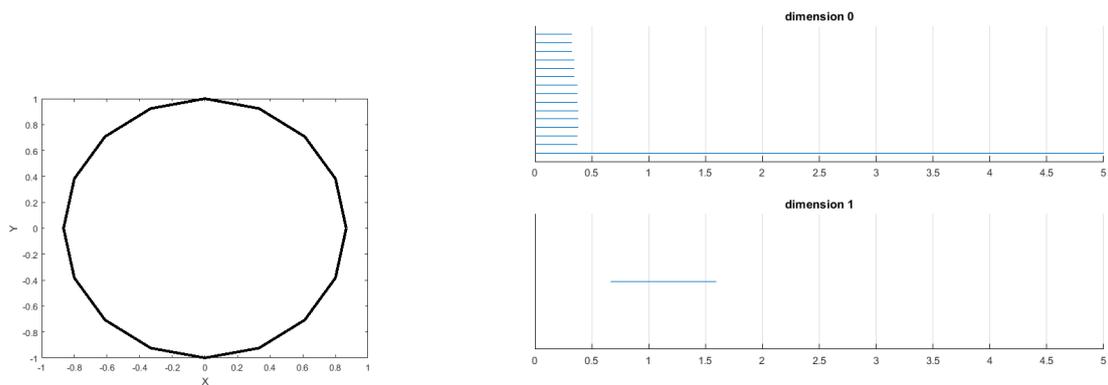


Рис. 5. Изображения эллипса с полуосями и их баркоды  
 Fig. 5. Images of an ellipse with semi-axes and their barcodes

- эллипс с полуосями  $a = 1, b = 1.155$ , который может быть аппроксимирован 16 точками с координатами:

points = [1,0; 0.92,0.44; 0.71,0.82; 0.38,1.07; 0,1.16; -0.38,1.07; -0.71,0.82; -0.92,0.44; -1,0; -0.92,-0.44; -0.71,-0.82; -0.38,-1.07; 0,-1.16; 0.38,-1.07; 0.71,-0.82; 0.92,-0.44; 1,0].

Модифицированные координаты точек для эллипса  $a = 1, b = 1.155$  при  $d_{\max} = 1.155$  :

points=[0.87,0; 0.8,0.38; 0.61,0.71; 0.33,0.92; 0,1; -0.61,0.71; -0.8,0.38; -0.87,0; -0.8,-0.38; -0.61,-0.71; -0.33,-0.92; 0,-1; 0.33,-0.92; 0.61,-0.71; 0.8,-0.38; 0.87,0].

Изображения эллипсов и их баркоды представлены на рисунках 3-5.

Расстояние Вассерштейна между эллипсом с полуосями  $a = 1, b = 0.866$  и эллипсом с полуосями  $a = 1, b = 1.155$  после модификации координат точек комплекса  $d = 0,047$ , то есть пренебрежимо мало.

Эллипс  $a = 1, b = 1.155$  может быть получен из эллипса  $a = 1, b = 0.866$  преобразованием подобия с  $r = 1.115$  и поворотом на угол  $\pi/2$ . Таким образом, баркоды персистентных гомологий модифицированных комплексов инвариантны по отношению к преобразованиям вращения, сдвига и подобия. Расстояния Вассерштейна между исходным комплексом и терминальным определяется без учета действия преобразований вращения, сдвига и подобия.

**Пример 4.** Рассмотрим пример сравнения подписей Наполеона, сформированных в 1809 и 1814 годах [7], на основе определения модифицированного расстояния Вассерштейна между ними при различных динамических темпах написания подписи. Сформируем объекты из 32 точек (в нотации JavaPlex [13]):

- points\_1809 = [5.5,9.5; 7,0; 8,10; 6.5,8; 4.5,5; 8.2,9.5; 10.5,10; 9,9; 7,7; 7.6,2; 8.2,6.6; 8.5,5; 8.2,5; 8.1,4.7; 8.1,4.6; 8.4,3; 8.4,1; 7.9,3.9; 7.9,3.7; 7.8,3.4; 7.8,3.2; 7.7,3; 7.1,8; 11,7; 14,8; 16,8; 16,6; 11,3; 1,0; 10,0.8; 19,1.6; 27,2];
- points\_1814 = [2,5.3; 4,8; 7.5,10; 5.5,7.2; 3.5,4.3; 7.7,7; 9.5,10; 9,8.7; 8.7,7.5; 8.5,7; 8.6,6.7; 8.7,6.4; 8.7,6.1; 8.8,5.9; 8.9,5.5; 9.5,3; 9,5; 9.1,4.8; 9.2,4.5; 9.3,4.2; 9.4,3.9; 9.4,3.6; 9.5,3.3; 12.5,6.7; 14,7.7; 18,8.7; 18,7.3; 9.5,3.3; 4,0; 14,3.3; 18,4.3; 27,5].

На рисунке 6 представлены изображения подписей Наполеона 1809 и 1814 годов. На рисунках 7.a и 7.b представлены баркоды персистентных гомологий изображений подписей Наполеона 1809 и 1814 годов.

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов нулевой размерности подписей 1809 и 1814 годов:  $d_{W,2}(B, B') = 8,17$ .

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции – момент времени написания этой точки. Если обе подписи формировались равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд, то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений:  $d_f(B, B') = 0$ . Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при  $\mu_b = 1, \mu_f = 1$  в этом случае равно

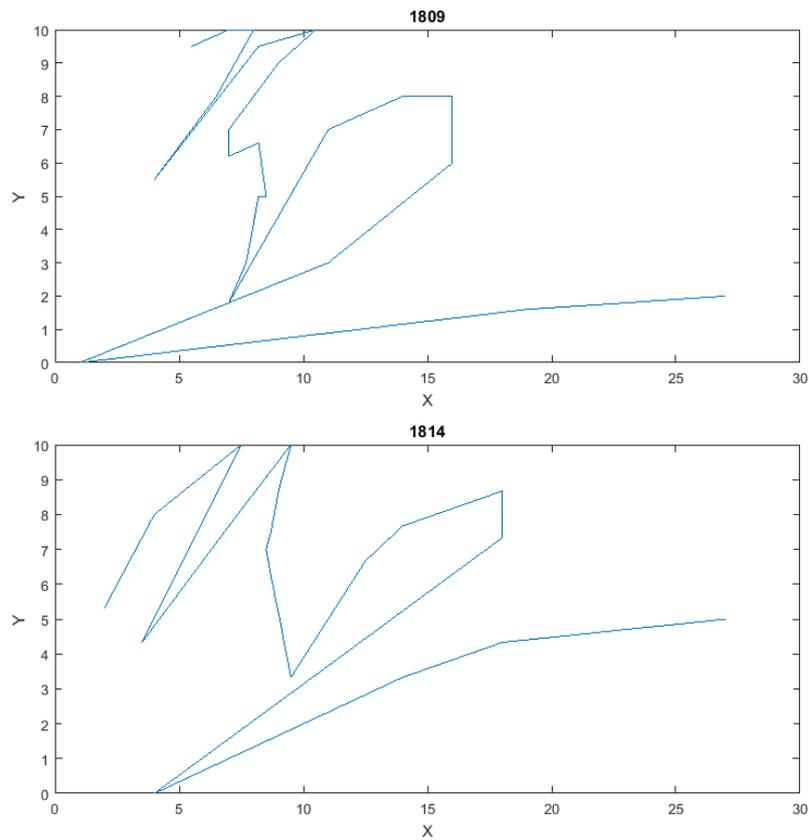
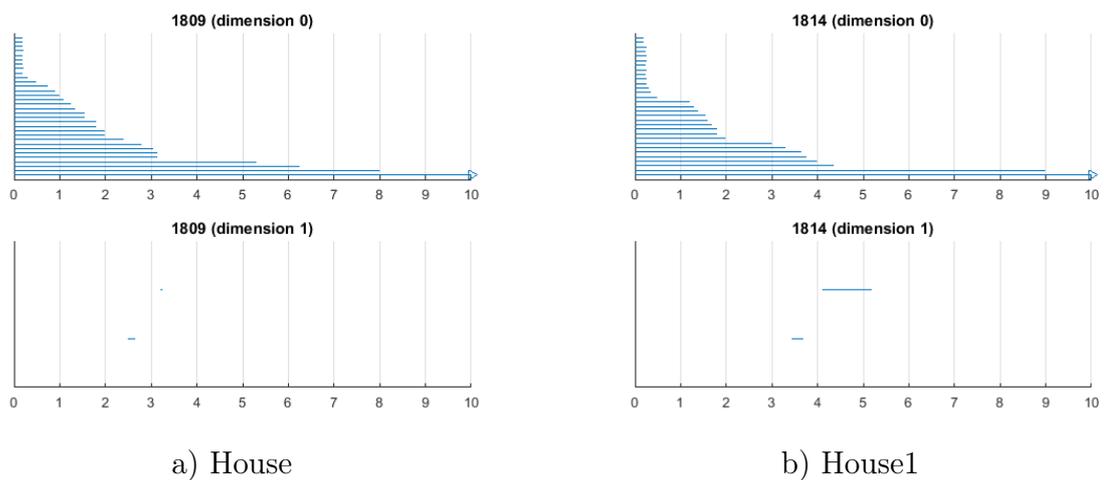


Рис. 6. Изображения подписей Наполеона 1809 и 1814 годов  
 Fig. 6. Images of Napoleon's signatures 1809 and 1814



a) House

b) House1

Рис. 7. Баркоды персистентных гомологий изображений  
 подписей Наполеона 1809 и 1814 годов  
 Fig. 7. Barcodes of persistent homology  
 of images of Napoleon's signatures of 1809 and 1814

расстоянию между изображениями, обусловленному неравенствами границ баркодов:  $d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_{W,2}(B, B') = 8, 17$ . Если подпись 1809 года формировалась равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд (скорость 0,0645 точек/с), а подпись 1814 года формировалась ускоренно (с ускорением 0,004162 точек/с<sup>2</sup>) в течение 2 секунд (начальная скорость 0,002 точек/с), то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений составляет:  $d_f(B, B') = 2, 03$ . Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при  $\mu_b = 1, \mu_f = 1$  в этом случае равно:  $d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = (\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B') + \mu_f \cdot d_f(B, B'))^{\frac{1}{2}} = 8, 42$ .

## Формирование сглаженного коцикла

Гладкость функций от симплексов может быть измерена лапласианом. Рассмотрим граф, ассоциированный с  $X_k$ , где каждый  $k$ -симплекс представлен узлом и существует ребро, если два  $k$ -симплекса имеют непустое пересечение. Определим элементы весовой матрицы  $W = (w_{ij})$  как

$$w_{ij} = \begin{cases} \nu(\sigma_i)\nu(\sigma_j), & \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

где  $\nu(\sigma_i)$  – размер  $\sigma_i$ , например, площадь 2-симплекса. Размер 0-симплекса определяется как 1. Взвешенный граф лапласиана графа  $\mathcal{L}_W$  определяется [17] как

$$\mathcal{L}_{W_{i,j}} = \begin{cases} 1 - \frac{w_{ij}}{w_i}, & \text{if } i = j, w_i \neq 0, \\ -\frac{w_{ij}}{\sqrt{w_i w_j}}, & \text{if } \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, i \neq j, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (6)$$

где  $w_i = \sum_j w_{ij}$ . Гладкий коцикл  $\bar{\omega}$  может быть получен решением задачи:

$$\bar{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in C^{k-1}(X, \mathbb{R})} \|\mathcal{L}_W(\hat{\omega} + d\alpha)\|^2. \quad (7)$$

Коцикл  $\hat{\omega} \in C^k(X, \mathbb{R})$  не всегда является точным. На основе построения гладкого точного коцикла  $\bar{\omega} = \hat{\omega} + d\alpha \in C^k(X, \mathbb{R})$  симплицального комплекса решением задачи (7) можно построить такой коцикл  $\bar{\alpha} \in C^{k-1}(X, \mathbb{R})$ , что действие кограничного оператора  $d_{k-1}$  на  $\bar{\alpha}$  приводит к  $\bar{\omega}$ :  $d_{k-1}\bar{\alpha} = \bar{\omega}$ .

**Пример 5.** Рассмотрим симплицальный комплекс  $X$  с пятью вершинами  $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$  и пятью ребрами  $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$  единичной длины. 1-коцепь  $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$  является вещественным коциклом; значения функций на ребрах:  $\hat{\omega}(e_0) = 1, \hat{\omega}(e_1) = \hat{\omega}(e_2) = \hat{\omega}(e_3) = \hat{\omega}(e_4) = 0$ . Так как  $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$  не является точной ( $\omega \neq d_0\alpha; \forall \alpha \in C^0(X, \mathbb{R})$ ), то найдем такую 0-коцепь  $\bar{\alpha} \in C^0(X, \mathbb{R})$ , которая решает задачу минимизации (7). Весовая матрица

$$w_{ij} = \nu(\sigma_i)\nu(\sigma_j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 3,$$

при  $\nu(\sigma_i) = 1, \forall i = 0, \dots, 4$ .

Матрица Лапласа, определенная из соотношения (6),

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решая задачу (7), получим сглаженный коцикл

$$\bar{\omega}_1 = \hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1 = [0, 2 \quad 0, 2 \quad 0, 2 \quad 0, 2 \quad 0, 2]^T$$

с 0-коцепью  $\bar{\alpha}_1 = [1 \quad 0, 2 \quad 0, 4 \quad 0, 6 \quad 0, 8]^T$ ;  $d\bar{\alpha}_1 = [-0, 8 \quad 0, 2 \quad 0, 2 \quad 0, 2 \quad 0, 2]^T$ , который минимизирует  $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2$ , так как  $\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  и  $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2 = 0$ . Аналогично для 1-коцепи  $\omega_2 = [0, 0, 0, 0, 1]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$  получим 0-коцепь  $\bar{\alpha}_2 = [0, 2 \quad 0, 4 \quad 0, 6 \quad 0, 8]^T$ . Расстояние между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. (3)):  $d_{f1} = \sqrt{2}$ ; между  $\bar{\alpha}_1$  и  $\bar{\alpha}_2$ :  $d_{f0} = \sqrt{0, 8}$ .

## Заключение

В работе рассмотрена задача сравнения начального и терминального изображений, которая решается на основе построения минимизируемого функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории.

В работе применяются алгоритмы построения множеств полуинтервалов вещественных баркодов персистентных гомологий для сравнения диффеоморфных изображений объектов. Использование персистентных гомологий позволяет получить дополнительную информацию об объекте: объем, цвет, момент времени формирования.

Для внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях. Баркоды персистентных гомологий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается модифицировать метод Вассерштейна и в формулу для расстояния между изображениями, определяемую по баркодам персистентных гомологий, ввести негеометрическую информацию о расстояниях между изображениями.

Важным направлением применения персистентных (ко)гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных.

## Приложение 1. Топологический анализ данных [5, 11]

Топологические пространства могут быть аппроксимированы симплициальными комплексами. Симплициальным комплексом является конечный набор множеств

$K = \{\sigma_i\}$ , где каждое  $\sigma_i$  является подмножеством некоторого конечного множества вершин  $K^0$ . Этот набор удовлетворяет следующему условию: если  $\sigma_i \in K$  и  $\tau$  – грань  $\sigma_i$  (т.е. если  $\tau \subseteq \sigma_i$ ), то  $\tau \in K$ . Если  $\sigma_i$  имеет  $k + 1$  вершин,  $\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_k\}$ , где каждая пара вершин неэквивалентна,  $\sigma_i$  называется  $k$ -симплексом.  $k$ -скелет симплициального комплекса  $K$  является подкомплексом  $K$ , состоящим из симплексов размерности  $k$  и ниже. Геометрический  $k$ -симплекс можно рассматривать как выпуклую оболочку  $k + 1$  аффинно независимых точек в  $\mathbb{R}^d$ . Из-за этого точку называют 0-симплексом, ребро – 1-симплексом, треугольник – 2-симплексом, тетраэдр – 3-симплексом.

Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков, вложенных в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $S = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}, v_i \in \mathbb{R}^d$ , – заданное множество точек. Комплекс Вьеториса-Рипса  $R(r)$  представляет собой симплициальный комплекс, построенный на множестве точек; комплекс Вьеториса-Рипса имеет симплекс тогда, когда все пары точек находятся на расстоянии, не превышающем  $2r$ :

$$R(r) = \sigma = S \mid \|\nu_i - \nu_j\| \leq 2r, \forall i, j \tag{8}$$

Группы гомологии строятся с использованием линейных преобразований, называемых граничными операторами.  $k$ -цепь конечного симплициального комплекса  $K$  является конечной формальной суммой ориентированных  $k$ -симплексов в  $K$ ,  $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$ . Группа всех  $k$ -цепей  $C_k(K)$  является векторным пространством. Граничный оператор  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  – линейное преобразование, порожденное отображением любого  $k$ -симплекса в сумму его  $k - 1$  граней, а именно:

$$\partial_k(\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_k\}) = \sum_{i=0}^k \{\nu_0, \dots, \hat{\nu}_i, \dots, \nu_k\},$$

где  $\hat{\nu}_i$  означает, что  $\nu_i$  отсутствует. Группа  $k$ -го цикла  $Z_k(K)$  является ядром граничного оператора  $\partial_k$  с элементами, называемыми  $k$ -циклами:

$$\text{Ker}(\partial_k) = \{c \in C_k \mid \partial_k(c) = \emptyset\}.$$

$k$ -я граничная группа  $B_k(K)$  – образ граничного оператора  $\partial_{k+1}$ , а его элементы называются  $k$ -границами:  $\text{Im}(\partial_{k+1}) = \{d \in C_k \mid \exists c \in C_{k+1} : d = \partial_{k+1}(c)\}$ . Так как  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ , то  $B_k(K)$  является подгруппой в  $Z_k(K)$ . Таким образом, можно определить  $k$ -ю группу гомологий  $H_k(K)$  как факторгруппу  $Z_k(K) / B_k(K)$ . Два  $k$ -цикла называются гомологичными, если они отличаются границей или если они находятся в одном классе эквивалентности  $H_k(K)$ .  $k$ -е число Бетти комплекса  $K$ :  $\beta_k = \text{rank} H_k(K)$ , характеристика Эйлера:  $\chi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i$ .

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс  $K$  и  $f$  – вещественнозначную функцию на симплексах  $K$ , которая удовлетворяет соотношению  $f(\tau) \leq f(\sigma)$  для всех  $\tau \leq \sigma$  симплексов в  $K$ . Для любого  $x \in \mathbb{R}$  подпоследовательность  $K$ , связанная с  $x$ , определяется как  $K(x) = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq x\}$ . Из предположений о функции  $f$ ,  $K(x)$  всегда является симплициальным комплексом и  $K(x) \subseteq K(y); \forall x \leq y$ . Пусть  $\{x_1 < x_2 < \dots < x_l\}$  – отсортированный диапазон  $f$ . Фильтрация  $K$  по  $f$  является упорядоченной последовательностью его подкомплексов:  $\emptyset \subset K(x_1) \subset K(x_2) \subset \dots \subset K(x_l) \subset K$ . Последовательность включений

$K$  индуцирует линейные преобразования на последовательности векторных пространств

$$H_k(K(x_1)) \rightarrow H_k(K(x_2)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(K(x_n)).$$

Персистентная гомология отслеживает точку появления  $b$  (birth) и точку исчезновения  $d$  (death) нетривиальных классов гомологии по мере прохождения фильтрации. Набор векторных пространств  $\{V_i\}$  и линейных преобразований  $f_i: V_i \rightarrow V_{i+1}$  называется модулем персистентности. Интервальный модуль  $I_{[b,d]}$  является модулем персистентности, для которого  $f_i = 1$ , если  $i \in [b, d) \in B$  и  $0$  – в противном случае, где  $B$  – множество интервалов (баркодов)  $[b, d)$ . Интервальные модули можно разложить в форме  $\bigoplus_{[b,d) \in B} I_{[b,d)}$ . Эти интервалы точно кодируются, когда классы гомологии появляются и исчезают в модуле персистентности.

## Приложение 2. Когомологии [15, 16]

По заданному цепному комплексу  $\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$  можно определить группу коцепей  $C^n$  как группу всех гомоморфизмов, действующих из  $C_n$  в  $\mathbb{Z}$  (или  $\mathbb{R}$ ). Каждая  $n$ -мерная коцепь является функционалом, заданным на цепи  $C_n$ . Если функционал  $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$  принимает значения коцепи  $\mathcal{Y}$  на цепи  $\mathcal{X}$ , что можно записать в виде  $\mathcal{Y}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$ , то определение кограничного оператора  $d_n: C^{n-1} \rightarrow C^n$  принимает форму определения сопряженного линейного оператора:

$$\langle d_n \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \partial_n \mathcal{X} \rangle, \mathcal{X} \in C_n, \mathcal{Y} \in C^{n-1}; d_{n+1} \circ d_n = 0.$$

Определим группы  $n$ -мерных коциклов:  $Z^n = \text{Ker}(d_n)$  и  $n$ -мерных кограниц:  $B^n = \text{Im}(d_{n-1})$ . Факторгруппа  $H^n = Z^n / B^n$  называется  $n$ -мерной группой когомологий коцепного комплекса.

Граничный оператор  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  – линейное преобразование, порожденное отображением любого  $k$ -симплекса в сумму его  $k-1$  граней:  $\partial_k(\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_k\}) = \sum_{i=0}^k \{\nu_0, \dots, \hat{\nu}_i, \dots, \nu_k\}$ , где  $\hat{\nu}_i$  означает, что  $\nu_i$  отсутствует. Кограничный оператор  $d_k: C^k(X, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k+1}(X, \mathbb{R})$  является аналогом граничных операторов для  $k$ -коцепи  $\alpha$ :

$$d_k(\alpha)([\nu_0, \dots, \nu_k]) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \alpha([\nu_0, \dots, \hat{\nu}_i, \dots, \nu_k]). \quad (9)$$

Для персистентных когомологий можно построить диаграмму линейных преобразований последовательности векторных пространств

$$H^k(X(x_0),) \leftarrow H^k(X(x_1),) \leftarrow \dots \leftarrow H^k(X(x_l),),$$

аналогичную диаграмме для персистентных гомологий

$$H_k(X(x_0)) \rightarrow H_k(X(x_1)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(X(x_n)).$$

Пусть  $X$  – конечный симплициальный комплекс и  $X^0, X^1, X^2$  обозначают множества вершин, ребер и треугольников комплекса  $X$  соответственно. Предположим,

что вершины упорядочены. Пусть  $\mathbb{A}$  – коммутативное кольцо (например,  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{R}$ ). Определим 0-коцепи, 1-коцепи и 2-коцепи (модули над  $\mathbb{A}$ ):  $C^0 = C^0(X; \mathbb{A}) = \{f : X^0 \rightarrow \mathbb{A}\}$ ,  $C^1 = C^1(X; \mathbb{A}) = \{\alpha : X^1 \rightarrow \mathbb{A}\}$ ,  $C^2 = C^2(X; \mathbb{A}) = \{A : X^2 \rightarrow \mathbb{A}\}$ . Примеры кограничных отображений:

$$d_0 : C^0 \rightarrow C^1; \quad d_1 : C^1 \rightarrow C^2 : (d_0 f)(ab) = f(b) - f(a);$$

$$(d_1 \alpha)(abc) = \alpha(bc) - \alpha(ac) + \alpha(ab).$$

Пусть  $\alpha \in C^1$ . Если  $d_1 \alpha = 0$ , то  $\alpha$  – коцикл. Если  $d_1 f = \alpha$  допускает решение  $f \in C^0$ , то  $\alpha$  – кограница. Решение  $f$ , если оно существует, можно рассматривать как дискретный интеграл от  $\alpha$ . Оно уникальное вплоть до добавления констант на каждый связный компонент  $X$ .

Легко проверить, что  $d_1 d_0 f = 0; \forall f \in C^0$ . Таким образом, кограницами всегда являются коциклы:  $\text{Im}(d_0) \subseteq \text{Ker}(d_1)$ . Мы можем измерить разницу между кограницами и коциклами, определив 1-когомологию как фактор-модуль  $H^1(X; \mathbb{A}) = \text{Ker}(d_1) / \text{Im}(d_0)$ . Два коцикла  $\alpha, \beta$  когомологичны, если  $\alpha - \beta$  кограница:  $\alpha - \beta = d_1 f$ .

### Приложение 3. Лапласиан на симплициальном комплексе [17]

Лапласиан на симплициальном комплексе для коцепей можно определить, сначала определяя скалярное произведение и используя сопряженный оператор. Предполагая случай действительных чисел для  $\alpha_1, \alpha_2 \in C^k(X, \mathbb{R})$ , скалярное произведение можно определить как  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_k = \sum_{\sigma \in X^k} \alpha_1(\sigma) \alpha_2(\sigma)$ .

Тогда сопряженный оператор  $d_k^* : C^{k+1}(X, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(X, \mathbb{R})$ , относительно этого скалярного произведения, может быть определен из соотношения:  $\langle d_k \alpha, \beta \rangle_{k+1} = \langle \alpha, d_k^* \beta \rangle_k$ ,  $\alpha \in C^k(X, \mathbb{R})$ ,  $\beta \in C^{k+1}(X, \mathbb{R})$ .

Веса, отражающие размер симплексов, могут быть использованы для отражения геометрии путем определения взвешенного внутреннего произведения:  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_k = \sum_{\sigma \in X^k} s_\sigma \alpha_1(\sigma) \alpha_2(\sigma)$ , где  $s_\sigma$  – размер  $\sigma$ , такой как площадь, если  $\sigma$  является 2-симплексом. Лапласиан на  $X_k$  можно определить формулой:  $\mathcal{L} = d_k^* d_k + d_{k-1} d_{k-1}^*$ .

### Список литературы / References

- [1] Trounev A., Younes L., “Metamorphoses through lie group action”, *Foundations of Computational Mathematics*, **5**:2 (2005), 173–198.
- [2] Younes L., Arrate F., Miller M.I., “Evolutions equations in computational anatomy”, *NeuroImage*, **45**:1 (2009), 540–550.
- [3] Beg M., Miller M., Trounev A., Younes L., “Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms”, *Int. Journal of Computer Vision*, **61**:2 (2005), 139–157.
- [4] Marsland S., McLachlan R.I., “A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration”, *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, 2006, 396–407.

- [5] Carlsson G., “Topological pattern recognition for point cloud data”, *Acta Numerica*, 2014, № 23, 289–368.
- [6] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge UP, 2002, 544 pp.
- [7] Лейхтер С. В., Чуканов С. Н., “Сравнение изображений на основе их диффеоморфного преобразования”, *Компьютерная оптика*, **42:1** (2018), 96–104; [English transl.: Leichter S. V., Chukanov S. N., “Matching of images based on their diffeomorphic mapping”, *Computer Optics*, **42:1** (2018), 96–104, ]
- [8] Chukanov S. N., “Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **19:2** (2009), 303–305.
- [9] Чуканов С. Н., Ульянов Д. В., “Формирование инвариантов при визуализации векторных полей на основе построения оператора гомотопии”, *Компьютерная оптика*, **36:4** (2012), 622–626; [English transl.: Chukanov S. N., Ulianov D. V., “Formation of invariants in the visualization of vector fields based on the construction of the homotopy operator”, *Computer Optics*, **36:4** (2012), 622–626, ]
- [10] Чуканов С. Н., “Формирование инвариантов при визуализации векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем”, *Автоматрия*, **47:2** (2011), 58–63; [English transl.: Chukanov S. N., “Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems”, *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, **47:2** (2011), 58–63, .]
- [11] Edelsbrunner H., Harer J. L., *Computational topology: an introduction.*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, 282 pp.
- [12] Гарбер А., Эдельсбруннер Г., Иванов А., Мусин О., Невский М., “Международная конференция «Геометрия, топология и приложения»”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20:6** (2013), 95–102; [English transl.: Garber A., Edelsbrunner H., Ivanov A., Musin O., Nevskii M., “International Conference "Geometry, Topology, and Applications"”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20:6** (2013), 95–102, .]
- [13] Adams H., Tausz A., *JavaPlex Tutorial*, 2011, 20 pp.
- [14] Duzhin S. V., Chebotarevskii B. D W., *Transformation groups for beginners*, **25**, American Mathematical Society, 2004, 192 pp.
- [15] Cang Z., Wei G., “Persistent cohomology for data with multicomponent heterogeneous information”, 2018 <http://gis-lab.info/qa/srtm.html>.
- [16] De Silva V., Morozov D., Vejdemo-Johansson M., “Persistent cohomology and circular coordinates”, *Discrete and Computational Geometry*, **45:4** (2011), 737–759.
- [17] Chung F. R. K., Graham F. C., *Spectral graph theory*, American Mathematical Society, 1997, 207 pp.

---

**Chukanov S. N.**, "The Comparison of Diffeomorphic Images Based on the Construction of Persistent Homology", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26:3** (2019), 450–468.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-3-450-468

**Abstract.** An object shape analysis is a problem that is related to such areas as geometry, topology, image processing and machine learning. For analyzing the form, the deformation between the source and terminal form of the object is estimated. The most used form analysis model is the Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping (LDDMM) model. The LDDMM model can be supplemented with functional non-geometric information about objects (volume, color, formation time). The paper considers algorithms for constructing sets of barcodes for comparing diffeomorphic images, which are real values taken by persistent homology. A distinctive feature of the use of persistent homology with respect to methods of algebraic topology is to obtain more information about the shape of the object. An important direction of the application of persistent homology is the study invariants of big data. A method based on persistent cohomology is proposed that combines persistent homology

technologies with embedded non-geometric information presented as functions of simplicial complexes. The proposed structure of extended barcodes using cohomology increases the effectiveness of persistent homology methods. A modification of the Wasserstein method for finding the distance between images by introducing non-geometric information was proposed. The possibility of the formation of barcodes of images invariant to transformations of rotation, shift and similarity is considered.

**Keywords:** pattern recognition, diffeomorphic transformations, persistent (co)homology, Wasserstein distance

**On the authors:**

Sergey N. Chukanov, [orcid.org/0000-0002-8106-9813](https://orcid.org/0000-0002-8106-9813), PhD,  
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk Branch  
13 Pevtsova str., Omsk 644043, Russia, e-mail: [ch\\_sn@mail.ru](mailto:ch_sn@mail.ru)

**Acknowledgments:**

<sup>1</sup> The work was funded by RFBR according to the research projects № 18–07–00526 and № 18–08–01284.

<sup>2</sup> The work was funded by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS № I.5.1., project № 0314-2019-0020.