

2022

Volume 29

No 2

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

SCIENTIFIC JOURNAL

Start date of publication — 1999

Published quarterly

FOUNDER

P.G. Demidov Yaroslavl State University

EDITORIAL OFFICE

14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russian Federation

Website: <http://mais-journal.ru>

E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Phone: +7 (4852) 79-77-73

2022

Том 29

№ 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1999 года

Выходит 4 раза в год

УЧРЕДИТЕЛЬ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

РЕДАКЦИЯ

ул. Советская, 14, Ярославль, 150003, Российская Федерация

Website: <http://mais-journal.ru>

E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Телефон: +7 (4852) 79-77-73

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77–66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Подписной индекс — 31907 в Объединенном каталоге «Пресса России». Технический редактор, компьютерная вёрстка – М. С. Каряева. Корректор английского текста – М. С. Комар. Подписано в печать 13. 06. 2022. Дата выхода в свет 30. 06. 2022. Формат 200×265 мм. Объем 76 с. Тираж 40 экз. Свободная цена. Заказ 017/022. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, Ярославль, 150003, Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, Ярославль, 150003, Россия. Содержание предназначено для детей старше 12 лет.

Editor-in-Chief

Valery A. Sokolov Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Deputies Editor-in-Chief

Sergey D. Glyzin Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Eugeniy A. Timofeev Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Editorial Board Secretary

Egor V. Kuzmin Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

The Editorial Board

Sergei M. Abramov Professor, Doctor of Sciences, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Program Systems Institute of RAS (Pereslavl-Zalesskiy, Russia)

Lilian Aveneau Professor, XLIM Laboratory, University of Poitiers (Poitiers, France)

Thomas Baar Professor, Doctor, Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin, University of Applied Sciences (Berlin, Germany)

Olga L. Bandman Professor, Doctor of Sciences, Supercomputer Software Department, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Novosibirsk, Russia)

Vladimir N. Belykh Professor, Doctor of Sciences, Volga State Academy of Water Transport (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir A. Bondarenko Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Richard R. Brooks Professor, Clemson University (South Carolina, USA)

Alex Dekhtyar Professor, California Polytechnic State University (Cal Poly, California, USA)

Mikhail Dmitriev Professor, Doctor of Sciences, Higher School of Economics (Moscow, Russia)

Vladimir L. Dolnikov Doctor of Sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow, Russia)

Valery G. Durnev Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Yuri G. Karpov Professor, Doctor of Sciences, St-Petersburg State Polytechnical University (Russia)

Sergey A. Kashchenko Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Lev S. Kazarin Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Andrei Yu. Kolesov Professor, Doctor of Sciences, P.G. Demidov Yaroslavl State University (Russia)

Nikolai A. Kudryashov Professor, Doctor of Sciences, MEPhI (Russia)

Olga Kouchnarenko Professor at the Burgundy Franche-Comte University, The FEMTO-ST Institute (CNRS 6174) (Besancon, France)

Irina A. Lomazova Professor, Doctor of Sciences, Higher School of Economics (Moscow, Russia)

George G. Malinetskiy Professor, Doctor of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (Moscow, Russia)

Victor E. Malyshkin Professor, Doctor of Sciences, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Novosibirsk, Russia)

Alexander V. Mikhailov Professor, Doctor of Sciences, University of Leeds, School of Mathematics (Leeds, Great Britain)

Valery A. Nepomniaschy PhD, A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS (Novosibirsk, Russia)

Philippe Schnoebelen Senior Researcher, LSV, CNRS & ENS de Cachan (CACHAN, France)

Natalia Sidorova Dr., Assistant Professor, Architecture of Information Systems group, Technische Universiteit Eindhoven (Eindhoven, Netherlands)

Ruslan L. Smeliansky Professor, Doctor of Sciences, Corresponding Member of RAS, Lomonosov Moscow State University (Russia)

Javid Taheri Associate Professor, Ph.D., Karlstad University (Sweden)

Mark Trakhtenbrot Dr., Holon Institute of Technology (Holon, Israel)

Dimitry Turaev Professor of Applied Mathematics & Mathematical Physics, Imperial College (London, Great Britain)

Vladimir Zakharov Doctor of Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University (Russia)

Главный редактор

В.А. Соколов.....д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Заместители главного редактора

С.Д. Глызин..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Е.А. Тимофеев..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Ответственный секретарь

Е.В. Кузьмин..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов.....д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Институт программных систем РАН
им. А.К. Айламазяна (Россия)

L. Aveneau..... проф., Университет Пуатье (Франция)

T. Baar..... д-р наук, проф., Университет прикладных технических и экономических наук
Берлина (Германия)

О.Л. Бандман..... д-р техн. наук, Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН (Россия)

В.Н. Белых.....д-р физ.-мат. наук, проф., Волжская государственная академия водного транспорта
(Россия)

В.А. Бондаренко..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

R. Brooks..... проф., Университет Клемсона (США)

A. Dekhtyar..... проф., Калифорнийский политехнический университет, департамент
компьютерных наук (США)

М.Г. Дмитриев..... д-р физ.-мат. наук, проф., ВШЭ (Россия)

В.Л. Дольников..... д-р физ.-мат. наук, проф., МФТИ (Россия)

В.Г. Дурнев..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

В.А. Захаров..... д-р физ.-мат. наук, проф., МГУ (Россия)

Л.С. Казарин.....д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Ю.Г. Карпов..... д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный технический
университет (Россия)

С.А. Кашенко..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

А.Ю. Колесов..... д-р физ.-мат. наук, проф., ЯрГУ (Россия)

Н.А. Кудряшов..... д-р физ.-мат. наук, проф., Засл. деятель науки РФ, МИФИ (Россия)

O. Kouchnarenko..... проф., Университет Бургундии Франш-Комтэ (Франция)

И.А. Ломазова..... д-р физ.-мат. наук, проф., ВШЭ (Россия)

Г.Г. Малинецкий.....д-р физ.-мат. наук, проф., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
РАН (Россия)

В.Э. Малышкин.....д-р техн. наук, проф., Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН (Россия)

A. Mikhailov..... д-р физ.-мат. наук, проф., Университет Лидса (Великобритания)

В.А. Непомнящий..... канд. физ.-мат. наук, Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН
(Россия)

N. Sidorova..... д-р наук, Университет Эйндховена (Нидерланды)

P.Л. Смелянский..... д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, МГУ (Россия)

J. Taheri..... доцент, Университет Карлстада (Швеция)

M. Trakhtenbrot..... д-р комп. наук, Холонский технологический институт (Израиль)

D. Turaev..... проф., Имперский колледж Лондона (Великобритания)

Ph. Schnoebelen..... проф., Национальный центр научных исследований и Высшая нормальная школа
Кашана (Франция)

Contents

Discrete Mathematics in Relation to Computer Science

<i>Bystrov L. Y., Kuzmin E. V.</i> Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions	78
<i>Nevskii M. V.</i> On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector	92
<i>Solon B. Y.</i> Enumeration Degrees of the Bounded Sets	104

Theory of Data

<i>Kosterin M. A., Paramonov I. V.</i> Neural Network-Based Sentiment Classification of Russian Sentences into Four Classes	116
<i>Poletaev A. Y., Paramonov I. V.</i> Recursive Sentiment Detection Algorithm for Russian Sentences.....	134

Содержание

Discrete Mathematics in Relation to Computer Science

<i>Быстров Л. Ю., Кузьмин Е. В.</i> Применение функций голосования для оценки числа монотонных самодвойственных булевых функций	78
<i>Невский М. В.</i> Об одной оценке для нормы интерполяционного проектора.....	92
<i>Солон Б. Я.</i> Степени перечислимости ограниченных множеств.....	104

Theory of Data

<i>Костерин М. А., Парамонов И. В.</i> Нейросетевая классификация русскоязычных предложений по тональности на четыре класса	116
<i>Полетаев А. Ю., Парамонов И. В.</i> Рекурсивный алгоритм определения тональности предложений на русском языке	134

Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions

L. Y. Bystrov¹, E. V. Kuzmin¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-78-91](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-78-91)

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 06E30

Research article

Full text in Russian

Received May 4, 2022

After revision May 28, 2022

Accepted June 1, 2022

One of the problems of modern discrete mathematics is R. Dedekind problem on the number of monotone boolean functions. For other precomplete classes, general formulas for the number of functions of the classes had been found, but it has not been found so far for the class of monotone boolean functions. Within the framework of this problem, there are problems of a lower level. One of them is the absence of a general formula for the number of boolean functions of intersection MS of two classes — the class of monotone functions and the class of self-dual functions. In the paper, new lower bounds are proposed for estimating the cardinality of the intersection for both an even and an odd number of variables. It is shown that the election function of an odd number of variables is monotone and self-dual. The election function of an even number of variables is determined. Free election functions, which are functions with fictitious variables similar in properties to election functions, are introduced. Then the union of a set of election functions and a set of free election functions is considered, and the cardinality of this union is calculated. The resulting value of the cardinality is proposed as a lower bound for $|MS|$. For the class MS of monotone self-dual functions of an even number of variables, the lower bound is improved over the bounds proposed earlier, and for functions of an odd number of variables, the lower bound for $|MS|$ is presented for the first time.

Keywords: functions of election; self-dual boolean functions; monotone boolean functions; the Dedekind problem; boolean functions with fictitious variables; functions of free election; equilibrium sets; disjunctive normal form

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Leonid Y. Bystrov | orcid.org/0000-0002-0610-5466. E-mail: bystrovl0306@mail.ru
undergraduate student, chair of theoretical informatics.

Egor V. Kuzmin | orcid.org/0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru
correspondence author | Professor, Doctor of Science.

Funding: This work was supported by P.G. Demidov Yaroslavl State University Project № VIP-016.

For citation: L. Y. Bystrov and E. V. Kuzmin, “Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 78-91, 2022.

Применение функций голосования для оценки числа монотонных самодвойственных булевых функций

Л. Ю. Быстров¹, Е. В. Кузьмин¹DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-78-91](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-78-91)¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 510.6

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 4 мая 2022 г.

После доработки 28 мая 2022 г.

Принята к публикации 1 июня 2022 г.

Одной из проблем современной дискретной математики является проблема Р. Дедекинда о числе монотонных булевых функций. Если для прочих предполных классов были найдены общие формулы числа функций этих классов, то для класса монотонных булевых функций этого сделать пока не удалось. В рамках этой проблемы существуют проблемы меньшего уровня, одной из которых является отсутствие общей формулы числа булевых функций пересечения MS двух классов — класса монотонных функций и класса самодвойственных функций. В данной работе предлагаются новые нижние границы для оценки мощности этого пересечения как для чётного, так и для нечётного количества переменных. Показывается, что функция голосования от нечётного числа переменных является монотонной и самодвойственной. Определяется функция голосования от чётного числа переменных. Вводятся функции свободного голосования — функции с фиктивными переменными, близкие по свойствам к функциям голосования. Рассматривается объединение множества функций голосования и множества функций свободного голосования. Вычисляется мощность этого объединения. Полученное значение мощности предлагается в качестве нижней границы для $|MS|$. Для класса MS монотонных самодвойственных функций от чётного числа переменных нижняя граница была улучшена по сравнению с границами, предложенными ранее, а для функций от нечётного числа переменных нижняя граница для $|MS|$ представлена впервые.

Ключевые слова: функции голосования; самодвойственные булевы функции; монотонные булевы функции; проблема Дедекинда; булевы функции с фиктивными переменными; функции свободного голосования; равновесные наборы; дизъюнктивная нормальная форма

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Леонид Юрьевич Быстров

orcid.org/0000-0002-0610-5466. E-mail: bystrov10306@mail.ru

студент, кафедра теоретической информатики.

Егор Владимирович Кузьмин

orcid.org/0000-0003-0500-306X. E-mail: kuzmin@uniyar.ac.ru

автор для корреспонденции

профессор, доктор физ.-мат. наук.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П.Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: L. Y. Bystrov and E. V. Kuzmin, "Application of Election Functions to Estimate the Number of Monotone Self-Dual Boolean functions", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 78-91, 2022.

Введение

Одной из проблем современной дискретной математики является проблема Рихарда Дедекинда о числе монотонных булевых функций [1]. Если для прочих предполных классов были найдены общие формулы числа функций от n переменных этих классов, то для класса монотонных булевых функций этого сделать пока не удалось. Применяемые различными исследователями подходы [2] к решению задачи Дедекинда не привели к точной оценке мощности множества монотонных булевых функций. В рамках данной проблемы существуют задачи меньшего уровня, одной из которых является отсутствие общей формулы числа булевых функций от n переменных пересечения класса монотонных функций и класса самодвойственных функций. Это пересечение классов далее будем обозначать MS .

Наиболее точные оценки для $|MS|$ были даны Л. Хавьяровой и Е. Томан [3]. Верхняя граница для нечётных n :

$$1 + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=1}^{\binom{n-1}{l-1}} \binom{\binom{n}{n-l}}{i}.$$

Верхняя граница для чётных n :

$$2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{i=1}^{\binom{n-1}{l-1}} \binom{\binom{n}{n-l}}{i}.$$

Нижняя граница для чётных n :

$$2^{\frac{\binom{n}{n/2}}{2}}.$$

В данной статье предлагаются новые нижние границы для $|MS|$ как для чётного, так и для нечётно-го количества переменных. Рассматривается объединение E множества функций голосования E_S и множества функций свободного голосования E_F , мощность которого $|E|$ предлагается в качестве нижней границы для $|MS|$.

1. Основные понятия

Булева функция f^* , такая что $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, называется *двойственной* функцией к функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Функция f называется *самодвойственной*, если $f = f^*$. Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Для двух наборов значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ выполнено *отношение предшествования* $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, если

$$\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n.$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, имеет место неравенство

$$f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

Обозначим через x^δ булеву функцию, равную $\bar{x}$ при $\delta = 0$ и x при $\delta = 1$:

$$x^\delta = \begin{cases} \bar{x}, & \delta = 0, \\ x & \delta = 1. \end{cases}$$

Выражение

$$K = x_{i_1}^{\delta_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\delta_r}, \text{ где } i_v \neq i_\mu, v \neq \mu$$

называется *элементарной конъюнкцией*. Число r называется *рангом элементарной конъюнкции* [4].

Импликантой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$, что

$$K \vee f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Импликанта K функции f называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любой переменной из K получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f . Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращённой ДНФ* функции f [5].

2. Функции голосования

Функцией голосования называется булева функция, принимающая значение 1, когда в наборах значений переменных преобладают единицы, и принимающая значение 0, когда в наборах значений переменных преобладают нули. Можно считать, что такие функции описывают схему голосования, где решения принимаются большинством голосов [6]. Функции голосования являются одними из самых распространённых булевых функций, возникающих во многих задачах [7].

Определение 1. Функция голосования от n переменных, где n — нечётное, представляет собой булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, определяемую следующим образом:

$$f(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}), \\ 0, & q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}), \end{cases}$$

где $q_1(\tilde{\alpha})$ — количество единиц в наборе значений переменных $\tilde{\alpha}$, $q_0(\tilde{\alpha})$ — количество нулей.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_3 x_2$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

Table 1. Function of election of 3 variables

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_3 x_2$
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 1. Функция голосования от 3 переменных

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция голосования, n — нечётное, тогда f является монотонной и самодвойственной.

Доказательство. Рассмотрим некоторый набор значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и сравнимый с ним набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, такой что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$. Значения, равные 1 в наборе $\tilde{\alpha}$, сохраняют значение единицы и в наборе $\tilde{\beta}$, поэтому $q_1(\tilde{\alpha}) \leq q_1(\tilde{\beta})$. Следовательно, по определению функции голосования имеем $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$, т. е. функция f является монотонной.

Если функция f на некотором наборе значений переменных принимает значение 1 ($q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha})$), то на противоположном наборе эта функция принимает значение 0 ($q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$). Следовательно, функция f обладает свойством самодвойственности. ■

Сохранив свойства монотонности и самодвойственности, определим функцию голосования от чётного числа переменных.

Определение 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная самодвойственная булева функция от n переменных, n — чётное, $q_1(\tilde{\alpha})$ — количество единиц в наборе значений переменных $\tilde{\alpha}$, $q_0(\tilde{\alpha})$ — количество нулей. Функция f называется функцией голосования, если

$$q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = 0 \text{ и } q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) = 1.$$

Покажем, каким образом функция голосования от n переменных, где n — чётное, определяется на наборах значений переменных, в которых количество единиц равно количеству нулей ($q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha})$). Назовём такие наборы *равновесными*. Например, для 4 переменных равновесными наборами будут 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	a_1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	a_2
0	1	1	0	a_3
0	1	1	1	1

Table 2. Function of election of 4 variables

x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	0	0	0
1	0	0	1	$\overline{a_3}$
1	0	1	0	$\overline{a_2}$
1	0	1	1	1
1	1	0	0	$\overline{a_1}$
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица 2. Функция голосования от 4 переменных

Пусть вектор $\tilde{\alpha}$ определяет некоторый равновесный набор значений переменных функции голосования от чётного числа переменных. *Переменные*, принимающие в этом наборе значение единицы, назовем *значимыми*. Рассмотрим для $\tilde{\alpha}$ сравнимые наборы.

Если хотя бы одна значимая переменная в сравнимом наборе $\tilde{\beta}$ принимает значение 0, то функция $f(\tilde{\beta})$ равна 0 ($q_0(\tilde{\beta}) > q_1(\tilde{\beta})$). Следовательно, имеем $f(\tilde{\beta}) \leq f(\tilde{\alpha})$.

Если хотя бы одна незначимая переменная сравнимого набора $\tilde{\gamma}$ принимает значение 1, то функция $f(\tilde{\gamma})$ равна 1 ($q_1(\tilde{\gamma}) > q_0(\tilde{\gamma})$). Получили, что $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\gamma})$.

Итак, независимо от выбора значения функции голосования на равновесном наборе функция сохраняет свойство монотонности. Тогда необходимо только потребовать, чтобы на противоположных равновесных наборах функция принимала противоположные значения, т. е. соблюдалось условие самодвойственности.

В Таблице 2 числа a_1, a_2, a_3 — это значения функции на первой половине равновесных наборов, и $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ — противоположные им значения функции на второй половине равновесных наборов. Функция f будет монотонной и самодвойственной при любых значениях a_1, a_2, a_3 .

Заметим, что для систем голосования с чётным числом голосующих, где решения принимаются большинством голосов, в случае ничьи решение всё равно может быть принято, если одной половине голосующих отдать предпочтение. Половина, которой было отдано предпочтение, будет выигрывать в голосовании у другой половины, даже если все участники голосования поменяют свой выбор на противоположный. Это и называется условием самодвойственности.

Рассмотрим пример функции голосования от чётного числа переменных.

Пусть в нашей системе голосования имеется всего 2 голосующих: x_1, x_2 . Решение принимается большинством голосов. Если оба голосующих проголосуют одинаково, то результат голосования будет однозначен:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2) = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2) = 1.$$

Если участники голосования проголосуют по-разному, то число голосов «за» будет равно числу голосов «против». Для того чтобы определить результат голосования, отдадим половине голосующих предпочтение. В данном примере существует только один способ разбиения общего числа

голосующих на половины — по одному голосующему. Если мы отдадим предпочтение голосующему x_1 , то функция результата голосования $f(x_1, x_2)$ на проблемных (равновесных) наборах будет определяться следующим образом:

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2) = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2) = 1.$$

Аналогичным образом можно отдать предпочтение голосующему x_2 .

В первом случае, когда предпочтение было отдано x_1 , получена функция $f(x_1, x_2) = x_1$, во втором — $f(x_1, x_2) = x_2$.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1$	$f(x_1, x_2) = x_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Table 3. Functions of election of 2 variables

Таблица 3. Функции голосования от 2 переменных

3. Количество функций голосования

Рассмотрим функции голосования от n переменных, где n — чётное.

Чтобы получить равновесный набор значений переменных, необходимо ровно половине всех переменных присвоить значение 1, прочим переменным будет однозначно определено значение 0. Поэтому число равновесных наборов может быть вычислено с помощью комбинаторной формулы сочетаний без повторений из n по $\frac{n}{2}$:

$$C_n^{n/2} = \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{((\frac{n}{2})!)^2}.$$

Определим количество функций голосования от чётного числа переменных. На каждом неравновесном наборе значений переменных функция голосования задаётся однозначно. Тогда необходимо выбрать значения функции на равновесных наборах. Ввиду самодвойственности, достаточно выбрать значения функции только на половине равновесных наборов. Используя всё ту же формулу сочетаний без повторений, получаем

$$(C_2^1)^{\binom{n/2}{2}} = 2^{\binom{n/2}{2}}.$$

Это же число было предложено Л. Хавьяровой и Е. Томан в качестве нижней границы $|MS|$ для чётных n [3]. Ими было показано, что наибольшее число элементарных конъюнкций, которое может содержать сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных, равно значению $\binom{n}{[n/2]}$. Далее ими был рассмотрен куб [4], соответствующий монотонной самодвойственной булевой функции от n переменных, где n — чётное, и было замечено, что, в силу самодвойственности, $\frac{\binom{n}{2}}{2}$ вершин на $\frac{n}{2}$ -ом уровне соответствуют множеству вершин $\{\tilde{\alpha} : f(\tilde{\alpha}) = 1\}$, а другие $\frac{\binom{n/2}{2}}{2}$ вершин соответствуют множеству вершин $\{\tilde{\alpha} : f(\tilde{\alpha}) = 0\}$. Тогда число способов распределить $\binom{n}{n/2}$ вершин по этим двум множествам равно

$$2^{\frac{\binom{n}{2}}{2}}.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_3 x_2$	$x_1 x_2 \vee x_1 x_4 \vee x_4 x_2$	$x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_4 x_3$	$x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_4 x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$	$x_2 x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_4$	$x_3 x_1 \vee x_3 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4$	$x_4 x_1 \vee x_4 x_2 \vee x_4 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Table 4. All functions of election of 4 variables

Таблица 4. Все функции голосования от 4 переменных

4. Функции голосования в решении проблемы Дедекинда

Назовём *почти равновесным* набор $\tilde{\alpha}$ значений переменных булевой функции от n переменных, где n — нечётное, для которого $q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha}) + 1$. Сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных с наибольшим числом элементарных конъюнкций может быть получена из равновесных наборов для чётных n и из почти равновесных наборов для нечётных n следующим образом:

1. Для каждого равновесного (почти равновесного) набора составляется элементарная конъюнкция из переменных, которым в данном наборе значений соответствует 1.
2. Полученные на шаге 1 элементарные конъюнкции соединяются дизъюнкцией.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 1 на наборах значений переменных, в которых $q_1(\tilde{\alpha}) \geq q_0(\tilde{\alpha})$, и равна 0 на наборах, в которых $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$. Данная функция представляет систему голосования, в которой решение будет принято, если хотя бы половина голосующих поддержат это решение.

В полученной ДНФ каждая элементарная конъюнкция представляет группу голосующих, число которых равно половине общего числа голосующих. Поэтому полученная ДНФ соответствует ДНФ функции f .

Полученная ДНФ является сокращённой ДНФ функции f , так как каждая её элементарная конъюнкция является простой импликантой. Если бы это было не так, то в описанной системе голосования был бы возможен случай принятия решения, когда более половины голосующих не поддерживали его. Но это противоречит определению функции f , так как в этом случае $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha})$, но $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Булева функция, ДНФ которой не содержит отрицаний, является монотонной функцией, отличной от 0 и 1 [8]. Сокращённая ДНФ функции f не содержит отрицаний по построению. Следовательно, f — это монотонная функция.

Число элементарных конъюнкций в полученной ДНФ равно числу равновесных (почти равновесных) наборов, то есть $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Таким образом, показано, что сокращённая ДНФ монотонной булевой функции от n переменных с наибольшим числом элементарных конъюнкций может быть получена из равновесных наборов для чётных n и из почти равновесных наборов для нечётных n . Л. Хавьярова и Е. Томан в своей работе получили число $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, исходя из других рассуждений, хотя в приведённых ими примерах фактически находятся именно равновесные наборы и подсчитывается их количество [3].

Число $2^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$ встречается не только в статье [3]. Другие исследователи также обращались к этому числу для оценки мощности $|M|$ множества монотонных функций. В 1954 году это число было предложено Э. Н. Гильбертом в качестве нижней границы для $|M|$. В. К. Коробков использовал это число для установления верхней границы для $|M|$ [1]. Наиболее точные асимптотики, приведённые А. Д. Коршуновым, также были основаны на этом числе [9]. Можно предположить, что на протяжении всего времени существования проблемы Дедекинда её решение неявно основывалось на использовании функций голосования.

5. Функции свободного голосования и нижняя граница для $|MS|$

Определение 3. Функцией свободного голосования назовём такую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \text{ где } g \text{ — функция голосования, } i_j \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, k}, k < n.$$

Функция свободного голосования содержит переменные, которые не участвуют в формировании её значения (фиктивные переменные). В системах голосования фиктивными переменными обозначаются голосующие, воздерживающиеся от голосования или игнорирующие его.

x_1	$f(x_1) = x_1$
0	0
1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3) = x_1$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table 5. $f(x_1) = x_1$ — a function of election,
 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ — a function of free election

Таблица 5. $f(x_1) = x_1$ — функция голосования,
 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ — функция свободного
голосования

Лемма 1. *Функция свободного голосования является монотонной и самодвойственной.*

Доказательство. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)$. Не нарушая общности рассуждений, положим, что первые k значений набора соответствуют фиктивным переменным.

Для любого сравнимого с $\tilde{\alpha}$ набором $\tilde{\beta}$, отличающимся от $\tilde{\alpha}$ только в первых k переменных, $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$. Условие монотонности не нарушено. Функция f — монотонная.

Если $f(\tilde{\alpha}) = 1$, то $f(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k, \dots, \tilde{\alpha}_n) = 0$, так как фиктивные переменные не участвуют в формировании значения функции. Следовательно, функция свободного голосования является самодвойственной. ■

Итак, функция голосования и функция свободного голосования являются одновременно и монотонными, и самодвойственными. Это означает, что объединение E множества функций голосования E_S и множества функций свободного голосования E_F является подмножеством множества MS . Отсюда следует, что число $|E|$ может выступать в качестве нижней границы для $|MS|$.

Часть элементов множества E уже была подсчитана ранее. Число функций голосования для нечётного числа переменных $|E_{So}| = 1$, для чётного — $|E_{Se}| = 2^{\binom{n/2}{2}}$. Далее также будут учитываться элементы множеств E_{Fe} и E_{Fo} функций свободного голосования от чётного и нечетного числа переменных соответственно. Рассмотрим, как между собой соотносятся множество функций голосования E_S и множество функций свободного голосования E_F .

Теорема 2. *Пусть $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция голосования от n переменных, где n — нечётное, тогда существует такая функция $f(x_1, \dots, x_{n+1})$, что f — функция голосования от чётного числа переменных и $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. К набору переменных $x_1, \dots, x_n$ добавим переменную x_{n+1} . Построим функцию $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$.

Количества нулей и единиц в некотором наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ могли находиться в следующих отношениях:

1. $q_1(\tilde{\alpha}) > q_0(\tilde{\alpha}) + 1$;
2. $q_1(\tilde{\alpha}) = q_0(\tilde{\alpha}) + 1$;
3. $q_0(\tilde{\alpha}) = q_1(\tilde{\alpha}) + 1$;
4. $q_0(\tilde{\alpha}) > q_1(\tilde{\alpha}) + 1$.

В случаях 1 и 2 имеем $g(\tilde{\alpha}) = 1$, в 3 и 4 — $g(\tilde{\alpha}) = 0$. Так как q_1 и q_0 в наборах значений переменных $x_1, \dots, x_{n+1}$ не могли измениться более чем на 1, то для любых значений переменной x_{n+1} в случае 1 будет $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 1$, в случае 4 — $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 0$, а в случаях 2 и 3 $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1})$ может быть

определена по-разному (равновесные наборы). На равновесных наборах функция f должна сохранять самодвойственность. Установим единичное значение функции f в случае 2, т. е. $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 1$, и нулевое значение в случае 3, т. е. $f(\tilde{\alpha}, x_{n+1}) = 0$. Получим

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n).$$

■

Важным следствием Теоремы 2 является следующий факт.

Следствие 2.1. *Множество E_{Se} функций голосования от n переменных, где n — чётное, содержит функции свободного голосования, то есть пересечение $E_{Se} \cap E_{Fe}$ не пусто.*

Чтобы подсчитать $|E|$, разобьём множество E на 2 непересекающихся подмножества $E = E_S \cup V$, где $V = E_F \setminus \{E_S \cap E_F\}$. Тогда $|E| = |E_S| + |V|$.

Пересечение $E_{So} \cap E_{Fo}$ пусто, E_{So} содержит только одну функцию. Подсчитаем число функций, входящих в пересечение множеств функций голосования E_{Se} и функций свободного голосования E_{Fe} .

Функциями свободного голосования в общем числе функций голосования от n переменных, где n — чётное, являются функции голосования от $n - 1$ переменной. Число таких функций свободного голосования равно числу способов выбрать $n - 1$ переменную из n :

$$|E_{Se} \cap E_{Fe}| = C_n^{n-1} = n.$$

Подсчитаем отдельно $|V_e|$ — число функций свободного голосования от n переменных, не являющихся функциями голосования от n переменных, где n — чётное, и $|V_o|$ — число тех же функций от n переменных, где n — нечётное.

Множество E_{Se} представляет собой множество функций голосования от n переменных, где n — чётное. По Теореме 2 множество E_{Se} включает в себя функции голосования от $n - 1$ переменной. Множество V_e не пересекает E_{Se} . Поэтому V_e не содержит функций голосования ни от n переменных, ни от $n - 1$ переменной.

Число $|V_e|$ может быть найдено следующим образом:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} ((2^{\binom{2i}{2}} - 2i)C_n^{2i}) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2i-1} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} ((2^{\binom{2i}{2}} - 2i)C_n^{2i} + C_n^{2i-1}).$$

Вычисление $|V_e|$ разбивается на 2 части. В первой части суммируются все функции свободного голосования из множества V_e , которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i$ переменных для каждого i . Во второй части суммируются функции голосования из множества V_e , которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i - 1$ переменной для каждого i .

Для нечётного числа переменных определена только одна функция голосования. Число функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных соответствуют функциям голосования от $2i - 1$ переменной, равно числу способов выбрать $2i - 1$ переменную из n : C_n^{2i-1} .

Для чётного числа $2i$ переменных имеем $|E_{Se}^{2i}| = 2^{\binom{2i}{2}}$ функций голосования, из которых $2i$ функций входят в пересечение $E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}$, т. е. являются функциями голосования от $2i - 1$ переменной (верхний индекс $2i$ указывает на то, что функции из указанных множеств — это функции от $2i$ переменных). Поскольку функции голосования от $2i - 1$ переменной подсчитываются отдельно (см. предыдущий абзац), то, чтобы не учитывать одни и те же функции дважды, на данном этапе они исключаются из рассмотрения:

$$|E_{Se}^{2i}| - |E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}| = 2^{\binom{2i}{2}} - 2i.$$

Число функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных соответствуют функциям голосования от $2i$ переменных и не входят в пересечение $E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}$, равно числу способов выбрать $2i$ переменных из n , умноженное на число $(|E_{Se}^{2i}| - |E_{Se}^{2i} \cap E_{Fe}^{2i}|)$ для каждой $2i$ переменных:

$$(2^{\binom{2i}{2}} - 2i) \cdot C_n^{2i}.$$

Как отмечалось ранее, множество V_e не содержит функции голосования ни от n переменных, ни от $n - 1$ переменной, поэтому

$$i \in 1, \frac{n}{2} - 1, n \geq 4.$$

Просуммировав по i найденные ранее числа, получим формулу для вычисления $|V_e|$:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} ((2^{\binom{2i}{2}} - 2i) C_n^{2i} + C_n^{2i-1}).$$

Полученную формулу можно упростить:

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} ((2^{\binom{2i}{2}} - 2i) C_n^{2i} + C_n^{2i-1}) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (2^{\binom{2i}{2}} \cdot C_n^{2i} - 2i \cdot C_n^{2i} + C_n^{2i-1}).$$

Введём обозначение $p = C_n^{2i-1}$:

$$p = C_n^{2i-1} = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i+1)!}.$$

Общую сумму можно разделить на 2 части: содержащую и не содержащую множитель p .

$$2i \cdot C_n^{2i} = 2i \cdot \frac{n!}{(2i)!(n-2i)!} = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i)!} = (n-2i+1)p;$$

$$|V_e| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (2^{\binom{2i}{2}} \cdot C_n^{2i} - (n-2i+1)p + p) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (2^{\binom{2i}{2}} \cdot C_n^{2i} + (2i-n)p).$$

Часть суммы, содержащую множитель p , разделим также на 2 части, каждую из которых считаем отдельно.

$$\begin{aligned} (2i-n)p &= (2i-1)p + (1-n)p = (2i-1)C_n^{2i-1} + (1-n)C_n^{2i-1} = \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(2i-2)!(n+1-2i)!} + (1-n)C_n^{2i-1} = n \cdot C_{n-1}^{2i-2} + (1-n)C_n^{2i-1}. \end{aligned}$$

В ходе вычислений неоднократно используется результат суммирования $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i}$:

$$(1 + (-1))^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0; \Rightarrow \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2i+1}; \Rightarrow \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^{n-1}.$$

Подсчитаем первую часть суммы с множителем p :

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C_{n-1}^{2i-2} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-4} = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{n-1}^{2i} \right) - C_{n-1}^{n-2} = 2^{n-2} - n + 1.$$

Подсчитаем вторую часть суммы с множителем p :

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{2i-1} = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-3} = \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1} \right) - C_n^{n-1} = 2^{n-1} - n.$$

Подставим полученные результаты в часть суммы с множителем p :

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (2i - n)p = n(2^{n-2} - n + 1) + (1 - n)(2^{n-1} - n) = (2 - n)2^{n-2}.$$

Число $|V_e|$ может быть представлено в виде:

$$|V_e| = (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} 2^{\left(\frac{2i}{2}\right)} \cdot C_n^{2i}.$$

Теперь подсчитаем число $|V_o|$. E_{S_o} не пересекает E_{F_o} , поэтому множество V_o представляет собой множество функций свободного голосования от n переменных.

Вычисление значения $|V_o|$, также как и вычисление $|V_e|$, разбивается на 2 этапа: суммирование функций свободного голосования, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i$ переменных для каждого i , и суммирование функций голосования, которые без фиктивных переменных представляют собой функции голосования от $2i - 1$ переменной для каждого i .

Множество V_o не содержит функцию голосования от n переменных, поэтому

$$i \in 1, \frac{n-1}{2}, n \geq 3.$$

Проводя аналогичные подсчёты $|V_e|$ вычисления, найдём число $|V_o|$:

$$p = C_n^{2i-1} = \frac{n!}{(2i-1)!(n-2i+1)!};$$

$$|V_o| = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(2^{\left(\frac{2i}{2}\right)} - 2i \right) C_n^{2i} + C_n^{2i-1} \right) = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(2^{\left(\frac{2i}{2}\right)} \cdot C_n^{2i} + (2i - n)p \right).$$

Рассмотрим часть суммы с множителем p :

$$(2i - n)p = n \cdot C_{n-1}^{2i-2} + (1 - n)C_n^{2i-1};$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{n-1}^{2i-2} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-3} = \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-1}^{2i} \right) - C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-2} - 1;$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i-1} = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-2} = \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1} \right) - C_n^n = 2^{n-1} - 1.$$

Подставим полученные результаты в часть суммы с множителем p :

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (2i - n)p = n(2^{n-2} - 1) + (1 - n)(2^{n-1} - 1) = (2 - n)2^{n-2} - 1.$$

Число $|V_o|$ может быть представлено в виде:

$$|V_o| = (2 - n)2^{n-2} - 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{(2i)}{2}} \cdot C_n^{2i}.$$

Числа $|V|$ и $|E_S|$ нам известны, поэтому можно подсчитать $|E| = |E_S| + |V|$.

Пусть $|E_e|$ — количество всех функций голосования от n переменных (включая все функции свободного голосования), где n — чётное, а $|E_o|$ — количество всех функций голосования от n переменных, где n — нечётное.

$$|E_e| = 2^{\frac{\binom{n}{2}}{2}} + |V_e| = 2^{\frac{\binom{n}{2}}{2}} + (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}} = 2^{\frac{\binom{n}{2}}{2}} + (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}};$$

$$|E_o| = 1 + |V_o| = 1 + (2 - n)2^{n-2} - 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}} = (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}}.$$

После всех преобразований получим:

$$|E_e| = 2^{\frac{\binom{n}{2}}{2}} + (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}}; \quad |E_o| = (2 - n)2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}};$$

где $|E_e|$ — нижняя граница для $|MS|$ для чётных n , а $|E_o|$ — нижняя граница для $|MS|$ для нечётных n .

В качестве примера использования полученных формул вычислим значение $|E_e^4|$ для функций от 4 переменных:

$$\begin{aligned} |E_e^4| &= 2^{\frac{\binom{4}{2}}{2}} + |V_e^4| = 8 + |V_e^4|; \\ |V_e^4| &= (2 - 4)2^{4-2} + \sum_{i=1}^{\frac{3}{2}} \binom{4}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}} = -8 + \sum_{i=1}^1 \binom{4}{2i} 2^{\frac{(2i)}{2}} = -8 + 6 \cdot 2 = 4; \\ |E_e^4| &= 8 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Таблицы истинности 8 из 12 функций от 4 переменных множества E_e^4 были построены ранее в Таблице 4. В Таблице 6 представлены оставшиеся 4 функции.

Заключение

В данной работе показано, что функция голосования от нечётного числа переменных является монотонной и самодвойственной. Приведено описание того, как может быть определена функция голосования от чётного числа переменных. Функции с фиктивными переменными, близкие по свойствам к функциям голосования, были названы функциями свободного голосования. Затем было рассмотрено объединение E множества функций голосования и множества функций свободного голосования. Была найдена мощность множества E . Полученное значение $|E|$ предложено в качестве нижней границы для $|MS|$. Для класса монотонных самодвойственных функций от чётного числа переменных нижняя граница была улучшена по сравнению с границами, предложенными ранее, а для функций от нечётного числа переменных нижняя граница дана впервые.

Функции голосования могут быть полезны не только для оценки числа $|MS|$, но и для оценки мощности всего класса монотонных булевых функций. Есть основания полагать, что функции голосования неявно использовались исследователями, пытающимися найти решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций. Поэтому дальнейшие исследования функций голосования остаются актуальными для решения данной проблемы.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Table 6. Functions of free election of 4 variables from the set E_e^4

Таблица 6. Функции свободного голосования от 4 переменных из множества E_e^4

References

- [1] D. J. Kleitman, "On Dedekind's Problem: The Number of Monotone Boolean Functions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 21, no. 3, pp. 677–682, 1969.
- [2] L. Y. Bystrov and V. S. Rublev, "Bulevy funkcii, ne prinadlezhashchie predpolnym klassam", *Zametki po informatike i matematike*, vol. 13, pp. 22–26, 2021.
- [3] L. Haviarova and E. Toman, "The Number of Monotone and Self-Dual Boolean Functions", *JAMSI*, vol. 10, no. 2, pp. 93–111, 2014.
- [4] S. V. Yablonskiy, *Introduction into discrete mathematics*, 5th ed. HSE, 2008.
- [5] G. P. Gavrilov and A. A. Sapozhenko, *Zadachi i uprazhneniya po diskretnoj matematike*. Fizmatlit, 2005.
- [6] A. A. Rubchinskiy, *Diskretnye matematicheskie modeli. Nachal'nye ponyatiya i standartnye zadachi: uchebnoe posobie*. Direct-Media, 2014.
- [7] D. N. Zhuk, "Ot dvuznachnoj k k -znachnoj logike", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, vol. 22, no. 1, pp. 131–149, 2018.
- [8] V. N. Semenchuk, *Diskretnaya matematika. Kurs lekcij*. Francysk Skaryna Homiel State University, 2007.
- [9] A. D. Korshunov, "Reshenie problemy dedekinda o chisle monotonyh bulevykh funkciy", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 233, no. 4, pp. 543–546, 1977.

On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector

M. V. Nevskii¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-92-103](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-92-103)

¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A05, 52B55, 52C07

Research article

Full text in Russian

Received May 6, 2022

After revision May 30, 2022

Accepted June 1, 2022

Let $Q_n = [0, 1]^n$ be the unit cube in $\mathbb{R}^n$ and let $C(Q_n)$ be a space of continuous functions $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ with the norm $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$. By $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ denote a set of polynomials in n variables of degree ≤ 1 , i. e., a set of linear functions on $\mathbb{R}^n$. The interpolation projector $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ with the nodes $x^{(j)} \in Q_n$ is defined by the equalities $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Let $\|P\|_{Q_n}$ be the norm of P as an operator from $C(Q_n)$ to $C(Q_n)$.

If $n+1$ is an Hadamard number, then there exists a non-degenerate regular simplex having the vertices at vertices of Q_n . We discuss some approaches to get inequalities of the form $\|P\|_{Q_n} \leq c\sqrt{n}$ for the norm of the corresponding projector P .

Keywords: Hadamard matrix; regular simplex; linear interpolation; projector; norm

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail Viktorovich Nevskii	orcid.org/0000-0002-6392-7618 . E-mail: mnevsk55@yandex.ru
correspondence author	Head of the Chair, Doctor of Science, Docent.

For citation: M. V. Nevskii, "On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 92-103, 2022.

Об одной оценке для нормы интерполяционного проектора

М. В. Невский¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-92-103](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-92-103)

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 514.17, 517.51, 519.6

Получена 6 мая 2022 г.

Научная статья

После доработки 30 мая 2022 г.

Полный текст на русском языке

Принята к публикации 1 июня 2022 г.

Пусть $Q_n = [0, 1]^n$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, $C(Q_n)$ — пространство непрерывных функций $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$. Через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 , т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(j)} \in Q_n$ определяется равенствами $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Пусть $\|P\|_{Q_n}$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Если $n+1$ — число Адамара, то существует невырожденный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба Q_n . В статье обсуждаются различные подходы к получению оценок вида $\|P\|_{Q_n} \leq c\sqrt{n}$ для нормы соответствующего интерполяционного проектора.

Ключевые слова: матрица Адамара; правильный симплекс; линейная интерполяция; проектор; норма

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил Викторович Невский		orcid.org/0000-0002-6392-7618 . E-mail: mnevsk55@yandex.ru
автор для корреспонденции		Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, доцент.

Для цитирования: М. В. Невский, "On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 92-103, 2022.

Введение

Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутреннейностью. Обозначим через $C(K)$ пространство непрерывных функций $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 , иначе говоря, линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Для $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ через $B(x^{(0)}; R)$ обозначим n -мерный евклидов шар, задаваемый неравенством $\|x - x^{(0)}\| \leq R$, где

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Положим $B_n := B(0; 1)$, $Q_n := [0, 1]^n$, $Q'_n := [-1, 1]^n$.

Пусть S — n -мерный невырожденный симплекс с вершинами $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq n+1$. Введём в рассмотрение следующую *матрицу вершин* этого симплекса:

$$S := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать $S^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ обладают свойством $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$. По нашей терминологии, λ_j называются *базисными многочленами Лагранжа симплекса S* . Для $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Эти равенства означают, что $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки x . Также имеем

$$\lambda_j(x) = \frac{\Delta_j(x)}{\Delta},$$

где $\Delta = \det(S)$, а $\Delta_j(x)$ получается из Δ путём замены j -й строки на строку $(x_1 \dots x_n \ 1)$. Подробнее см. [1, §1.1].

Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(K) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу $S \subset K$, если узлы интерполяции проектора P совпадают с вершинами S . Этот проектор определяется равенствами $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x). \quad (1)$$

Обозначим через $\|P\|_K$ норму проектора P как оператора из $C(K)$ в $C(K)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_K = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|}. \quad (2)$$

Если K — выпуклый многогранник, то максимумы в (2) достаточно брать только по $x \in \text{ver}(K)$. Под $\text{ver}(K)$ понимается совокупность вершин многогранника K .

В настоящей статье рассматривается случай, когда $n + 1$ есть число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n + 1$. Матрицей Адамара порядка m называется квадратная бинарная матрица $\mathbf{H}$, каждый элемент которой равен 1 или -1 и такая что

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{H}^T.$$

Это означает, что строки $\mathbf{H}$ попарно ортогональны относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^m$.

Порядок матрицы Адамара равен 1, 2 или кратен 4 (см. [2]). Однако до сих пор не известно, существует ли матрица Адамара порядка m для любого $m = 4k$. Это одна из самых старых открытых проблем в математике. Утверждение, что для любого m , кратного 4, матрица Адамара существует, называется гипотезой Адамара. Порядки до 1500, для которых матрицы Адамара до сих пор не найдены, равны 668, 716, 892, 956, 1132, 1244, 1388 и 1436. Число $m = 668$ остаётся наименьшим таким порядком с 2005 г. По поводу ссылок см., например, [3, 4].

Две матрицы Адамара называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой путём конечной последовательности следующих операций: умножение строки или столбца на -1 , перестановка строк или перестановка столбцов. С точностью до эквивалентности существует единственная матрица Адамара порядка 1, 2, 4, 8 и 12. Имеется 5 классов эквивалентности матриц Адамара порядка 16, 3 класса порядка 20, 60 классов порядка 24 и 487 классов порядка 28. Для порядков 32, 36 и 40 число классов эквивалентности матриц Адамара существенно больше. Для $n = 32$ имеется по меньшей мере 3 578 006 классов эквивалентности; для $n = 36$ — по меньшей мере 4 745 357 классов эквивалентности (см. [3]).

Пусть Q — произвольный n -мерный куб. Если $n + 1$ — число Адамара, то существует невырожденный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах Q . В статье обсуждаются различные подходы к получению оценок вида $\|P\|_Q \leq c\sqrt{n}$ для нормы соответствующего интерполяционного проектора. Из соображений удобства мы берём $Q = Q_n$ или $Q = Q'_n$.

1. Применение чисел h_n

Обозначим через h_n величину максимального определителя порядка n , состоящего из 0 и 1, через v_n — максимальный объём n -мерного симплекса, содержащегося в кубе Q_n . Эти числа связаны соотношением $h_n = n!v_n$ (см. [5]). Для любого n в Q_n существует симплекс максимального объёма, некоторая вершина которого является вершиной куба. С такими симплексами связано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть S — симплекс максимального объёма в Q_n , одна из вершин которого совпадает с вершиной куба, P — соответствующий интерполяционный проектор. Тогда

$$\|P\|_{Q_n} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины симплекса S . Можно считать, что $x^{(n+1)} = 0$, т. е. матрица вершин имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как S — симплекс максимального объёма в кубе Q_n , то $\text{vol}(S) = v_n$ и $|\Delta| = |\det(S)| = n!v_n = h_n$. Значит, если $x \in \text{ver}(Q_n)$, то $|\Delta_j(x)| \leq |\Delta|$, $1 \leq j \leq n + 1$.

Зафиксируем $x \in \text{ver}(Q_n)$ и рассмотрим определители $\Delta_j(x)$ при $1 \leq j \leq n$. По определению $\Delta_j(x)$ и свойствам определителя имеем:

$$|\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \\ x_1^{(j)} & \dots & x_n^{(j)} & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(j)} & \dots & x_n^{(j)} & \pm 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Мы выделяем в определителях j -ю строку. Поэтому существуют числа u_j , каждое из которых равно 1 или -1 , такие что

$$\sum_{j=1}^n |\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & u_n \end{vmatrix}.$$

Определим n -мерные векторы v и w из 0 и 1 следующим образом. Если $u_j = 1$, то $v_j = 1$, $w_j = 0$, а если $u_j = -1$, то $v_j = 0$, $w_j = 1$. Тогда $u = v - w$, значит,

$$\sum_{j=1}^n |\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & v_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & w_n \end{vmatrix}.$$

Обозначим последние два определителя порядка $n+1$ через d_1 и d_2 . Так как их элементы принадлежат отрезку $[0, 1]$, то $|d_1|, |d_2| \leq h_{n+1}$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^n |\Delta_j(x)| = d_1 - d_2 \leq |d_1| + |d_2| \leq 2h_{n+1}.$$

Поскольку $|\Delta| = h_n$, имеем

$$\sum_{j=1}^n \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n}.$$

Осталось привлечь $j = n+1$. Как отмечалось выше,

$$\frac{|\Delta_{n+1}(x)|}{|\Delta|} \leq 1, \quad x \in \text{ver}(Q_n).$$

Следовательно, для любой вершины куба выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Отсюда

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Теорема доказана. $\square$

Обозначим через θ_n минимальную величину нормы $\|P\|_{Q_n}$ для проектора, узлы которого принадлежат Q_n .

Следствие 1.

$$\theta_n \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1. \quad (4)$$

Сразу получается из (3).

Следствие 2. *Существуют константы $c, c_1 > 0$, не зависящие от n , такие что*

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \geq c\sqrt{n}, \quad \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq c_1\sqrt{n}. \quad (5)$$

Доказательство. Для чисел θ_n автором установлено неравенство $\theta_n \geq \gamma\sqrt{n}$, $\gamma > 0$ не зависит от n (см. [1]). Поэтому левое неравенство в (5) следует из (4). Правое неравенство получается из левого, поскольку $h_n = n!v_n$. $\square$

Отметим более конкретные формы оценок (5). При любом n

$$\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+1}}{h_n} &\geq \frac{\theta_n - 1}{2} > \frac{\sqrt{n-1}}{2e} - \frac{1}{2}, \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{h_{n+1}}{(n+1)h_n} > \frac{\sqrt{n-1}}{2e(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Приведённое здесь доказательство теоремы 1 осуществляется по методу работы [6], где рассматривался случай произвольного n . К сожалению, в рассуждениях [6] позднее был обнаружен пробел. Однако для случая, когда $n+1$ есть число Адамара, теорема 1 позволяет получить точные по порядку n верхние границы чисел θ_n . Для этого мы применим оценки

$$h_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (6)$$

$$h_n \leq \frac{n^{n/2} \sqrt{2n+1}}{2^n}, \quad n - \text{чётное}. \quad (7)$$

Равенство в (6) выполняется тогда и только тогда, когда $n+1$ — число Адамара. Соотношение (6) доказано Адамаром [7], оценка (7) получена Барба [8] (см. [5]).

Следствие 3. *Пусть $n+1$ — число Адамара. Если S — правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба Q_n , то для соответствующего интерполяционного проектора P*

$$\|P\|_{Q_n} \leq \sqrt{2n+3} + 1.$$

Доказательство. Если $n + 1$ — число Адамара, то максимальным объёмом из всех симплексов, содержащихся в Q_n , обладает правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба. Поэтому к симплексу S применима теорема 1, согласно которой

$$\|P\|_{Q_n} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Как отмечалось, в этой ситуации в (6) выполняется равенство:

$$h_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}.$$

Кроме того, так как $n + 1$ является чётным, к h_{n+1} применима оценка (7):

$$h_{n+1} \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2} \sqrt{2n+3}}{2^{n+1}}.$$

Из этих соотношений следует

$$\|P\|_{Q_n} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1 \leq \frac{2(n+1)^{(n+1)/2} \sqrt{2n+3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)^{(n+1)/2}} + 1 = \sqrt{2n+3} + 1.$$

□

Следствие 4. Если $n + 1$ — число Адамара, то $\theta_n \leq \sqrt{2n+3} + 1$.

Верхние оценки следствий 3 и 4 являются неулучшаемыми по порядку n , однако их можно существенно уточнить. Мы сделаем это в двух следующих пунктах.

2. Применение матриц Адамара

Напомним (см. [5]), что число $n + 1$ является адамаровым тогда и только тогда, когда в n -мерный куб можно вписать n -мерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба. Проще всего это можно показать для куба $Q'_n = [-1, 1]^n$. Между матрицами Адамара порядка $n + 1$, последний столбец, который состоит из 1, и n -мерными правильными симплексами, вершины которых находятся в вершинах Q'_n , имеется простое соответствие. Поскольку это соответствие нам потребуется, остановимся на нём подробнее.

Если S — правильный симплекс указанного вида, то его матрица вершин S является матрицей Адамара порядка $n + 1$. Действительно, пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины S . Так как $x^{(j)}$ совпадают с вершинами куба, то элементы матрицы S равны ± 1 , причём её последний столбец состоит из 1. Обозначим через $h^{(j)}$ строки S и убедимся, что эти векторы попарно ортогональны в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку $\|x^{(j)}\| = \sqrt{n}$, симплекс S вписан в n -мерный шар радиуса $\sqrt{n}$. Как известно (см., например, [1]), длина d ребра правильного n -мерного симплекса и радиус R описанного шара связаны равенством

$$d = R\sqrt{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}. \quad (8)$$

Если $R = \sqrt{n}$, то $d = \sqrt{2(n+1)}$. Значит,

$$2(n+1) = \|x^{(j)} - x^{(k)}\|^2 = 2\|x^{(j)}\|^2 - 2(x^{(j)}, x^{(k)}) = 2n - 2(x^{(j)}, x^{(k)}).$$

Получается, что $(x^{(j)}, x^{(k)}) = -1$. Так как строки матрицы S в первых n столбцах содержат координаты вершин симплекса, а последний элемент каждой строки равен 1, то

$$(h^{(j)}, h^{(k)}) = (x^{(j)}, x^{(k)}) + 1 = 0.$$

Итак, векторы $h^{(j)}$ попарно ортогональны в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тем самым S есть матрица Адамара порядка $n + 1$. Для неё

$$S^{-1} = \frac{1}{n+1} S^T. \quad (9)$$

Наоборот, пусть H — матрица Адамара порядка $n + 1$, последний столбец которой состоит из 1. Рассмотрим симплекс S , матрица вершин которого есть H . Это означает, что вершины S задаются строками H (за исключением последней компоненты). Симплекс S вписан в куб Q'_n , причём $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q'_n)$. Если $h^{(j)}$ — строки H , $x^{(j)}$ — вершины S , то $(h^{(j)}, h^{(k)}) = 0$, $(x^{(j)}, x^{(k)}) = -1$, $\|x^{(j)}\|^2 = n$, откуда $\|x^{(j)} - x^{(k)}\|^2 = 2(n+1)$. Поэтому симплекс S является правильным с длиной ребра $\sqrt{2(n+1)}$.

Заметим, что каждая матрица Адамара порядка $n + 1$ эквивалентна матрице вершин некоторого n -мерного правильного симплекса, вписанного в Q'_n . Эта матрица вершин получается из исходной матрицы после умножения некоторых строк на -1 .

Теорема 2. Пусть $n + 1$ — число Адамара, S — n -мерный правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба Q'_n . Тогда для соответствующего интерполяционного проектора $P : C(Q'_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|P\|_{Q'_n} \leq \sqrt{n+1}. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S . Как отмечалось выше, при наших предположениях матрица вершин S является матрицей Адамара порядка $n + 1$, последний столбец которой состоит из 1.

Покажем, что для $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2 = \frac{\|x\|^2 + 1}{n+1}. \quad (11)$$

Пусть $y = (x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Коэффициенты многочлена λ_j составляют j -й столбец матрицы S^{-1} . Поскольку S — матрица Адамара, для неё верно равенство (9), значит,

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n+1} (h^{(j)}, y).$$

Далее, $\frac{h^{(j)}}{\sqrt{n+1}}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(h^{(j)}, y)}{\sqrt{n+1}} \frac{h^{(j)}}{\sqrt{n+1}}, \quad (y, y) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(h^{(j)}, y)^2}{n+1}.$$

Отсюда имеем

$$\|x\|^2 + 1 = (y, y) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(h^{(j)}, y)^2}{n+1} = (n+1) \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2.$$

Из последнего соотношения и следует (11).

Если x — вершина Q'_n , то $\|x\|^2 = n$ и (11) даёт $\sum \lambda_j(x)^2 = 1$. Применяя неравенство Коши, для $x \in \text{ver}(Q'_n)$ получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \leq \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}.$$

Пусть $P : C(Q'_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, соответствующий симплексу S . Тогда

$$\|P\|_{Q'_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \leq \sqrt{n+1}.$$

Теорема доказана. $\square$

Из соображений подобия результат теоремы 2 переносится на любой n -мерный куб, например, на куб $Q_n = [0, 1]^n$.

Следствие 5. Если $n+1$ — число Адамара, то $\theta_n \leq \sqrt{n+1}$.

Результат следствия 5 известен (см. [1, 9]), однако в приведённом способе его доказательства связь с матрицами Адамара является более ясной.

Заметим, что n -мерные правильные симплексы с вершинами в вершинах куба могут быть расположены по-разному относительно вершин и граней куба. Это легко обнаружить, если нормы соответствующих проекторов различаются. Но это возможно и для правильных симплексов, дающих равные нормы проекторов. Остановимся подробнее на способе, опирающемся на сравнение μ -вершин куба относительно различных симплексов.

Понятие μ -вершины единичного куба Q_n относительно содержащегося в нём симплекса было введено автором в статье [10]. Эквивалентные результаты получаются, если вместо Q_n рассмотреть произвольный n -мерный куб Q , что мы и сделаем.

Пусть $1 \leq \mu \leq n$. Будем говорить, что точка $x \in \text{ver}(Q)$ является μ -вершиной куба Q относительно симплекса $S \subset Q$, если для интерполяционного проектора $P : C(Q) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство

$$\|P\|_Q = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|,$$

причём среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных. Это понятие связано с соотношениями между нормой $\|P\|_Q$ и величиной

$$\xi(Q; S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q \subset \sigma S\}.$$

Здесь σS есть результат гомотетии симплекса S относительно его центра тяжести с коэффициентом σ . Число $\xi(Q; S)$ называется коэффициентом поглощения куба Q симплексом S . Как доказано в [10], для проектора $P : C(Q) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и соответствующего симплекса S

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_Q - 1) + 1 \leq \xi(Q; S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_Q - 1) + 1. \quad (12)$$

Равенство справа в (12) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q относительно S . Если для некоторого μ имеется μ -вершина Q относительно S , то

$$\frac{n+1}{2\mu} (\|P\|_Q - 1) + 1 \leq \xi(Q; S).$$

Разумеется, симплексы, имеющие различные наборы μ -вершин относительно содержащего их куба, располагаются относительно вершин куба по-разному, даже если нормы их проекторов совпадают. Эти симплексы неэквивалентны в следующем смысле: один из них нельзя перевести в другой при помощи ортогонального преобразования, оставляющего куб на месте. Приведём некоторые примеры, взяв $Q = Q'_n$.

При получении оценок минимальных норм проекторов в [11] обсчитывались, в частности, n -мерные правильные симплексы, возникающие из различных матриц Адамара одного порядка $n + 1$. При $n = 15$ порядок матриц равен 16. С точностью до эквивалентности имеется пять таких матриц Адамара. Они соответствуют пяти симплексам, описанным в таблице 1. Результаты этих вычислений автору любезно предоставил А. Ю. Ухалов.

Table 1. Regular simplices for $n = 15$
Таблица 1. Правильные симплексы при $n = 15$

S	$\ P\ _{Q'_{15}}$	Значения μ	Число μ -вершин куба Q'_{15}
S_1	4	6	$m_6 = 448$
S_2	4	6	$m_6 = 192$
S_3	4	6	$m_6 = 64$
S_4	$\frac{7}{2}$	4, 5, 6, 8	$m_4 = 896, m_5 = 1344, m_6 = 5376, m_8 = 1344$
S_5	$\frac{7}{2}$	4, 5, 6, 8	$m_4 = 896, m_5 = 1344, m_6 = 5376, m_8 = 1344$

Через m_μ обозначается количество μ -вершин куба Q'_n относительно каждого симплекса. Для остальных $1 \leq \mu \leq 15$, кроме отмеченных в таблице, числа m_μ равны нулю. Каждый из симплексов S_1, S_2 и S_3 порождает одну и ту же норму проектора и обладает только 6-вершинами. Но числа 6-вершин куба относительно этих симплексов различны, поэтому симплексы попарно неэквивалентны. Любой из них в этом смысле также неэквивалентен как S_4 , так и S_5 . У последних симплексов и нормы, и наборы μ -вершин совпадают. Получается также, что $\theta_{15} \leq \frac{7}{2} = 3.5$. Это точнее, чем оценка $\theta_{15} \leq 4$ следствия 5 для $n = 15$.

Другой пример связан с $n = 23$. В статье [12] описываются результаты анализа шестидесяти правильных симплексов, вписанных в Q'_{23} . Эти симплексы построены из 60 имеющихся попарно неэквивалентных матриц Адамара порядка 24. Для всех симплексов, за исключением симплексов с номерами 16, 53, 59 и 60, норма проектора равна $\frac{14}{3} = 4.6666\dots$, а для каждого из этих четырёх симплексов норма проектора равна $\frac{9}{2} = 4.5$. В частности, это ведёт к оценке $\theta_{23} \leq 4.5$, отмеченной и в [11]. Это неравенство точнее, чем оценка $\theta_{23} \leq \sqrt{24} = 4.8989\dots$ следствия 5 для $n = 23$. Каждый из четырех исключительных симплексов неэквивалентен любому из 56 остальных.

Несмотря на возможные различия, для каждого правильного симплекса с вершинами в вершинах куба справедлива верхняя оценка (10). Вписанные правильные симплексы, для которых $\|P\|_{Q'_n} = \sqrt{n+1}$, существуют хотя бы при $n = 1, n = 3$ и $n = 15$. Вопрос о полном описании размерностей n с таким свойством является открытым.

3. Связь с интерполяцией на евклидовом шаре

Правильный симплекс, вписанный в n -мерный шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре. Других симплексов, обладающих этим свойством нет (см. [13–15]). В случае, если $n + 1$ — число Адамара, аналогичным свойством по отношению к n -мерному кубу обладает правильный симплекс, вписанный в куб. При этом норма интерполяционного проектора, соответствующего такому симплексу, и на кубе, и на шаре имеет одну и ту же верхнюю границу $\sqrt{n+1}$.

В этом пункте мы дадим ещё одно доказательство теоремы 2. Оно выглядит более коротким, чем доказательство из предыдущего пункта, однако опирается на соотношения статьи [16], полученные совсем не простым путём. Исходным пунктом этого подхода является интерполяция на шаре.

Пусть сначала S — правильный симплекс, вписанный в n -мерный шар $B = B(x^{(0)}; R)$, $P : C(B) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующий интерполяционный проектор. Очевидно, $\|P\|_B$ не зависит ни от центра $x^{(0)}$ и радиуса R шара, ни от выбора правильного симплекса, вписанного в этот шар. Иначе говоря, $\|P\|_B$ зависит только от размерности n . Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|, \quad 0 \leq t \leq n+1. \quad (13)$$

Обозначим $a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть s . Как доказано в [16],

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

С применением этого равенства в [16] установлено, что

$$\sqrt{n} \leq \|P\|_B \leq \sqrt{n+1}. \quad (14)$$

При этом $\|P\|_B = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Из правого неравенства (14) немедленно следует результат теоремы 2. Пусть $n+1$ — число Адамара, P — интерполяционный проектор, узлы которого являются вершинами Q'_n и образуют правильный симплекс S . Поскольку куб Q'_n вписан в единичный шар B_n , то в этот шар вписан и правильный симплекс S . Остаётся применить формулу (2) для нормы проектора на кубе и на шаре, а также верхнюю оценку (14) при $B = B_n$:

$$\|P\|_{Q'_n} = \max_{x \in Q'_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \leq \max_{x \in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}.$$

Неравенство (10) теоремы 2 получено.

Достижение верхней границы $\sqrt{n+1}$ нормы проектора на шаре и на кубе происходит по-разному. Для размерностей вида $n = m^2 - 1$, и только в этих случаях, равенство $\|P\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ имеет место для любого правильного симплекса, вписанного в B_n . Если $n+1$ — число Адамара, равенство $\|P\|_{Q'_n} = \sqrt{n+1}$ может выполняться как для всех правильных симплексов с вершинами в вершинах куба ($n = 1, n = 3$), так и для части из них ($n = 15$), а может не выполняться вообще ($n = 7$).

Интересно, что связь с конструкциями на шаре прослеживается и в доказательстве теоремы 2, данном в пункте 2 (см. (8)).

References

- [1] M. V. Nevskii, *Geometricheskie Ocenki v Polinomial'noj Interpolyacii*. Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, p. 218, in Russian.
- [2] M. Hall Jr., *Combinatorial Theory*. Mass., Toronto, London: Blaisdall Publishing Company, 1967.
- [3] K. J. Horadam, *Hadamard Matrices and Their Applications*. Princeton: Princeton University Press, 2007.
- [4] P. K. Manjhi and M. K. Rama, “Some new examples of circulant partial Hadamard matrices of type 4 – $H(k \times n)$ ”, *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 21, no. 5, pp. 2559–2564, 2022.
- [5] M. Hudelson, V. Klee, and D. Larman, “Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra and its applications*, vol. 241–243, pp. 519–598, 1996.
- [6] M. V. Nevskii, “Minimal projectors and largest simplices”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 3–10, 2007.

- [7] J. Hadamard, “Résolution d’une question relative aux déterminants”, *Bull. Sciences Math. (2)*, vol. 17, pp. 240–246, 1893.
- [8] G. Barba, “Intorno al teorema di Hadamard sui determinanti a valore massimo”, *Glornale Mat. Battaglini (3)*, vol. 71, pp. 70–86, 1933.
- [9] M. V. Nevskii, “Estimates for the minimal norm of a projector in linear interpolation over the vertices of an n -dimensional cube”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 9–19, 2003.
- [10] M. V. Nevskii, “On a certain relation for the minimal norm of an interpolation projector”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 24–43, 2009.
- [11] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, “On optimal interpolation by linear functions on an n -dimensional cube”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 291–311, 2018. DOI: [10.18255/1818-1015-2018-3-291-311](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-3-291-311).
- [12] I. S. Kudryavcev, E. A. Ozerova, and A. Y. Ukhalov, “Novye ocenki dlya norm minimal’nyh proektorov”, in *Sovremennye Problemy Matematiki i Informatiki*, vol. 17, in Russian, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2017, pp. 74–81.
- [13] L. Fejes Tóth, *Regular Figures*. New York: Macmillan/Pergamon, 1964.
- [14] D. Slepian, “The content of some extreme simplices”, *Pacific J. Math*, vol. 31, pp. 795–808, 1969.
- [15] D. Vandev, “A minimal volume ellipsoid around a simplex”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, vol. 45, no. 6, pp. 37–40, 1992.
- [16] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, “Linear interpolation on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$ ”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 279–296, 2019. DOI: [10.18255/1818-1015-2019-2-279-296](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2019-2-279-296).

Enumeration Degrees of the Bounded Sets

B. Y. Solon¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-104-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-104-114)

¹Ivanovo State University, 39 Ermaka str, Ivanovo 153025, Russia.

MSC2020: 03D25

Research article

Full text in Russian

Received April 27, 2022

After revision May 23, 2022

Accepted May 25, 2022

The term “total enumeration degree” is related to the fact that the e-degree is total if and only if it contains a graph of some total function. In a number of works by the author and a group of mathematicians from the University of Wisconsin-Madison, the so-called “graph-cototal enumeration degrees” were considered, i. e. e-degrees containing the complement of the graph of some total function $f(x)$. In this article, the next step is taken – the enumeration degrees of sets bounded from above or below by a graph of a total function are considered. More precisely, the set A is bounded from above if $A = \{\langle x, y \rangle : y < f(x)\}$ for some total function $f(x)$ and the set A is bounded from below if $A = \{\langle x, y \rangle : y > f(x)\}$ for some total function $f(x)$.

The article presents a number of results showing the existence of nontotal enumeration degrees containing bounded sets, and the constructed e-degrees are quasi-minimal. An important result is the one stating that bounded sets have the Friedberg property related to the jump inversion.

Keywords: enumeration degrees; quasi-minimal enumeration degrees; bounded sets

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Boris Yakovlevich Solon
correspondence author

orcid.org/0000-0002-4037-1610. E-mail: bysolon@gmail.com

Head of the Department of Fundamental Mathematics, Doctor of Science, Professor.

For citation: B. Y. Solon, “Enumeration Degrees of the Bounded Sets”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 104-114, 2022.

Степени перечислимости ограниченных множеств

Б. Я. Солон¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-104-114](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-104-114)

¹Ивановский государственный университет, ул. Ермака, д.39, г. Иваново, 153025 Россия.

УДК 510.676, 519.7

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 27 апреля 2022 г.

После доработки 23 мая 2022 г.

Принята к публикации 25 мая 2022 г.

Термин «тотальная степень перечислимости» связан с тем, что е-степень тотальна тогда и только тогда, когда она содержит график некоторой тотальной функции. В ряде работ автора и группы математиков из University of Wisconsin-Madison рассматривались так называемые «граф-кототальные степени перечислимости», т. е. е-степени, содержащие дополнение графика некоторой тотальной функции $f(x)$. В данной статье сделан следующий шаг – рассмотрены степени перечислимости множеств, ограниченных сверху или снизу графиком тотальной функции. Более точно, множество A ограничено сверху, если $A = \{\langle x, y \rangle : y < f(x)\}$ для некоторой тотальной функции $f(x)$ и множество A ограничено снизу, если $A = \{\langle x, y \rangle : y > f(x)\}$ для некоторой тотальной функции $f(x)$. В статье приводятся ряд результатов, показывающих существование нетотальных степеней перечислимости, содержащих ограниченные множества, причем построенные е-степени являются квазиминимальными. Важным является результат, утверждающий, что ограниченные множества обладают свойством Фридберга, связанным с инверсией скачка.

Ключевые слова: степени перечислимости; квазиминимальные степени перечислимости; ограниченные множества

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Борис Яковлевич Солон
автор для корреспонденции

orcid.org/0000-0002-4037-1610. E-mail: bysolon@gmail.com

Заведующий кафедрой фундаментальной математики, доктор физ.-мат. наук, профессор.

Для цитирования: B. Y. Solon, “Enumeration Degrees of the Bounded Sets”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 104-114, 2022.

Введение

Для произвольного множества A e -степени $\deg_e(A)$ и $\deg_e(\bar{A})$ не обязательно должны быть сравнимы. Чтобы потребовать их сравнимости, в статье [1] предложено выделить два интересных подкласса e -степеней. Первый был введен одновременно с самими степенями перечислимости. Множество A называется *тотальным*, если $\bar{A} \leq_e A$, и e -степень тотальной, если она содержит некоторое тотальное множество. Заметим, что A — тотальное множество тогда и только тогда, когда $A \equiv_e A \oplus \bar{A}$. Так как каждое множество вида $A \oplus \bar{A}$ тотально, то тотальные e -степени в точности e -степени множеств $A \oplus \bar{A}$ для некоторого A . Фактически, отображение $A \rightarrow A \oplus \bar{A}$ индуцирует изоморфизм между структурой T -степеней и структурой тотальных e -степеней.

Термин «тотальный» связан с тем, что e -степень тотальна тогда и только тогда, когда она содержит график некоторой тотальной функции. В частности, если A — тотальное множество, то $\deg_e(A)$ содержит график характеристической функции множества A .

Второй подкласс появляется, если перевернуть отношение сводимости между A и $\bar{A}$. Множество A называется *ко-тотальным*, если $A \leq_e \bar{A}$, и e -степень *ко-тотальной*, если она содержит некоторое ко-тотальное множество.

Определение 1. Множество A называется *граф-кототальным*, если $A = \bar{f}$, где $\bar{f} = \{\langle x, y \rangle : y \neq f(x)\}$, для некоторой тотальной функции f .

Ясно, что если A граф-кототальное множество, то $A \leq_e \bar{A}$, т. е. любое граф-кототальное множество является ко-тотальным. В статье [1] доказано, что существуют ко-тотальные множества, которые не являются граф-кототальными. Вместе с дополнением графика тотальной функции можно рассматривать и два его подмножества $\hat{f} = \{\langle x, y \rangle : y < f(x)\}$ и $\check{f} = \{\langle x, y \rangle : y > f(x)\}$.

Определение 2. Множество A называется *ограниченным сверху*, если $A = \hat{f}$ для некоторой тотальной функции f . Множество A называется *ограниченным снизу*, если $A = \check{f}$ для некоторой тотальной функции f .

Впервые понятие ограниченного сверху множества было введено в совместной статье [2]. В этой работе доказаны следующие результаты.

Теорема 1. Для любой тотальной невычислимой функции f такой, что множество $\omega \setminus \{x : \langle x, i \rangle \in \text{graph}(f) \wedge i \leq 1\}$ бесконечно, существует тотальная функция h такая, что $\hat{h} \subseteq \hat{f}$, $h \leq_e f$ и $A = \hat{f} \wedge \hat{h}$ является $\hat{f}$ — квазимиимальным множеством.

Теорема 2. Любая тотальная e -степень $\mathbf{a} \geq 0'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\deg_e(\hat{f})$ — квазимиимальная e -степень.

Теорема 3. Для каждой тотальной e -степени $\mathbf{a} \geq 0'$ существует тотальная функция f такая, что $\mathbf{b} = \deg_e(\hat{f})$ — квазимиимальная e -степень и $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$.

В дальнейшем e -степени ограниченных сверху множеств изучались в статье моего аспиранта С. Рожкова [3]. Им были получены следующие результаты:

1. Для любой тотальной e -степени $\mathbf{a} \geq 0'$ существует e -степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{b} \neq \deg_e(\hat{f})$ для любой тотальной функции $f \in \mathbf{a}$.
2. Пусть $\mathbf{a}$ — тотальная e -степень и $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ — произвольная e -степень, тогда существует e -степень $\mathbf{c} \neq \deg_e(\hat{f})$ для некоторой тотальной функции $f \in \mathbf{a}$, такая, что $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cap \mathbf{c}$.
3. Для любой e -степени $\mathbf{b} > 0'$ существует квазимиимальная e -степень $\mathbf{a} \neq \deg_e(\hat{f})$ для некоторой тотальной функции f , такая, что $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}'$.

Цель данной статьи — продолжить изучение e -степеней ограниченных множеств, обратив особое внимание на e -степени ограниченных снизу множеств.

1. Основные определения и предварительные утверждения

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [4]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; $A, B, \dots, X, Y$ (с индексами или без) — подмножества ω . Пусть, как обычно, $\langle x, y \rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y) . Если z — канторовский номер пары (x, y) , то пусть $\langle z \rangle_1 = x$ и $\langle z \rangle_2 = y$. Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции $\alpha : \omega \rightarrow \omega$ пусть $\text{dom}(\alpha)$, $\text{ran}(\alpha)$ и $\text{graph}(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x) \rangle : x \in \text{dom}(\alpha)\}$ область определения, множество значений и график α соответственно. Будем писать $\alpha(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom}(\alpha)$ и $\alpha(x) \uparrow$, если $x \notin \text{dom}(\alpha)$. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Функция α называется *тотальной*, если $\text{dom}(\alpha) = \omega$. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения тотальных функций. Множество тотальных функций обозначим через TF . Множество A называется *однозначным*, если $A = \text{graph}(\alpha)$ для некоторой частичной функции α . Пусть $\tau^{-1}(X) = \{(x, y) : \langle x, y \rangle \in X\}$, тогда для однозначного множества A имеем $\tau^{-1}(A) = \alpha$, где $A = \text{graph}(\alpha)$. Обозначим через SV класс всех однозначных множеств. С целью полноты изложения приведем ряд основных определений из монографии [4] с некоторыми терминологическими изменениями.

Определение 3. Любое всюду определенное однозначное отображение $\Phi : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ называется *оператором*.

Определение 4. *Оператор*

$$\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u \rangle \in W_z \ \& \ D_u \subseteq X]\}$$

называется *e-оператором с геделевым номером z* .

Очевидно, что любой e-оператор Φ обладает свойствами:

- (i) *Монотонности* $A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$,
- (ii) *Непрерывности* $(\forall x)[x \in \Phi(A) \Rightarrow (\exists D)[D \subset A \wedge x \in \Phi(D)]]$.

Определение 5. $A \leq_e B \Leftrightarrow \exists z[A = \Phi_z(B)]$, $\deg_e(A) = \{X : X \equiv_e A\}$ — *e-степень* множества A , $\deg_e(A) \leq \deg_e(B) \Leftrightarrow A \leq_e B$, $\alpha \leq_e B \Leftrightarrow \text{graph}(\alpha) \leq_e B$, D_e — *частично упорядоченное множество (верхняя полурешетка) e-степеней*.

Пусть $\varphi_z^A(x) = \{z\}^A(x)$ — функция, вычислимая на машине Тьюринга P_z с оракулом для множества A .

Определение 6. Функция η называется *A-частично вычислимой*, если $\eta = \varphi_z^A$ для некоторого z . Функция f называется *A-вычислимой*, если $f = \varphi_z^A$ для некоторого z и $\text{dom}(\varphi_x^A) = \omega$.

Множество A *вычислимо в B* , если характеристическая функция $\chi_A(x)$ — B -вычислима. Множество A *вычислимо перечислимо в B* , если $A = \emptyset$ или $A = \text{ran}(f)$ для некоторой B -вычислимой функции f .

Важную роль в теории вычислимости играет операция скачка, применяемая к множествам и степеням. Понятие скачка привязано к алгоритмической сводимости, поэтому рассматриваются скачки, связанные с тьюринговой сводимостью и с e-сводимостью. Дадим эти определения и уточним роль скачков с точки зрения соответствующей сводимости.

Определение 7. Множество $J_T(A) = \{x : \varphi_x^A(x) \downarrow\} = \{x : x \in W_x^A\} = K^A$ называется *T-скачком* множества A .

T -скачок множества A — это множество $J_T(A)$, которое решает проблему останковки для всех вычислительных относительно A процедур: «Для любого данного n , $n \in W_n^A$ или нет?».

e -скачок множества A должен быть таким множеством, которое отвечает на вопрос: «Для любых данных x и n , $x \in \Phi_n(A)$ или нет?». Следовательно, определение e -скачка множества A должно быть сконструировано таким образом, чтобы он являлся наименьшим (по e -сводимости) множеством, к которому e -сводится характеристическая функция каждого множества, e -сводимого к A .

Пусть $A^* = \{x : x \in \Phi_x(A \oplus \bar{A})\}$ и $A_0^* = \{\langle x, z \rangle : x \in \Phi_z(A \oplus \bar{A})\}$.

Предложение 1. Для любого множества A

- 1.1 $A^* \equiv A_0^*$;
- 1.2 $A^* \equiv J_T(A)$;
- 1.3 $\bar{A}^* \leq_e A \oplus \bar{A}$;
- 1.4 $A^* \equiv_e A \oplus \bar{A}$.

Из предложения 1.2 следует, что операция $*$ совпадает с точностью до изоморфизма с T -скачком. Однако как показывает следующее предложение, рассматривать ее как e -скачок в D_e в соответствии с требованиями, которые мы накладываем на скачки множеств, нельзя.

Предложение 2. Существуют множества A и B , такие, что $A \equiv_e B$ и $A^* \not\equiv_e B^*$.

Доказательство. Пусть $A = C^*$ и $B = C \oplus \bar{C}$ для некоторого множества C . По предложению 1.4 $A \equiv_e B$. Далее, имеем $A^* = (C^*)^* \equiv_e C^* \oplus \bar{C}^*$ и $B^* = (C \oplus \bar{C})^* \equiv_e (C \oplus \bar{C}) \oplus C \oplus \bar{C} \equiv_e C \oplus \bar{C}$. Если предположить, что $A^* \equiv_e B^*$, то $C^* \oplus \bar{C}^* \equiv_e C \oplus \bar{C}$, откуда следует, в частности, что $\bar{C}^* \leq_e C \oplus \bar{C}$. Это противоречит предложению 1.3. $\square$

Пусть $A^e = \{x : x \in \Phi_x(A)\}$ и $A_0^e = \{\langle x, z \rangle : x \in \Phi_z(A)\}$. В статье [5] множество A^e называется e -цилиндрификацией множества A .

Предложение 3. Для любого множества A

- 3.1 $A \leq_1 A^e \leq_e A$;
- 3.2 $A \leq_e B \iff A \leq_1 B^e \iff A^e \leq_1 B^e$;
- 3.3 $\bar{A}^e \not\leq_e A$;
- 3.4 $A^e \equiv A_0^e$.

Из свойства 3.1 следует, что операция e -цилиндрификации не может играть роль e -скачка, т.к. примененная к e -степени $\deg_e(A)$ оставляет её на месте в D_e .

Пусть $A^\circ = \bar{A}^e$. В статье [1] множество A° называется *скипом* множества A .

Предложение 4. Для любых множеств A и B

- 4.1 $\forall X [X \in \deg_e(A) \rightarrow \bar{X} \leq_e A^\circ]$;
- 4.2 $A \equiv_e B \rightarrow A^\circ \equiv_e B^\circ$;
- 4.3 $A^\circ \not\leq_e A$;
- 4.4 $\bar{K} \leq_e A \rightarrow \exists B [B^\circ \equiv_e A]$ (аналог теоремы Фридберга об инверсии скачка).

Несмотря на сходство операции *скип* с T -скачком в предыдущих позициях, полного соответствия нет. Можно привести примеры множеств, для которых $A \not\leq_e A^\circ$. Если изменить определение операции *скип*, чтобы гарантировать все свойства скачка, то возникает определение e -скачка, введенное Купером. (Купер в [6], 1984 г., благодарит своего ученика Макэвоя за помощь в обеспечении правильного определения оператора e -скачка. Сорби заметил, что оригинальное «неправильное» определение Купера на самом деле было определением оператора *скип*.)

Определение 8. Множество $J_e(A) = A \oplus \bar{A}^e$ называется *e-скачком* множества A . Будем также использовать обозначение A' вместо $J_e(A)$.

Предложение 5. Для любых множеств A и B

- 5.1 $A \leq_e B \rightarrow A' \leq_1 B'$;
- 5.2 $A' \equiv (A^e)^*$;
- 5.3 $A^* \leq_1 A' \leq_1 (A^*)^*$;
- 5.4 $\exists B[A \equiv B^e] \rightarrow A' \equiv A^*$ (аналог теоремы Фридберга об инверсии скачка);
- 5.5 $\bar{A} \leq_e A \rightarrow A' \equiv (A^*)^*$;
- 5.6 $A \leq_1 A^* \leq_1 A'$;
- 5.7 $A'' \equiv (A')^*$;
- 5.8 $\exists A, B[A' \leq_1 B' \wedge A \not\leq_e B]$.

Из предложения 5.1 следует, что *e-скачок* множества корректно индуцирует оператор скачка на *e-степенях*. Будем писать a' для скачка *e-степени* a . Определение *e-скачка* гарантирует, что $A <_e A'$, что и ожидается от скачка. С другой стороны, мы теряем два свойства, которые *скачок* разделяет с *T-скачком*. *e-скачок* всегда тотален, поэтому он не может быть отображен на все *e-степени* выше $0_e'$. Однако можно доказать аналог теоремы Фридберга для любой тотальной степени выше $0_e'$. Предложение 5.8 показывает, что $A' \leq_1 B'$ не обязательно означает, что $A \leq_e B$. Таким образом, ни *скачок*, ни *e-скачок* не являются совершенным аналогом скачка Тьюринга. Справедливости ради, замечу, что первое определение *e-скачка* множества дал М. Г. Розинас в малодоступной статье [7]. Отмечу также, что в статье [8] было введено еще одно определение *e-скачка* множества. Можно доказать, что все *e-скачки* (Rozinas, Cooper, McEvoy), примененные к одному множеству A принадлежат одной *e-степени* $\deg_e(A')$. В дальнейшем будем использовать для *e-скачка* определение 8 и обозначения, приведенные в этом определении.

2. Ограниченные множества и их степени пересчитываемости

Перейдем к рассмотрению граф-кототальных и ограниченных множеств в смысле определения 2. Простейшие свойства ограниченных множеств приведены в следующем предложении.

Предложение 6. Для любой тотальной функции f и любого множества A

- 6.1 $\bar{f} \leq_e f; \hat{f} \leq_e f; \check{f} \leq_e f$;
- 6.2 $\hat{c}_A \equiv_e A$;
- 6.3 $\bar{A} \leq_e \check{c}_A$;
- 6.4 $\hat{c}_A \equiv_e c_A$;
- 6.5 если f — вычислимая функция, то $\bar{f} \equiv_e \hat{f} \equiv_e \check{f}$;
- 6.6 $f \leq_e \check{f} \leftrightarrow \check{f} \equiv_e c_{\text{graph}(f)}$.

Доказательство. Утверждения 6.1, 6.2, 6.4 и 6.5 очевидны.

6.3 следует из эквивалентности $\forall x[x \in \bar{A} \leftrightarrow \langle x, 1 \rangle \in \check{c}_A]$.

6.6. Пусть $f \leq_e \check{f}$, с учетом 6.1 получаем, что $f \equiv_e \check{f}$. Кроме того, для любой тотальной функции f имеем *e-эквивалентность* $f \equiv_e c_{\text{graph}(f)}$, следовательно, $\check{f} \equiv_e c_{\text{graph}(f)}$. Обратно, пусть $\check{f} \equiv_e c_{\text{graph}(f)}$, тогда $f \equiv_e \check{f}$, в частности, $f \leq_e \check{f}$. $\square$

Следствие 1. (i) Если A — в.п., невычислимое множество, то $c_A \not\leq_e \hat{c}_A$;

(ii) Если A — в.п., невычислимое множество, то $c_A \leq_e \check{c}_A$.

Доказательство. (i). Пусть A — в.п., невычислимоe множество, тогда $\text{graph}(c_A)$ не является в.п. множеством. В то же время, в силу утверждения 6.2 мы имеем, что $\text{graph}(\hat{c}_A)$ является в.п. множеством. Если предположить, что $c_A \leq_e \hat{c}_A$, то получаем, что $\text{graph}(c_A)$ является в.п., противоречие.

(ii). Так как A — в.п., невычислимоe множество, то $A \leq_e \check{c}_A$. Кроме того, $\forall x[x \in \bar{A} \iff \langle x, 1 \rangle \in \check{c}_A]$, поэтому $\bar{A} \leq_e \check{c}_A$. Следовательно, $c_A \leq_e \check{c}_A$. $\square$

Теорема 4. *Существует тотальная функция f такая, что*

- (i) $\hat{f}$ — квазиминимальное множество;
- (ii) $\check{f}$ — квазиминимальное множество;
- (iii) $\hat{f}$ и $\check{f}$ — оба квазиминимальные множества.

Доказательство. (i). Это утверждение доказано в более сильной форме в статье [2].

(ii). Докажем более сильное утверждение: любая тотальная e -степень $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\deg_e(\check{f})$ — квазиминимальная e -степень. Пусть $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ — тотальная e -степень, тогда [9] в силу тотальности e -степени $\mathbf{a}$ существует ретрассируемое множество $A \in \mathbf{a}$. Это значит, что существует ч. в. функция ψ такая, что $A \in \text{dom}(\psi)$, $\psi(a_0) = a_0$ и $\psi(a_{n+1}) = a_n$ для всех $n \in \omega$, где $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ — прямой пересчет множества A . Можно предполагать, что при этом $0 \notin A$.

Построим тотальную функцию f с помощью конструкции, вычислимой относительно A , такую, что $\text{ran}(f) = A \cup \{0\}$ и $\deg_e(\check{f})$ — квазиминимальная e -степень.

На шаге $t + 1$ через f_t обозначен начальный сегмент функции f , построенный к концу шага t . Пусть $x_t = \max(\text{dom}(f_t)) + 1$ и $X_t = \{x : x \geq x_t\}$. Символ F будем использовать в качестве переменной для конечных множеств.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \emptyset$ и $x_0 = 0$.

Шаг $3s + 1$. Полагаем $f_{3s+1} = f_{3s} \cup \{(x_{3s}, a_s)\}$.

Шаг $3s + 2$. Проверим выполнимость условия

$$\exists y[y \in A \wedge \langle x_{3s+2}, y \rangle \in W_s]. \quad (1)$$

Если (1) выполнено, то пусть y^* — наименьшее y , для которого выполнено условие (1). Пусть $y^* = a_n$ для некоторого n . Полагаем

$$f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup \{(x_{3s+1}, a_n)\}.$$

Если (1) не выполнено, то полагаем

$$f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup \{(x_{3s+1}, 0)\}.$$

Шаг $3s + 3$. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[(F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega') \wedge (\Phi_s(F) \text{ — неоднозначное множество})], \quad (2)$$

где $\omega' = \{1, 2, \dots\}$.

Если условие (2) выполняется, то пусть F^* — конечное множество, удовлетворяющее (2) и имеющее наименьший канонический индекс. Пусть $x^* = \max\{x : \exists y[\langle x, y \rangle \in F^*]\}$. Если $x^* \geq x_{3s+2}$, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2} \cup \{(x_{3s+2}, 0), \dots, (x^*, 0)\}.$$

Если $x^* < x_{3s+2}$, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2}.$$

Если условие (2) не выполняется, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2}.$$

Описание конструкции закончено. Из конструкции следует, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ для всех $s \in \omega$, поэтому определение $f = \bigcup_{s \in \omega} f_s$ корректно. Докажем, что функция f удовлетворяет условию теоремы, т.е. что множество $\check{f} = \{\langle x, y \rangle : y > f(x)\}$ квазиминимально.

Заметим, что шаги $3s + 2$ и $3s + 3$ вычислимы в множестве $\bar{K}_0 \oplus A$, где $K_0 = \{\langle x, y \rangle : x \in W_y\}$, т.е. проверка условий, которая производится на этих шагах, вычислима с оракулом для множества $\bar{K}_0 \oplus A$. Шаги $3s + 1$, $s \in \omega$ вычислимы относительно множества A . Так как, по условию, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$, поэтому $\bar{K}_0 \leq_T A$ и вся конструкция построения функции эффективна с оракулом для множества A . Следовательно, $f \leq_T A$. Из того, что f — тотальная функция, а A — ретрассируемое множество, получаем, что $f \leq_e A$. Так как $A \leq_e f$ в силу того, что $\text{ran}(f) \setminus \{0\} = A$, то $f \equiv_e A$.

Шаги $3s + 2$ обеспечивают $\check{f} \neq W_s$ для всех $s \in \omega$. В самом деле, если на некотором шаге $3s + 2$ выполнено условие (1), то после определения начального сегмента $f_{3s+2} \subseteq f$ имеем $\langle x_{3s+2}, a_n \rangle \in W_s$ и $\langle x_{3s+2}, a_n \rangle \notin \check{f}$. Если (1) не выполнено, то $\langle x_{3s+2}, a_0 \rangle \notin W_s$ и $\langle x_{3s+2}, a_0 \rangle \in \check{f}$ и $a_0 > 0$.

Наконец, докажем, что $\check{f}$ — квазиминимальное множество. Пусть для некоторой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \check{f}$, тогда $\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$ для некоторого s . Рассмотрим шаг $3s + 3$. Если на этом шаге условие (2) не выполняется, то верно

$$\forall F[(F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega') \rightarrow (\Phi_s(F) \text{ — однозначное множеству})]. \quad (3)$$

Тогда множество $\Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega')$ однозначно, так как в противном случае для некоторого $F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$ имели бы неоднозначность множества $\Phi_s(F)$, что противоречит условию (3).

Ясно, что

$$\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}) \subseteq \Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega').$$

В силу тотальности функции g и однозначности множества $\Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega')$ имеем равенство

$$\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega').$$

Отсюда следует, что $g \leq_e \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$. Поскольку множество $\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$ вычислимо, то функция g — вычислимая.

Если на шаге $3s + 3$ условие (2) выполняется, то конструкция обеспечивает неоднозначность множества $\Phi_s(\check{f})$. В этом случае не может быть равенства $\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$.

(iii). Применение на четных шагах конструкции из пункта (i) и на нечетных — конструкции из пункта (ii) позволит построить функцию f , такую, что оба множества $\hat{f}$ и $\check{f}$ квазиминимальны. Теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 2. (i) $\exists f[f \not\leq_e \hat{f}]$;

(ii) $\exists f[f \not\leq_e \check{f}]$.

Доказательство. (i). Пусть f — тотальная функция, построенная в ходе доказательства теоремы 4(i). Из конструкции следует, что f не является вычислимой функцией. Так как множество $\hat{f}$ является квазиминимальным, то из сводимости $f \leq_e \hat{f}$ следует, что функция f должна быть вычислимой, противоречие.

(ii). Аналогично функция f , построенная в ходе доказательства теоремы 4(ii), доказывает данное следствие. $\square$

Теорема 5. Любая тотальная e -степень $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\mathbf{b} = \deg_e(\check{f})$ — квазиминимальная e -степень и $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ — тотальная е-степень, тогда в ней существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $A \equiv_e c_A$. Заметим, что последнее утверждение справедливо для любой тотальной е-степени. Построим с помощью пошаговой конструкции тотальную функцию f , удовлетворяющую следующим требованиям для всех $s \in \omega$:

(N_s) : $\check{f} \neq W_s$;

(Q_s) : $\Phi_e(\check{f}) = g \rightarrow g$ — вычислимая функция;

(J) $\check{f}' \equiv_e A$.

Будем использовать те же обозначения, которые были введены в доказательстве предыдущей теоремы.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \emptyset$ и $x_0 = 0$.

Шаг $4s + 1$. Пусть $t = 4s$. Проверим выполнимость условия

$$\exists y[y > 0 \wedge \langle x_t, y \rangle \in W_s] \quad (1)$$

Если (1) выполнено, то пусть y^* — наименьшее y , для которого $\langle x_t, y \rangle \in W_s$. Полагаем

$$f_{4s+1} = f_{4s} \cup \{(x_t, y^* + 1)\}.$$

Если (1) не выполнено, то полагаем

$$f_{4s+1} = f_{4s} \cup \{(x_t, 0)\}.$$

Шаг $4s + 2$. Пусть $t = 4s + 1$. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[(F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega') \wedge (\Phi_s(F) \text{ — неоднозначное множество})], \quad (2)$$

Если условие (2) выполняется, то пусть F^* — конечное множество, удовлетворяющее (2) и имеющее наименьший канонический индекс. Пусть $x^* = \max\{x : \exists y[\langle x, y \rangle \in F^*]\}$. Если $x^* \geq x_t$, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1} \cup \{(x_t, 0), \dots, (x^*, 0)\}.$$

Если $x^* < x_t$, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1}.$$

Если условие (2) не выполняется, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1}.$$

Шаг $4s + 3$. Пусть $t = 4s + 1$. Проверим выполнимость условия

$$\exists \sigma[(f_t \subset \sigma \wedge s \in \Phi_s(\check{\sigma})], \quad (3)$$

где σ — переменная, принимающая значения в множестве функций, определенных на начальных отрезках множества ω (в множестве начальных сегментов).

Если условие (3) выполняется, то пусть σ^* — начальный сегмент, удовлетворяющий (3) с наименьшим каноническим индексом графика $\text{graph}(\sigma^*)$. Полагаем $f_{4s+3} = \sigma^*$. Если условие (3) не выполняется, то полагаем $f_{4s+3} = f_{4s+2}$.

Шаг $4s + 4$. Пусть $t = 4s + 3$. Полагаем

$$f_{4s+4} = f_{4s+3} \cup \{(x_t, 1 - c_A(s))\}.$$

Описание конструкции закончено. Из конструкции следует, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ для всех $s \in \omega$, поэтому определение $f = \bigcup_{s \in \omega} f_s$ корректно. Докажем, что полученная в результате конструкции функция f удовлетворяет требованиям (N_s) ; (Q_s) , $s \in \omega$ и требованию (J) .

Требования (N_s) , $s \in \omega$ удовлетворены благодаря шагам $4s + 1$. В самом деле, докажем, что $\check{f} \neq W_s$. Если условие (1) выполнено, то $\langle x_t, y^* \rangle \in W_s$ и $f(x_t) = y^* + 1$. В этом случае по определению операции $\check{f}$ имеем $\langle x_t, y^* \rangle \notin W_s$. Если условие (1) не выполнено, то $f(x_t) = 0$. Тогда все числа $\langle x_t, 1 \rangle, \langle x_t, 2 \rangle, \dots$ принадлежат множеству $\check{f}$. В то же время, отрицание условия (1) влечет, что для всякого $y > 0$ имеем $\langle x_t, y \rangle \notin W_s$.

Требования (Q_s) , $s \in \omega$ удовлетворены благодаря шагам $4s + 2$. Докажем, что $\check{f}$ — квазиминимальное множество. Пусть для некоторой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \check{f}$, тогда $\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$ для некоторого s . Рассмотрим шаг $4s + 2$. Если на этом шаге условие (2) не выполняется, то верно

$$\forall F[(F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega') \rightarrow (\Phi_s(F) - \text{однозначное множество})]. \quad (2')$$

Тогда множество $\Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega')$ однозначно, так как в противном случае для некоторого $F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega'$ имели бы неоднозначность множества $\Phi_s(F)$, что противоречит условию (2').

Ясно, что

$$\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}) \subseteq \Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega').$$

В силу тотальности функции g и однозначности множества $\Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega')$ имеем равенство

$$\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega').$$

Отсюда следует, что $g \leq_e \check{f}_t \cup X_t \times \omega'$. Поскольку множество $\check{f}_t \cup X_t \times \omega'$ вычислимо, то функция g — вычислимая.

Если на шаге $4s + 2$ условие (2) выполняется, то конструкция обеспечивает неоднозначность множества $\Phi_s(\check{f})$. В этом случае не может быть равенства $\text{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$.

Докажем, что удовлетворено требование (J). Конструкция обеспечивает вычислимость шагов $4s + 1$, $4s + 2$, $4s + 3$, $s \in \omega$ в $\vec{K}_0$ и вычислимость шагов $4s + 4$, $s \in \omega$ в $A \equiv_e c_A$. Поскольку $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$, то вся конструкция построения функции f эффективна с оракулом для множества A . Следовательно, $f \leq_T A$. Из того, что f — тотальная функция, а множество A e -эквивалентно тотальной функции c_A , получаем, что $f \leq_e A$.

Проверяя на шагах $4x + 3$, $x \in \omega$ выполнимость условия (3), имеем

$$x \in \Phi_x(\check{f}) \leftrightarrow \text{graph}(f_{4x+2}) \neq \text{graph}(f_{4x+3}).$$

Следовательно, $J(\check{f}) \leq_e A$.

Чтобы проверить сводимость $A \leq_e J(\check{f})$, покажем, что последовательность начальных сегментов $\{f_t\}_{t \in \omega}$ и, следовательно, последовательность вычислимых множеств $\{\check{f}_t\}_{t \in \omega}$ вычислима относительно $\check{f}$. Так как $c_A(s) = 1 - f_{4s+4}(x_{4s+3})$, поэтому $c_A \leq_e f$. Ясно, что $\check{f} \leq_e J(\check{f})$. Все шаги, кроме $4s + 4$, $s \in \omega$ вычислимы в $\vec{K}_0$, а на шагах $4s + 4$, $s \in \omega$ выполняется построение

$$f_{4s+4} = f_{4s+3} \cup \{(x_t, 1 - c_A(s))\},$$

которое вычислимо в $\check{f}$. Следовательно, $A \leq_e J(\check{f})$ и требование (J) удовлетворено.

Пусть $\mathbf{b} = \text{graph}(\check{f})$. Конструкция в доказательстве теоремы обеспечивает, что $\mathbf{b}$ — квазиминимальная e -степень и $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$. Теорема доказана. $\square$

Заключение

Результаты, изложенные в данной статье, дополняют и завершают исследование степеней перечислимости ограниченных множеств, начатое в работе [2]. Важным является результат, следующий из теоремы 5, о том, что ограниченные снизу множества обладают свойством Фридберга, связанным с инверсией скачка.

References

- [1] U. Andrews, H. Ganchev, R. Kuyper, S. Lempp, J. Miller, A. Soskova, and M. Soskova, “On cototality and the skip operator in the enumeration degrees”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 372, no. 3, pp. 1631–1670, 2019.
- [2] B. Solon and S. Rozhkov, “Enumeration degrees of the bounded total sets”, in *International Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, Springer, 2006, pp. 737–745.
- [3] S. Rozhkov, “Properties of e-degrees of the bounded total sets”, *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 44, no. 7, pp. 452–454, 2010.
- [4] H. Rogers Jr, *Theory of recursive functions and effective computability*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [5] M. G. Rosinas, “Chastichnie stepeni i r-stepeni”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 6, pp. 1323–1331, 1974.
- [6] S. B. Cooper, “Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the Σ^2 sets are dense”, *The Journal of symbolic logic*, vol. 49, no. 2, pp. 503–513, 1984.
- [7] M. G. Rosinas, “Operacia skachka dlja nekotoryh vidov svodimosti”, *VINITI Dep*, pp. 3185–76,
- [8] K. McEvoy, “Jumps of quasi-minimal enumeration degrees”, *The Journal of symbolic logic*, vol. 50, no. 3, pp. 839–848, 1985.
- [9] J. Case, “Enumeration reducibility and partial degrees”, *Annals of mathematical logic*, vol. 2, no. 4, pp. 419–439, 1971.

Neural Network-Based Sentiment Classification of Russian Sentences into Four Classes

M. A. Kosterin¹, I. V. Paramonov¹DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-116-133](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-116-133)¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 68T50

Research article

Full text in Russian

Received April 28, 2022

After revision May 23, 2022

Accepted May 25, 2022

The paper is devoted to the classification of Russian sentences into four classes: positive, negative, mixed, and neutral. Unlike the majority of modern study in this area, the mixed sentiment class is introduced. Mixed sentiment sentences contain positive and negative sentiments simultaneously.

To solve the problem, the following tools were applied: the attention-based LSTM neural network, the dual attention-based GRU neural network, the BERT neural network with several modifications of the output layer to provide classification into four classes. The experimental comparison of the efficiency of various neural networks were performed on three corpora of Russian sentences. Two of them consist of users' reviews: one with wear reviews and another with hotel reviews. The third corpus contains news from Russian media. The highest weighted F-measure in experiments (0.90) was achieved when using BERT on the wear reviews corpus, as well as the highest weighted F-measure for positive and negative sentences (0.92 and 0.93, respectively). The best classification results for neutral and mixed sentences were achieved on the news corpus. For them F-measure was 0.72 and 0.58, respectively. As a result of experiments, the significant superiority of the BERT transfer network was demonstrated in comparison with older neural networks LTSM and GRU, especially for classification of sentences with weakly expressed sentiments. The error analysis showed that "adjacent" (positive/negative and mixed) classes are worse classified with BERT than "opposite" classes (positive and negative, neutral and mixed).

Keywords: sentiment analysis; neural network-based classifier; BERT; natural language processing

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Maksim Alekseevich Kosterin | orcid.org/0000-0002-8298-3156. E-mail: makcost@gmail.com
post-graduate student.

Ilya Vyacheslavovich Paramonov | orcid.org/0000-0003-3984-8423. E-mail: ilya.paramonov@fruct.org
correspondence author | PhD, associate professor.

Funding: This work was supported by P. G. Demidov Yaroslavl State University Project No. VIP-016.

For citation: M. A. Kosterin and I. V. Paramonov, "Neural Network-Based Sentiment Classification of Russian Sentences into Four Classes", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 116-133, 2022.

Нейросетевая классификация русскоязычных предложений по тональности на четыре класса

М. А. Костерин¹, И. В. Парамонов¹DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-116-133](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-116-133)¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 004.912

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 28 апреля 2022 г.

После доработки 23 мая 2022 г.

Принята к публикации 25 мая 2022 г.

Работа посвящена классификации русскоязычных предложений по тональности на четыре класса: положительный, отрицательный, смешанный и нейтральный. В отличие от большинства современных работ в этой области, вводится в рассмотрение класс предложений смешанной тональности. Предложения со смешанной тональностью содержат в себе одновременно и положительно, и отрицательно окрашенную речь.

Для решения данной задачи были применены: нейронная сеть LSTM с механизмом внимания, нейронная сеть GRU с двойным механизмом внимания, нейронная сеть BERT с несколькими модификациями выходного слоя для обеспечения классификации на четыре класса. Эксперименты по сравнению эффективности различных нейронных сетей производилось на трёх корпусах русскоязычных предложений. Два корпуса составлены из пользовательских отзывов: один с отзывами на одежду, другой с отзывами на отели. Третий корпус составлен из новостных статей российских изданий. Лучшая средняя взвешенная F-мера в экспериментах, составляющая 0.90, была достигнута моделью BERT на корпусе отзывов на одежду. На этом же корпусе были отмечены лучшие F-меры для положительных и отрицательных предложений, составившие 0.92 и 0.93 соответственно. Наилучшие показатели классификации нейтральных и смешанных предложений достигаются на корпусе новостных статей. Для них F-мера составляет 0.72 и 0.58 соответственно. В результате экспериментов было продемонстрировано значительное превосходство трансферных нейронных сетей BERT над нейронными сетями предыдущего поколения LSTM и GRU, наиболее ярко выражающееся при классификации текстов со слабо выраженной эмоциональной окраской. Анализ ошибок показал, что на «смежные» классы тональности (положительный/отрицательный и смешанный) приходится большая доля ошибок при классификации с помощью BERT, чем в случае «противоположных» классов (положительный и отрицательный, нейтральный и смешанный).

Ключевые слова: анализ тональности; нейросетевой классификатор; BERT; обработка естественного языка

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Максим Алексеевич Костерин | orcid.org/0000-0002-8298-3156. E-mail: makcost@gmail.com
аспирант.

Илья Вячеславович Парамонов | orcid.org/0000-0003-3984-8423. E-mail: ilya.paramonov@fruct.org
автор для корреспонденции | канд. физ.-мат. наук, доцент.

Финансирование: Работа выполнена в рамках инициативной НИР ЯрГУ им. П. Г. Демидова № VIP-016.

Для цитирования: М. А. Костерин and И. В. Парамонов, "Neural Network-Based Sentiment Classification of Russian Sentences into Four Classes", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 116-133, 2022.

Введение

В данной работе рассматривается задача классификации предложений на русском языке по тональности на четыре класса: положительный, отрицательный, смешанный и нейтральный. Под задачей классификации тональности в общем виде понимается извлечение и оценка эмоций, вкладываемых автором в текст, независимо от субъекта текста. Предложение называется положительным в том случае, если оно содержит положительные эмоции, факты или выражает положительное мнение автора относительно объекта предложения. Отрицательным называется предложение, которое содержит отрицательные эмоции, факты или выражает отрицательное мнение. Если в предложении присутствуют эмоции или факты из обеих категорий, то такое предложение считается смешанным. Если же предложение не содержит эмоциональной окраски, то оно является нейтральным [1].

Классификация по тональности традиционно применялась к эмоционально экспрессивным текстам, таким как отзывы, для извлечения информации об отношении индивидов или их групп к тому или иному объекту. С появлением более сложных нейронных сетей глубокого обучения, таких как BERT и RoBERTa, классификация тональности стала применяться к более сложным текстам, где тональность предложений выражается менее явно [2].

Данная работа организована следующим образом. Обзор текущего состояния области классификации текстов по тональности приведен в разделе 1. В разделе 2 более подробно рассматривается постановка задачи, а также подходы к её решению. В нём приведено описание различных моделей нейронных сетей, которые применяются в эксперименте. В разделе 3 перечислены используемые корпуса текстов и их характеристики. Результаты применения рассматриваемых моделей к выбранным корпусам приведены в разделе 4.

1. Обзор связанных работ

Задача анализа тональности текста является одной из наиболее распространенных задач обработки естественных языков. Особенно резко важность данной задачи возросла в связи с широким распространением публичных интернет-ресурсов и социальных медиа. Для анализа огромного количества создаваемой пользователями информации были разработаны различные автоматические методы выделения эмоций автора из текста, которые применяются в широком спектре областей от коммерции до политики [3]. Наиболее современными и распространенными из методов анализа тональности на данный момент являются подходы с использованием глубоких нейронных сетей, обзоры которых проводились как для английского [4], так и для русского [5] языков.

Подходы на основе глубокого обучения на текущий момент доминируют в области анализа тональности в связи с двумя ключевыми особенностями: автоматическое выделение признаков рассматриваемых классов тональности и более высокая эффективность. Выделение признаков в сетях глубокого обучения происходит за счет использования множества последовательных слоев нелинейных вычислительных единиц. Высокая эффективность же достигается за счет применения эмбедингов — векторных представлений слов, а также использования графических процессоров в качестве вычислительных устройств. В совокупности это позволяет быстрее выполнять матричные вычисления. Среди подходов на основе глубокого обучения в отдельную группу выделяются методы, использующие трансферное обучение. Их идея заключается в обучении нейронной сети решать одну универсальную задачу на большом объеме данных с последующим применением накопленной в ходе обучения информации для решения специфичных задач. В число трансферных нейронных сетей входят такие модели как OpenAI GPT-2 [6], XLNet [7], BERT [8], имеющие точность классификации тональности на корпусе SST-2 91.8 %, 97.0 %, 94.9 % соответственно.

Глубоким нейронным сетям предшествовали методы машинного обучения, использующие заранее составленные наборы признаков [9]. На основе этих признаков традиционные алгоритмы машинного обучения способны автоматически классифицировать тексты по тональности. Однако

для применения данных методов составление исходных наборов признаков необходимо выполнять вручную, что является сложной и трудоемкой задачей. Вдобавок они показывают результаты хуже, чем модели на основе нейронных сетей. Например, модель из работы [9] достигает точности 87.4 % при классификации тональности твитов.

Существуют также подходы к анализу тональности на основе правил и словарей [10], а не машинного обучения. Их идея заключается в использовании тонального словаря и набора правил лексического и семантического анализа текста для вычисления тональности всего предложения по его содержанию. Преимуществами таких методов является отсутствие необходимости в обучении, что позволяет применять их в случаях, когда нет возможности предоставить большой корпус текстов. Недостатками является существенная сложность построения правил, требующая серьезного языкового моделирования для учёта большого количества способов выражения тональности, свойственных естественному языку.

Задача классификации тональности на 4 класса, решаемая в данной работе, отличается от классической задачи классификации тем, что в ней помимо традиционных классов предложений (положительный, отрицательный, нейтральный) рассматривается также класс предложений смешанной тональности. Предложения со смешанной тональностью содержат в себе одновременно и положительно, и отрицательно окрашенную речь. Данная задача является значительно более редкой в группе задач анализа тональности. Тем не менее её актуальность нельзя недооценивать, так как очень часто тональность реальных предложений невозможно отнести к тому или иному классу однозначно.

Два препятствия встречаются на пути к решению задачи классификации на 4 класса: определение того, что представляет собой смешанная тональность, и подбор корпуса данных, содержащего предложения со смешанной тональностью. Обе проблемы поднимаются в работе [11] применительно к анализу тональности твитов. В ней авторы ставят задачи создания аннотированного множеством рецензентов корпуса твитов и определения наиболее эффективного метода разметки предложений смешанного класса. Для этого они сравнивают два подхода к определению класса предложений смешанной тональности: класс, на котором достигается высокое расхождение в оценках рецензентов, и класс, в котором абсолютное большинство оценок сходится на «смешанной». В эксперименте с использованием первого подхода было достигнуто значение F-меры 0.163 для смешанных предложений, 0.602 — для положительных, 0.786 — для нейтральных, 0.498 — для отрицательных. Значение макро F-меры для эксперимента составило 0.512. При использовании второго подхода значение макро F-меры возросло до 0.803. Важно отметить, что целью экспериментов в работе не ставилось достижение наилучших результатов классификации, а лишь наблюдение за показателями качества при использовании различных выборок. В результате экспериментов делается вывод о том, что второй подход приводит к лучшим результатам классификации.

В работе [12] задача классификации тональности на 4 класса рассматривается в контексте аспектного анализа. Авторы рассматривают смешанную тональность как выражение в одном предложении одновременно положительного и отрицательного мнения об аспекте. Поэтому задачу классификации на 4 класса они сводят к задаче многокомпонентной классификации положительной и отрицательной тональности. Эксперимент с применением данного подхода дал точность 40.38 % для смешанных предложений и 78.50 % для всех классов. Смешанная тональность в рассматриваемой работе выражается как комбинация положительных и отрицательных оценок. Таким образом, определение смешанной тональности само по себе является предметом дискуссий в различных работах.

Задача многоклассовой классификации тональности также имеет и другие варианты. В их число входят достаточно распространенные задачи градуальной классификации тональности и классификации эмоций. Задача градуальной классификации рассматривает набор классов, соответствующих

различной силе выражения тональности, начиная от очень отрицательной и заканчивая очень положительной. Работа [13] посвящена обзору применяющихся при этом подходов и полученных результатов. В ней рассматривается классификация на 5 классов: сильно отрицательный, отрицательный, нейтральный, положительный, сильно положительный. Отличие задачи градуальной классификации от рассматриваемой в настоящей работе классификации на 4 класса заключается в том, что в ней не выделяется смешанная тональность как отдельный класс. Вместо этого предложения, включающие различные эмоции, будут интерпретироваться как нейтральные. Задача классификации эмоций [14] направлена на выделение конкретных эмоций автора из текста, а не его общей тональности. Количество классов в этой задаче также может варьироваться в зависимости от области применения. Данная задача покрывает еще больший спектр эмоциональных окрасок, чем классификация на 4 класса, что делает её более сложной и менее универсальной в плане областей применения.

Таким образом, классификация тональности на 4 класса является отдельной задачей обработки естественных языков, которая обладает своими особенностями и проблемами. Она является менее исследованной, чем традиционная задача анализа тональности, а существующие методы классификации демонстрируют результаты хуже при работе с четырьмя классами тональности. В тоже время, учет класса смешанной эмоционально окраски делает условия задачи более близкими к реальности, в которой тональность предложений не всегда является строго одномерной.

2. Постановка задачи и методы исследования

Целью данной работы является классификация тональности русскоязычных текстов на 4 класса: положительный, отрицательный, нейтральный, смешанный. Методы классификации выбираются из числа современных нейросетевых моделей, продемонстрировавших высокие результаты на различных задачах классификации тональности. Для выбранных подходов вычисляются стандартные характеристики качества на различных корпусах исходных данных, в результате чего делаются выводы об эффективности применяемых подходов.

В данном разделе рассмотрены используемые в настоящей работе модели нейронных сетей.

2.1. Нейронная сеть LSTM с механизмом внимания

До того, как стали широко распространены трансферные нейронные сети на основе трансформеров (transformer), рекуррентные нейронные сети с LSTM (long short-term memory) демонстрировали наиболее высокие результаты в области классификации тональности [15]. В качестве одной из таких нейронных сетей в данной работе рассматривается LSTM с применением функции внимания для назначения соответствующих весов тональным конструкциям в предложении, использование которой применительно к задаче классификации на 3 класса для английского языка демонстрируется в работах [16, 17]. Функция внимания, имеющая вид

$$Attention(Q, K, V) = \text{softmax} \left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}} \right) V,$$

принимает в качестве входных данных последовательность X из n -векторных представлений длины d и на основе этой последовательности формирует матрицы весов W_q , W_k , W_v , применяющиеся при вычислении коэффициентов Q , K , V соответственно, где

$$Q = X W_q, \quad K = X W_k, \quad V = X W_v, \quad W_q, W_k, W_v \in \mathbb{R}^{d \times d_k}.$$

Функция внимания для каждого токена вычисляет значение внимания между этим токеном и всеми остальными токенами в предложении. Таким образом выделяется синтаксическая структура, вносящая наибольший вклад в тональность предложения.

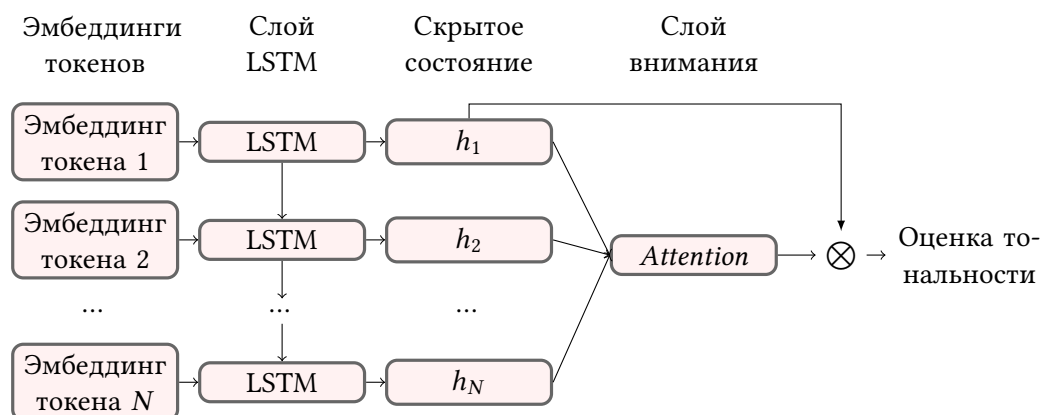


Fig. 1. Attention-based LSTM architecture

Рис. 1. Архитектура сети LSTM с функцией внимания

Схема рассматриваемой в данной работе сети LSTM приведена на рис. 1. В ней выходные данные стандартного слоя LSTM подаются на вход функции внимания, назначение которой заключается в выделении части предложения, вносящей наибольший вклад в эмоциональную окраску всего предложения. Данная архитектура является модификацией модели из работы [16] под задачу классификации тональности текста на 4 класса. В данной работе рассматривалась задача аспектно-ориентированного анализа тональности, поэтому в ходе модификации под рассматриваемую здесь задачу из алгоритма классификации был исключен шаг применения эмбе́ддингов аспектов в вычислении функции внимания. Полученная в результате модификации модель принимает на вход векторные представления токенов предложения, построенные на основе словаря, а результаты выполнения слоя LSTM подает в качестве исходных данных в функцию внимания. Матрица весов, получаемая на выходе слоя внимания, непосредственно применяется при вычислении оценок тональности. В результате работы модели получается оценка для каждого класса, и в качестве тональности предложения выбирается класс с наибольшей оценкой.

2.2. Нейронная сеть GRU с двойным механизмом внимания

В работе [12] для выполнения аспектно-ориентированной классификации тональности текста на 4 класса аспектов предлагается подход с применением сети GRU. Особенность данной модели, по сравнению с другими широко распространенными реализациями LSTM, заключается в использовании двух функций внимания для учета положительной и отрицательной составляющей тональности входной последовательности токенов. Такое архитектурное решение нацелено на улучшение классификации предложений со смешанной тональностью. В предложениях, содержащих как положительно окрашенную, так и отрицательно окрашенную лексику, единственная функция внимания часто формирует оценку всего предложения на основе лишь одной эмоционально окрашенной части предложения, не учитывая другие части, потенциально имеющие противоположную тональность. Механизм двойного внимания призван обрабатывать положительно окрашенные и отрицательно окрашенные части предложения независимо друг от друга, таким образом формируя независимые оценки о содержании эмоционально окрашенной речи в предложении для формирования общей оценки тональности на их основе (рис. 2).

В настоящей работе модель из [12] была модифицирована: слой внимания лишился способности учитывать аспектные эмбе́ддинги текста в пользу выполнения классификации тональности всего предложения независимо от его аспектов. Схема сети, получившейся в результате модификации, представлена на рис. 3. В соответствии с этой схемой векторные представления токенов, построенные на основе словаря, проходят через один слой нейронной сети GRU, в результате чего



Fig. 2. Sentiment classification using with double attention

Рис. 2. Определение тональности в модели с механизмом двойного внимания

формируются входные данные для слоя внимания. Обе функции внимания принимают на вход одни и те же данные, но имеют различные матрицы весов и обучаются определять только одну тональность. Выходные данные функций внимания конкатенируются в один вектор, который проходит через сигмоидную функцию активации для получения оценки тональности предложения по двум осям: положительной и отрицательной. На основе этих оценок предложению ставится в соответствие один из четырех классов тональности.

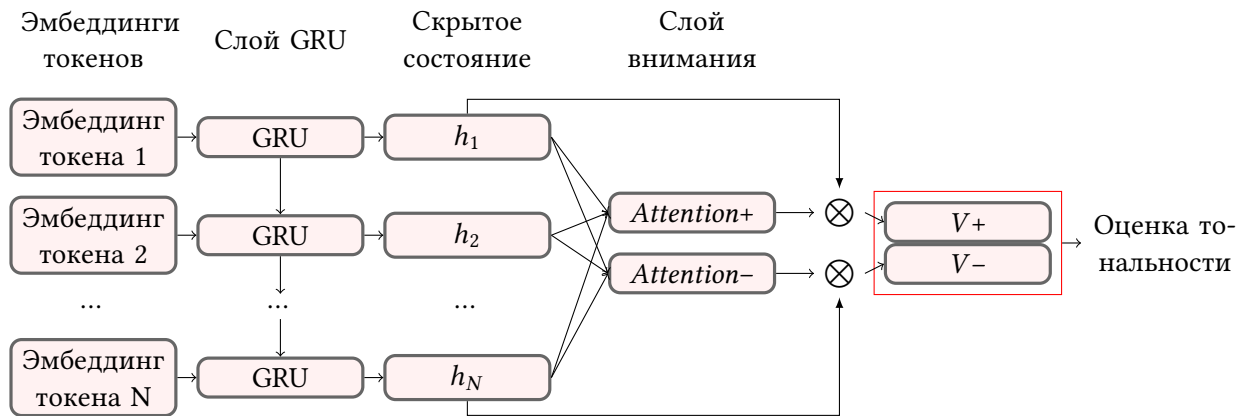


Fig. 3. Dual Attention-based GRU architecture

Рис. 3. Архитектура сети GRU с двойной функцией внимания

2.3. Нейронная сеть BERT

BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers) — метод предварительной подготовки языковых представлений, обучающий универсальную модель «понимания языка» на большом корпусе неразмеченного текста, а затем использующий эту модель для последующего решения различных задач NLP. Нейронная сеть BERT продемонстрировала рекордные результаты на наборе из 11 основных задач обработки естественных языков, превзойдя языковые модели предыдущего поколения, такие как ELMo и OpenAI GPT [8]. Такие высокие результаты являются следствием того, что BERT является системой глубокого двунаправленного предварительного обучения без учителя, в противовес однонаправленным подходам, применяемым в других моделях.

Архитектура BERT основана на использовании многослойного двунаправленного трансформера, реализация которого базируется на идее, изложенной в работе [18]. Трансформеры для каждого слова строят набор признаков, используя для этого механизм внимания, чтобы выявить «важность» для данного слова всех прочих слов в предложении. Таким образом, построенные признаки для данного слова — сумма линейных преобразований признаков всех слов, взятых в соответствии с их весами «важности».

По своей сути BERT является стеком кодировщиков-трансформеров (encoder transformer), расположенных последовательно таким образом, что передача входных и выходных данных функции

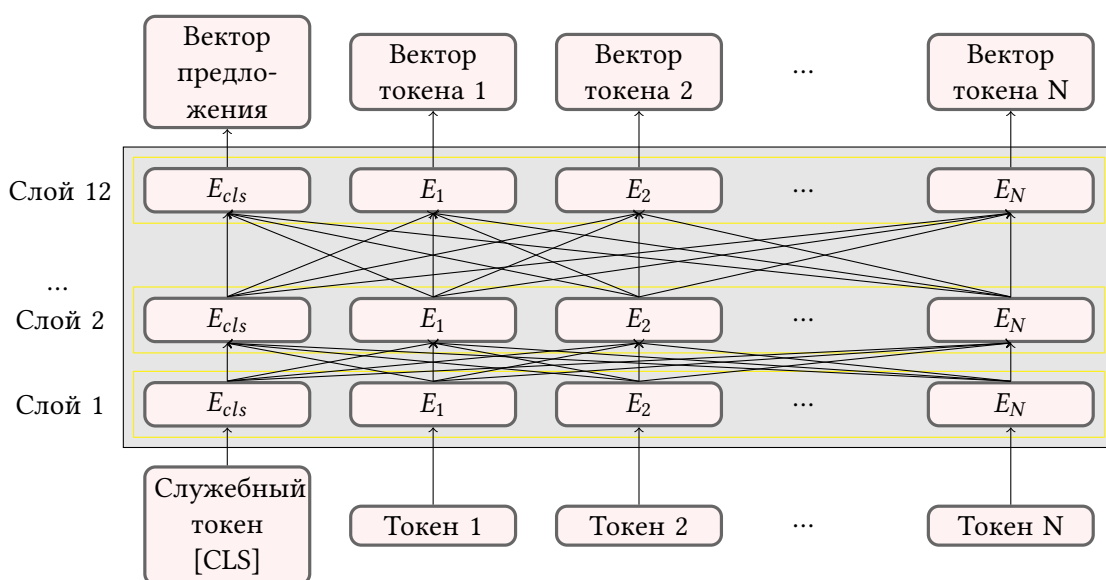


Fig. 4. BERT language model architecture

Рис. 4. Архитектура языковой модели BERT

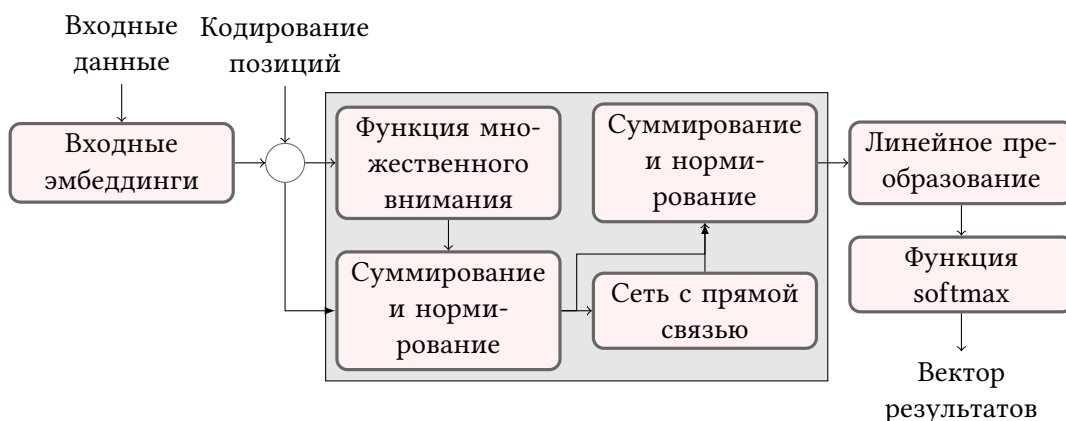


Fig. 5. Operation order in the encoder sublayer of the Transformer architecture

Рис. 5. Последовательность операций в подслое кодировщика архитектуры Transformer

внимания происходит от одного слоя к другому (рис. 4). Количество слоев внутренней реализации BERT варьируется в зависимости от сложности модели. В данной работе применяется базовая модель BERT с количеством слоев $L = 12$ и размером вектора эмбедингов каждой позиции $H = 768$.

Структура кодировщика, используемого в слоях BERT, представлена на рис. 5. Она состоит из блока функции множественного внимания, сети прямого распространения и двух этапов суммирования и нормирования эмбедингов. Идея заключается в том, что каждое входное слово параллельно проходит через слои кодировщика. При этом на вход в кодировщик передаются не только эмбединги токенов, но и эмбединги позиций слов в предложении. Это делается для того, чтобы устранить недостаток, свойственный архитектуре трансформера, связанный с невозможностью учёта порядка токенов в вычислениях. Данная же модификация позволяет BERT учитывать полный контекст слова во входной последовательности, т. е. одно и то же слово, встречающееся в начале и конце последовательности, будет обрабатываться по-разному.

2.4. Модификации слоя классификации BERT

В своей базовой реализации BERT сначала предобучается «языку» на неразмеченных данных, а затем для адаптации предобученной модели под решение конкретной задачи, в том числе и задачи классификации тональности, требуется постобработка данных, производимых моделью на выходе финального слоя нейронной сети. Данная постобработка производится путем добавления к базовой модели дополнительных слоев, причём даже для одной и той же задачи она может производиться по-разному.

В данной работе рассматриваются три модификации финального слоя нейронной сети BERT для задачи классификации предложений по тональности на 4 класса.

В первой модификации применяется стандартный слой однокомпонентной классификации, используемый авторами модели BERT для оценки её показателей в задаче классификации тональности на 3 класса на корпусе SST-2 [19]. В соответствии с целями данной работы количество классов тональности было увеличено до четырёх путём добавления класса смешанной тональности. Вероятность принадлежности входной последовательности токенов к определенному классу тональности вычисляется посредством умножения вектора предложения, полученного в результате работы модели, на матрицу весов W с последующим применением функции softmax в качестве функции активации и вычисления потерь в соответствии со схемой, приведенной на рис. 6.

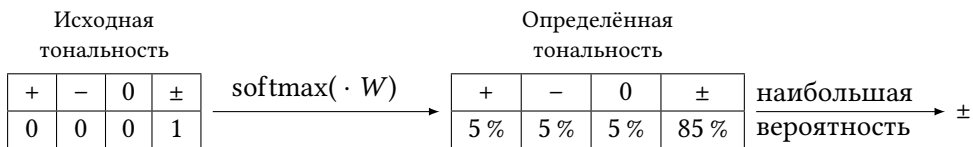


Fig. 6. Single-label sentiment classification with BERT

Рис. 6. Определение тональности в однокомпонентной модели BERT

Вторая модификация использует слой многокомпонентной классификации с компонентами положительной и отрицательной тональности. В отличие от первого подхода, здесь тональность предложения рассматривается не как одно из четырёх взаимоисключающих значений, а как два значения по независимым осям, соответствующим положительной и отрицательной тональностям (рис. 7). В зависимости от соотношения предсказанных моделью вероятностей к определенной совокупности пороговых значений по каждой из осей предложение классифицируется на 4 класса. Вероятность того, что предложение содержит компонент положительной или отрицательной тональности вычисляется посредством умножения вектора предложения, полученного в результате работы модели, на матрицу весов W , с последующим применением сигмоидной функции.

Последняя модификация финального слоя BERT разработана на основе модели D-AT-GRU [12] для задачи аспектного анализа тональности. Оригинальная модель подверглась ряду модификаций с целью адаптации под поставленную в данной работе задачу классификации тональности на 4 класса. Во-первых, подход был адаптирован под задачу классификации тональности предложения

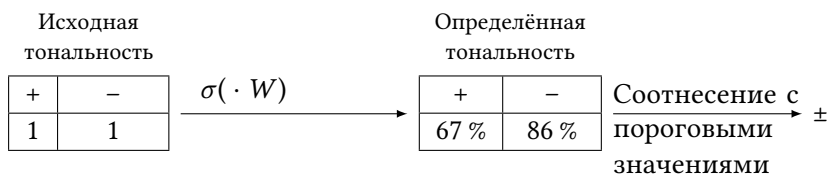


Fig. 7. Multi-label sentiment classification using BERT

Рис. 7. Определение тональности в многокомпонентной модели BERT

в целом в соответствии с описанием, представленным в разделе 2.2. Во-вторых, модель, ранее рассчитанная на применение в сетях GRU, была адаптирована под BERT. В результате проведенных модификаций получился слой BERT, содержащий два независимых компонента, реализующих функцию внимания: один отвечает за классификацию входной последовательности по шкале положительной тональности, а второй — отрицательной. Каждый компонент имеет собственные матрицы весов, таким образом, они являются более специализированными под обнаружение соответствующей составляющей им тональности в предложении. Далее выходы обоих компонентов конкатенируются в двумерный вектор, для которого производится вычисление вероятности нахождения в предложении положительной и отрицательной составляющей тональности с использованием сигмоиды в качестве функции активации. В отличие от ранее приведенных модификаций BERT, данный подход берет из последнего скрытого слоя BERT не выходы уровня всей последовательности токенов, а набор выходных векторов уровня токенов.

3. Корпуса текстов, используемые в эксперименте

Для оценки эффективности рассмотренных нейронных сетей в данной задаче были отобраны три корпуса русскоязычных текстов с различной тематикой и стилем изложения: корпус отзывов на отели, корпус отзывов на одежду, корпус новостных статей из российских СМИ. Включение в набор данных эксперимента корпусов с ярко выраженной тональностью, таких как корпуса отзывов, и корпусов со слабо выраженной тональностью, таких как корпус новостей, нацелено на определение того, насколько сильно выраженность эмоциональной окраски сказывается на результатах классификации тональности с помощью нейронных сетей.

Корпус отзывов на отели формировался на основе отзывов, опубликованных пользователями метапоисковика отелей *trivago*¹. Предварительная разметка тональности корпуса производилась автоматически на основе пользовательской оценки по пятибалльной шкале. Отзывы с оценками «1» и «2» считались отрицательными, с оценками «4» и «5» — положительными, с оценкой «3» — нейтральными. После этапа автоматической разметки выполнялась ручная доработка корпуса группой рецензентов, которые отбирали из корпуса предложения со смешанной тональной окраской и выделяли их в отдельный класс. Сформированный корпус в сумме насчитывает 1205 предложений, среди которых:

- 640 положительных (53.1 %);
- 333 отрицательных (27.6 %);
- 48 смешанных (4.0 %);
- 184 нейтральных (15.3 %).

Корпус отзывов на отели состоит из коротких (табл. 1), часто безличных односоставных предложений. В предложениях в основном описывается узкий набор критериев, характеризующих номер в отеле, таких как: температура, наличие запахов, качество обслуживания и т. д. Вследствие чего лексическое разнообразие является низким и сконцентрированным вокруг специфики предметной области.

Корпус отзывов на одежду является выборкой из корпуса RuReviews [20], который составлен из обзоров в категории «женская одежда и аксессуары», опубликованных покупателями одного из крупных интернет-ресурсов электронной коммерции. Класс тональности каждого отзыва в корпусе RuReviews автоматически определялся на основе пользовательской оценки товара, выставленной по пятибалльной шкале, где оценки «1» и «2» соответствует отрицательной тональности, оценки «4» и «5» — положительной тональности, а оценка «3» — нейтральной. Так как RuReviews включает только 3 класса тональности, группой рецензентов была проведена дополнительная разметка

¹<https://www.trivago.ru>

Table 1. Sentence properties of the hotel reviews corpus**Таблица 1.** Характеристики предложений корпуса отзывов на отели

Характеристика предложения	Класс тональности			
	Положительный	Отрицательный	Смешанный	Нейтральный
Минимальная длина	1	1	4	2
Максимальная длина	48	33	24	40
Средняя длина	7	8.8	11.6	7.8
Медиана длины	5	7	12	6

полученной выборки с целью выделения класса смешанной тональности. В результате проведенных работ был сформирован корпус из 2788 предложений, в число которых входят:

- 1065 положительных (38.2 %);
- 1065 отрицательных (38.2 %);
- 540 смешанных (19.4 %);
- 118 нейтральных (4.2 %).

Предложения в данном корпусе в целом являются короткими (табл. 2) и имеют простую синтаксическую структуру. Наличие только одного главного члена предложения характерно для большинства классов. Исключением являются предложения из класса смешанной тональности, средняя длина которых минимум в два раза превосходит среднюю длину предложений других классов, а сами предложения зачастую имеют более одной грамматической основы. Тональность в тех предложениях, где она присутствует, выражена ярко ввиду обилия эмоционально окрашенных слов. Лексика имеет разговорный стиль, что характерно для общедоступной интернет-площадки.

Table 2. Sentence properties of the clothing reviews corpus**Таблица 2.** Характеристики предложений корпуса отзывов на одежду

Характеристика предложения	Класс тональности			
	Положительный	Отрицательный	Смешанный	Нейтральный
Минимальная длина	1	1	4	1
Максимальная длина	47	53	90	18
Средняя длина	5	8.3	19.5	5.8
Медиана длины	4	7	15	5

Корпус новостных статей строился на основе выборки предложений из открытого корпуса OpenCorpora². Разметка сформированного набора данных производилась группой экспертов. Предложения корпуса случайным образом распределялись между рецензентами таким образом, чтобы каждое предложение было оценено как минимум тремя участниками группы. При оценке предложению назначался один из пяти классов: положительный, отрицательный, нейтральный, смешанный, неопределимый. Предложения, получившие оценку распределения к классу «неопределимый» хотя бы от одного рецензента, а также предложения, получившие противоположные оценки, отсеивались. Распределение по классам тональности происходило на основе лидирующей оценки среди всех оценок экспертов. Для балансировки классов было отобрано по 500 предложений из каждого класса тональности, в общей сложности формируя корпус из 2000 предложений.

²<http://opencorpora.org>

Table 3. Sentence properties of the Russian news corpus**Таблица 3.** Характеристики предложений корпуса новостных статей

Характеристика предложения	Класс тональности				
		Положительный	Отрицательный	Смешанный	Нейтральный
Минимальная длина		6	6	6	6
Максимальная длина		50	56	92	56
Средняя длина		15.1	16.6	19.6	15.5
Медиана длины		14	15	18	13

Данный корпус имеет наибольшую среднюю длину предложений в каждом классе среди всех рассматриваемых корпусов (табл. 3). Вызвано это, в первую очередь, возросшим смысловым содержанием предложений: увеличилось количество приводимых подробностей, лексика стала более насыщенной. Также доля сложных предложений стала более значительной. Так как в данном корпусе преобладает публицистический стиль речи, эмоциональная окраска стала менее выраженной и не всегда очевидной. Большее лексическое разнообразие данного корпуса делает предложения внутри каждого класса тональности менее схожими между собой.

В качестве дополнительного контрольного корпуса был взят англоязычный корпус отзывов на рестораны из задания 4 воркшопа SemEval-2014. Корпус был разработан для задачи аспектного анализа тональности, но для данной работы он был адаптирован под общий сценарий классификации тональности. Характеристики данного корпуса приведены в табл. 4. Распределение предложений между классами выглядит следующим образом:

- 2454 положительных (57.3 %);
- 897 отрицательных (21.0 %);
- 364 смешанных (8.5 %);
- 565 нейтральных (13.2 %).

Table 4. Sentence properties of the SemEval-2014 restaurant reviews corpus**Таблица 4.** Характеристики предложений корпуса отзывов на рестораны SemEval-2014

Характеристика предложения	Класс тональности				
		Положительный	Отрицательный	Смешанный	Нейтральный
Минимальная длина		1	3	3	1
Максимальная длина		60	69	55	47
Средняя длина		12.8	14.3	18.5	12
Медиана длины		11	13	17	11

4. Результаты экспериментов

Результаты экспериментов для корпусов новостей, отзывов на одежду и отзывов на отели приведены в таблицах 5, 6, 7 соответственно. Используемые метрики включают точность (P), полноту (R) и F -меру (F).

В целом все три модели, основанные на BERT, демонстрируют схожие между собой результаты для предложений с положительной, отрицательной и нейтральной тональностью. Отличие показателей внутри классов тональности в большинстве случаев находится в пределах 5 %. Исключением является эксперимент на корпусе отзывов на одежду, в котором многокомпонентная модификация модели BERT показывает значительно уступающие результаты классификации нейтральных

Table 5. Results obtained via 4-fold cross-validation on the news corpus**Таблица 5.** Результаты четырехкратной кросс-валидации корпуса новостей

Корпус	Полож.			Отриц.			Нейтр.			Смеш.			Взвеш.		
	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
BERT 1 комп.	0.71	0.69	0.70	0.62	0.64	0.63	0.75	0.71	0.72	0.53	0.55	0.54	0.65	0.65	0.65
BERT 2 комп.	0.73	0.68	0.70	0.64	0.63	0.63	0.72	0.75	0.73	0.55	0.56	0.55	0.66	0.66	0.65
BERT 2 вним.	0.69	0.68	0.68	0.69	0.68	0.68	0.76	0.69	0.72	0.56	0.61	0.58	0.66	0.66	0.66
GRU	0.35	0.32	0.33	0.33	0.32	0.32	0.41	0.43	0.42	0.34	0.37	0.35	0.36	0.36	0.36
LSTM	0.33	0.39	0.35	0.33	0.35	0.34	0.40	0.36	0.38	0.37	0.31	0.33	0.36	0.35	0.35

Table 6. Results obtained via 4-fold cross-validation on the clothing reviews corpus**Таблица 6.** Результаты четырехкратной кросс-валидации корпуса отзывов на одежду

Корпус	Полож.			Отриц.			Нейтр.			Смеш.			Взвеш.		
	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
BERT 1 комп.	0.93	0.92	0.92	0.93	0.94	0.93	0.73	0.59	0.63	0.50	0.49	0.49	0.90	0.90	0.90
BERT 2 комп.	0.92	0.93	0.93	0.91	0.92	0.91	0.67	0.45	0.52	0.44	0.44	0.43	0.89	0.89	0.89
BERT 2 вним.	0.93	0.92	0.92	0.93	0.92	0.93	0.67	0.65	0.65	0.47	0.54	0.50	0.90	0.90	0.90
GRU	0.91	0.84	0.87	0.85	0.9	0.88	0.25	0.38	0.30	0.33	0.27	0.30	0.84	0.83	0.83
LSTM	0.90	0.86	0.88	0.83	0.91	0.87	0.52	0.33	0.40	0.40	0.28	0.33	0.84	0.84	0.84

Table 7. Results obtained via 4-fold cross-validation on the hotel reviews corpus.**Таблица 7.** Результаты четырехкратной кросс-валидации корпуса отзывов на отели.

Корпус	Полож.			Отриц.			Нейтр.			Смеш.			Взвеш.		
	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
BERT 1 комп.	0.89	0.91	0.9	0.78	0.83	0.8	0.66	0.68	0.66	0.75	0.08	0.15	0.82	0.82	0.81
BERT 2 комп.	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86	0.84	0.66	0.68	0.67	0.46	0.19	0.25	0.82	0.83	0.82
BERT 2 вним.	0.89	0.91	0.90	0.84	0.82	0.83	0.67	0.72	0.69	0.35	0.21	0.25	0.82	0.83	0.82
GRU	0.77	0.78	0.78	0.64	0.52	0.57	0.29	0.38	0.33	0.27	0.25	0.26	0.64	0.63	0.63
LSTM	0.78	0.83	0.80	0.59	0.61	0.60	0.43	0.35	0.39	0.49	0.27	0.35	0.66	0.67	0.66

Table 8. Results obtained via 4-fold cross-validation on the SemEval-2014 restaurant reviews corpus**Таблица 8.** Результаты четырехкратной кросс-валидации корпуса отзывов на рестораны SemEval-2014

Корпус	Полож.			Отриц.			Нейтр.			Смеш.			Взвеш.		
	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
BERT 1 комп.	0.9	0.91	0.9	0.79	0.79	0.79	0.7	0.62	0.66	0.65	0.66	0.65	0.83	0.83	0.83
BERT 2 комп.	0.9	0.91	0.9	0.79	0.78	0.78	0.63	0.62	0.63	0.64	0.63	0.63	0.82	0.82	0.82
BERT 2 вним.	0.9	0.9	0.9	0.79	0.77	0.78	0.63	0.62	0.62	0.63	0.64	0.63	0.82	0.81	0.81
GRU	0.86	0.86	0.86	0.71	0.66	0.68	0.46	0.48	0.47	0.48	0.49	0.49	0.74	0.74	0.74
LSTM	0.84	0.87	0.85	0.72	0.71	0.71	0.57	0.55	0.56	0.58	0.49	0.53	0.76	0.76	0.76

предложений по сравнению с другими вариантами BERT. При классификации смешанных предложений модель BERT с двойным механизмом внимания показывает несколько лучшие результаты по сравнению с другими трансферными моделями. Данное превосходство больше всего проявляется на наиболее сбалансированном корпусе новостных статей.

Что же касается моделей, основанных на использовании рекуррентных нейронных сетей, то их показатели заметно уступают трансферным моделям. Единственным случаем, в котором они превосходят модели BERT, является классификация предложений смешанной тональности корпуса отзыва на отели, где доля смешанных предложений крайне мала и, видимо, недостаточна для качественного обучения трансферной модели BERT.

При переходе от несбалансированных корпусов с отзывами к сбалансированному корпусу новостей виден резкий прирост качества классификации классов с меньшим количеством предложений. В то же время ввиду роста сложности и неоднозначности предложений снижается качество классификации предложений положительной и отрицательной тональности. При этом снижается влияние вторичных признаков классов, присутствовавших в корпусах отзывов, таких как длина предложения, лексическое разнообразие. Предложения корпуса новостей в этом плане являются более однородными. В корпусах отзывов классы имеют ярко выраженную тональность, чем могут объясняться высокие показатели классификации положительной и отрицательной тональности. В корпусе новостей эмоциональная окраска является более трудноопределимой. На корпусе новостей наилучшие показатели определения тональности присущи предложениям нейтрального класса, предположительно вследствие того, что он не содержит тональных компонентов, свойственных другим классам.

В табл. 8 для сравнения приведены результаты экспериментов для англоязычного корпуса отзывов на рестораны SemEval-2014. На данном корпусе лучше всего себя проявляет стандартная модель BERT с однокомпонентной классификацией. Качество классификации для него уступает качеству классификации на корпусе отзывов на одежду по всем классам, кроме смешанного. Как и остальные корпуса, он уступает корпусу новостей в качестве классификации нейтральных предложений. На основе этого и матрицы ошибок (рис. 8) можно сделать вывод, что класс нейтральных предложений в корпусе с менее выраженной тональностью в целом определяется проще, чем в корпусах с более экспрессивной лексикой.

На рис. 8 приведены матрицы ошибок для экспериментов на корпусе новостных статей. Характерной особенностью, присутствующей в результатах всех моделей BERT, является то, что высокая доля ошибок приходится на класс со схожей составляющей тональности. Например, для класса отрицательной тональности вторая по размеру группа предложений была определена как смешанная. В тоже время доли ошибок с определением отрицательных предложений как смешанных

Fig. 8. Confusion matrices from the news corpora experiment

Actual	Нейтр.	0.71	0.1	0.12	0.07
	Полож.	0.08	0.69	0.06	0.18
	Отриц.	0.1	0.03	0.65	0.23
	Смеш.	0.07	0.16	0.23	0.55
		Нейтр.	Полож.	Отриц.	Смеш.
		Predicted			

(a) BERT 1 комп.

Actual	Нейтр.	0.7	0.13	0.12	0.06
	Полож.	0.07	0.68	0.05	0.21
	Отриц.	0.09	0.05	0.66	0.21
	Смеш.	0.06	0.14	0.19	0.62
		Нейтр.	Полож.	Отриц.	Смеш.
		Predicted			

(c) BERT 2 вним.

Actual	Нейтр.	0.39	0.2	0.19	0.22
	Полож.	0.25	0.35	0.21	0.19
	Отриц.	0.28	0.23	0.36	0.14
	Смеш.	0.26	0.28	0.15	0.31
		Нейтр.	Полож.	Отриц.	Смеш.
		Predicted			

(e) LSTM

Рис. 8. Матрицы ошибок эксперимента на корпусе новостных статей

Нейтр.	0.75	0.08	0.09	0.07
Полож.	0.09	0.69	0.05	0.18
Отриц.	0.13	0.04	0.64	0.21
Смеш.	0.08	0.14	0.22	0.56
	Нейтр.	Полож.	Отриц.	Смеш.
	Predicted			

(b) BERT 2 комп.

Нейтр.	0.32	0.17	0.26	0.25
Полож.	0.2	0.32	0.21	0.28
Отриц.	0.17	0.23	0.43	0.17
Смеш.	0.23	0.25	0.15	0.37
	Нейтр.	Полож.	Отриц.	Смеш.
	Predicted			

(d) GRU

и нейтральных значительно меньше. Такое же поведение наблюдается и для класса положительных и смешанных предложений. Причиной такого поведения является то, что данные классы являются «смежными», т. е. они имеют общие компоненты тональности. У класса нейтральных предложений такой смежности не наблюдается, вследствие чего он имеет меньшую долю ошибок, и, соответственно, лучшие показатели классификации. Для моделей на основе рекуррентных нейронных сетей похожее поведение не наблюдается — они имеют более хаотичное распределение ошибок.

Заключение

В данной работе было проведено сравнение эффективности использования различных моделей нейронных сетей при выполнении классификации тональности на 4 класса. Сравнение производилось на трех корпусах русскоязычных предложений. Два корпуса составлены из пользовательских отзывов, оставленных на Интернет-площадках: один с отзывами на одежду, другой с отзывами на отели. Третий корпус составлен из новостных статей российских изданий. Лучшая средняя взвешенная F-мера экспериментов, составляющая 0.90, была достигнута моделью BERT на корпусе отзывов на одежду. На этом же корпусе были отмечены лучшие F-меры для положительных и отрицательных предложений, составившие 0.92 и 0.93 соответственно. Наилучшие показатели классификации нейтральных и смешанных предложений достигаются на корпусе новостных статей. Для них F-мера составляет 0.72 и 0.58 соответственно. На англоязычном корпусе достигаются лучшие показатели классификации для класса смешанных предложений (F-мера 0.64), однако в остальных классах результаты на русскоязычных корпусах оказываются лучше. В результате экспериментов было продемонстрировано значительное превосходство трансферных нейронных сетей BERT над нейронными сетями предыдущего поколения LSTM и GRU, наиболее ярко выражающееся при классификации текстов со слабовыраженной эмоциональной окраской.

Среди рассмотренных модификаций BERT минимальное превосходство над аналогами показала BERT с механизмом двойного внимания. Оно наиболее выражено при классификации смешанной тональности в сбалансированном корпусе текстов, где прирост F-меры составил 3–4 %. Однако в целом результаты классификации на 4 класса у всех модификаций BERT лежат в пределах статистической погрешности.

Анализ ошибок показал, что на «смежные» классы тональности приходится большая доля ошибок при классификации трансферной нейронной сетью BERT — от 14 до 21 % ошибок, в то время как на «противоположные» классы (положительный и отрицательный, нейтральный и смешанный) всего от 3 до 7 %. Таким образом, дальнейшие исследования в направлении улучшения разграничения «смежных» классов могут положительно сказаться на показателях классификации.

Сравнение результатов классификации на корпусах с сильной и слабой выраженной эмоциональной окраской показало резкое снижение качества классификации положительных и отрицательных предложений при переходе к корпусу с менее выраженной тональностью. Данное снижение особенно заметно для сетей LSTM и GRU, где F-мера упала до 35–36 %. При этом снижении показателей классификации тональных предложений сопутствует рост показателей классификации нейтральных предложений, составивший в среднем 13 % при переходе от корпуса отзывов на одежду к корпусу новостей. Однако однозначный вывод о зависимости качества классификации нейтральных предложений от степени эмоциональной окрашенности корпуса сделать нельзя ввиду дисбаланса классов в используемых корпусах отзывов. Вследствие этого одним из дальнейших направлений исследований видится проведение эксперимента на сбалансированном корпусе предложений с выраженной эмоциональной окрашенностью.

References

- [1] C. Potts, Z. Wu, A. Geiger, and D. Kiela, *Dynasent: A dynamic benchmark for sentiment analysis*, 2020. arXiv: [2012.15349 \[cs.CL\]](#).
- [2] F. Hamborg and K. Donnay, “NewsMTSC: a dataset for (multi-) target-dependent sentiment classification in political news articles”, in *Proceedings of the 16th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*, Association for Computational Linguistics (ACL), 2021, pp. 1663–1675.
- [3] B. Liu, “Sentiment analysis and opinion mining”, *Synthesis lectures on human language technologies*, vol. 5, no. 1, pp. 1–167, 2012.
- [4] O. Habimana, Y. Li, R. Li, X. Gu, and G. Yu, “Sentiment analysis using deep learning approaches: an overview”, *Science China Information Sciences*, vol. 63, no. 1, pp. 1–36, 2020.
- [5] S. Smetanin and M. Komarov, “Deep transfer learning baselines for sentiment analysis in Russian”, *Information Processing & Management*, vol. 58, no. 3, p. 102 484, 2021.
- [6] A. Radford, J. Wu, R. Child, D. Luan, D. Amodei, and I. Sutskever, “Language models are unsupervised multitask learners”, *Technical report, OpenAI*, 2019.
- [7] Z. Yang, Z. Dai, Y. Yang, J. Carbonell, R. R. Salakhutdinov, and Q. V. Le, “XLNet: Generalized autoregressive pretraining for language understanding”, *Advances in neural information processing systems*, vol. 32, pp. 5754–5764, 2019.
- [8] J. Devlin, M.-W. Chang, K. Lee, and K. Toutanova, *BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding*, 2018. arXiv: [1810.04805v2 \[cs.CL\]](#).
- [9] N. Kalchbrenner, E. Grefenstette, and P. Blunsom, *A convolutional neural network for modelling sentences*, 2014. arXiv: [1404.2188 \[cs.CL\]](#).
- [10] I. Paramonov and A. Poletaev, “Adaptation of Semantic Rule-Based Sentiment Analysis Approach for Russian Language”, in *Proceedings of 30th Conference of Open Innovations Association FRUCT*, IEEE, 2021, pp. 155–164.
- [11] K. Kenyon-Dean, E. Ahmed, S. Fujimoto, J. Georges-Filteau, C. Glasz, B. Kaur, A. Lalande, S. Bhandari, R. Belfer, N. Kanagasabai, *et al.*, “Sentiment analysis: It’s complicated!”, in *Proceedings of the 2018 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, Volume 1 (Long Papers)*, 2018, pp. 1886–1895.
- [12] X. Tan, Y. Cai, and C. Zhu, “Recognizing conflict opinions in aspect-level sentiment classification with dual attention networks”, in *Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP)*, 2019, pp. 3426–3431.
- [13] M. Soleymani, D. Garcia, B. Jou, B. Schuller, S.-F. Chang, and M. Pantic, “A survey of multimodal sentiment analysis”, *Image and Vision Computing*, vol. 65, pp. 3–14, 2017.
- [14] L. A. M. Oberländer and R. Klinger, “An analysis of annotated corpora for emotion classification in text”, in *Proceedings of the 27th International Conference on Computational Linguistics*, 2018, pp. 2104–2119.
- [15] A. Radford, R. Jozefowicz, and I. Sutskever, *Learning to generate reviews and discovering sentiment*, 2017. arXiv: [1704.01444v2 \[cs.LG\]](#).
- [16] Y. Wang, M. Huang, L. Zhao, and X. Zhu, “Attention-based LSTM for aspect-level sentiment classification”, in *Proceedings of the 2016 conference on empirical methods in natural language processing*, 2016, pp. 606–615.

- [17] P. Chen, Z. Sun, L. Bing, and W. Yang, “Recurrent attention network on memory for aspect sentiment analysis”, in *Proceedings of the 2017 conference on empirical methods in natural language processing*, 2017, pp. 452–461.
- [18] A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, A. N. Gomez, Ł. Kaiser, and I. Polosukhin, “Attention is all you need”, in *Advances in neural information processing systems*, 2017, pp. 5998–6008.
- [19] R. Socher, A. Perelygin, J. Wu, J. Chuang, C. D. Manning, A. Y. Ng, and C. Potts, “Recursive deep models for semantic compositionality over a sentiment treebank”, in *Proceedings of the 2013 conference on empirical methods in natural language processing*, 2013, pp. 1631–1642.
- [20] S. Smetanin and M. Komarov, “Sentiment Analysis of Product Reviews in Russian using Convolutional Neural Networks”, in *IEEE 21st Conference on Business Informatics (CBI)*, vol. 1, 2019, pp. 482–486.

Recursive Sentiment Detection Algorithm for Russian Sentences

A. Y. Poletaev¹, I. V. Paramonov¹

DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-134-147](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-134-147)

¹P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 68T50

Research article

Full text in Russian

Received April 30, 2022

After revision May 22, 2022

Accepted May 25, 2022

The article is devoted to the task of sentiment detection of Russian sentences. The sentiment is conceived as the author's attitude to the topic of a sentence. This essay considers positive, neutral, and negative sentiment classes, i.e., the task of three-classes classification is solved.

The article introduces a rule-based sentiment detection algorithm for Russian sentences. The algorithm is based on the assumption that the sentiment of a phrase can be determined by the sentiments of its parts by the recursive application of appropriate semantic rules to the sentiments of its parts organized as a constituency parse tree. The utilized set of semantic rules was constructed based on a discussion with experts in linguistics. The experiments showed that the proposed recursive algorithm performs slightly worse on the hotel reviews corpus than the adapted rule-based approach: weighted F_1 -measures are 0.75 and 0.78, respectively. To measure the algorithm efficiency on complex sentences, we created OpenSentimentCorpus based on OpenCorpora, an open corpus of sentences extracted from Russian news and periodicals. On OpenSentimentCorpus the recursive algorithm performs better than the adapted approach does: F_1 -measures are 0.70 and 0.63, respectively. This indicates that the proposed algorithm has an advantage in case of more complex sentences with more subtle ways of expressing the sentiment.

Keywords: sentiment analysis; sentiment detection; semantic rules; sentiment corpus

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoliy Yurievich Poletaev | orcid.org/0000-0003-0116-4739. E-mail: anatoliy-poletaev@mail.ru
post-graduate student.

Ilya Vyacheslavovich Paramonov | orcid.org/0000-0003-3984-8423. E-mail: ilya.paramonov@fruct.org
correspondence author | PhD, associate professor.

Funding: The reported study was funded by YarSU Program according to the research project No. P2-GM5-2021.

For citation: A. Y. Poletaev and I. V. Paramonov, "Recursive Sentiment Detection Algorithm for Russian Sentences", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 134-147, 2022.

Рекурсивный алгоритм определения тональности предложений на русском языке

А. Ю. Полетаев¹, И. В. Парамонов¹DOI: [10.18255/1818-1015-2022-2-134-147](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2022-2-134-147)¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 004.912

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 30 апреля 2022 г.

После доработки 22 мая 2022 г.

Принята к публикации 25 мая 2022 г.

В статье рассматривается задача определения тональности русскоязычных предложений. Тональность понимается как отношение автора к теме предложения. В данном исследовании учитываются три варианта тональности — положительная, отрицательная и нейтральная, т. е. решается задача классификации с тремя классами.

В статье предлагается алгоритм определения тональности предложения на русском языке, основанный на семантических правилах. В основе алгоритма лежит предположение о том, что тональность фразы может быть определена на основе тональностей её составляющих с помощью рекурсивного применения семантических правил к составным частям фразы, представленным в виде синтаксического дерева. Набор семантических правил, используемых алгоритмом, был составлен в результате обсуждений с экспертами-филологами. Эксперименты показали, что предложенный рекурсивный алгоритм даёт несколько худший результат на корпусе отзывов на отели по сравнению с подходом, основанным на правилах, ранее адаптированным авторами для русского языка: взвешенная F_1 -мера составила 0.75 и 0.78 соответственно. Для оценки качества работы алгоритма на сложных предложениях был создан корпус OpenSentimentCorpus, основанный на OpenCorpora — открытом корпусе предложений из новостных статей и публицистики. На корпусе OpenSentimentCorpus рекурсивный алгоритм работает лучше, чем адаптированный подход: F_1 -мера составила 0.70 и 0.63 соответственно. Таким образом, предложенный в данной работе алгоритм имеет преимущество в случае более сложных предложений с более тонкими способами выражения тональности.

Ключевые слова: анализ тональности; определение тональности; семантические правила; тональный корпус

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий Юрьевич Полетаев

orcid.org/0000-0003-0116-4739. E-mail: anatoliy-poletaev@mail.ru
аспирант.Илья Вячеславович Парамонов
автор для корреспонденцииorcid.org/0000-0003-3984-8423. E-mail: ilya.paramonov@fruct.org
канд. физ.-мат. наук, доцент.

Финансирование: Исследование выполнено в рамках Программы развития ЯрГУ, проект № П2-ГМ5-2021.

Для цитирования: А. Ю. Полетаев и И. В. Парамонов, "Recursive Sentiment Detection Algorithm for Russian Sentences", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 134-147, 2022.

Введение

В данной статье предлагается алгоритм определения тональности предложений на русском языке, развивающий предыдущие исследования авторов [1], и производится его оценка. Под задачей определения тональности на уровне предложений понимается выявление и классификация отношения автора предложения к его теме. Предложение считается имеющим положительную тональность, если оно содержит положительные факты, мнения или эмоции, выраженные автором, и не содержит отрицательных фактов, мнений или эмоций, либо эти отрицательные коннотации признаются автором несущественными. В противоположном случае (когда отрицательные факты, мнения или эмоции преобладают) предложение считается имеющим отрицательную тональность. Если предложение не имеет ни положительной, ни отрицательной тональности, оно считается нейтральным (имеющим нейтральную тональность) [2, 3].

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм основан на семантических правилах. Такие подходы менее распространены по сравнению с подходами, основанными на нейронных сетях, однако в некоторых случаях они восполняют недостатки нейронных сетей: при использовании семантических правил не требуются большие обучающие корпуса, а результаты их применения достаточно легко интерпретировать. В предыдущей работе авторов [1] был адаптирован к русскому языку подход, основанный на правилах и изначально предложенный Y. Xie для английского языка [4]. Семантические правила в исходном подходе реализованы как шаблоны, применяемые к списку слов предложения. Такой метод трудно применять для русского языка, поскольку в нём, в отличие от английского, нет строгого порядка слов. Для решения этой проблемы авторы реализовали правила как алгоритмы над деревом синтаксических связей (dependency parse tree), отражающим зависимости между словами предложения. Качество работы адаптированного подхода было оценено на корпусе отзывов на отели; F_1 -мера составила 0.73. Наиболее распространённый в настоящее время подход, использующий нейронную сеть BERT, даёт на этом же корпусе несколько лучший (на 5 %) результат.

Цель настоящей работы — предложить новый алгоритм определения тональности, использующий синтаксическую структуру предложения более полно, чем ранее адаптированный подход, и оценить качество его работы. Как источник информации о структуре предложения используется дерево составляющих (constituency parse tree). Алгоритм основан на предположении, что тональность фразы можно определить на основе тональностей её частей, представленных как дочерние узлы дерева составляющих. Как следствие, был разработан рекурсивный алгоритм определения тональности над деревом составляющих.

Кроме того, предполагается, что тональность предложения существенно зависит от тональности его предикативного ядра, которое является корнем дерева составляющих. Таким образом, предложенный алгоритм начинает работу от корня дерева составляющих данного предложения и рекурсивно определяет тональность каждой фразы (узла дерева составляющих), применяя семантические правила к тональностям её составных частей (дочерних узлов).

Большинство исследований, посвящённых анализу тональности русскоязычных предложений, использует корпуса, состоящие из достаточно коротких и простых предложений (например, твиты и отзывы) [5]. В таких предложениях тональность проявляется чётко и определённо. Предложения с более сложной структурой обычно не рассматриваются. Чтобы закрыть этот пробел, авторами работы был создан корпус OpenSentimentCorpus, состоящий из предложений, извлечённых из корпуса новостных и публицистических текстов OpenCorpora. Эффективность работы алгоритма была оценена и сопоставлена с эффективностью ранее адаптированного авторами подхода как на корпусе отзывов на отели, так и на OpenSentimentCorpus.

Оставшаяся часть работы организована следующим образом. В разделе 1 проведён обзор связанных работ. В разделе 2 приведено общее описание предлагаемого рекурсивного алгоритма. Раздел 3

посвящён новому корпусу, использованному для экспериментов. Раздел 4 содержит результаты экспериментов: оценку качества работы предложенного алгоритма и её сравнение с результатами ранее адаптированного подхода. В разделе 5 проведён анализ ошибок рекурсивного алгоритма на корпусе OpenSentimentCorpus. В заключении подведены итоги работы и намечены направления дальнейших исследований.

1. Обзор связанных работ

Использование семантических правил для анализа тональности на уровне предложений было предложено в работе [6] и позднее усовершенствовано с помощью учёта различных типов связей между словами [3]. В работе [4] описан улучшенный Y. Xie подход, использующий для обработки различных видов оборотов семантические правила, соответствующие различным способам выражения тональности. Этот подход достигает F_1 -мер 0.76 и 0.68 на наборах данных комментариев из Facebook и твитов соответственно. В работе O. Appel [7] к этому подходу были добавлены новые правила и механизм автоматизированного расширения тонального словаря с помощью машинного обучения. Авторы подхода исследовали качество его работы на трёх наборах данных. На наборах данных комментариев из Facebook и твитов была достигнута доля правильных ответов (accuracy) около 0.88. На третьем наборе данных, состоящем из отзывов на фильмы, доля правильных ответов составила 0.76.

Предыдущая работа авторов настоящего исследования [1] посвящена адаптации подхода O. Appel к русскому языку. Наибольшую сложность при адаптации составило то, что в исходной работе семантические правила были реализованы как шаблоны над предложением, представленным в виде списка слов, что требовало соблюдения строгого порядка слов, тогда как в русском языке порядок слов в предложении строго не регламентирован. Для решения этой проблемы правила были реализованы в виде алгоритмов над деревом синтаксических связей (dependency parse tree), отражающим зависимости между словами в предложении. Эксперименты с адаптированным подходом на корпусе отзывов на отели показали возможность достичь с использованием подхода, основанного на правилах, результатов, сравнимых с наилучшими для русского языка, достигаемыми с использованием нейронных сетей.

Дерево разбора предложения — представление иерархической структуры слов в предложении [8]. Существуют два подхода к анализу структуры предложения с помощью деревьев разбора. Первый рассматривает предложение как иерархию слов, упорядоченных в соответствии с синтаксическими связями. Узлы дерева синтаксических связей — слова; рёбра показывают синтаксическое согласование между ними. Другой подход основан на членении фраз на их составные части. Листьями дерева составляющих являются слова, ветвями — фразы, а рёбра отражают связь типа «целое — часть».

Деревья составляющих и семантические правила успешно применяются для анализа смысла во множестве приложений, например, в распознавании вопросов и команд [9, 10] и выявлении логической связности предложений [11]. Применительно к анализу тональности существует набор данных Stanford Sentiment Treebank (SST) [12], включающий маркировку отдельных частей предложений по тональности для 215154 фраз из 11855 предложений. Большинство методов анализа тональности, задействующих деревья составляющих, используют нейронные сети и набор данных SST для обучения и оценки качества. Существует два основных подхода. Первый — Tree-LSTM [13, 14], архитектура нейронной сети, упорядочивающая узлы LSTM в соответствии с деревом разбора так, что каждый из них соответствует узлу дерева разбора. Второй подход обрабатывает предложение как систему фраз, каждая из которых может, в свою очередь, также делиться на отдельные фразы; тональность же каждой из фраз может быть определена по тональностям её составляющих. Одной из последних моделей, основанных на данной идее, является нейронная сеть SentiBERT, определяющая тональность фразы с помощью представления в виде трансформеров её составных частей и машинного обучения [15].

Адаптация вышеперечисленных подходов, основанных на нейронных сетях, к русскому языку в настоящее время чрезвычайно затруднительна, поскольку требует большого корпуса, схожего с SST, то есть имеющего разметку по тональности каждого узла каждого из деревьев составляющих. Следовательно, разработка основанных на правилах подходов, не требующих больших корпусов для обучения, представляется для русского языка перспективным направлением исследований.

2. Описание алгоритма

Структура фраз предложения описывает, как из слов формируются высказывания [8]. Для обработки структуры фраз в данной работе используется дерево составляющих. Листьями дерева составляющих являются слова, ветвями — фразы, а рёбра отражают связь типа «целое — часть». Корнем дерева составляющих является предикативное ядро предложения.

В данной работе используются деревья составляющих, а не деревья синтаксических связей (отражающие синтаксическое согласование между словами), потому что дерево составляющих лучше отражает структуру фраз предложения. Следовательно, семантические правила оказывается проще построить с использованием деревьев составляющих. Поскольку для русского языка не существует анализаторов, строящих деревья составляющих, но есть анализаторы для построения деревьев синтаксических связей, был разработан вспомогательный алгоритм, преобразующий дерево синтаксических связей в дерево составляющих. Этот алгоритм основан на группировке слов, являющихся потомками одного слова, во фразы в соответствии с частеречной разметкой и типами синтаксических связей.

Алгоритм определения тональности, предлагаемый в данной статье, основан на предположении, что тональность фразы может быть определена на основе тональностей её составляющих. Был составлен набор правил, описывающих, как вывести тональность фразы по тональностям её частей, которые определяются с помощью рекурсивного применения того же набора правил. Тональности отдельных слов, к которым не может быть применён рекурсивный вызов, определяются с помощью тонального словаря RuSentiLex-2017 [16] (с изменениями, описанными в предыдущей работе авторов [1]). Несмотря на низкое качество этого словаря [1], для русского языка не существует лучших альтернатив.

Более формально: пусть N — узел дерева составляющих, $C(N)$ — множество дочерних узлов N , а $S(N)$ — тональность N . Алгоритм начинает свою работу от корня дерева составляющих N_r , который соответствует предикативному ядру обрабатываемого предложения; таким образом, $S(N_r)$ — тональность предложения.

Алгоритм вычисляет $S(N)$ для заданного узла N следующим образом:

- если $C(N) = \emptyset$, т. е. узел представляет одиночное слово, то $S(N)$ — тональность N , определённая в соответствии со словарём;
- иначе рекурсивно вычислить $S(N_c)$ для каждого $N_c \in C(N)$; выбрать подходящее семантическое правило в зависимости от типа $C(N)$ (см. ниже) и вычислить по нему $S(N)$.

В зависимости от того, как тональность фразы определяется по тональностям её частей, было выделено три группы семантических правил.

Первая группа относится к фразам, состоящим из однородных членов предложения, например, *ум, честь и совесть* (положительная тональность), *и талантливый, и ленивый* (нейтральная тональность), *разработанный коллективно и обречённый на неудачу* (отрицательная тональность), и т. д. Для данных случаев было составлено следующее правило определения тональности: фраза имеет положительную тональность, если хотя бы одна из её однородных частей имеет положительную тональность, и тональность ни одной из частей не отрицательна; фраза имеет отрицательную тональность, если хотя бы одна из её однородных частей имеет отрицательную тональность, и тональность ни одной из частей не положительна; иначе фраза нейтральна.

Table 1. Modifier words and phrases

Модификация
делают нейтральную или положительную тональность отрицательной; делают отрицательную тональность положительной
делают отрицательную тональность нейтральной; остальную оставляют неизменной
делают нейтральную тональность положительной; остальную оставляют неизменной
делают положительную тональность нейтральной; остальную оставляют неизменной
делают любую тональность нейтральной

Таблица 1. Слова- и фразы-модификаторы

Слова и фразы
не, нет, прекратить, разрушить, перестать, избегать, противоречить, уменьшать, утратить, ни один
понимать, принимать
способность, обеспечить, позволить, выполнить, помочь, увеличить, достичь, доказать, надеяться, очень, также
крайне
вроде бы, несмотря на

Во второй группе правил одна часть фразы модифицирует тональность другой части фразы. Например, рассмотрим фразы *объём производства увеличивается* и *дефицит бюджета увеличивается*. В первой из них слово *увеличивается* изменяет нейтральную тональность части *объём производства* и придаёт всей фразе положительную тональность. Во второй то же самое слово *увеличивается* никак не изменяет отрицательную тональность фразы *дефицит бюджета*; тональность всей фразы оказывается отрицательной. По результатам обсуждения с экспертами-лингвистами были выделены 26 наиболее употребительных русских слов-модификаторов и фраз-модификаторов (таблица 1).

В третьей группе тональность фразы является результатом соединения тональностей своих частей. Например, нейтральное подлежащее *законопроект*, соединяясь с положительным определением *своевременный*, делает тональность фразы *своевременный законопроект* положительной. Результат соединения может быть различным в зависимости от состава фразы. Например, имеющая отрицательную тональность фраза *отчислить лучшего студента* состоит из сказуемого *отчислить*, имеющего отрицательную тональность, и дополнения *лучший студент*, тональность которого положительна. В то же время, нейтральная фраза *заслуженно отчислили* состоит из сказуемого *отчислили*, имеющего отрицательную тональность, и обстоятельства *заслуженно*, имеющего положительную тональность.

После обсуждения с экспертами-лингвистами были сформулированы правила, описывающие типичные результаты соединения тональностей для всех возможных комбинаций членов предложения на русском языке (таблица 2).

Правило, которое применяется к данной фразе, выбирается следующим образом:

- если фраза состоит из однородных членов, то применяется правило для однородных членов;
- если одна из частей фразы является словом-модификатором или фразой-модификатором, то применяется соответствующее им правило;
- иначе применяется правило для соединения частей фразы.

Следует отметить, что используемая в описанном алгоритме модель имеет ряд ограничений. Первое относится к ситуациям, когда тональность фразы не может быть определена только по тональностям её составляющих. Например, рассмотрим фразу *после проведения акции сайт организаторов исчез*. Несмотря на то, что её части *сайт организаторов* и *исчез после проведения акции* нейтральны, фраза в целом имеет отрицательную тональность. Второе ограничение связано с тем, что предложенные правила достаточно просты и не покрывают все случаи определения тональности фразы по тональностям её частей. Например, фраза *мастерски обманывает* содержит имеющее отрицательную тональность сказуемое *обманывает* и положительное обстоятельство *мастерски*. Соответствующее правило говорит о том, что такая фраза нейтральна, тогда как на самом деле её тональность отрицательна.

Table 2. Sentiment of combination of sentence parts**Таблица 2.** Тональность комбинаций членов предложения

Первая часть фразы	Вторая часть фразы	Тональность первой части фразы	Тональность второй части фразы	Тональность фразы
Подлежащее	Сказуемое	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Положительная Отрицательная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Отрицательная Отрицательная
	Определение	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Положительная Отрицательная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Отрицательная Отрицательная Отрицательная
	Дополнение	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Положительная Нейтральная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Отрицательная Отрицательная
Сказуемое	Обстоятельство	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Положительная Отрицательная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Отрицательная Отрицательная
	Дополнение	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Положительная Отрицательная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Отрицательная Отрицательная Отрицательная
Дополнение	Определение	Положительная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная
		Нейтральная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная
		Отрицательная	Положительная Нейтральная Отрицательная	Нейтральная Отрицательная Отрицательная

Несмотря на эти ограничения, представляется разумным провести эксперименты даже с такой простой моделью, чтобы оценить её потенциал для определения тональности, а также провести анализ ошибок, на основе которого можно будет улучшить модель в будущем.

3. Корпуса, использованные для экспериментов

Для оценки способности предложенного алгоритма определять тональности достаточно простых предложений были проведены эксперименты на корпусе отзывов на отели, использованном в предыдущем исследовании авторов [1]. В большинстве предложений этого корпуса тональность выражена чётко и определённо, поэтому задача определения тональности оказывается достаточно простой.

Для оценки применимости и эффективности предложенного алгоритма в более сложных случаях были проведены эксперименты на корпусе, состоящем из предложений, относящихся к нескольким предметным областям, и содержащем существенную долю сложных предложений.

В свободном доступе имеется нескольких корпусов русскоязычных предложений с разметкой по тональности: SentiRuEval-2015 Subtask 2, SentiRuEval2016, RuTweetCorp, LINIS Crowd, Kaggle Russian News Dataset и RuReviews [5]. К сожалению, ни один из них не подходит для данного исследования: некоторые содержат тексты, а не предложения (Kaggle Russian News Dataset, RuReviews), в других слишком много ошибок разметки (RuTweetCorp, LINIS Crowd) или нет достаточного количества сложных предложений (SentiRuEval). Поэтому был создан OpenSentimentCorpus, основанный на OpenCorpora — открытом корпусе предложений из новостных и публицистических текстов на русском языке, относящихся к различным предметным областям.

Чтобы увеличить долю сложных предложений и отбросить слишком простые, малополезные для оценки качества, из корпуса были исключены предложения короче семи слов. Все оставшиеся были размечены как минимум тремя экспертами.

Каждое предложение было отмечено как *положительное*, *нейтральное* или *отрицательное*, если оно выражает соответствующую тональность; как *смешанное*, если оно выражает одновременно и положительную, и отрицательную тональность, например, *Пелевин пишет не в пример хуже Акунина, но у Пелевина есть что сказать читателю*; либо как *сомнительное*, если его тональность непонятна, оно содержит нечёткую авторскую позицию, а также во всех остальных случаях неуверенности эксперта.

Результаты разметки обрабатывались следующим образом:

- Предложения, получившие как минимум одну отметку *сомнительное* или одновременно отметки *положительное* и *отрицательное*, были исключены из рассмотрения как имеющие нечётко выраженную или непонятную тональность.
- Окончательная тональность предложения определялась в соответствии с преобладающей среди всех экспертов отметкой. Если таковой не находилось (например, если только 2 из 3 отметок были положительными, а одна — нейтральной), то такое предложение исключалось.

Построенный OpenSentimentCorpus — корпус предложений, относящихся к различным предметным областям, подходящий для экспериментов по классификации на 2, 3 или 4 класса. Поскольку рассматриваемый в настоящей работе алгоритм определяет предложения лишь положительной, отрицательной или нейтральной тональности, предложения смешанной тональности были исключены из дальнейшего рассмотрения. Объём OpenSentimentCorpus достаточен для получения достоверных результатов экспериментов.

Распределения предложений по классам для обоих рассматриваемых корпусов приведены в таблице 3.

В обоих корпусах предложения распределены по классам неравномерно. Примерно половина предложений корпуса отзывов на отели имеет положительную тональность, четверть — отрицательную, и только одна пятая — нейтральную. Главная причина этого лежит в особенностях предметной

Table 3. Classes of sentences in hotel reviews corpus and OpenSentimentCorpus

Корпус	Корпус отзывов на отели	OpenSentimentCorpus
Положительная	639	536
Нейтральная	232	2441
Отрицательная	333	1510
Всего	1204	4487

Таблица 3. Классы предложений с различной тональностью в корпусах отзывов на отели и OpenSentimentCorpus

области — большинство авторов отзывов выражает свою удовлетворённость или неудовлетворённость, а не приводит факты. В OpenSentimentCorpus, напротив, большая часть предложений содержит нейтральные высказывания, не выражающие мнения их авторов, примерно треть предложений имеет отрицательную тональность, и только десятая часть — положительную. Тем не менее, OpenSentimentCorpus содержит более 500 положительных предложений, чего достаточно для оценки качества работы алгоритма.

OpenSentimentCorpus доступен онлайн и может быть загружен по адресу: <https://github.com/yarfruct/open-sentiment-corpus>.

4. Эксперименты

Качество работы предложенного в данной работе рекурсивного алгоритма оценивалось на корпусе отзывов на отели и на OpenSentimentCorpus и сравнивалось с качеством работы основанного на правилах подхода, адаптированного для русского языка в [1].

Как метрики качества использовались простое и взвешенное среднее точности, полноты и F_1 -меры. Простое среднее (также называемое арифметическим средним) — сумма значений соответствующих метрик для всех классов, делённая на количество классов. Взвешенное среднее — сумма метрик качества для классов, умноженных на количество предложений в каждом классе, и делённая на общее количество предложений в корпусе. Причиной использования взвешенного среднего является дисбаланс классов в корпусах, который может привести к неправильной оценке качества работы алгоритма.

Метрики качества и матрицы ошибок для корпуса отзывов на отели приведены в таблицах 4 и 5. Предложенный рекурсивный алгоритм определяет положительную и отрицательную тональность на данном корпусе достаточно точно, но несколько хуже адаптированного подхода. Это снижение в основном обусловлено увеличившейся долей предложений с положительной тональностью, неверно классифицированных как нейтральные. Хуже всего и рекурсивный алгоритм, и адаптированный подход разделяют предложения с отрицательной и нейтральной тональностями, хотя рекурсивный алгоритм и делает это лучше адаптированного подхода.

Table 4. Sentiment classification performances of the proposed recursive algorithm and the algorithm adapted in [1] on the hotel reviews corpus

Алгоритм	Рекурсивный алгоритм			Адаптированный подход			Количество предложений
Класс предложений	Точность	Полнота	F_1 -мера	Точность	Полнота	F_1 -мера	
Положительный	0.89	0.77	0.82	0.88	0.88	0.88	639
Нейтральный	0.43	0.75	0.55	0.48	0.75	0.58	232
Отрицательный	0.86	0.64	0.73	0.94	0.57	0.71	333
Среднее	0.73	0.72	0.70	0.77	0.73	0.73	1204
Взвешенное среднее	0.79	0.73	0.75	0.82	0.77	0.78	1204

Таблица 4. Качество работы предложенного рекурсивного алгоритма и адаптированного в работе [1] подхода на корпусе отзывов на отели

Доля правильных ответов рекурсивного алгоритма = 0.73

Доля правильных ответов адаптированного подхода = 0.77

Table 5. Sentiment classification confusion matrices of the proposed recursive algorithm and the rule-based approach adapted in [1] on the hotel reviews corpus

Тональность предсказ. реальн.	Рекурсивный алгоритм			Адаптированный подход			Всего
	Положит.	Нейтр.	Отрицат.	Положит.	Нейтр.	Отрицат.	
Положительная	491	137	11	546	72	3	639
Нейтральная	33	175	24	50	173	9	232
Отрицательная	29	92	212	24	118	191	333

Таблица 5. Матрицы ошибок предложенного рекурсивного алгоритма и адаптированного в работе [1] подхода на корпусе отзывов на отели

Метрики качества и матрицы ошибок на корпусе OpenSentimentCorpus приведены в таблицах 6 и 7. Качество работы рекурсивного алгоритма на OpenSentimentCorpus в среднем примерно на 5–6 % ниже, чем на корпусе отзывов на отели. Наиболее заметны сложности с определением положительной тональности: алгоритм корректно классифицировал только половину имеющих её предложений, а существенную их долю, наоборот, классифицировал как имеющие отрицательную тональность. Напротив, отрицательную тональность алгоритм определяет на OpenSentimentCorpus лучше, чем на корпусе отзывов на отели, а также точнее разделяет отрицательную и нейтральную тональности. В целом, рекурсивный алгоритм работает на OpenSentimentCorpus примерно на 7 % лучше, чем адаптированный подход. Единственное существенное преимущество адаптированного подхода — меньшее количество неверно классифицированных предложений с положительной тональностью.

Table 6. Sentiment classification performances of the proposed recursive algorithm and the adapted rule-based approach on OpenSentimentCorpus

Алгоритм Класс предложений	Рекурсивный алгоритм			Адаптированный подход			Количество предложений
	Точность	Полнота	F_1 -мера	Точность	Полнота	F_1 -мера	
Положительный	0.45	0.49	0.47	0.30	0.71	0.42	536
Нейтральный	0.76	0.74	0.75	0.72	0.65	0.68	2441
Отрицательный	0.70	0.70	0.70	0.77	0.52	0.62	1510
Среднее	0.63	0.64	0.64	0.60	0.62	0.57	4487
Взвешенное среднее	0.70	0.70	0.70	0.68	0.61	0.63	4487

Таблица 6. Качество работы предложенного рекурсивного алгоритма и адаптированного в работе [1] подхода на корпусе OpenSentimentCorpus

Доля правильных ответов рекурсивного алгоритма = 0.70
 Доля правильных ответов адаптированного подхода = 0.61

Table 7. Sentiment classification confusion matrices of the proposed recursive algorithm and the adapted rule-based approach on OpenSentimentCorpus

Тональность предсказ. реальн.	Рекурсивный алгоритм			Адаптированный подход			Всего
	Положит.	Нейтр.	Отрицат.	Положит.	Нейтр.	Отрицат.	
Положительная	261	209	66	378	131	27	536
Нейтральная	244	1800	397	640	1596	205	2441
Отрицательная	81	371	1058	228	504	778	1510

Таблица 7. Матрицы ошибок предложенного рекурсивного алгоритма и адаптированного в работе [1] подхода на корпусе OpenSentimentCorpus

5. Анализ ошибок

Для выяснения причин снижения эффективности работы алгоритма на OpenSentimentCorpus была собрана информация о 150 неверно классифицированных предложениях (по 50 предложений из каждого класса). Они были разделены на 4 группы (таблица 8) в зависимости от причины неверной классификации:

- некорректное построение синтаксического дерева;
- некорректное определение тональности одиночных слов;
- несовершенство правил;
- тональность определяется высокоуровневой структурой предложения.

Table 8. Error groups of the proposed recursive algorithm on OpenSentimentCorpus

Таблица 8. Группы ошибок предложенного алгоритма на корпусе OpenSentimentCorpus

Ошибка	% положит. предложений	% нейтр. предложений	% отрицат. предложений
Некорректное построение синтаксического дерева	12	4	24
Некорректное определение тональности одиночных слов	24	12	34
Несовершенство правил	26	22	2
Тональность определяется высокоуровневой структурой предложения	38	62	40

Некорректное построение синтаксического дерева включает в себя ошибки определения частей речи, построения дерева составляющих, лемматизации и все остальные, порождённые синтаксическим анализатором. Для предложений положительной и нейтральной тональностей это наименее частые ошибки, тогда как почти четверть ошибок классификации предложений с отрицательной тональностью вызвана несовершенством синтаксического анализатора. Причиной этого может быть более сложная структура предложений с отрицательной тональностью по сравнению с остальными.

Ошибки, связанные с неверным определением тональности одиночных слов, возникают, когда словарная тональность слова не соответствует реальной. Главная и наиболее важная их причина — несовершенство тонального словаря. В словаре RuSentiLex отсутствуют многие слова, имеющие ярко выраженную тональную окраску, такие как *больно*, *истерика*, *ломать*, *взаимовыгодный*, *позабавить*, *благодаря*. Ошибки этой группы также возникают из-за слов, тональность которых меняется в зависимости от контекста и предметной области. Например, слово *исторический* обычно нейтрально, но в контексте значимости некоторого события оно приобретает положительную окраску, например, *исторический момент*. Следует отметить, что RuSentiLex-2017 предоставляет некоторую информацию об омонимии, но для того, чтобы использовать её для улучшения алгоритма, необходимо отдельное исследование. Ошибки, причиной которых является неверное определение тональности одиночных слов, влияют в основном на тональные предложения, и только десятая часть ошибок классификации нейтральных предложений относится к этой группе. Возможная причина такого дисбаланса — меньшее количество тональных слов в нейтральных предложениях по сравнению с тональными.

Последние две группы ошибок связаны с ограничениями алгоритма. Как отмечалось выше, используемые им семантические правила довольно просты и не всегда правильно определяют тональность конкретной фразы. Например, нейтральное предложение *Я правда не видела нового шестого фильма* неверно классифицировано как имеющее отрицательную тональность из-за того, что правило обработки «не» определяет тональность фразы *не видела нового шестого фильма* как отрицательную, как следствие, тональность всего предложения также определяется как отрицательная. Лишь

Table 9. Accuracy of modifier words and phrases on OpenSentimentCorpus**Таблица 9.** Доля случаев правильного применения слов- и фраз-модификаторов на корпусе OpenSentimentCorpus

Модификация	Слова и фразы	Доля, %
Делают нейтральную или положительную тональность отрицательной; делают отрицательную тональность положительной	не, нет, прекратить, разрушить, перестать, избегать, противоречить, уменьшать, утратить, ни один	56
Делают отрицательную тональность нейтральной; остальную оставляют неизменной	понимать, принимать	76
Делают нейтральную тональность положительной; остальную оставляют неизменной	способность, обеспечить, позволить, выполнить, помочь, увеличить, достичь, доказать, надеяться, очень, также	77
Делают положительную тональность нейтральной; остальную оставляют неизменной	крайне	100
Делают любую тональность нейтральной	вроде бы, несмотря на	80

небольшое количество предложений с отрицательной тональностью классифицируется неверно из-за ошибок этой группы, в отличие от предложений с положительной и нейтральной тональностью.

Вероятно, оценки алгоритма несколько смещены в сторону отрицательной тональности: он верно определяет тональность большинства отрицательных фраз, но также считает отрицательными многие фразы, которые таковыми не являются. Анализ правильности использования слов- и фраз-модификаторов (таблица 9) показывает, что они выбраны достаточно адекватно.

Последняя группа ошибок включает предложения, неверно классифицированные из-за того, что тональность некоторых фраз не может быть определена на основе тональностей их составных частей, а определяется высокоуровневой структурой предложения. Например, рассмотрим предложение *С возрастом детям становится всё более интересен и интернет: его регулярно посещают 15 % младших школьников и почти 60 % подростков*. Оно содержит положительно окрашенную информацию о росте использования интернета, но общий контекст и стиль речи показывают, что автор не выражает собственное мнение, а просто констатирует факт, следовательно, предложение является нейтральным. Такие ошибки чаще всего возникают при определении тональности нейтральных предложений, вероятно, из-за того, что существенная их часть извлечена из новостных сообщений, которые могут содержать тонально окрашенные факты, но общий их контекст нейтрален.

Подводя итоги анализа ошибок, можно сделать следующие выводы. Ошибки различных групп распределены по классам тональности неравномерно: те из них, которые связаны с некорректным синтаксическим анализом, приводят к некорректной классификации предложений с отрицательной тональностью чаще, чем всех остальных; корректное определение тональности отдельных слов наиболее существенно для классификации предложений с положительной и отрицательной тональностью; несовершенство правил влияет на качество классификации предложений с положительной и нейтральной тональностью в большей степени по сравнению с отрицательной; недостаток анализа высокоуровневой структуры предложений влияет на все классы тональности, но сильнее всего — на нейтральный.

Заключение

В данной статье предложен рекурсивный алгоритм определения тональности русскоязычных предложений, основанный на семантических правилах, и проведена оценка качества его работы. Для улучшения анализа структуры предложений были использованы деревья составляющих и предложен набор семантических правил, позволяющих определить тональность фразы на основе тональностей её частей. Качество работы предложенного алгоритма было экспериментально

оценено и сопоставлено с качеством работы другого основанного на правилах подхода, адаптированного к русскому языку в предыдущей работе авторов, на двух корпусах: корпусе отзывов на отели и OpenSentimentCorpus, состоящим из достаточно сложных предложений, относящихся к различным предметным областям и извлечённых из новостных текстов. Эксперименты показали, что на корпусе отзывов на отели предложенный рекурсивный алгоритм показывает несколько худшие по сравнению с адаптированным подходом результаты: взвешенные F_1 -меры составили 0.75 и 0.78 соответственно. На OpenSentimentCorpus качество работы обоих методов оказалось значительно ниже, чем на корпусе отзывов на отели (что было ожидаемо ввиду сложности предложений и более нетривиальных способов выражения тональности), однако предложенный алгоритм работает значительно лучше, чем адаптированный подход: F_1 -меры составили 0.70 и 0.63 соответственно. Это свидетельствует о том, что в сложных случаях предложенный алгоритм имеет существенное преимущество над адаптированным подходом.

Несмотря на то, что в среднем эффективность алгоритма на OpenSentimentCorpus не слишком высока, следует иметь в виду, что набор семантических правил, использованных в экспериментах, достаточно простой, а корпус по своим характеристикам значительно отличается от обычно используемых в исследованиях по анализу тональности на русском языке. Следует также отметить, что предложения с отрицательной тональностью определяются достаточно точно, что может свидетельствовать о соответствии правил реально существующим способам выражения отрицательной тональности.

Будущие исследования могут быть связаны с усовершенствованием алгоритма для повышения качества определения положительной и нейтральной тональности. На основе анализа ошибок этой цели предположительно можно достичь за счёт повышения точности определения тональности одиночных слов (в том числе с помощью расширения используемого тонального словаря) и добавления новых, более точных правил, отражающих различные способы выражения тональности.

References

- [1] I. Paramonov and A. Poletaev, “Adaptation of Semantic Rule-Based Sentiment Analysis Approach for Russian Language”, in *Proceedings of 30th Conference of Open Innovations Association FRUCT*, 2021, pp. 155–164.
- [2] T. Wilson, J. Wiebe, and P. Hoffmann, “Recognizing contextual polarity in phrase-level sentiment analysis”, in *Proceedings of human language technology conference and conference on empirical methods in natural language processing*, 2005, pp. 347–354.
- [3] L. K.-W. Tan, J.-C. Na, Y.-L. Theng, and K. Chang, “Sentence-level sentiment polarity classification using a linguistic approach”, in *International Conference on Asian Digital Libraries*, 2011, pp. 77–87.
- [4] Y. Xie, Z. Chen, K. Zhang, Y. Cheng, D. K. Honbo, A. Agrawal, and A. N. Choudhary, “MuSES: multilingual sentiment elicitation system for social media data”, *IEEE Intelligent Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 34–42, 2014.
- [5] S. Smetanin and M. Komarov, “Deep transfer learning baselines for sentiment analysis in Russian”, *Information Processing & Management*, vol. 58, no. 3, p. 102 484, 2021.
- [6] M. A. M. Shaikh, H. Prendinger, and M. Ishizuka, “Sentiment assessment of text by analyzing linguistic features and contextual valence assignment”, *Applied Artificial Intelligence*, vol. 22, no. 6, pp. 558–601, 2008.
- [7] O. Appel, F. Chiclana, J. Carter, and H. Fujita, “A hybrid approach to the sentiment analysis problem at the sentence level”, *Knowledge-Based Systems*, vol. 108, pp. 110–124, 2016.
- [8] S. Kahane and N. Mazziotta, “Syntactic Polygraphs. A Formalism Extending Both Constituency and Dependency”, in *Proceedings of the 14th Meeting on the Mathematics of Language*, 2015, pp. 152–164.

- [9] Y. Gao, J.-G. Lou, and D. Zhang, *A Hybrid Semantic Parsing Approach for Tabular Data Analysis*, 2019. arXiv: [1910.10363v2](https://arxiv.org/abs/1910.10363v2) [cs.AI].
- [10] J. Li, H. Tan, and M. Bansal, “Improving Cross-Modal Alignment in Vision Language Navigation via Syntactic Information”, in *Proceedings of the 2021 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, 2021, pp. 1041–1050.
- [11] Z. Marji, A. Nighojkar, and J. Licato, “Probing the Natural Language Inference Task with Automated Reasoning Tools”, in *The Thirty-Third International Flairs Conference*, 2020.
- [12] R. Socher, A. Perelygin, J. Wu, J. Chuang, C. D. Manning, A. Y. Ng, and C. Potts, “Recursive deep models for semantic compositionality over a sentiment treebank”, in *Proceedings of the 2013 conference on empirical methods in natural language processing*, 2013, pp. 1631–1642.
- [13] K. S. Tai, R. Socher, and C. D. Manning, “Improved Semantic Representations From Tree-Structured Long Short-Term Memory Networks”, in *Proceedings of the 53rd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 7th International Joint Conference on Natural Language Processing (Volume 1: Long Papers)*, 2015.
- [14] Y. Zhang and Y. Zhang, “Tree communication models for sentiment analysis”, in *Proceedings of the 57th annual meeting of the association for computational linguistics*, 2019, pp. 3518–3527.
- [15] D. Yin, T. Meng, and K.-W. Chang, “SentiBERT: A Transferable Transformer-Based Architecture for Compositional Sentiment Semantics”, in *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020, pp. 3695–3706.
- [16] N. V. Loukachevitch and A. V. Levchick, “Creating a General Russian Sentiment Lexicon”, in *Proceedings of the Tenth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC’16)*, 2016, pp. 1171–1176.

