ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 22 № 3(57) 2015

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия
Website: http://mais.uniyar.ac.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-72

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, №3. 2015

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ №ФС77-49724 от 11.05.2012 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 54974 в Каталоге российской прессы "Почта России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 28.07.2015. Дата выхода в свет 15.08.2015. Формат 60x84$^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 14,4. Уч.-изд. л. 14,0. Объем 125 с. Тираж 50 экз. Свободная цена. Заказ 050/015. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150000 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 22 No 3(57) 2015

Founded in 1999
6 issues per year

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
Website: http://mais.uniyar.ac.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 3. 2015

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 327–336

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–327–336

UDC 517.9

Bifurcation to Chaos in the Complex Ginzburg–Landau Equation with Large Third-Order Dispersion[1]

Ovsyannikov I.*, Turaev D.**, Zelik S.***

* *Lobachevsky University of Nizhny Novgorod,*
23 Prospekt Gagarina, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
Universität Bremen, Germany
Jacobs University, Bremen, Germany
** *Imperial College, London,*
180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, UK
*** *University of Surrey*
Guildford, GU2 7XH, UK

e-mail: ivan.i.ovsyannikov@gmail.com, dturaev@imperial.ac.uk, szelik@surrey.ac.uk

received May 20, 2015

Keywords: bifurcations, chaos, Ginzburg–Landau equation

We give an analytic proof of the existence of Shilnikov chaos in complex Ginzburg–Landau equation subject to a large third-order dispersion perturbation.

The goal of this paper is to show that chaotic behavior is possible in complex Ginzburg-Landau equation with additional large dispersion term. The equation is

$$\partial_t u = (1 + i\gamma)\partial_x^2 u + \beta u - (1 + i\omega)u|u|^2 + L\partial_x^3 u, \tag{1}$$

where u is a complex-values function, spatially periodic with period 2π, i.e. we consider Eq. (1) on the interval $x \in (-\pi, \pi)$ with the periodic boundary condition $u(-\pi) = u(\pi)$. The dispersion term Lu_{xxx} causes fast temporal oscillations in the solution, so the evolution is described by effective averaged equation (see Eq. (3)). This averaging is performed in Ref. [5]; it was also shown there that the averaging in a presence of the second-order dispersion term iLu_{xx} with large L leads to a significant simplification of the dynamics (the averaged system acquires a gradient structure). In this letter we show that, surprisingly, introducing the dispersion term as in Eq. (1) does not make dynamics gradient, and chaos can emerge in the averaged system. As the result is of an ideological nature, we refrained of the use of numerical integration. Instead, we provide

[1]This work was supported by grant 14-41-00044 of the RSF. ERC AdG grant № 339523 RGDD, and grant of RFBR № 13-01-00589.

an analytic proof of the existence of chaos in the averaged system (assisted by Maple and Mathematica tools).

As L is large, Eq. (1) can be viewed as a perturbation of the auxiliary linear dispersion equation

$$u_t = Lu_{xxx}. \tag{2}$$

By choosing the orthogonal basis $\mathbf{e}_n = e^{inx}$, $n \in Z$, the flow $\mathcal{H}_L(t)$ generated by Eq. (2) is given by

$$\mathcal{H}_L(t)\mathbf{e}_n = e^{in^3Lt}\mathbf{e}_n.$$

These solutions are $2\pi/L$-periodic with respect to time, i.e. they correspond to fast oscillations.

In order to average these oscillations, one makes the following change of variable u in Eq. (1):

$$u(t) = \mathcal{H}_L(t)w(t)$$

The equations for w acquire explicit rapidly oscillating terms. Averaging them out is done in [5]. The result is the following equation:

$$\partial_t w = (1+i\gamma)\partial_x^2 w + \beta w - (1+i\omega)N(w), \tag{3}$$

with the operator N given by

$$N(w) = \left(2w\sum_{n\in Z}|w_n|^2 + \bar{w}\sum_{n\in Z} w_n w_{-n} - 2w_0|w_0|^2\right)\mathbf{e}_0 - \sum_{n\neq 0} w_n(|w_n|^2 + 2|w_{-n}|^2)\mathbf{e}_n,$$

where we denote $w = \sum_{n\in Z} w_n\mathbf{e}_n$, and $\bar{w}$ is the complex conjugate of w.

This is an infinite-dimensional system. It is shown in Ref. [5] that it is well-posed and has a global attractor in an appropriate Sobolev space. The study of its full dynamics can be difficult, however this system has finite-dimensional invariant manifolds. One of these manifolds is

$$w_n = 0 \qquad \text{for all} \qquad |n| \geq 2.$$

In restriction to this space, we have $w = y\mathbf{e}_0 + v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{-1})$. Then

$$N(w) = (4y|v|^2 + y|y|^2 + 2\bar{y}v^2)\mathbf{e}_0 + (v(2|y|^2 + 3|v|^2) + \bar{v}y^2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{-1}),$$

and Eq. (3) becomes

$$\begin{cases} \dot{y} = \beta y - (1+i\omega)\left[y(|y|^2 + 4|v|^2) + 2\bar{y}v^2\right], \\ \dot{v} = (\beta - 1 - i\gamma)v - (1+i\omega)\left[v(2|y|^2 + 3|v|^2) + \bar{v}y^2\right]. \end{cases}$$

Let $y = \sqrt{r}e^{i\varphi}$, $v = \sqrt{\rho}e^{i\psi}$. We obtain

$$\frac{\dot{r}}{2\sqrt{r}}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\sqrt{r}e^{i\varphi} = \beta\sqrt{r}e^{i\varphi} - (1+i\omega)\left[\sqrt{r}e^{i\varphi}(r+4\rho) + 2\sqrt{r}e^{-i\varphi}\rho e^{2i\psi}\right],$$

which gives

$$\dot{r} = 2r\left[\beta - r - 4\rho - 2\rho(\cos\eta - \omega\sin\eta)\right],$$

$$\dot{\varphi} = -\omega(r+4\rho) - 2(\sin\eta + \omega\cos\eta)\rho,$$

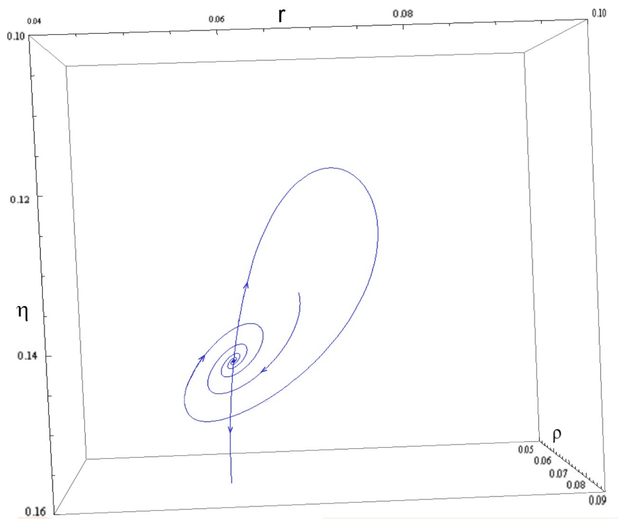

Fig. 1. Homoclinic loop to the saddle-focus in system (4). The equilibrium is at $r = 0.06$, $\rho = 0.07221$, $\eta = 0.143345$, which corresponds to $\omega \approx -30.965$, $\beta \approx 1.1306$, $\gamma \approx -2.9361$ (see Eqs. (5),(6)).

where $\eta = 2(\psi - \varphi)$. Similarly,

$$\frac{\dot{\rho}}{2\sqrt{\rho}} e^{i\psi} + i\dot{\psi}\sqrt{\rho}e^{i\psi} = (\beta - 1 - i\gamma)\sqrt{\rho}e^{i\psi} - (1 + i\omega)\left[\sqrt{\rho}e^{i\psi}(2r + 3\rho) + \sqrt{\rho}e^{-i\psi} r e^{2i\varphi}\right],$$

so

$$\dot{\rho} = 2\rho\left[\beta - 1 - 2r - 3\rho - (\cos\eta + \omega\sin\eta)r\right],$$

$$\dot{\psi} = -\gamma - \omega(2r + 3\rho) + (\sin\eta - \omega\cos\eta)r.$$

Finally (by scaling time to 2), we obtain the following three-dimensional system:

$$\begin{cases} \dot{r} = r\left[\beta - r - 4\rho - 2\rho(\cos\eta - \omega\sin\eta)\right], \\ \dot{\rho} = \rho\left[\beta - 1 - 2r - 3\rho - (\cos\eta + \omega\sin\eta)r\right], \\ \dot{\eta} = -\gamma + \omega(\rho - r) + (\sin\eta - \omega\cos\eta)r + 2(\sin\eta + \omega\cos\eta)\rho. \end{cases} \tag{4}$$

The computations that follow show that system (4) has a region of parameter values (β, γ, ω) which correspond to chaotic behavior. We prove this by showing that at a certain parameter value the system has Shilnikov saddle-focus homocinic loop [6, 7] (see also Ref. [1]). Doing this numerically would be an easy exercise – e.g. see in Fig. 1 a homoclinic loop we found in this system. However, we want to prove its existence analytically. To this aim, we employ the idea of [2, 3] who showed that bifurcations of an equilibrium state with triple zero eigenvalue can lead to the birth of the Shlnikov loop. Fully analytic proof of this can be obtained using the result of [4]; we also mention that this method was used for an analytic proof of (space-time) chaos in Ginzburg–Landau type equations in [8].

Thus, in the rest of the paper we are showing that system (4) has values of parameters which correspond to the equilibrium state that has all three eigenvalues zero and satisfies the conditions of Arneodo–Coullet–Spiegel–Tresser–Ibanez–Rodriguez theorem. It is easy to see that at non-zero r and ρ, the equilibria are given by

$$\begin{aligned}
&\beta = r + 4\rho + 2\rho(\cos\eta - \omega\sin\eta),\\
&\beta = 1 + 2r + 3\rho + (\cos\eta + \omega\sin\eta)r,\\
&\gamma = \omega(\rho - r) + (\sin\eta - \omega\cos\eta)r + 2(\sin\eta + \omega\cos\eta)\rho.
\end{aligned} \tag{5}$$

Thus, any (r, ρ, η) can be an equilibrium for an appropriate choice of β and γ, provided

$$\rho(1 + 2(\cos\eta - \omega\sin\eta)) - r(1 + (\cos\eta + \omega\sin\eta)) = 1. \tag{6}$$

The linearization matrix at the non-zero equilibrium is

$$A = \begin{pmatrix} -r & -2r(2+\cos\eta-\omega\sin\eta) & 2r\rho(\sin\eta+\omega\cos\eta) \\ -\rho(2+\cos\eta+\omega\sin\eta) & -3\rho & r\rho(\sin\eta-\omega\cos\eta) \\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & \begin{array}{l}(\cos\eta+\omega\sin\eta)r+\\ \quad +2(\cos\eta-\omega\sin\eta)\rho\end{array} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

We now look for the values of r, ρ, η that correspond to a triple zero eigenvalue of A. This happens when the trace, determinant, and the sum σA of the three main second-order minors of A are simultaneously zero.

Condition $\operatorname{tr} A = 0$ reads as

$$r(1 - \cos\eta - \omega\sin\eta) + \rho(3 - 2\cos\eta + 2\omega\sin\eta) = 0. \tag{8}$$

Note that if $\sin\eta = 0$, then $\operatorname{tr} A$ cannot vanish at positive r and ρ, so we further assume $\sin\eta \neq 0$.

The determinant of matrix A vanishes when

$$\rho J_1 + r J_2 = 0$$

where

$$J_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2(2+\cos\eta-\omega\sin\eta) & 2(\sin\eta+\omega\cos\eta) \\ -(2+\cos\eta+\omega\sin\eta) & -3 & 0 \\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & 2(\cos\eta-\omega\sin\eta) \end{vmatrix},$$

and

$$J_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2(2+\cos\eta-\omega\sin\eta) & 0 \\ -(2+\cos\eta+\omega\sin\eta) & -3 & \sin\eta-\omega\cos\eta \\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & \cos\eta+\omega\sin\eta \end{vmatrix}.$$

We have

$$J_1 = -2(2+\cos\eta+\omega\sin\eta)\begin{vmatrix} 4+2(\cos\eta-\omega\sin\eta) & \sin\eta+\omega\cos\eta \\ -\omega-2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & \cos\eta-\omega\sin\eta \end{vmatrix} -$$

$$-6\begin{vmatrix} -1 & \sin\eta+\omega\cos\eta \\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & \cos\eta-\omega\sin\eta \end{vmatrix} =$$

$$= -(4+2\cos\eta+2\omega\sin\eta)\left[(4+\omega^2)\cos\eta - 3\omega\sin\eta + 2(1+\omega^2)\right] -$$

$$-6\left[(\omega^2-1)\cos\eta+2\omega\sin\eta-\sin^2\eta+\omega^2\cos\eta\right]=$$
$$=-2(1+\omega^2)(1+7\cos\eta+2\omega\sin\eta+7\cos^2\eta+\omega\sin\eta\cos\eta),$$

and

$$J_2=-\begin{vmatrix}-3 & \sin\eta-\omega\cos\eta\\ \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & \cos\eta+\omega\sin\eta\end{vmatrix}-$$
$$-2(2+\cos\eta-\omega\sin\eta)\begin{vmatrix}2+\cos\eta+\omega\sin\eta & \sin\eta-\omega\cos\eta\\ \omega-(\sin\eta-\omega\cos\eta) & \cos\eta+\omega\sin\eta\end{vmatrix}=$$
$$=-\left[(\omega^2-3)\cos\eta-4\omega\sin\eta-2\sin^2\eta+2\omega^2\cos^2\eta\right]-$$
$$-(4+2\cos\eta-2\omega\sin\eta)\left[(2+\omega^2)\cos\eta+\omega\sin\eta+1+\omega^2\right]=$$
$$=-(1+\omega^2)(2+7\cos\eta-2\omega\sin\eta+6\cos^2\eta-2\omega\sin\eta\cos\eta).$$

Thus the condition $\det A=0$ is written as

$$2\rho(1+7\cos\eta+2\omega\sin\eta+7\cos^2\eta+\omega\sin\eta\cos\eta)+$$
$$+r(2+7\cos\eta-2\omega\sin\eta+6\cos^2\eta-2\omega\sin\eta\cos\eta)=0. \quad (9)$$

Under condition $\operatorname{tr}A=0$, matrix A can be rewritten as

$$\begin{pmatrix}-r & -2r(2+\cos\eta-\omega\sin\eta) & 2r\rho(\sin\eta+\omega\cos\eta)\\ -\rho(2+\cos\eta+\omega\sin\eta) & -3\rho & r\rho(\sin\eta-\omega\cos\eta)\\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & r+3\rho\end{pmatrix}.$$

Its main second-order minors are

$$\begin{vmatrix}-r & -2r(2+\cos\eta-\omega\sin\eta)\\ -\rho(2+\cos\eta+\omega\sin\eta) & -3\rho\end{vmatrix}=r\rho(2\omega^2\sin^2\eta-5-8\cos\eta-2\cos^2\eta),$$

$$\begin{vmatrix}-r & 2r\rho(\sin\eta+\omega\cos\eta)\\ -\omega+\sin\eta-\omega\cos\eta & r+3\rho\end{vmatrix}=$$
$$=-r(r+3\rho)-2r\rho(\sin^2\eta-\omega^2\cos^2\eta-\omega\sin\eta-\omega^2\cos\eta),$$

and

$$\begin{vmatrix}-3\rho & r\rho(\sin\eta-\omega\cos\eta)\\ \omega+2(\sin\eta+\omega\cos\eta) & r+3\rho\end{vmatrix}=$$
$$=-3\rho(r+3\rho)-r\rho(2\sin^2\eta-2\omega^2\cos^2\eta+\omega\sin\eta-\omega^2\cos\eta).$$

Thus, the sum σA of these minors vanishes (under condition $\operatorname{tr}A=0$) when

$$(r+3\rho)^2+r\rho(9-2\omega^2+(8-3\omega^2)\cos\eta-\omega\sin\eta-2(1+\omega^2)\cos^2\eta)=0. \quad (10)$$

We are looking for values of r,ρ,η,ω which solve the system of Eqs. (6),(8),(9),(10). From Eq. (8) we find

$$\rho=r\frac{-1+\cos\eta+\omega\sin\eta}{3-2\cos\eta+2\omega\sin\eta}. \quad (11)$$

By plugging this into Eqs. (9) and (10), we obtain the following system of equations for $q = \omega \sin \eta$ and $z = \cos \eta$ (so $\omega^2 = \frac{q^2}{1-z^2}$):

$$2(-1+z+q)(1+7z+7z^2+2q+qz)+(3-2z+2q)(2+7z+6z^2-2q-2qz)=0,$$

and

$$(z+5q)^2+(-1+z+q)(3-2z+2q)(9-2\frac{q^2}{1-z^2}+(8-3\frac{q^2}{1-z^2})z-q-2(1+\frac{q^2}{1-z^2})z^2)=0.$$

This recasts as

$$2q^2z-q(32z^2+28z-4)-2z^3-4z^2-5z-4=0, \qquad (12)$$

and

$$\begin{aligned}(1-z^2)(z^2+10yz+25q^2)+(2q^2+q-2z^2+5z-3)(9+8z-\\ -11z^2-8z^3+2z^4-q(1-z^2)-(2+3z+2z^2)q^2)=0,\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}2(2z^2+3z+2)q^4+q^3(4+3z)-q^2(8z^4-20z^3-51z^2+15z+48)+\\ +q(z^2-1)(12+13z)+(z^2-1)(4z^4-26z^3+29z^2+21z-27)=0,\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}&(2z^2(2z^2+3z+2)q^2+z(64z^4+152z^3+143z^3+48z-8)q+1020z^6+\\ &\quad+3362z^5+4365z^4+2482z^3+232z^2-200z+16)\times\\ &\quad\times(2q^2z-q(32z^2+28z-4)-2z^3-4z^2-5z-4)=\\ &=(32768z^8+136704z^7+230976z^6+189904z^5+60933z^4-9076z^3-5864z^2+1216z-64)q+\\ &+2048z^9+10752z^8+27328z^7+43408z^6+45553z^5+30356z^4+10374z^3-8z^2-720z+64.\end{aligned}$$

By Eq. (12), this gives us

$$\begin{aligned}\omega\sin\eta=q=-\big(&2048z^9+10752z^8+27328z^7+43408z^6+\\ &+45553z^5+30356z^4+10374z^3-8z^2-720z+64\big)\times\\ &\times\big(32768z^8+136704z^7+230976z^6+189904z^5+\\ &+60933z^4-9076z^3-5864z^2+1216z-64\big)^{-1}. \qquad (13)\end{aligned}$$

By inserting this expression into Eq. (12) we obtain the following equation for z:

$$\begin{aligned}&2(2048z^9+10752z^8+27328z^7+43408z^6+45553z^5+30356z^4+10374z^3-8z^2-720z+64)^2z+\\ &+(2048z^9+10752z^8+27328z^7+43408z^6+45553z^5+30356z^4+10374z^3-8z^2-720z+64)\times\\ &\times(32768z^8+136704z^7+230976z^6+189904z^5+60933z^4-9076z^3-5864z^2+1216z-64)\times\\ &\times(32z^2+28z-4)-(2z^3+4z^2+5z+4)(32768z^8+136704z^7+230976z^6+189904z^5+\end{aligned}$$

$$+60933z^4 - 9076z^3 - 5864z^2 + 1216z - 64)^2 = 0,$$

or

$$P(z) = -512 - 1536z + 123584z^2 - 294656z^3 - 2669168z^4 - 1014068z^5 + 16713471z^6 + \\ +38944576z^7 + 29896640z^8 - 11432448z^9 - 38759936z^{10} - 28958720z^{11} - 8060928z^{12} + \\ +524288z^{13} + 524288z^{14} = 0.$$

This polynomial has the following roots in the interval $[-1, 1]$:

$$z \approx -0.8468602601, -0.8453251846, -0.05672395050, 0.09599192317, 0.1369140710,$$

$$0.2980830761, 0.982719862$$

The root $z = \cos\eta = z_0 \approx 0.136914071$ corresponds to

$$\eta = \eta_0 \approx 1.433450854.$$

By Eq. (13) one finds

$$\omega = \omega_0 \approx -3.487162,$$

and, by Eqs. (6),(11),

$$r = r_0 \approx 0.092903423, \quad \rho = \rho_0 \approx 0.09590066.$$

One may check that the other roots of $P(z)$ do not produce positive values of r and ρ. The corresponding values of $\beta = \beta_0$ and $\gamma = \gamma_0$ are found from Eq. (5):

$$\beta_0 \approx 1.16531, \gamma_0 \approx 0.224354.$$

Note that $P'(z_0) \approx -6633 \neq 0$, therefore any small perturbation of the system of Eqs. (8),(9),(10),(6) will have a solution (r, ρ, ω, η) close to (r_0, ρ_0, η_0). Thus, for any given small values μ, ν, λ, we can always find values of parameters (β, γ, ω) close to $(\beta_0, \gamma_0, \omega_0)$ which would correspond to the existence of an equilibrium state close to (r_0, ρ_0, η_0) such that the linearization matrix A at this equilibrium will have $\operatorname{tr} A = \mu$, $\sigma A = \nu$ and $\det A = \lambda$.

Consider system (4) at $(\beta, \gamma, \omega) = (\beta_0, \gamma_0, \omega_0)$. We put the coordinate origin to the equilibrium, i.e. we denote $x_1 = r - r_0, x_2 = \rho - \rho_0, x_3 = \eta - \eta_0$. The system takes the form

$$\dot{x} = Ax + F(x) + O(\|x\|^3)$$

where $F(x)$ contains only quadratic terms; recall that the matrix A has three zero eigenvalues, so $A^3 = 0$. We take the vectors A^2e, Ae and $e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ as the coordinate basis. In other words, we make a coordinate transformation $x = QX$, where $Q = (A^2e, Ae, e)$. One needs to check that $\det(Q) \neq 0$; then the system takes the form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ 0 \end{pmatrix} + Q^{-1}F(QX) + O(\|X\|^3).$$

Moreover, when we add any small perturbation to this system we can always choose coordinates so that $\dot{X}_1 = X_2$ and $\dot{X}_2 = X_3$. Thus, if a perturbation of the C^2-size δ is added so that the equilibrium state does not disappear, the system takes the form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \lambda X_1 - \nu X_2 + \mu X_3 \end{pmatrix} + Q^{-1}F(QX) + O(\|X\|^3 + \delta\|X\|^2). \tag{14}$$

As we just mentioned, the coefficients $\mu = \operatorname{tr} A$, $\nu = \sigma A$ and $\lambda = \det A$ can acquire arbitrary small values when the parameters β, γ, ω are changed appropriately. It has been shown in Refs. [2, 4] that systems of form (14) have chaotic dynamics (the Shilnikov saddle-focus loop) at some values of μ, ν, λ (which can be chosen arbitrarily small), provided the the coefficient a of X_1^2 in the equation for $\dot{X}_3$ is not zero.

Thus, to prove the existence of chaotic behavior in system (4), it remains to compute $\det Q$ and a. By plugging the values of $r_0, \rho_0, \eta_0, \omega_0$ into Eq. (7), we find

$$A \approx \begin{pmatrix} -0.09290342 & -1.0388902 & 0.009143666 \\ 0.1263404 & -0.287702 & 0.01307936 \\ 4.955187 & -2.460879 & 0.3806054 \end{pmatrix},$$

$$A^2 \approx \begin{pmatrix} -0.07731418 & 0.3729058 & -0.01095737 \\ 0.01672483 & -0.080668085 & 0.0023703315 \\ 1.1147085 & -5.376519 & 0.1579823 \end{pmatrix}.$$

Thus, the matrix $Q = (A^2e, Ae, e)$ is given by

$$Q \approx \begin{pmatrix} 0.3729058 & -1.0388902 & 0 \\ -0.080668085 & -0.287702 & 1 \\ -5.376519 & -2.460879 & 0 \end{pmatrix}.$$

We have $\det Q \approx 6.503289 \neq 0$, so the system can indeed be brought to form (14).

It remains to find the coefficient a of X_1^2 in the equation for $\dot{X}_3$ in Eq. (14)). It equals to the product of the third row of the matrix Q^{-1} to $f(A^2e)$. The third row of Q^{-1} is orthogonal to the first and second columns of Q, i.e. to the vectors A^2e and Ae. Any row of the matrix A^2 satisfies this property (recall that $A^3 = 0$). Therefore, in order to check that $a \neq 0$, it is enough to check that the product $f(A^2e)$ to the third row of A^2 is non-zero. Since f is the quadratic part of the Taylor expansion of the right-hand side of system (4) at the point (r_0, ρ_0, eta_0), we need to compute the coefficient of ε^2 in the expansion in powers of ε for $p_1\dot{r} + p_2\dot{\rho} + p_3\dot{\eta}$ evaluated at $(r, \rho, \eta) = (r_0 + q_1\varepsilon, \rho_0 + q_2\varepsilon, \eta_0 + q_3\varepsilon)$, where (p_1, p_2, p_3) is the third row of A^2 and $(q_1, q_2, q_3)^\top = A^2e$ is the second column of A^2; recall that

$$p_1 \approx 1.1147085, \qquad p_2 \approx -5.376519, \qquad p_3 \approx 0.1579823,$$

$$q_1 \approx 0.3729058, \qquad q_2 \approx -0.080668085, \qquad q_3 \approx -5.376519.$$

We have

$$p_1\dot{r} + p_2\dot{\rho} + p_3\dot{\eta} = -p_1r^2 - 3p_2\rho^2 - r\rho(4p_1 + 2p_1(\cos\eta - \omega\sin\eta) + p_2(2 + \cos\eta + \omega\sin\eta)) +$$

$$+p_3(\sin\eta - \omega\cos\eta)r + 2p_3(\sin\eta + \omega\cos\eta)\rho + \text{ linear terms.}$$

By plugging $(r, \rho, \eta) = (r_0 + q_1\varepsilon, \rho_0 + q_2\varepsilon, \eta_0 + q_3\varepsilon)$ in the right-hand side, we find that the coefficient of ε^2 equals to

$$-p_1q_1^2 - 3p_2q_2^2 - q_1q_2(4p_1 + 2p_2 + (2p_1 + p_2)\cos\eta_0 + (p_2 - 2p_1)\omega_0\sin\eta_0) +$$

$$+(q_1\rho_0 + q_2r_0)q_3((2p_1 + p_2)\sin\eta_0 + (2p_1 - p_2)\omega_0\cos\eta_0) +$$

$$+\frac{1}{2}r_0\rho_0q_3^2((2p_1 + p_2)\cos\eta_0 + (p_2 - 2p_1)\omega_0\sin\eta_0) -$$

$$-\frac{1}{2}p_3q_3^2(\sin\eta_0 - \omega_0\cos\eta_0)r_0 + p_3q_3q_1(\cos\eta_0 + \omega_0\sin\eta_0) - p_3q_3^2(\sin\eta_0 + \omega_0\cos\eta_0)\rho_0 +$$

$$+2p_3q_3q_2(\cos\eta_0 - \omega_0\sin\eta_0) \approx 5.898,$$

i.e. it is non-zero. This finishes the proof of the existence of chaotic dynamics in system (4).

References

[1] Afraimovich V. S., Gonchenko S. V., Lerman L., Shilnikov A., Turaev D., "Scientific heritage of L.P.Shilnikov", *Regul. Chaotic Dyn.*, **19** (2014), 435–460.

[2] Arneodo A., Coullet P. H., Spiegel E. A., Tresser C., "Asymptotic Chaos", *Physica D*, **14** (1985), 327–347.

[3] Arneodo A., Coullet P. H., Spiegel E. A., "The dynamics of triple convection", *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **31** (1985), 1–48.

[4] Ibanez S., Rodriguez J. A., "Shilnikov configurations in any generic unfolding of the nilpotent singularity of codimension three on R^3", *J. Differential Equations*, **208** (2005), 147–175.

[5] Kostianko A., Titi E., Zelik S., *Large dispersion, averaging, and attractors: three 1D paradigms, preprint*, 2014.

[6] Shilnikov L. P., "A case of the existence of a countable number of periodic motions", *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 163–166.

[7] Shilnikov L. P., "A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type", *Math. USSR-Sb.*, **10** (1970), 91–102.

[8] Turaev D., Zelik S., "Analytical proof of space-time chaos in Ginzburg–Landau Equations", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **28** (2010), 1713–1751.

Переход к хаосу в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау с большой дисперсией третьего порядка

Овсянников И. И.*, Тураев Д. В.**, Зелик С. В.***

* *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23,*
** *Имперский колледж Лондона, Лондон, SW7 2AZ, Великобритания,*
*** *Университет Сюррея, Гилфорд, GU2 7XH, Великобритания*

Ключевые слова: бифуркации, хаос, уравнение Гинзбурга–Ландау

Дано аналитическое доказательство существования шильниковского хаоса в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау с большой дисперсией третьего порядка.

Сведения об авторах:
Овсянников Иван Ильич,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
младший научный сотрудник,
Тураев Дмитрий Владимирович,
Имперский колледж Лондона,
профессор,
Зеллик Сергей Витальевич,
Университет Сюррея,
профессор

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 337–355

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–337–355

UDC 517.983.5

Solution to a Parabolic Differential Equation in Hilbert Space Via Feynman Formula - I

Remizov I. D.[1]

Bauman Moscow State Technical University
2nd Baumanskaya Str., 5, Moscow, 105005, Russia,
Lobachevsky University of Nizhny Novgorod,
Prospekt Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

e-mail: ivan.remizov@gmail.com

received May 20, 2015

Keywords: Hilbert space, Feynman formula, Chernoff theorem, multiple integrals, Gaussian measure

A parabolic partial differential equation $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ is considered, where L is a linear second-order differential operator with time-independent coefficients, which may depend on x. We assume that the spatial coordinate x belongs to a finite- or infinite-dimensional real separable Hilbert space H.

Assuming the existence of a strongly continuous resolving semigroup for this equation, we construct a representation of this semigroup by a Feynman formula, i.e. we write it in the form of the limit of a multiple integral over H as the multiplicity of the integral tends to infinity. This representation gives a unique solution to the Cauchy problem in the uniform closure of the set of smooth cylindrical functions on H. Moreover, this solution depends continuously on the initial condition. In the case where the coefficient of the first-derivative term in L vanishes we prove that the strongly continuous resolving semigroup exists (this implies the existence of the unique solution to the Cauchy problem in the class mentioned above) and that the solution to the Cauchy problem depends continuously on the coefficients of the equation.

The article is published in the author's wording.

1. Introduction

Representation of a function by the limit of a multiple integral as multiplicity tends to infinity is called a Feynman formula, after R.P. Feynman, who was the first to use such representations on the physical level of rigor for the solution of the Cauchy problem for PDEs [24, 25]. The term "Feynman formula" in this sense was introduced in 2002 by

[1]This work has been supported by the Russian Scientific Foundation Grant 14-41-00044.

O.G. Smolyanov [31]. One can find out more about the research into Feynman formulas up to 2009 in [33]. The most recent (but not complete) overview is [37] (2014, in Russian). It is important to note that Feynman formulas are closely related to Feynman-Kac formulas [30], however the latter will not be studied in the present article. Usage of Feynman and Feynman-Kac formulas includes exact or numerical evaluation of integrals over Gaussian measures on spaces of high or infinite dimension; some useful approaches to this topic are developed in [6, 8].

Differential equations for functions of an infinite-dimensional argument arise in (quantum) field theory and string theory, theory of stochastic processes and financial mathematics. Evolutionary equations (i.e. PDEs in the form $u_t'(t,x) = \dots$) in infinite-dimensional spaces have been studied since 1960s by O.G. Smolyanov, E.T. Shavgulidze, E. Nelson, A.Yu. Khrennikov, S. Albeverio and others. We will mention just some of the publications, which are most recent and relevant for our study.

In [3] the Schrödinger equation in Hilbert space is studied. The equation includes the terms of second, first and zero order, the coefficient of the second order term is constant. The solution to the Cauchy problem is given by a Feynman-Kac-Ito formula.

In [22] a solution to a heat equation in Hilbert space without the terms of the first and zero order is discussed, the coefficient of the second-derivative term is constant. The solution is given in the form of a convolution with the Gaussian measure (analogous to the finite dimensional equation with constant coefficients), the existence of the resolving semigroup is proved. In [14] the solution to the same equation is given by a Feynman-Kac formula.

In [15] the parabolic equation in finite-dimensional space is studied for the case of variable coefficients. Under the assumption that a strongly continuous resolving semigroup exists for the Cauchy problem, Feynman and Feynman-Kac formulas were proven in [15] for the solution.

In [28], for a class of equations in an infinite-dimensional space, with a variable coefficient at the highest derivative (but without first- and zero-order derivatives' terms), a Feynman formula was obtained and the existence of resolving semigroup was proven.

In spaces over the field of p-adic numbers, Feynman and Feynman-Kac formulas for the solutions of the Cauchy problem for evolutionary equations were given in [11, 12].

In [19, 20], Schrödinger and heat equations in $\mathbb{R}^n$ were studied in the case of time-dependent coefficients, and a Chernoff-type theorem was proven for this case.

In [4, 16] Feynman formulas for perturbed semigroups are obtained.

The present article extends my first results in this area [28] to the case of non-zero coefficients at the first- and zero-order derivatives.

I do not provide the technical proofs for the two key theorems to keep the paper short, but give all the background that is relevant for the proofs. The article may be used as a very short introduction to analysis in Hilbert space and to the applications of C_0-semigroup theory in solving evolutionary PDEs.

2. Notation and definitions

The symbol H stands for the real separable Hilbert space with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. The self-adjoint, positive, non-degenerate (hence injective), linear operator $A\colon H \to H$

is assumed to be defined everywhere on H. The operator A is assumed to be of trace class, which means that for every orthonormal basis (e_k) in H the sum $\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_k, e_k\rangle = \mathrm{tr}A$ is finite; this sum is called the trace of A (it is independent of the choice of the basis (e_k)).

The symbol $\mathcal{X}$ below stands for any complex Banach space. The symbol $L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ stands for space of all linear bounded operators in $\mathcal{X}$, endowed with the classical operator norm.

Symbol $C(M, N)$ will mean the set of all continuous functions from M to N, where M and N are topological spaces.

A function $f\colon H \to \mathbb{R}$ is called cylindrical [5, 10], if there exist vectors $e_1, \ldots, e_n$ from H and function $f^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that for every $x \in H$ the equality $f(x) = f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$ holds. In other words, the function $f\colon H \to \mathbb{R}$ is cylindrical if there exists an $n-$dimensional subspace $H_n \subset H$ and orthogonal projector $P\colon H \to H_n$ such that $f(x) = f(Px)$ for every $x \in H$. The cylindrical function f can be imagined as a function, which is first defined on H_n and then continued to the entire space H in such a way that $f(x) = f(x_0)$ if $x_0 \in H_n$ and $x \in (x_0 + \ker P)$.

Symbol $D = C_{b,c}^{\infty}(H, \mathbb{R})$ stands for the space of all continuous bounded cylindrical functions $H \to \mathbb{R}$ such that they have Fréchet derivatives [17] of all positive integer orders at every point of H, and their Fréchet derivatives of any positive integer order are bounded and continuous.

If $f\colon H \to \mathbb{R}$ is twice Fréchet differentiable, then $f'(x)$ will stand for the first Fréchet derivative of f at the point x, and $f''(x)$ will denote the second derivative. Riesz-Fréchet representation theorem allows us to assume $f'(x) \in H$ and $f''(x) \in L_b(H, H)$ for every $x \in H$.

Symbol $C_b(H, \mathbb{R})$ stands for the Banach space of all bounded continuous functions $H \to \mathbb{R}$, endowed with a uniform norm $\|f\| = \sup_{x\in H} |f(x)|$. It is regarded as a closed subspace of a complex Banach space $C_b(H, \mathbb{C})$.

Let $X = \overline{C_{b,c}^{\infty}(H, \mathbb{R})}$ be the closure of the space D in $C_b(H, \mathbb{R})$. It is clear, that X with the norm $\|f\| = \sup_{x\in H} |f(x)|$ is a Banach space, as it is a closed linear subspace of the Banach space $C_b(H, \mathbb{R})$. Function f belongs to X if and only if there is a sequence of functions $(f_j) \subset D$ such that $\lim_{j\to\infty} f_j = f$, i.e. $\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in H} |f(x) - f_j(x)| = 0$.

Symbol $C_b(H, H)$ stands for a Banach space of all bounded continuous functions $B\colon H \to H$, endowed with the uniform norm $\|B\| = \sup_{x\in H} \|B(x)\|$.

Denote $D_H = \{B\colon H \to H \big| \exists N \in \mathbb{N}, b_k \in H, B_k \in D : B(x) = B_1(x)b_1 + \cdots + B_N(x)b_N\}$.

Let X_H be the closure of D_H in $C_b(H, H)$.

If $x \in H$, and $R\colon H \to H$ is linear, trace class, positive, non-degenerate operator, then symbol μ_R^x stands for the Gaussian probabilistic measure [1, 5, 34] on H with expectation x and correlation operator R, i.e. the unique sigma-additive measure on Borel sigma-algebra in H such that the equality $\int_H e^{i\langle z,y\rangle} \mu_R^x(dy) = \exp\left(i\langle z, x\rangle - \frac{1}{2}\langle Rz, z\rangle\right)$ holds for every $z \in H$. To make it shorter, we will write μ_R instead of μ_R^0. See section 3.1. for useful formulas about integration over the Gaussian measure.

If $B\colon H \to H$ is a vector field, and $g\colon H \to \mathbb{R}$ and $C\colon H \to \mathbb{R}$ are real-valued functions, then symbol L defines a differential operator on the space of functions $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$

$$(L\varphi)(x) := g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle\varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x), \quad x \in H.$$

The pair $(\mathcal{L}, M)$ defines a linear operator $\mathcal{L}$ with the domain M. It will be shown in theorem 4.2 that $L(D) \subset X$ when A, B, g and C have certain properties. So (L, D) is a densely defined (on D) operator $L\colon X \supset D \to X$. Here the earlier defined spaces D and X are endowed with the uniform norm, induced from $C_b(H, \mathbb{R})$. Let $(\overline{L}, D_1)$ be the closure of (L, D) in X. This means that

$$D_1 = \{f \in X \big| \exists (f_j) \subset D : \lim_{j\to\infty} f_j = f, \exists \lim_{j\to\infty} Lf_j\},$$

and, if $f \in D_1$, then, by definition, $\overline{L}f = \lim_{j\to\infty} Lf_j$.

If for every fixed first argument $t > 0$ of the function $u\colon [0, +\infty) \times H \to \mathbb{R}$ we have $[x \longmapsto u(t, x)] \in D_1$, then the expression $\overline{L}u(t, x)$ means the result of applying the operator $\overline{L}$ to the function $x \longmapsto u(t, x)$ with the fixed $t > 0$.

Expression $(S_t)_{t\geq 0}$ defines the one-parameter family of linear operators in the space of functions $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x) - t\frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)}} \int_H \varphi(x+y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \text{ for } t > 0, \text{ and } S_0\varphi := \varphi.$$

Remark 2.1. Further, in theorem 4.1, we will prove that for every $t \geq 0$ and for A, B, g and C having certain properties the following holds i) $S_t(X) \subset X$, ii) operator S_t is bounded, and iii) $\frac{d}{dt}S_t\varphi\big|_{t=0} = L\varphi$ for all $\varphi \in D$. This will allow us to use the Chernoff approximation (theorems 3.1, 3.2) and prove the main result of the present article, theorem 4.4.

3. Helpful facts and techniques

3.1. Integration in Hilbert space

Lemma 3.1. ([5], Chapter II, §2, 3°) If a function $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ is cylindrical and measurable, i.e. $\varphi(x) = \varphi^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$ for some $n \in \mathbb{N}$, some measurable function $\varphi^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, and some finite orthonormal family of vectors $e_1, \ldots, e_n$ from space H, then

$$\int_H \varphi(y)\mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det M_Q}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle M_Q^{-1}z, z\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\right) dz, \quad (1)$$

where $H_n = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$, and $P\colon H \ni h \longmapsto \langle h, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle h, e_n\rangle e_n \in H_n$, $Q = PA$, $Q\colon H_n \to H_n$, and M_Q is the matrix of the operator Q in basis $e_1, \ldots, e_n$ of the space H_n. If $e_1, \ldots, e_n$ is a full set of eigenvectors of the operator Q, and $q_1, \ldots, q_n$ is the corresponding set of eigenvalues, then

$$\int_H \varphi(y)\mu_A(dy) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n q_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^n(z_1, \ldots, z_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2q_i}\right) dz_1 \ldots dz_n. \quad (2)$$

Lemma 3.2. (*Explicit form of some integrals over Gaussian measure*)

Let H be a real separable Hilbert space of finite or infinite dimension, $\widetilde{A}\colon H \to H$ be a linear, trace class, symmetric, positive, non-degenerate operator, $\mu_{\widetilde{A}}$ be the centered Gaussian measure on H with the correlation operator $\widetilde{A}$, and $G\colon H \to H$ be a bounded linear operator. Let w and z be non-zero vectors from H.

Then the following equalities hold:

$$\int_H \langle Gy, y\rangle \mu_{\widetilde{A}}(dy) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}G), \tag{3}$$

$$\int_H e^{\langle z,y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z,z\rangle}, \tag{4}$$

$$\int_H \langle w, y\rangle e^{\langle z,y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = \langle \widetilde{A}w, z\rangle e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z,z\rangle}, \tag{5}$$

$$\int_H \langle Gy, y\rangle e^{\langle z,y\rangle} \mu_{\widetilde{A}}(dy) = (\operatorname{tr}\widetilde{A}G + \langle G\widetilde{A}z, \widetilde{A}z\rangle) e^{\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}z,z\rangle}. \tag{6}$$

Proof. Formulas (3) and (4) can be found in [5], chapter II, §2, 1°. Formula (5) can be derived from the fact that the function under the integral is cylindrical, so lemma 3.1 can be employed. For a proof of (6), one can make the change of variable in the integral, $h = y - Aw$, then ([5], chapter II, §4, 2°, theorem 4.2) we have $\mu_{\widetilde{A}}(dy) = e^{-\frac{1}{2}\langle \widetilde{A}w,w\rangle - \langle h,w\rangle}\mu_{\widetilde{A}}(dh)$, and the integral reduces to (3).

Lemma 3.3. (*On a linear change of variable in the integral over Gaussian measure*) Let H be a real separable Hilbert space. Suppose a linear operator $A\colon H \to H$ is positive, non-degenerate, trace class, and self-adjoint. We will identify with the symbol μ_A the centered Gaussian measure on H with the correlational operator A. Let $t > 0$; the symbol tA denotes operator, that takes $x \in H$ to $tAx \in H$. Let $f\colon H \to \mathbb{R}$ be a continuous integrable function.

Then

$$\int_H f(x)\mu_{tA}(dx) = \int_H f(\sqrt{t}x)\mu_A(dx). \tag{7}$$

Proof uses the uniqueness of the Gaussian measure with a given Fourier transform, and the standard theorem of changing variable in the Lebesgue integral.

Lemma 3.4. (*On integrability of a polynomial multiplied by an exponent*) Let H, A, μ_A be as above, $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a polynomial, and $\beta \in \mathbb{R}$.

Then function $H \ni x \longmapsto P(\|x\|)e^{\beta\|x\|} \in \mathbb{R}$ is integrable over μ_A.

Proof is easy to construct by relying on Fernique's theorem [23], which (applied to this case) says that there exists such $\alpha > 0$ that $\int_H e^{\alpha\|y\|^2}\mu_A(dy) < +\infty$.

3.2. Derivatives of cylindrical functions

Proposition 3.1. Let f be a cylindrical real-valued function on H, i.e. there is a number $n \in \mathbb{N}$ and a function $f^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that for every $x \in H$ the equality $f(x) = f^n(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$ holds. A set of vectors $e_1, \ldots, e_n$ can be considered orthonormal without loss of generality. Lets complete this set to an orthonormal basis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H.

Then:

1. Function f is differentiable in the direction h if and only if the function f^n is differentiable in the direction $(\langle h, e_1\rangle, \dots, \langle h, e_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$, and

$$f'(x)h = \Big\langle h, \Big(\partial_1 f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ \dots,\ \partial_n f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ 0,\ 0,\ 0, \dots\Big)\Big\rangle,$$

where the symbol $\partial_j f^n$ defines the partial derivative with respect to the j-th argument of the function f^n, and $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, 0, \dots) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. If the function f has a Fréchet derivative at the point x, then $f'(x)$ is a vector whose first n coordinates yield the gradient of the function f^n, and the other coordinates are zero:

$$f'(x) = \Big(\partial_1 f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ \dots,\ \partial_n f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle),\ 0,\ 0,\ 0, \dots\Big). \quad (8)$$

2. Function f has a Fréchet derivative in H if and only if the function f^n has a Fréchet derivative in $\mathbb{R}^n$.

3. Let $A\colon H \to H$ be a trace-class operator (i.e. let $\mathrm{tr}A < \infty$). Then

$$\mathrm{tr}Af''(x) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle Ae_s, e_k\rangle\Big(\partial_k\partial_s f^n(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)\Big) =$$

$$= \mathrm{tr}\Big(A_n (f^n)''(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)\Big), \quad (9)$$

where A_n is the matrix of the operator PA in the basis $e_1, \dots, e_n$, where P is the projector to the linear span of the vectors $e_1, \dots, e_n$.

Proof is a straight-forward application the derivative's definition.

3.3. Differential operator on a finite-dimensional space

Lemma 3.5. ([7], theorems 4.3.1, 4.3.2. and Corollary 4.3.4) Suppose for every $i = 1, \dots, n$ and $j = 1, \dots, n$ functions $a^{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ from $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ are given, where $C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ is the class of all bounded real-valued functions on $\mathbb{R}^n$, which have bounded partial derivatives of all orders. Suppose also that $c(x) \le 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

For $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ we define a differential operator T by the formula

$$(Tu)(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) + c(x)u(x).$$

Suppose that there exists a constant $\varkappa > 0$ such that for every $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ and all $x \in \mathbb{R}^n$ the ellipticity condition is fulfilled: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \varkappa\|\xi\|^2$. Take an arbitrary constant $\lambda > 0$ and function $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Then:

1. There is a unique function $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, which is a solution of the equation

$$(Tu)(x) - \lambda u(x) = f(x). \quad (10)$$

2. For every function $v \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ the following estimate is true

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(Tv)(x) - \lambda v(x)| \geq \lambda \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(x)|. \tag{11}$$

Note that equation (10) can have unbounded solutions; this does not contradict the lemma.

3.4. Strongly continuous semigroups of operators and evolutionary equations

Let $\mathcal{X}$ be a complex Banach space.

Definition 3.1. By a strongly continuous one-parameter semigroup $(T_s)_{s \geq 0}$ of linear bounded operators in $\mathcal{X}$ we (following [26, 18]) mean the mapping

$$T \colon [0, +\infty) \to L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

of the non-negative half-line into the space of all bounded linear operators on $\mathcal{X}$, which satisfies the following conditions:

1. $\forall \varphi \in \mathcal{X} : T_0 \varphi = \varphi$.
2. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : T_{t+s} = T_t \circ T_s$.
3. $\forall \varphi \in \mathcal{X}$ function $s \longmapsto T_s \varphi$ is continuous as a mapping $[0, +\infty) \to \mathcal{X}$.

Definition 3.2. By the generator of a strongly continuous one-parameter semigroup $(T_s)_{s \geq 0}$ of linear bounded operators on $\mathcal{X}$ we mean a linear operator $\overline{\mathcal{L}} \colon \mathcal{X} \supset Dom(\overline{\mathcal{L}}) \to \mathcal{X}$ given by the formula

$$\overline{\mathcal{L}} \varphi = \lim_{s \to +0} \frac{T_s \varphi - \varphi}{s}$$

on its domain

$$Dom(\overline{\mathcal{L}}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X} : \exists \lim_{s \to +0} \frac{T_s \varphi - \varphi}{s} \right\},$$

where the limit is understood in the strong sense, i.e. it is defined in terms of the norm in the space $\mathcal{X}$.

The use of the symbol $\overline{\mathcal{L}}$ for the generator is related to the fact that the generator is always a closed operator:

Proposition 3.2. (theorem 1.4 in [26], p. 51) The generator of a strongly continuous semigroup is a closed linear operator with a dense domain. The generator defines its semigroup uniquely.

Proposition 3.3. (lemma 1.1 and definition 1.2. in [26], p. 48-49) The set $Dom(\overline{\mathcal{L}})$ coincides with the set of those $\varphi \in \mathcal{X}$, for which the mapping $s \longmapsto T_s \varphi$ is differentiable with respect to s at every point $s \in [0, +\infty)$.

Definition 3.3. 1. The problem of finding a function $U \colon [0, +\infty) \to \mathcal{X}$ such that

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \overline{\mathcal{L}} U(t); \quad t \geq 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{12}$$

is called the abstract Cauchy problem, associated with the closed linear operator $\overline{\mathcal{L}}\colon \mathcal{X} \supset Dom(\overline{\mathcal{L}}) \to \mathcal{X}$ and a vector $U_0 \in \mathcal{X}$.

2. A function $U\colon [0,+\infty) \to \mathcal{X}$ is called a classic solution to abstract Cauchy problem (12) if, for every $t \geq 0$, the function U has a continuous derivative $U'\colon [0,+\infty) \to \mathcal{X}$, $U(t) \in Dom(\overline{\mathcal{L}})$, and (12) holds.

3. A continuous function $U\colon [0,+\infty) \to \mathcal{X}$ is called a mild solution to abstract Cauchy problem (12) if for every $t \geq 0$ we have $\int_0^t U(s)ds \in Dom(\overline{\mathcal{L}})$ and $U(t) = \overline{\mathcal{L}} \int_0^t U(s)ds + U_0$.

Proposition 3.4. (proposition 6.2 in [26], p. 145) If the operator $(\overline{\mathcal{L}}, Dom(\overline{\mathcal{L}}))$ is a generator of a strongly continuous semigroup $(T_s)_{s\geq 0}$, then:

1. For every $U_0 \in Dom(\overline{\mathcal{L}})$ there is a unique classic solution to abstract Cauchy problem (12), which is given by the formula $U(t) = T(t)U_0$.

2. For every $U_0 \in \mathcal{X}$ there is a unique mild solution to abstract Cauchy problem (12), which is given by the formula $U(t) = T(t)U_0$.

Definition 3.4. Linear operator $\mathcal{L}\colon \mathcal{X} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{X}$ in Banach space $\mathcal{X}$ is called dissipative if for every $\lambda > 0$ and every $x \in Dom(\mathcal{L})$ the estimate $\|\mathcal{L}x - \lambda x\| \geq \lambda \|x\|$ holds.

Proposition 3.5. (*On the closability of a densely defined dissipative operator*) (proposition 3.14 in [26]) A linear dissipative operator $\mathcal{L} : \mathcal{X} \supset Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{X}$ in the Banach space $\mathcal{X}$ with the domain $Dom(\mathcal{L})$ dense in $\mathcal{X}$ is closable. The closure $\overline{\mathcal{L}} : \mathcal{X} \supset Dom(\overline{\mathcal{L}}) \to X$ is also a dissipative operator.

The main tool for the construction of Feynman formulas for the solutions of the Cauchy problem is Chernoff's theorem. For convenience we decompose its conditions into several blocks and give them separate names, as follows.

Theorem 3.1. (P. R. Chernoff, 1968; see [35] and theorem 10.7.21 in [2]) Let $\mathcal{X}$ be Banach space, and $L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ be the space of all linear bounded operators in $\mathcal{X}$ endowed with the operator norm. Let $\overline{\mathcal{L}}\colon \mathcal{X} \supset Dom(\overline{\mathcal{L}}) \to \mathcal{X}$ be a linear operator.

Suppose there is a function F such that:

(E). There exists a strongly continuous semigroup $(e^{t\overline{\mathcal{L}}})_{t\geq 0}$, and its generator is $(\overline{\mathcal{L}}, Dom(\overline{\mathcal{L}}))$.

(CT1). F is defined on $[0,+\infty)$, takes values in $L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ and $t \longmapsto F(t)f$ is continuous for every vector $f \in \mathcal{X}$.

(CT2). $F(0) = I$.

(CT3). There exists a dense subspace $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ such that for every $f \in \mathcal{D}$ there exists a limit $F'(0)f = \lim_{t\to 0}(F(t)f - f)/t = \mathcal{L}f$.

(CT4). The operator $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ has a closure $(\overline{\mathcal{L}}, Dom(\overline{\mathcal{L}}))$.

(N). There exists $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|F(t)\| \leq e^{\omega t}$ for all $t \geq 0$.

Then for every $f \in \mathcal{X}$ we have $(F(t/n))^n f \to e^{t\overline{\mathcal{L}}} f$ as $n \to \infty$, and the limit is uniform with respect to t from every segment $[0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$.

Definition 3.5. In the present article two mappings F_1 and F_2 are called Chernoff-equivalent if there exists a C_0-semigroup $(e^{t\overline{\mathcal{L}}})_{t\geq 0}$ such that $(F_1(t/n))^n f \to e^{t\overline{\mathcal{L}}} f$, $(F_2(t/n))^n f \to e^{t\overline{\mathcal{L}}} f$ for every $f \in \mathcal{X}$ as $n \to \infty$, and the limit is uniform with respect to t from every segment $[0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$.

Remark 3.1. There are several slightly different definitions of the Chernoff equivalence, see e.g. [36, 29, 37]. We will just use this one not going into details. The only thing we need from this definition is that if F satisfies all the conditions of Chernoff's theorem, then by Chernoff's theorem the mapping F is Chernoff-equivalent to the mapping $F_1(t) = e^{t\overline{\mathcal{L}}}$, i.e. the limit of $(F(t/n))^n$ as n tends to infinity yields the C_0-semigroup $(e^{t\overline{\mathcal{L}}})_{t\geq 0}$.

Definition 3.6. Let us following [32] call a mapping F Chernoff-tangent to the operator $\mathcal{L}$ if it satisfies the conditions (CT1)-(CT4) of Chernoff's theorem.

Remark 3.2. With these definitions the Chernoff-equivalence of F to $(e^{t\overline{\mathcal{L}}})_{t\geq 0}$ follows from: existence (E) of the C_0-semigroup + Chernoff-tangency (CT) + growth of the norm bound (N).

Theorem 3.2. (Chernoff-type theorem, [26], corollary 5.3 from theorem 5.2) Let $\mathcal{X}$ be a Banach space, and $L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ be the space of all linear bounded operators on $\mathcal{X}$ endowed with the operator norm. Suppose there is a function

$$V\colon [0, +\infty) \to L_b(\mathcal{X}, \mathcal{X}),$$

meeting the condition $V_0 = I$, where I is the identity operator. Suppose there are numbers $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|(V_t)^k\| \leq Me^{k\omega t}$ for every $t \geq 0$ and every $k \in \mathbb{N}$. Suppose the limit

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{V_t\varphi - \varphi}{t} =: \mathcal{L}\varphi$$

exists for every $\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, where $\mathcal{D}$ is a dense subspace of $\mathcal{X}$. Suppose there is a number $\lambda_0 > \omega$ such that $(\lambda_0 I - \mathcal{L})(\mathcal{D})$ is a dense subspace of $\mathcal{X}$.

Then the closure $\overline{\mathcal{L}}$ of the operator $\mathcal{L}$ is a generator of a strongly continuous semigroup of operators $(T_t)_{t\geq 0}$ given by the formula

$$T_t\varphi = \lim_{n\to\infty} \left(V_{\frac{t}{n}}\right)^n \varphi$$

where the limit exists for every $\varphi \in \mathcal{X}$ and is uniform with respect to $t \in [0, t_0]$ for every $t_0 > 0$. Moreover $(T_t)_{t\geq 0}$ satisfies the estimate $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$ for every $t \geq 0$.

Theorem 3.3. (*Approximation of generator implies approximation of semigroup*) (theorem 4.9 in [26])

Let $(e^{\overline{\mathcal{L}_j}t})_{t\geq 0}$ be a sequence of strongly continuous semigroups of operators in a Banach space $\mathcal{X}$ with the generators $(\overline{\mathcal{L}_j}, Dom(\overline{\mathcal{L}_j}))$, which satisfies, for some fixed constants $M \geq 1, w \in \mathbb{R}$, the condition $\left\|e^{\overline{\mathcal{L}_j}t}\right\| \leq Me^{wt}$ for all $t \geq 0$ and every $j \in \mathbb{N}$. Suppose there is a closed linear operator $(\mathcal{L}, Dom(\mathcal{L}))$ on $\mathcal{X}$ with a dense domain $Dom(\mathcal{L})$, such that $\overline{\mathcal{L}_j}x \to Lx$ for every $x \in Dom(\mathcal{L})$. Suppose the image of the operator $(\lambda_0 I - \mathcal{L})$ is dense in $\mathcal{X}$ for some $\lambda_0 > 0$.

Then the semigroups $(e^{\overline{\mathcal{L}_j}t})_{t\geq 0}, j \in \mathbb{N}$ converge strongly (and uniformly in $t \in [0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$) to a strongly continuous semigroup $(e^{\overline{\mathcal{L}}t})_{t\geq 0}$ with the generator $\overline{\mathcal{L}}$. In other words, for every $x \in \mathcal{X}$ there exists $\lim_{j\to\infty} e^{\overline{\mathcal{L}_j}t}x = e^{\overline{\mathcal{L}}t}x$ uniformly in $t \in [0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$.

Remark 3.3. Below, the role of $\mathcal{X}$ will be played by space X, a closed real subspace of the complex Banach space $C_b(H, \mathbb{C})$. Because all the operators used in this paper below are real, and (as it will be proven further in theorems 4.1 and 4.2) X is invariant with respect to them, the above theorems about $\mathcal{X}$ are applicable to X.

3.5. Properties of spaces D, X, D_1

Remark 3.4. It directly follows from the definitions of these spaces that

i) $D \subset D_1 \subset X \subset C_b(H, \mathbb{R}) \subset C_b(H, \mathbb{C})$;

ii) D and D_1 are dense in X;

iii) X is a Banach space.

Proposition 3.6. If $f \in D$, then f is uniformly continuous.

Proof. It follows from the definition of the space D that the function $D \ni f \colon H \to \mathbb{R}$ is bounded and its Fréchet derivatives of all orders exist and are bounded. In particular, there exists $\sup_{x\in H} \|f'(x)\| = M < \infty$. For every $x \in H$ and every $y \in H$ one can see the estimate

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\| \sup_{z\in[x,y]} \|f'(z)\| \leq M\|x - y\| \tag{13}$$

which implies the uniform continuity of f.

$\square$

Proposition 3.7. If $\varphi \in X$, then φ is uniformly continuous.

Proof. Take any given $\varepsilon > 0$. Let us find $\delta > 0$ such that $\|x - y\| < \delta$ implies $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

As $\varphi \in X$, there exists a sequence of functions $(f_j) \subset D$ converging to φ uniformly. Hence, there exists a number j_0 such that (introducing the notation $f_{j_0} = f$) we have

$$\|\varphi - f_{j_0}\| = \|\varphi - f\| = \sup_{x\in H} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Moreover, as $f \in D$, proposition 3.6 implies estimate (13) with some $M > 0$.

Let us set $\delta = \frac{\varepsilon}{3M}$ and note that $\|x - y\| < \delta$. Then

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - \varphi(y)| \overset{(13),(14)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Proposition 3.8. Suppose that a sequence of functions $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset X$ converges uniformly to a function $f_0 \in X$. Then the family $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ is equicontinuous.

Proof. Suppose $\varepsilon > 0$ is given. Let us find $\delta > 0$ such that $\|x - y\| < \delta$ implies that $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

By proposition 3.7, function f_j is uniformly continuous for each $j = 0, 1, 2, \ldots$ Thus, for each $j = 0, 1, 2, \ldots$ there exists $\delta_j > 0$ such that $\|x - y\| < \delta_j$ implies

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

As $f_j \to f_0$ uniformly, there exists j_0 such that for all $j > j_0$

$$\sup_{x\in H} |f_0(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Let us set $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{j_0})$. Then for $j > j_0$ we have that $\|x - y\| < \delta$ implies

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |f_j(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(y)| + |f_0(y) - f_j(y)| \overset{(15),(16)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Now, if $0 \leq j \leq j_0$, then $\|x - y\| < \delta$ implies estimate (15), which is even stronger.

□

Remark 3.5. A number $a \in \mathbb{R}$ is called a limit at infinity of a funtion $f\colon H \to \mathbb{R}$ if

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{\|x\|\geq R} |f(x) - a| = 0.$$

It is shown in [28] that if H is infinite-dimensional, then a non-constant function that belongs to X cannot have a limit at infinity. For example, the function $x \longmapsto \exp(-\|x\|^2)$ belongs to $C_b(H, \mathbb{R})$ but not to X.

Remark 3.6. Suppose that $\alpha_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a family of infinitely-smooth functions, uniformly bounded with their first and second derivatives:

$$\sup_{p\in\{0,1,2\}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{d^p \alpha_k(t)}{dt^p} \right| \leq M \equiv \text{const}.$$

For example, $\alpha_k(t) = \sin(d_k(t - t_k))$, where d_k and t_k are constants and $0 < d_k \leq 1$. Suppose numerical series $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converges absolutely. Let $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ be an orthonormal basis in H.

Then function

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k(\langle x, e_k \rangle)$$

belongs to the class D_1.

This statement can be easily extended to the case $\alpha_k\colon \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}$.

Remark 3.7. Space D is not separable (it does not have a countable dense subset). In the case of one-dimensional H it can be shown similar to the standard proof of the nonseparability of $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. If $\dim H > 1$, then $\mathbb{R}^1$ can be embedded into H as a linear span of a non-zero vector $e \in H$. Using this, one can embed the set of cylindrical functions contributing to the non-separability of D in the case of one-dimensional H, into the space D in the general case.

Remark 3.8. By Remark 3.7 and the inclusion $D \subset D_1 \subset X$, one can see that D_1 and X are not separable too.

4. Main results

4.1. Family S_t provides a semigroup with generator $\overline{L}$

Theorem 4.1. (*On the properties of family $(S_t)_{t\geq 0}$ and its connection to the operator L*)

Suppose that $g \in X$, and for every $x \in H$ we have $g(x) \geq g_o \equiv \text{const} > 0$. Suppose that $B \in X_H$ and $C \in X$. Suppose that $t > 0$, and $\mu_{2tg(x)A}$ is the centered Gaussian measure on H with the correlation operator $2tg(x)A$.

For $t \geq 0$ and $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$ let us define

$$(S_t\varphi)(x) := e^{tC(x) - t\frac{\langle AB(x), B(x)\rangle}{g(x)}} \int_H \varphi(x+y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y \right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy) \text{ for } t > 0, \text{ and } S_0\varphi := \varphi. \tag{17}$$

Then:

1. If $t \geq 0$ and $\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$, then $S_t\varphi \in C_b(H, \mathbb{R})$. For every $t \geq 0$ the operator $S_t \colon C_b(H, \mathbb{R}) \to C_b(H, \mathbb{R})$ is linear and bounded; its norm does not exceed $e^{\left(\frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|\right)t}$.

2. If $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, then the space D for every $t \geq 0$ is invariant with respect to the operator S_t.

3. If $g \in X$, $C \in X$, $B \in X_H$, then the space X for every $t \geq 0$ is invariant with respect to the operator S_t.

4. For every function $\varphi \in D$, for $g \in X$, $C \in X$, $B \in X_H$ there exists (uniformly with respect to $x \in H$) a limit

$$\lim_{t \to 0} \frac{(S_t\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x) = (L\varphi)(x).$$

5. If $\varphi \in X$, $g \in X$, $C \in X$, $B \in X_H$, then the function $[0, +\infty) \ni t \longmapsto S_t\varphi \in X$ is continuous, i.e. if $t_0 \geq 0, t_n \geq 0$ and $t_n \to t_0$, then $\sup_{x \in H} |(S_{t_n}\varphi)(x) - (S_{t_0}\varphi)(x)| \to 0$.

Analogue of theorem 4.1 for finite-dimensional H can be found in [15]. The proof for the case of infinite-dimensional H follows the same general line but is more involved. It uses lemmas from sections 3.1., 3.5. and will be published in a separate paper.

Theorem 4.2. (*On the properties of the operator L*) **Suppose** that for each $x \in H$ the inequalities $g(x) \geq g_o \equiv \mathrm{const} > 0$ and $C(x) \leq 0$ hold. As $C \in X$, there exists a sequence $(C_j) \subset D$ converging to C uniformly; let us additionally require that this sequence can be selected in such a way that $C_j(x) \leq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ and all $x \in H$. The operator $L \colon D \to X$ is defined by the equation

$$(L\varphi)(x) = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x).$$

Symbol I stands for the identity operator.

Then:

1. If $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$ and $\varphi \in D$, then $L\varphi \in D$. If $g \in X$, $C \in X$, $B \in X_H$ and $\varphi \in D$, then $L\varphi \in X$.

2. If $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, then for each $\lambda > 0$ the operator $\lambda I - L$ is surjective on D, therefore $(\lambda I - L)(D) = D$ is a dense subspace in X.

3. If $g \in D$, $C \in D$, $B \in D_H$, then the operator (L, D) is dissipative and closable.

4. If $g \in X$, $C \in X$, $B = 0$, then for each $\lambda > 0$ the space $(\lambda I - L)(D)$ is dense in X.

5. If $g \in X$, $C \in X$, $B \in X_H$, then the operator (L, D) is dissipative and has the closure $(\overline{L}, D_1)$. The operator $(\overline{L}, D_1)$ is also dissipative.

The proof of theorem 4.2 is based on the results of sections 3.2., 3.3. and will be published in a separate paper. Item 1 follows from the definition of the operator L. Items 2 and 3 are derived from lemma 3.5, proposition 3.1 and proposition 3.5. Item 4 is derived from item 2. Item 5 is obtained by proceeding to the limit in the dissipativity estimate proven in item 3 and then applying proposition 3.5.

Theorem 4.3. (On the connection between the family $(S_t)_{t \geq 0}$ and the semigroup with the generator $\overline{L}$)

Suppose that $g \in X$, $B \in X_H$, $C \in X$, and for every $x \in H$ we have $g(x) \geq g_0 \equiv$ const > 0 and $C(x) \leq 0$. As $C \in X$, there exists a sequence $(C_j) \subset D$, converging to C uniformly; let us additionally claim that this sequence can be selected in such a way that $C_j(x) \leq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ and all $x \in H$. **Then** the following holds:

1. If the closure $(\overline{L}, D_1)$ of the operator (L, D) is a generator of a strongly continuous semigroup $\left(e^{t\overline{L}}\right)_{t\geq 0}$ of linear continuous operators on the space X, then

$$e^{t\overline{L}}\varphi = \lim_{n\to\infty} \left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n \varphi, \tag{18}$$

where limit exists for every $\varphi \in X$ and is uniform with respect to $t \in [0, t_0]$ for every $t_0 > 0$.

2. If $B = 0$, then the operator $(\overline{L}, D_1)$ is a generator of a strongly continuous semigroup $\left(e^{\overline{L}t}\right)_{t\geq 0}$ of linear continuous operators on the space X. Moreover for every $t \geq 0$ we have $\left\|e^{\overline{L}t}\right\| \leq 1$, i.e. the semigroup $\left(e^{\overline{L}t}\right)_{t\geq 0}$ is contractive.

3. Suppose $B = 0$, and for all $j \in \mathbb{N}$ the functions $g_j \in X$, $B_j \in X_H$ and $C_j \in X$ are given. Suppose $B_j = 0$ for all $j \in \mathbb{N}$. Suppose there exists a number $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $j \in \mathbb{N}$ and all $x \in H$ we have $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ and $C_j(x) \leq 0$. Let us denote by the symbol L_j the operator L, which corresponds to the functions g_j, B_j and C_j, and the operator L corresponding to the functions g, B and C will be denoted by L_0. Suppose also that $g_j(x) \to g(x)$ and $C_j(x) \to C(x)$, uniformly with respect to $x \in H$.

Then the (existing by item 2) strongly continuous semigroups $\left(e^{\overline{L_j}t}\right)_{t\geq 0}$ converge strongly (and uniformly with respect to $t \in [0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$) to the (existing by item 2) strongly continuous semigroup $\left(e^{\overline{L_0}t}\right)_{t\geq 0}$ with the generator $\overline{L_0}$. In other words for every $t_0 > 0$ and every $\varphi \in X$ there exists a limit

$$\lim_{j\to\infty} \left(e^{\overline{L_j}t}\varphi\right)(x) = \left(e^{\overline{L_0}t}\varphi\right)(x), \tag{19}$$

uniformly with respect to $x \in H$ and $t \in [0, t_0]$.

Proof.

1. Recall theorem 3.1 and set $F(t) = S_t$, $\omega = \frac{2\|A\|\|B\|^2}{g_0} + \|C\|$, $\mathcal{X} = X$, $\mathcal{D} = D$, $F'(0) = L$, $G = \overline{L}$. One can see that according to items 1, 4 and 5 of theorem 4.1 and item 5 of theorem 4.2 all the conditions of theorem 3.1 are fulfilled.

2. Note that $C(x) \leq 0$, so $\sup_{x\in H} e^{C(x)} \leq 1$ and for $B = 0$ one obtains the estimate $\|S_t\| \leq 1$. Conditions of theorem 3.2 are fulfilled if one sets $\mathcal{X} = X$, $\mathcal{D} = D$, $\mathcal{L} = L$, $V_t = S_t$, $M = 1$, $\omega = 0$. Indeed, according to item 1 of theorem 4.1, for all $t \geq 0$ the estimate $\|S_t\| \leq e^{\omega t} = 1$ holds true, therefore $\|\left(S_t\right)^k\| \leq 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$. Other conditions of theorem 3.2 follow from item 4 of theorem 4.1 and items 4 and 5 of theorem 4.2.

3. Recall theorem 3.3, and set $\mathcal{X} = X$, $\mathcal{D} = D$, $\mathcal{L} = L_0$, $\mathcal{L}_n = L_j$. One can see that item 2 of this theorem and items 4 and 5 of theorem 4.2 imply all the conditions of theorem 3.3, except for the following one: if $\varphi \in D$, then $\lim\limits_{j\to\infty} L_j\varphi = L_0\varphi$. A simple check shows that this condition is also fulfilled.

□

4.2. Feynman formula solves the Cauchy problem for the parabolic equation

We want to find a function $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ satisfying the following conditions (we call them Cauchy problem for the parabolic differential equation):

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = Lu(x,t); & t\geq 0, x\in H,\\ u(0,x)=u_0(x); & x\in H. \end{cases} \tag{20}$$

To this Cauchy problem, we relate the so-called abstract Cauchy problem (see Definition 3.3), which we define as the following system of conditions upon the function $U\colon [0,+\infty)\to X$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \overline{L}U(t); & t\geq 0,\\ U(0)=u_0, \end{cases} \tag{21}$$

Remark 4.1. Problem (20) can be considered as problem (21) in the following sense. Function $u\colon (t,x)\longmapsto u(t,x)$ of two variables (t,x) can be considered as a function $u\colon t\longmapsto [x\longmapsto u(t,x)]$ of one variable t, with values in the space of functions of variable x. Then

$$u(t,x) = (U(t))(x), \quad t\geq 0, x\in H.$$

Using this correspondence, we start from Definition 3.3 and define the solution of problem (20).

Definition 4.1. We call a function $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ *a strong solution* of problem (20) if it satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} u(t,\cdot)\in D_1; & t\geq 0,\\ \text{function } t\longmapsto u(t,\cdot) \text{ is continuous;} & t\geq 0,\\ \text{Uniformly for } x\in H\ \exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{u(t+\varepsilon,x)-u(t,x)}{\varepsilon} = u_t'(t,x); & t\geq 0,\\ u_t'(t,\cdot)\in X; & t\geq 0,\\ \text{Function } t\longmapsto u_t'(t,\cdot) \text{ is continuous;} & t\geq 0,\\ u_t'(t,x) = Lu(x,t); & t\geq 0, x\in H,\\ u(0,x)=u_0(x); & x\in H. \end{cases} \tag{22}$$

Definition 4.2. We call a function $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ *a mild solution* of problem (20) if it satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} u(t,\cdot)\in X; & t\geq 0,\\ \text{Function } t\longmapsto u(t,\cdot) \text{ is continuous;} & t\geq 0,\\ \int_0^t u(s,\cdot)ds\in D_1; & t\geq 0,\\ u(t,x) = L\int_0^t u(s,x)ds + u_0(x); & t\geq 0, x\in H,\\ u_0\in X. \end{cases} \tag{23}$$

Definition 4.3. Let us use the symbol $C([0,+\infty),X)$ for the class of all functions $u\colon [0,+\infty)\times H\to\mathbb{R}$ such that for every $t\geq 0$ the function $x\longmapsto u(t,x)$ belongs to the class X, and the mapping $t\longmapsto u(t,\cdot)\in X$ is continuous for every $t\geq 0$.

Finally, let us state and prove the main result of the article. We use definitions and notation from Section 2.

Theorem 4.4. (On the solution of the Cauchy problem for a parabolic differential equation in Hilbert space)

Suppose $g \in X, C \in X, B \in X_H$. Suppose there is a number $g_0 > 0$ such that for all $x \in H$ we have $g(x) \geq g_0$ and $C(x) \leq 0$. As $C \in X$, there exists a sequence $(C_j) \subset D$, converging to C uniformly; let us additionally require that this sequence can be selected in such a way way that $C_j(x) \leq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ and all $x \in H$.

Then the following holds:

1. If there exists a strongly continuous semigroup with the generator $\overline{L}$, then for every $u_0 \in D_1$ there exists a solution u of problem (22), unique in the class $C([0, +\infty), X)$. The solution depends continuously on u_0, and is given by the formula $u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x)$, where the limit is uniform with respect to $t \in [0, t_0]$ for every $t_0 > 0$.

2. If there exists a strongly continuous semigroup with the generator $\overline{L}$, then for every $u_0 \in X$ there exists a solution u of problem (23), unique in the class $C([0, +\infty), X)$. It depends continuously on u_0, and is given by the formula $u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x)$, where the limit is uniform with respect to $t \in [0, t_0]$ for every $t_0 > 0$.

3. If $B = 0$, then there exists a strongly continuous semigroup with the generator $\overline{L}$. The formula $u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}} \right)^n u_0 \right)(x)$ becomes simpler than in the case $B \neq 0$. Namely, for $B = 0$ we have

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_H \int_H \cdots \int_H \int_H}_{n} e^{\frac{t}{n}\left(C(x)+\sum_{k=1}^{n-1} C(y_k)\right)} u_0(y_1) \mu^{y_2}_{\frac{2t}{n} g(y_2) A}(dy_1) \mu^{y_3}_{\frac{2t}{n} g(y_3) A}(dy_2) \ldots$$
$$\ldots \mu^{y_n}_{\frac{2t}{n} g(y_n) A}(dy_{n-1}) \mu^{x}_{\frac{2t}{n} g(x) A}(dy_n). \tag{24}$$

In this case the solution u for all $t > 0$ satisfies the estimate $\sup_{x\in H} |u(t,x)| \leq \sup_{x\in H} |u_0(x)|$.

4. Let $B = 0$, and let the functions $g_j \in X$, $B_j \in X_H$ and $C_j \in X$ be given for all $j \in \mathbb{N}$. Let $B_j = 0$ for all $j \in \mathbb{N}$. Suppose there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that $g_j(x) \geq \varepsilon_0$ and $C_j(x) \leq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ and all $x \in H$. Let us use the symbol L_j for the operator L that corresponds to the functions g_j, B_j and C_j, and the symbol L_0 for the operator L that corresponds to the functions g, B and C. Suppose also that $g_j(x) \to g(x)$ and $C_j(x) \to C(x)$, uniformly with respect to $x \in H$. We denote as u_j the solution of problems (22) and (23) for the operator L_j. For solution of problems (22) and (23) with the operator L, we use the symbol u.

Then $u_j(t,x)$ converges to $u(t,x)$ as $j \to \infty$, uniformly with respect $x \in H$ and uniformly with respect to $t \in [0, t_0]$ for every fixed $t_0 > 0$.

Remark 4.2. Note that if $B = 0$, then solution depends continuously on the data of the Cauchy problem: the coefficients of the equation (item 4) and the initial condition (items 1 and 2).

Remark 4.3. Analogous theorems for $\mathbb{C}$- or $\mathbb{R}^n$-valued functions u can be formulated mutatis mutandis. The result will hold true due to the theorem above and the linearity of L and S_t. The only additional condition will be that the coefficients of the equation must be real-valued. The same remark is applicable to all the key theorems of this article.

Proof of the theorem.

1. Suppose that there exists a strongly continuous semigroup with the generator $\overline{L}$. Then by item 1 of proposition 3.4 we obtain the existence of a strong solution (definition 3.3) to Cauchy problem (21), and the solution is unique in the class $C([0,+\infty),X)$. By item 1 of theorem 4.3 the semigroup is given in the form described. Using the relation between problems (20) and (21) explained in remark 4.1, we obtain the solution for problem (22). The solution is unique in the class $C([0,+\infty),X)$, as follows from remark 4.1.

2. The proof is similar to that in item 1. The only difference is that in proposition 3.4 we use item 2 instead of item 1.

3. The existence of the sought semigroup follows from item 2 of theorem 4.3. The estimate for the supremum of the absolute value of the solution follows from the fact that the semigroup is contractive.

Let us explain how the equality $u(t,x)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n u_0\right)(x)$ implies formula (24). For a continuous bounded function $\psi\colon H\to\mathbb{R}$ and a point $x\in H$, the following change of variables rule in the integral is correct:

$$\int_H \psi(y)\mu_A(dy)=\int_H \psi(y-x)\mu_A^x(dy).$$

Applying this rule, and changing A to $2tg(x)A$, we come to the equality

$$(S_t\varphi)(x)=e^{tC(x)}\int_H \varphi(x+y)\mu_{2tg(x)A}(dy)$$

$$=e^{tC(x)}\int_H \varphi(x+(y-x))\mu^x_{2tg(x)A}(dy)=e^{tC(x)}\int_H \varphi(y)\mu^x_{2tg(x)A}(dy).$$

For $n=2$ in formula (24) we get the expression

$$\left(\left(S_{\frac{t}{2}}\right)^2\varphi\right)(x)=\left(S_{\frac{t}{2}}\left(S_{\frac{t}{2}}\varphi\right)\right)(x)=\int_H\left(\int_H e^{\frac{t}{2}(C(x)+C(y_1))}\varphi(y_1)\mu^{y_2}_{\frac{2t}{2}g(y_2)A}(dy_1)\right)\mu^x_{\frac{2t}{2}g(x)A}(dy_2).$$

In the same way expressions for $n>2$ are derived. Thus, the formula (24) is proven.

4. The proof follows immediately from item 3 of theorem 4.3.

□

5. Acknowledgments

The author is grateful to O.G. Smolyanov for setting the problem (in particular, for defining the space X) and attention to the work; to V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov and E.T. Shavgulidze for help with the calculation of integral (6); to T.A. Shaposhnikova for acquainting the author with book [7], where the key lemma 3.5 was taken from; to A.V. Halyavin for reading and commenting on the manuscript.

The author also highly appreciates the contributions of L.S. Remizova, Yu.A. Komlev, D.V. Turaev, A.S. Remizova and A.G. Linucheva, whose kind support was a necessary condition of the present paper's existence.

References

[1] Bogachev V. I., "Gaussian Measures", *Amer. Math. Soc.*, 1998.

[2] Bogachev V. I., Smolyanov O. G., *Real and functional analysis: university course (in Russian)*, RCD, M. Izevsk, 2009.

[3] Butko Ya. A., "The Feynman-Kac-Ito formula for an infinite-dimensional Schrödinger equation with scalar and vector potentials".

[4] Butko Ya. A., "Feynman formula for semigroups with multiplicatevely perturbed generators", *Science and Education (ISSN 1994-0408)*, **10** (October 2011), 77-305691/239563.

[5] Daletsky Yu. L., Fomin S. V., *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*, Kluwer, 1991.

[6] Egorov A. D., Zidkov E. P., Lobanov Yu. Yu, *Introduction to the theory and applications of the functional integration (in Russian)*, M. Fizmatlit, 2006.

[7] Krylov N. V., "Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces", *AMS, Graduate Texts in Mathematics*, **12** (1996).

[8] Lobanov Yu. Yu, *Methods of the approximate functional integrating for the numerical research in the quantum physics*, Dr. Sci. dissertation thesis (in Russian), M., 2009.

[9] Smolyanov O. G., *Analysis on the topological linear spaces and its applications (in Russian)*, MSU, M., 1979.

[10] Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T., *Continual integrals (in Russian)*, MSU, M., 1990.

[11] Smolyanov O. G., Shamarov N. N., Kpekpassi M., "Feynman-Kac and Feynman Formulas for Infinite-Dimensional Equations with Vladimirov Operator", *Doklady Mathematics*, **83**:3 (2011), 389–393.

[12] Smolyanov O. G., Shamarov N. N., "Hamiltonian Feynman formulas for equations containing the Vladimirov operator with variable coefficients", *Doklady Mathematics*, **84**:2, 689–694.

[13] Schwartz L., *Analyse mathematique*, I. Hermann, 1967.

[14] Luiz C.L. Botelho, "Non-linear diffusion in $\mathbb{R}^D$ and Hilbert Spaces, a Cylindrical/Functional Integral Study", arXiv: http://arxiv.org/abs/1003.0048v1.

[15] Butko Ya. A., Grothaus M., Smolyanov O. G., "Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains", *Infinite Dimansional Analyasis, Quantum Probability and Related Topics*, **13**:3 (2010), 377–392.

[16] Yana A. Butko, René L. Schilling, Smolyanov Oleg G., "Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations", arXiv: http://arxiv.org/abs/1203.1199v1.

[17] Cartan H., *Differential Calculus*, Kershaw Publishing Company, 1971.

[18] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[19] Plyashechnik A. S., "Feynman formula for Schrödinger-Type equations with time- and space-dependent coefficients", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **19**:3 (2012), 340–359.

[20] Plyashechnik A. S., "Feynman formulas for second-order parabolic equations with variable coefficients", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **20**:3 (2013), 377–379.

[21] G. Da Prato, *Introduction to infinite-dimensional analysis*, Springer, 2006.

[22] G. Da Prato, Zabczyk J., "Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces", *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, **293** (2004).

[23] Fernique X., "Intégrabilité des vecteurs gaussiens", Sér. A-B 270: A1698–A1699, C. R. Acad. Sci., Paris.

[24] Feynman R. P., "Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948), 367–387.

[25] Feynman R. P., “An operation calculus having applications in quantum electrodynamics”, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 108–128.

[26] Engel K.-J., Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.

[27] Dieudonné J., *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York and London, 1969.

[28] Remizov I. D., “Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **19**:3 (2012), 360–372.

[29] Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh., Smolyanov O. G., “Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **285**:1 (August 2014), 222–232.

[30] Simon B., *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979.

[31] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A., “Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula”, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 5161–5171.

[32] Remizov I. D., *The latest version of the preprint*, arXiv: http://arxiv.org/abs/1409.8345.

[33] Smolyanov O. G., “Feynman formulae for evolutionary equations”, London Mathematical Society Lecture Notes Series, **353**, 2009.

[34] Kuo H.-S., “Gaussian measures in Banach space”, *Lecture notes in mathematics*, **463** (1975).

[35] Paul R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups”, *J. Functional Analysis 2*, 1968, 238–242.

[36] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O., “Chernoff’s Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds”, *Potential Analysis*, **26**:1 (February 2007), 1–29.

[37] Butko Ya. A., “Feynman formulae for evolution semigroups (in Russian)”, *Electronic scientific and technical periodical ”Science and education”*, 2014, №3, 95–132.

Решение параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с помощью формулы Фейнмана - I

Ремизов И. Д.

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д. 5, Москва, 105005, Россия
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия

Ключевые слова: Гильбертово пространство, формула Фейнмана, теорема Чернова, кратные интегралы, гауссовская мера

В работе рассматривается параболическое дифференциальное уравнение $u'_t(t,x) = Lu(t,x)$ в частных производных, где L – это линейный дифференциальный оператор второго порядка с коэффициентами, не зависящими от времени, но зависящими от x. Предполагается, что пространственная переменная x принадлежит конечномерному или бесконечномерному вещественному сепарабельному гильбертову пространству H.

Из существования сильно непрерывной полугруппы, разрешающей рассматриваемое уравнение, в статье выводится представление этой полугруппы в виде формулы Фейнмана, т.е. полугруппа записывается в форме предела кратного интеграла по H при стремящейся к бесконечности кратности. Это представление дает единственное решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения в классе функций, являющихся равномерными пределами гладких цилиндрических функций на H. Более того, это решение непрерывно зависит от начального условия. Для случая, когда в операторе L коэффициент при первой производной равен нулю, в настоящей работе доказано, что а) сильно непрерывная разрешающая полугруппа существует (это влечет за собой существование единственного решения для задачи Коши в упомянутом выше классе функций) и б) это решение непрерывно зависит от коэффициентов уравнения.

Статья публикуется в авторской редакции.

Сведения об авторе:

Ремизов Иван Дмитриевич,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, младший научный сотрудник;
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, ассистент

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 356–371

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–356–371

UDC 519.987

Scheduling Problems of Stationary Objects with the Processor in One-Dimensional Zone

Dunichkina N. A.*, Kogan D. I.**, Fedosenko Yu. S.*[1]

**Volga State University of Water Transport,*
Nesterova str., 5a, Nizhny Novgorod, 603005, Russia
***Moscow State University of Instrument Engineering and Informatics,*
Stromynka str., 20, Moscow, 107996, Russia

e-mail: nadezhda.dunichkina@gmail.com, kdi_41@mail.ru, fds@vgavt-nn.ru

received March 25, 2015

Keywords: scheduling, dynamic programming, Pareto concept, NP-complexity, multicriteria optimization

We consider the mathematical model in which an operating processor serves the set of the stationary objects positioned in a one-dimensional working zone. The processor performs two voyages between the uttermost points of the zone: the forward or direct one, where certain objects are served, and the return one, where remaining objects are served. Servicing of the object cannot start earlier than its ready date. The individual penalty function is assigned to every object, the function depending on the servicing completion time. Minimized criteria of schedule quality are assumed to be total service duration and total penalty. We formulate and study optimization problems with one and two criteria. Proposed algorithms are based on dynamic programming and Pareto principle, the implementations of these algorithms are demonstrated on numerical examples. We show that the algorithm for the problem of processing time minimization is polynomial, and that the problem of total penalty minimization is NP-hard. Correspondingly, the bi-criteria problem with the mentioned evaluation criteria is fundamentally intractable, computational complexity of the schedule structure algorithm is exponential. The model describes the fuel supply processes to the diesel-electrical dredgers which extract non-metallic building materials (sand, gravel) in large-scale areas of inland waterways. Similar models and optimization problems are important, for example, in applications like the control of satellite group refueling and regular civil aircraft refueling.

The article is published in the author's wording.

[1]The article prepared with a financial support of Russian Fund of Fundamental Research – project № 15-07-03141.

Introduction

The problems under study were posed when it was necessary to create computer-based systems for operating control of fuel supply to the floating diesel-electrical complexes or dredgers extracting non-metallic building materials (gravel, sand) in larger transport areas of inland waterways. One of the transport area operator's responsibilities is to work out the time schedule [1–6] reducing cost losses due to idling of both dredgers and a fuel supply tanker. In this paper we formulate optimization problems for the model in which the moving processor is to serve the set of stationary objects positioned within uniform one-dimensional working zone. The processor is assumed to do two-way voyages – the forward or direct one, during which few objects are served, and the return one, when the remaining objects are served. Individual penalty function is assigned to each object; it is a monotone increasing function associated with the time when servicing of the particular object is accomplished. The minimized criteria are the service completion time of all the objects involved and the total penalty. Similar models and optimization problems are important, for example, in applications like the control of satellite group refueling [7] and regular civil aircraft refueling [8].

1. Mathematical Model And Problems Formulation

There is an assumed set $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ of the stationary objects within the working zone L of the operating processor P (fig. 1). The working zone is one-dimensional and finite; its initial point A is a start up point for the processor. Objects are supposed to be numbered in the order of their distances increasing from the point A; the end point B of the zone L is the location of the object o_n. Starting from the moment $t = 0$ the processor moves from the start up point A towards the end point B (forward voyage, let us denote it by λ_+), and having reached the end point, it moves back to the point A (return voyage, let us denote it by λ_-).

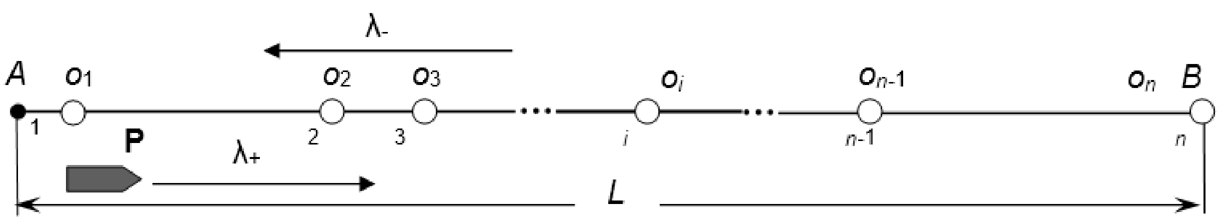

Fig. 1: Modelling single processor servicing the related objects.

During the cycle $\lambda_+\lambda_-$ the processor P performs single continuing service of group O_n-related objects: a few of them are served in voyage λ_+ , remaining objects – in voyage λ_-. Simultaneous servicing of two and more objects is prohibited.

With every object o_j we associate monotone non-decreasing penalty function of its service completion time; it represents the losses related to the service.

By $1, 2, \ldots, n$ we denote segment L points where the objects $o_1, o_2, \ldots, o_n$ are positioned correspondingly (the points n and B coincide); τ_j - object o_j service duration, r_j - ready date of the object o_j; $\varphi_j(t)$ - the object o_j penalty function (if servicing of the object o_j

is accomplished at the moment t then $\varphi_j(t)$ is a penalty for this particular object; $\gamma_{j-1,j}$ and $\gamma_{j,j-1}$ - the processor movement durations between $j-1$ and j in the voyages λ_+ and λ_- respectively; $j = \overline{1,n}$, here $\gamma_{0,1}$ and $\gamma_{1,0}$ - the processor movement durations between point A and the point 1 in the voyages λ_+ and λ_- correspondingly. The values τ_j, $\gamma_{j-1,j}$ and $\gamma_{j,j-1}$ are positive integers, r_j are non-negative integers.

Servicing strategy is an arbitrary subset of ascending indices $V = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ of the set $N = 1, 2, \ldots, n$. During the strategy realization the objects o_{i_m}, where $i_m \in V$, are served in voyage λ_+; the remaining objects of the set O_n are served in voyage λ_-. By $V^- = (i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n)$ as defined by strategy V we denote the sequence of the objects served in voyage λ_-, the indices in V^- are listed in the diminishing order. The sequences V and V^- do not contain equal elements. To be explicit, we assume that the object o_n is served upon completion of voyage λ_+, hence $n \in V$. Let us note that $V^- = \varnothing$ if and only if $V = (1, 2, \ldots, n)$. It is evident that the number of different servicing strategies is equal to 2^{n-1}. We assume that service time schedules to apply the strategy V are the tuples as follows:

$$\rho = \langle (i_1, a_{i_1}, b_{i_1}), (i_2, a_{i_2}, b_{i_2}), \ldots, (i_k, a_{i_k}, b_{i_k}), \ldots, (i_n, a_{i_n}, b_{i_n}) \rangle \,,$$

where $V = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $V^- = (i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n)$, $i_k = n$, a_{i_m} and b_{i_m} - servicing start up and completion time for the object o_{i_m} respectively, $m = \overline{1,n}$; $a_{i_1} \geq \gamma_{0,i_1}$, $b_{i_1} = a_{i_1} + \tau_{i_1}$; $a_{i_2} \geq b_{i_1} + \gamma_{i_1,i_2}$, $b_{i_2} = a_{i_2} + \tau_{i_2}$; $\ldots$; $a_{i_n} \geq b_{i_{n-1}} + \gamma_{i_{n-1},i_n}$, $b_{i_n} = a_{i_n} + \tau_{i_n}$. Further we denote the object o_x servicing start up and completion time by $S_x(\rho)$ and $C_x(\rho)$ correspondingly, the values being depended on the schedule ρ.

By $K_(\rho)$ we denote the total penalty for all objects under service during the schedule ρ implementation, $K(\rho) = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(C_j(\rho)) \right\}$. By $T(\rho)$ we denote the time when the processor returns to the initial point after service accomplishment involving the objects according to schedule ρ. For arbitrary schedule ρ we have:

$$T(\rho) = b_{i_n} + \gamma_{i_n,0}. \tag{1}$$

The schedule ρ is called r-feasible if during its implementation all ready dates for the objects are observed. The set of all r-feasible schedules (each of them implements some servicing strategy) is assumed here as R; the set of all r-feasible schedules which implements the strategy V will be denoted as $R(V)$. It is obvious that any set $R(V)$ is nonempty.

Further, we consider the following two problems.

Problem 1. $\min\limits_{\rho \in R} T(\rho)$.

Problem 2. $\min\limits_{\rho \in R} \{K(\rho), T(\rho)\}$.

The problem 1 is to construct the schedule optimal by processing time. In bi-criteria problem 2 the first criterion is total penalty for the objects, the second one - servicing cycle duration. For problem 2 we will use the Pareto concept, which implies the synthesis of the total set of the efficient estimates, simultaneously providing the opportunity to determine the problem solution that assures any efficient estimate [9–12].

For problems 1 and 2 we will further construct the respective algorithms of polynomial and exponential computational complexity. Both algorithms are based on dynamic programming [13,14]. We will further show, that problem 2 is fundamentally intractable. This intractability follows from the NP-hardness [15–17] of a one-criterion problem below.

Problem 3. $\min\limits_{\rho \in R} K(\rho)$.

We will show below that problem 3 is NP-hard even in a particular case, when all functions $\varphi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, are linear. If we construct the set of efficient estimates for problem 2 this will inevitably lead us to the solution of problem 3.

2. Compact schedules and 0-schedules

Schedule ρ, $\rho \in R$, is called compact, if in-between stops of the processor during the cycle $\lambda_+\lambda_-$ are only related to the objects service in their locations, and to their expectancy for the ready dates to come. When constructing the compact schedule for arbitrary strategy $V = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, the servicing start and completion times a_{i_m} and b_{i_m} of the object o_{i_m}, $m = \overline{1,n}$, are calculated consecutively to the extent that the parameter m grows, the following formulas being:

$$a_{i_1} = \max(\gamma_{0,i_1}, r_{i_1}); \tag{2}$$

$$b_{i_m} = a_{i_m} + \tau_{i_m}, m = \overline{1,n}; \tag{3}$$

$$a_{i_{\chi+1}} = \max(b_{i_\chi} + \gamma_{i_\chi,i_{\chi+1}}, r_{i_{\chi+1}}), \chi = \overline{1,n-1} \tag{4}$$

We will denote the compact schedule implementing arbitrary strategy V by $\rho_k(V)$. Specified schedule is defined unambiguously.

It should be noted that the processor which started the forward voyage relatively late (for example, at the moment $\max\limits_{p} p$) can serve the objects of set $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ without intermediate idlings which arise from the need to observe the ready dates. By $t_0(V)$ we denote the minimal forward voyage start time so that the processor can further serve all the objects of the set O_n according to strategy V without intermediate idlings as a result of ready dates $r_1, r_2, \ldots, r_n$. We will call this servicing mode as "0-mode and related schedule is named here as "0-schedule". The 0-schedule implementing the strategy V will be denoted as $\rho_0(V)$.

It is evident that $t_0(V)$ is a total idle time of the processor in waiting for the ready dates $r_1, r_2, \ldots, r_n$ during the schedule $\rho_k(V)$ implementation. For fixed strategy V the value $t_0(V)$ is defined as follows.

1. We sequentially calculate the values a_{i_m} and b_{i_m} for the schedule $\rho_k(V)$ using the formulas(2) – (4) with a gradual parameter m growth, $m = \overline{1,n}$;

2. Time losses T^* are then calculated for direct servicing of all the objects involved, as well as for the processor movement from the point 0 to the point n and then

back to the last object to be serviced in the strategy:

$$T^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \tau_j + \gamma_{0,n} + \gamma_{n,i_n}, & \text{if the set of the objects served in the backward voyage} \\ & \text{is nonempty;} \\ \sum_{j=1}^{n} \tau_j + \gamma_{0,n}, & \text{in opposite case} \end{cases}$$

3. We set $t_0(V) = b_{i_n} - T^*$.

For 0-schedule $\rho = \big\langle (i_1, a'_{i_1}, b'_{i_1}), (i_2, a'_{i_2}, b'_{i_2}), \dots, (i_k, a'_{i_k}, b'_{i_k}), \dots, (i_n, a'_{i_n}, b'_{i_n}) \big\rangle$, defined by the servicing strategy $V = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, we have the following relations:

$$a'_{i_1} = t_0(V) + \gamma_{0,1}; \tag{5}$$

$$b_{i_m} = a'_{i_m} + \tau_{i_m}, m = \overline{1, n}; \tag{6}$$

$$a'_{i_{\chi+1}} = b'_{i_\chi} + \gamma_{i_\chi, i_{\chi+1}}, \chi = \overline{1, n-1} \tag{7}$$

For the given initial data, 0-schedule implementing the arbitrary strategy V can be uniquely defined. We should note, that if $t_0(V) = 0$, the schedules $\rho_0(V)$ and $\rho_k(V)$ are identical.

Theorem 1. *The schedule $\rho_k(V)$ minimizes value of $K(\rho)$ on the set $R(V)$; both schedules $\rho_0(V)$ and $\rho_k(V)$ minimize the values of the $T(\rho)$ on the set $R(V)$.*

The theorem statements are easily proved by contradiction.

3. Problem 1 solving algorithm

According to theorem 1, problem 1 permits the following equivalent form.

Problem 4. $\min\limits_V T(\rho_0(V))$.

From the definition of 0-schedule it follows that:

$$T(\rho_0(V)) = t_0(V) + \sum_{j=1}^{n} \tau_j + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_{j,j+1} + \sum_{j=n}^{1} \gamma_{j,j-1}. \tag{8}$$

Thus, the problem of the criterion $T(\rho_0(V))$ minimization and, equally, the criterion $T(\rho_k(V))$ minimization, reduces to the minimization of the value $t_0(V)$:

$$\min_V t_0(V). \tag{9}$$

Having defined the subset V as optimal for problem (9), we will easily then construct the optimal servicing schedule for problem 1.

Let us denote as $D(k)$ the start up marginal momentum, when the processor in point k can serve all the objects $\{o_k, o_{k+1}, \dots, o_n\}$ in the 0-mode during the subsequent implementation of the forward or direct voyage (from point k) and then the return voyage, i.e. without idlings time due to the ready dates $r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n$, here $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Together with the values $D(k)$ calculation, we will consecutively construct the strategy V_D which assures these values.

It is evident that

$$D(n) = r_n. \tag{10}$$

Sequence V_D being composed is initially assumed as a single element n. We select the following notation:

$$W^*(k) = (\tau_k + \tau_{k+1} + \ldots + \tau_n) + (\gamma_{k,k+1} + \gamma_{k+1,k+2} + \ldots + \gamma_{n-1,n} + \gamma_{n,n-1} + \ldots + \gamma_{k+1,k});$$

thus, $W^*(k)$ is the total time of the direct servicing of the objects $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$ and the processor movements from the point k to the point n and from the point n to the point k in the direct and return voyages respectively.

There is an alternative for each object from the set $\{o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}\}$: it can be served either in the direct or in the return voyage. Assuming that there are no idlings, servicing of the object o_{n-1} can start in the direct voyage at the moment t'_{n-1} if and only if $(t'_{n-1} \geq r_{n-1})\&(t'_{n-1} + \tau_{n-1} + \gamma_{n-1.n} \geq D(n))$. The minimal possible value t'_{n-1} which meets the above constraints is equal to $\max\{r_{n-1}, D(n) - (\tau_{n-1} + \gamma_{n-1,n})\}$.

Let us assume that servicing of the object o_{n-1} is performed in the return voyage. With no idlings assumed, the processor skips the servicing of the object o_{n-1} in the direct voyage, and can start moving from the point $n-1$ towards the point n at the moment t''_{n-1} if and only if $(t''_{n-1} + \gamma_{n-1,n} \geq D(n))\&(t''_{n-1} + W^*(n-1) - \tau_{n-1} \geq r_{n-1})$. The minimal possible value t''_{n-1} in this case is equal to $\max\{D(n) - \gamma_{n-1,n}, r_{n-1} - (W^*(n-1) - \tau_{n-1}), 0\}$ resulting in:

$$D(n-1) = \min \begin{bmatrix} \max\{r_{n-1}, D(n) - (\tau_{n-1} + \gamma_{n-1,n})\}, \\ \max\{D(n) - \gamma_{n-1,n}, r_{n-1} - (W^*(n-1) - \tau_{n-1}), 0\} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Index $n-1$ is included in the sequence V_D if $D(n-1) = \max\{r_{n-1}, D(n) - (\tau_{n-1} + \gamma_{n-1,n})\}$.

Let us assume that for arbitrary $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ the value $D(k)$ has been obtained. With no idlings assumed servicing of the object o_{k-1} during the direct voyage can start at the moment t'_{k-1} if and only if $\left(t'_{k-1} \geq r_{k-1}\right)$ & $\left(t'_{k-1} + \tau_{k-1} + \gamma_{k-1,k} \geq D(k)\right)$.

The minimal possible value t'_{k-1}, for which the given constrains are met, is equal to $\max\{r_{k-1}, D(k) - (\tau_{k-1} + \gamma_{k-1,k})\}$. Let servicing of the object o_{k-1} be performed in the return voyage. With no idlings assumed the processor skips the servicing of the object o_{k-1} in the direct voyage and can start moving from the point $k-1$ towards the point k at the moment t''_{k-1} if and only if $(t''_{k-1} + \gamma_{k-1,k} \geq D(k))\&(t''_{k-1} + W^*(k-1) - \tau_{k-1} \geq r_{k-1})$.

Thus the minimal possible value t''_{k-1} is equal to $\max\{D(k) - \gamma_{k-1,k}, r_{k-1} - (W^*(k-1) - \tau_{k-1}), 0\}$ resulting in:

$$D(k-1) = \min \begin{bmatrix} \max\{r_{k-1}, D(k) - (\tau_{k-1} + \gamma_{k-1,k})\}, \\ \max\{D(k) - \gamma_{k-1,k}, r_{k-1} - (W^*(k-1) - \tau_{k-1}), 0\} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

We include index $k-1$ in sequence V_D if $D(k-1) = \max\{r_{k-1}, D(k) - (\tau_{k-1} + \gamma_{k-1,k})\}$ and accomplish strategy V_D construction when calculations using formula (12) have been made with parameter k values consequently decreasing.

By $D(0)$ we denote the minimal start time of the movement from point 0, when the processor can serve all the objects of the set $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ during the cycle $\lambda_+\lambda_-$ in the 0-mode, i.e. without idlings due to the ready dates. It means that $D(0) + \gamma_{0,1} \geq D(1)$. Hence we have:

$$D(0) = \max\ (D(1) - \gamma_{0,1}, 0). \tag{13}$$

The equations (10) – (13) are dynamic programming relations which allow to consecutively define values $D(n), D(n-1), D(n-2), \ldots, D(0)$. According to the introduced definitions of the value $D(0)$ and the function $t_0(V)$, we obtain the equation:

$$D(0) = \min_V t_0(V) = t_0(V_D) \tag{14}$$

Strategy V_D constructed is the optimal solution for problem 4. Corresponding schedules $\rho_0(V_D)$ and $\rho_k(V_D)$ are optimal for problem 1.

It should be noted that calculation of every succeeding value $D(k)$ (as the argument decreases) involves few operations. Hence, the proposed algorithm to solve problem 1 is functioning in linear time (from n).

E x a m p l e 1. *Optimal schedule related to criterion $K_1(\rho)$ is to be obtained with objects o_1, o_2, o_3 and o_4 located at points* 1, 2, 3 *and* 4 *respectively to be served;* $\gamma_{0,1} = \gamma_{1,0} = 2$, $\gamma_{1,2} = \gamma_{2,1} = 1$, $\gamma_{2,3} = \gamma_{3,2} = 10$, $\gamma_{3,4} = \gamma_{4,3} = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 10$, $r_3 = 12$, $r_4 = 15$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 1$.

Firstly, we calculate values $W^*(k)$: $W^*(1) = 28$, $W^*(2) = 25$, $W^*(3) = 4$, $W^*(4) = 1$. According to formula (10), we set: $D(4) = 15$. The sequence V_D is initially assumed to be of a single element n equalling here to 4. Then according to formula (11) we obtain: $D(3) = \min\ [\max\{12, 15-(1+1)\}, \max\{15-1, 12-(4-1), 0\}] = 13$; index 3 being included in sequence V_D. According to formula (12) when $k = 3$ we receive: $D(2) = \min\ [\max\{10, 13-(1+10)\}, \max\{13-10, 10-(25-1), 0\}] = 3$; with index 2 being not included in sequence V_D. Then according to the same formula with $k = 2$ we get: $D(1) = \min[\max\{1, 3-(1+1)\}, \max\{3-1, 1-27, 0\}] = 1$; index 1 being included in sequence V_D. Finally, according to formula (13) we define $D(0) = 0$. In this case the optimal 0-schedule implementation starts from the moment 0; at the same time this schedule is compact. It is easy to define, that $\rho_0(V_D) = \rho_k(V_D) = \langle(1,2,3),(3,14,15),(4,16,17),(2,28,29)\rangle$. According to (1), the optimal criterion value for problem 1 is equal to 32.

4. Problem 2 solving algorithm

According to theorem 1, we can replace the problem under study $\min\limits_{\rho\in R}\{K(\rho), T(\rho)\}$ by the following equivalent problem.

Problem 5. $\min\limits_V\{K(\rho_k(V)), T(\rho_k(V))\}$.

Let us denote problem 5 by symbol Z; and the required set of the efficient estimates pertaining to the problem will be assumed as E. We will use a multi-criteria dynamic programming method [18–20] to synthesize this set.

Let us consider the set of particular problems $Z(k,t)$; problem $Z(k,t)$ is thought as a situation when the processor during voyage λ_+ arrives at point k at the moment t; the minimized criteria being:

– total penalty for the objects from the set $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$;

– time when processor leaves the point k in voyage λ_-.

Thus, the estimate (a, b) obtained for $Z(k, t)$ means, that the total penalty for objects $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$ is equal to a, and the processor leaves the point k during voyage λ_- at the moment b.

By $eff(M)$ we denote a set of efficient in set M estimates; the estimate (a, b) from M is efficient if there is no such estimate (a', b') in M so that $a' \leq a$ and $b' \leq b$ and at least one of the given inequalities is strict inequality. By $E(k, t)$ we denote a set of efficient estimates pertaining to problem $Z(k, t)$, where $k = \overline{1, n}$.

Evidently,

$$E(n, t) = (\varphi_n(\max(t, r_n) + \tau_n), \max(t, r_n) + \tau_n). \tag{15}$$

Let us assume that the sets $E(k+1, t)$ have already been constructed for all possible values of parameter t. We need to construct the sets $E(k, t)$.

Let a priori be known that the objects of the set $\{o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots, o_n\}$ are served with estimate (p, q) and the processor arrives at the point k at the moment t during voyage λ_+ and further it serves the object o_k. In this case the estimate of servicing the objects $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$ is

$$A(t, k, p, q) = (\varphi_k(\max(t, r_k) + \tau_k) + p, q + \gamma_{k+1,k}). \tag{16}$$

Since servicing of object o_k accomplishes at the moment $\mu_k = \max(t, r_k) + \tau_k$, the processor arrives at the point $k+1$ at the moment $\mu_k^* = \mu_k + \gamma_{k,k+1}$. Further servicing of the set $\{o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots, o_n\}$ can be effected with the estimates from the set $E(k+1, \mu_k^*)$; implementation of the estimates that do not belong to this particular set is obviously impractical. For the set $\{o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots, o_n\}$ we obtain the set of the estimates

$$P(k, t) = \{A(t, k, p, q) : (p, q) \in E(k+1, \mu_k^*)\} \tag{17}$$

provided that servicing of the object o_k is performed in voyage λ_+.

If on arriving at point k processor postpones object o_k servicing till voyage λ_-, and servicing of objects $\{o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots, o_n\}$ is performed with the estimates (p', q') then the estimate of object servicing from set $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$ is as follows:

$$B(t, k, p', q') = (p' + \varphi_k(\max(q' + \gamma_{k+1,k}, r_k) + \tau_k), \max(q' + \gamma_{k+1,k}, r_k) + \tau_k). \tag{18}$$

In the considered case the processor performing voyage λ_+ arrives at point $k+1$ at the moment $\nu_k^* = t + \gamma_{k,k+1}$. Further servicing of the set $\{o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots, o_n\}$ can be performed with the estimates from the set $E(k+1, \nu_k^*)$; implementation of the estimates that do not belong to this set is obviously impractical. For the set $\{o_k, o_{k+1}, \ldots, o_n\}$ we obtain the following set of the estimates on the assumption that object o_k servicing is effected in voyage λ_-:

$$Q(k, t) = \{B(t, k, p', q') : (p, q) \in E(k+1, \nu_k^*)\}. \tag{19}$$

It is evident that

$$E(k,t) = eff(P(k,t) \cup Q(k,t)),\ k = n-1, n-2, \dots, 1. \tag{20}$$

The computational process using formulas (15) – (20) implies a consequent search of sets $E(k,t)$ when index k is decreasing. This finally leads to the construction of set $E(1,\gamma_{0,1})$.

To obtain target set E of the efficient estimates pertaining to problem 2, we need to add vector $(0,\gamma_{1,0})$ to each vector of set $E(1,\gamma_{0,1})$:

$$E = \{x = (x_1,x_2) : x_1 = y_1, x_2 = y_2 + \gamma_{1,0},\ \text{where } y = (y_1,y_2) \in E(1,\gamma_{0,1})\}. \tag{21}$$

Prior to calculations based on relations (15) – (21), for each k, $k = \overline{1,n}$ we need to define sets Θ_k of possible processor arrival moments t to point k during voyage λ_+. Only for the values t belonging to Θ_k, we need to construct sets $E(k,t)$ when calculating with the help of recurrent relations (15) – (20). The sets Θ_k are defined to the extent that index k values diminish. It is obvious, that when $k = 1$ the only possible value of t is $\gamma_{0,1}$, i.e. $\Theta_1 = \{\gamma_{0,1}\}$. Let us denote as $M_{k+1}(N_{k+1})$ the set of the possible values of the processor arrival moments to point $k+1$ in voyage λ_+ when object o_k was respectively served during $\lambda_+(\lambda_-)$. It is obvious that

$$M_{k+1} = \{\mu_k^* : \mu_k^* = \max(\theta, r_k) + \tau_k + \gamma_{k,k+1}, \theta \in \Theta_k\};$$

$$N_{k+1} = \{\nu_k^* : \nu_k^* = \theta + \gamma_{k,k+1}, \theta \in \Theta_k\};$$

$$\Theta_{k+1} = \{M_{k+1} \cup N_{k+1}\}, \text{where } k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{22}$$

E x a m p l e 2. *It is required to discover a full set of efficient estimates pertaining to problem 2 with the parameters values and the penalty functions given in Table 1.*

Table 1: Modelling parameters, Example 2

j	τ_j	r_j	$\gamma_{j-1,j}$	$\gamma_{j,j-1}$	$\varphi_j(t)$
1	1	1	2	2	0
2	1	10	1	1	$\max\{t-3,0\}$
3	1	14	10	10	$\max\{10(t-15),0\}$
4	1	14	1	1	$\max\{15(t-16),0\}$

Firstly, for each value $k(k = \overline{1,n})$ we need to find the sets Θ_k of possible moments t of the processor arrival to point k in voyage λ_+. It is apparent that the only possible value of t when $k = 1$ is $\gamma_{0,1} = 1$, i.e. $\Theta_1 = \{2\}$. According to (22), we find that: $\Theta_2 = \{3,4\}, \Theta_3 = \{13,14,21\}, \Theta_4 = \{14,15,16,22,23\}$.

Then with the help of formulas (15) –(20) we calculate values $E(k,t)$. The established estimates are shown in Table 2. For each estimate the triple index is given: the number of the estimate (revealed when calculating), the estimate number used to have the current estimate constructed, and the voyage in which the object o_k is served. For example, the record $(a, b)_{i,j,+}$ means that the estimate (a, b) of number i is constructed from the estimate having number j, and object o_k is served in voyage λ_+. Similarly the record $(a, b)_{i,j,-}$ means that the estimate (a, b) of number i is constructed from the estimate having number j, and the object o_k is served in voyage λ_-. This information will be further used when we construct servicing strategy, which assures particular criteria values.

Table 2 filled in from right to left. Firstly, we fill in the cells of the fourth column ($k = 4$) with the help of (15). Here we assume that all estimates for $k = 4$ are constructed from the dummy estimate of number 0 and we take into account that the last object is always served in voyage λ_+. We thus gain as follows:

$$E(4, 14) = \{(\varphi_4(\max(14, r_4) + \tau_4), \max(14, r_3) + \tau_3)\} = \{(\varphi_4(14), 15)\} = \{(0, 15)\}_{1,0,+}.$$

Similarly, we define values:

$E(4, 15) = \{(0,\ 16)\}_{2,0,+}$, $E(4, 16) = \{(15,\ 17)\}_{3,0,+}$, $E(4, 22) = \{(105,\ 23)\}_{4,0,+}$, $E(4, 23) = \{(120, 24)\}_{5,0,+}$.

Filling in the required cells for k equaling to 3, 2 and 1 is executed with the help of (16) – (20). Example of set $E(3, 13)$ construction illustrates the calculations based on the above relations. $E(3, 13) = eff(P(3, 13) \cup Q(3, 13))$ in accord with (20). Set P(3,13) is defined starting with value μ_3^* calculation:

$$\mu_3^* = \mu_3 + \gamma_{3,4} = \max(t, r_3) + \tau_3 + \gamma_{3,4} = \max(13, 14) + 1 + 1 = 16.$$

Thus calculating value $P(3, 13)$ we will use the only estimate $(15, 17)$ of set $E(4, 16)$. According to (16) and (17) we obtain $P(3, 13) = \{(\varphi_3(\max(13, r_3)+\tau_3)+15, 17+\gamma_{4,3})\} = \{(\varphi_3(15) + 15, 18)\} = \{(15, 18)\}$.

Set $Q(3, 13)$ is defined starting with value ν_3^* calculation: $\nu_3^* = t+\gamma_{3,4} = 13+1 = 14$. Thus, during calculations we will use estimates from set $E(4, 14) = \{(0, 15)\}$. According to (18) and (19) we get:

$Q(3, 13) = \{(\varphi_3(\max(15+\gamma_{4,3}, r_3)+\tau_3)+0, \max(15+\gamma_{4,3}, r_3)+\tau_3)\} = \{(\varphi_3(17), 17)\} = \{(20, 17)\}$.

Finally we obtain: $E(3, 13) = eff\big((15, 18) \cup (20, 17)\big) = \{(15, 18), (20, 17)\}$.

The consecutive number 6 is assigned to the estimate $(15, 18)$, which is constructed on the basis of the estimate having number 3, the calculations with the help of (17) correspond to object o_3 servicing in voyage λ_+. The record has been entered in the table cell as $(15, 18)_{6,3,+}$.

Succeeding number 7 is assigned to the estimate $(20, 17)$, the estimate being constructed from the estimate of number 1, and the calculation using formula (19) corresponds to object o_3 servicing in voyage λ_-. The record has been entered in the table cell as $(20, 17)_{7,1,-}$.

The remaining estimates entered in table 2 have been calculated in a similar manner. The empty cells of Table 2 correspond to the unfeasible pairs (k, t).

Thus we have revealed that set $E(1, 2)$ contains one estimate only. According to (21), the single efficient estimate in the considered example is $(41, 32)$; thus, there has been defined an optimal strategy for both criteria considered here. The estimate indices that have been entered in Table 2 allow easy finding the strategy, which generates the estimate: objects 1, 3, 4 to be served in the direct voyage; object 2 to be served in the return voyage.

Table 2: $E(k,t)$ values

$t \backslash k$	1	2	3	4
2	$(41,30)_{13,12,+}$			
3		$(41,29)_{10,6,-}$ $(45,28)_{11,7,-}$		
4		$(41,29)_{12,6,-}$		
13			$(15,18)_{6,3,+}$ $(20,17)_{7,1,-}$	
14			$(15,18)_{8,3,+}$	$(0,15)_{1,0,+}$
15				$(0,16)_{2,0,+}$
16				$(15,17)_{3,0,+}$
21			$(190,25)_{9,5,+}$	
22				$(105,23)_{4,0,+}$
23				$(120,24)_{5,0,+}$

To estimate the computational complexity of the proposed algorithm we denote the maximum of the values $\gamma_{j-1,j}$, $\gamma_{j,j-1}$, τ_j, $j=\overline{1,n}$, by Q, and the maximum of the values r_j by Q^*, $j=\overline{1,n}$. It is evident that servicing objects of the set $O_n=\{o_1,o_2,\dots,o_n\}$ can be accomplished not later than $M=3Q+Q^*$. The second coordinate of every estimate taken from any set $E(k,t)$ does not exceed M. Hence there are not more than M estimates in each set $E(k,t)$. The number of estimates of each set $P(k,t)$ and $Q(k,t)$ constructed for $E(k,t)$ calculation also does not exceed M. Consequently, we need no more than linearly depending on M number of the elementary operations for each set $E(k,t)$ synthesis. The first argument in the sets $E(k,t)$ can take n values, the second argument – no more than M values. The upper bound for the number of constructed sets $E(k,t)$ is the product nM. Thus, the number of elementary operations necessary to construct the set E is bounded above by the value of nM^2 order. So the proposed algorithm of efficient estimates synthesis in problem 2 is pseudo-polynomial.

5. Computational complexity of the problem 3

It is known [21], that if all ready dates r_j are equal to zero and the individual penalty functions $\varphi_j(t)$ are linear, $j=\overline{1,n}$, then problem 3 has polynomial solution. However, one cannot avoid the fact as follows.

Theorem 2. *If all individual penalty functions are linear and there exists the single object with non-zero ready date, then problem 3 is NP-hard.*

The proof is that NP-complete partition problem [15] has to be polynomially-time reduced to problem 3 that satisfies the theorem conditions. The partition problem is given as follows. There exists a finite set of natural numbers $W=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$; the question arises whether it is possible to split this set into two disjoint subsets so that the sum of the numbers from the first subset is equal to the sum of the numbers from the second subset. The positive answer obviously necessitates the condition under which the number from the set W does not exceed the half of the sum of all numbers . It should be also noted that the problem remains NP-complete in the case when all elements of the set W are even numbers. Further we assume that $\sum_{i=1}^{n} w_i = 2U$, all w_i are even numbers and $w_i < U$, $i = \overline{1,n}$.

The initial data of the partition problem allow us to construct a problem where processor P during the successive voyages λ_+ and λ_- is to serve stationary objects $o_1, o_2, \ldots, o_{n+2}$ located in one-dimensional working zone L; the object o_i is assumed to be located at point i, the values $\gamma_{i-1,i}, \gamma_{i,i-1}, i = \overline{1, n+2}$ are purported equaling to 1. The objects o_1 and o_{n+2} of the set $O_{n+2} = \{o_1, o_2, \ldots, o_{n+1}, o_{n+2}\}$ are considered as "significant"; the remaining ones being assumed "ordinary". Servicing duration of an ordinary object o_{i+1} is assumed to be equal to w_i, $i = \overline{1,n}$; hence the total time expenditure for servicing all ordinary objects is equal to $2U$. Servicing periods of significant objects are the following: $\tau_1 = U+1, \tau_{n+2} = 1$. Individual penalty functions for significant objects are defined by the formulas: $\varphi_1(t) = t$; $\varphi_{n+2}(t) = Dt$, where D is sufficiently large constant, its value to be defined below. The individual penalty functions of the ordinary objects are supposed to be identically equal to zero. Each object o_j, $j = \overline{1, n+1}$ is assumed to be ready for servicing starting from the moment $t = 0$; assuming that $r_{n+2} = (n+2) + U$.

Servicing of the significant object o_{n+2} may commence at the moment r_{n+2} if and only if the processor consumes the time that does not exceed U envisaged for servicing the remaining objects in the direct voyage, bearing in mind that all movements of the processor in this voyage use up $n+2$ units of time.

Let us assume that servicing of the object o_{n+2} commences at the moment r_{n+2}. Then the object penalty is equal to $D(n+3+U)$; the object o_1 is not served in the direct voyage, and time consuming service of the ordinary objects under the given circumstances equals to $U - \varepsilon$ time, where ε is a number from the set $\{0, 1, \ldots, U\}$. The fact that servicing of the object o_1 is accomplished at the moment $T = 2n + 3U + 5 + \varepsilon$ is easily calculated for the case. The total penalty for all objects involved equals to $D((n+3) + U) + T$.

It should be noted that $T \leq 2n + 4U + 5$ and we assume that $D = 2n + 4U + 6$. The values thus prescribed prompt that the total penalty for all the objects does not exceed $D(n+3+U+1)$; this is true in case the object o_1 is being served in the direct voyage or the time exceeding U is consumed for ordinary object service in the direct voyage; otherwise, the object o_1 is being served in the return voyage, and the time not exceeding U is consumed for the ordinary object service in the direct voyage, then this penalty is less than $D(n+3+U+1)$.

Service problem thus constructed where total penalty criteria to be minimized, reveals that the object o_1 is to be served in the return voyage and the time $U - \varepsilon$ is thought to be consumed for the ordinary object service in the direct voyage. Total penalty for all objects becomes equal to $D(n+3+U) + 2n + 3U + 5 + \varepsilon$. Lower estimate for the total penalty is the value $D(n+3+U) + 2n + 3U + 5$ obtained when $\varepsilon = 0$. We are in a position to obtain this estimate provided that there is a subset of the ordinary objects with the total servicing duration U, i.e. if the initial partition problem has a positive answer.

The above model is mathematically reduced in the polynomially dependent time of input data available. The theorem has thus been proved.

6. Conclusion

Here we have presented a mathematical model of servicing where a moving processor is to serve a set of the stationary objects positioned within the one-dimensional working zone. We have defined the optimization problems with one and two criteria to evaluate the quality of servicing schedules for the set of the objects. These criteria correspond to situations arising in operative management of fuel supply to diesel-electrical complexes afloat or dredgers.

We have developed the algorithms based on the dynamic programming and the Pareto concept; the implementations of these algorithms have been demonstrated on numerical examples.

We have shown that the algorithm for the problem of processing time minimization is polynomial, and that the problem of total penalty minimization is NP-hard. Correspondingly, the bi-criteria problem with the mentioned evaluation criteria is fundamentally intractable, computational complexity of the schedule structure algorithm is exponential.

The entailing circumstances considered are not practically critical, since the number of stationary objects does not exceed 13–15 units in existent production systems allowing for the construction of an optimal schedule within an hour. In the meantime, there may essentially exist larger amount of objects in production systems other than stated in view of the considered mathematical model, and, as the case may be, it will call for efficient heuristics approaches (see [22–25]) to seek optimization solutions.

References

[1] Kogan D. I., Fedosenko Yu. S., "Zadacha dispetcherizatsii: analiz vychislitel'noy slozhnosti i polinomial'no razreshimye podklassy", *Diskretnaya matematika RAN*, **8**:3 (1996), 135–147, [in Russian].

[2] Tanaev V. S., Gordon V. S., Shafransky Y. N., *Scheduling Theory*, Single-Stage Systems, Springer Science+Business Media, 1994.

[3] T'kindt V., Billaut J., *Multicriteria scheduling: models and algorithms*, Springer, 2006.

[4] Brucker P., Knust S., *Complex scheduling*, Springer, 2006.

[5] Brucker P., *Scheduling Algorithms*, Springer, 2007.

[6] Pinedo M., *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*, Springer, 2008.

[7] Shen H., *Optimal Scheduling for Satellite Refueling in Circular Orbits*, PhD thesis, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 2003.

[8] Klimin A. V., Poedinok V. M., "Dozapravka v polete grazhdanskikh samoletov: perspektivy i problemy", *TsAGI*, http://www.tsagi.ru/cgi-bin/jet/viewnews.cgi?id=20101230080777618957, [in Russian].

[9] Yu P., *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum Press, NY, 1985.

[10] Steuer R. E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, J.Wiley&Sons Inc., NY-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1986.

[11] Ehrgott M., *Multicriteria Optimization*, second ed., Springer, 2005.

[12] Podinovskiy V. V., Nogin V. D., *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach*, Fizmatlit, 2007, [in Russian].

[13] Bellman R., Dreyfus S. E., *Applied dynamic programming*, Princeton, 1962.

[14] Sigal I. X., Ivanova A. P., *Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie: modeli i vychislitel'nye algoritmy*, Fizmatlit, 2007, [in Russian].

[15] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman & Co., 1979.

[16] Arora S., Barak B., *Computational Complexity: A Modern Approach*, Princeton, 2009.

[17] Lipton R. J., *The P=NP Question and Gödel's Lost Letter*, Springer Science+Business Media, 2010.

[18] Villareal B., Karwan M., "Multicriteria Dynamic Programming with an Application to the Integer Case", *Journal of optimization theory and applications*, **38**:1 (1982), 43–69.

[19] Kogan D. I., *Dinamicheskoe programmirovanie i diskretnaya mnogokriterial'naya optimizatsiya*, Izd-vo NNGU, N. Novgorod, 2004, [in Russian].

[20] Dunichkina N. A., Kogan D. I., Pushkin A. M., Fedosenko Yu. S., "Ob odnoy modeli obsluzhivaniya statsionarnykh ob"ektov peremeshchayushchimsya v odnomernoy rabochey zone protsessorom", *Trudy*, XII vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014 (Moskva, 16-19 iyunya 2014g.), Institut Problem Upravleniya im. V.A.Trapeznikova RAN, 2014, 5044–5052, [in Russian].

[21] Kogan D. I., Fedosenko Yu. S., "Optimal servicing strategy design problems for stationary objects in a one-dimensional working zone of a processor", *Automation and remote control*, **71**:10 (2010), 2058–2069.

[22] Dorigo M., *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, PhD thesis, Dipartamento di Elettronica, Politecnico di Milano, 1992.

[23] Blum C., Roli A., "Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison", *ACM Computing Surveys*, **35(3)** (2003), 268–308.

[24] Jones M. T., *Al Application Programming*, Charles river media, Inc., Hingham, Massachusetts, 2003.

[25] Dunichkina N., "Algorithms for bi-criteria single-machine scheduling problem of servicing a spaced group of objects", *Proceedings of the 3th International IT Conference "Information Technology in modern life", in: Abstracts of presentations*, Bonn-Rhein-Sieg University of Applied Sciences, 2008, 4.

Построение расписаний обслуживания стационарных объектов перемещающимся в одномерной зоне процессором

Дуничкина Н. А., Коган Д. И., Федосенко Ю. С.

Волжский государственный университет водного транспорта
603005 Россия, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а
Московский государственный университет приборостроения и информатики
107996 Россия, г. Москва, ул. Стромынка, 20

Ключевые слова: теория расписаний, динамическое программирование, принцип Парето, NP-трудность, многокритериальная оптимизация

Рассматривается математическая модель, в которой мобильный процессор, перемещаясь в пределах одномерной рабочей зоны, реализует однофазное однократное обслуживание рассредоточенной в пределах этой зоны совокупности стационарных объектов. В процессе перемещений в рабочей зоне процессор совершает два рейса – прямой и обратный. При этом часть объектов обслуживается в прямом рейсе, остальные объекты – в обратном рейсе. Обслуживание любого объекта нельзя начать ранее предписанного ему срока. С каждым объектом ассоциирован индивидуальный штраф, являющийся монотонно возрастающей функцией от момента завершения его обслуживания. В качестве минимизируемых критериев оценки качества расписаний обслуживания выступают момент завершения работ по всей совокупности объектов и величина суммарного штрафа по ним. Ставятся и исследуются оптимизационные задачи с одним и двумя критериями оценки, конструируемые решающие алгоритмы основаны на принципе динамического программирования и концепции Парето; последовательная их реализация продемонстрирована на численных примерах. Показано, что алгоритм решения задачи на оптимальное быстродействие является полиномиальным, а задача построения расписания обслуживания, обеспечивающего минимизацию величины суммарного штрафа по всем объектам, является NP–трудной. Соответственно бикритериальная задача с указанными критериями оценки относится к числу трудноpешаемых, вычислительная сложность алгоритма построения расписания обслуживания является экспоненциальной. Модель описывает процессы снабжения топливом плавучих дизель-электрических комплексов, осуществляющих русловую добычу инертных строительных материалов в крупномасштабных районах речных путей. Модели и оптимизационные задачи, подобные рассматриваемым, представляют интерес для таких приложений, как управление дозаправкой топливом орбитальной группировки спутников и магистральных гражданских самолетов.

Статья публикуется в авторской редакции.

Сведения об авторах:
Дуничкина Надежда Александровна,
Волжский государственный университет водного транспорта,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
ORCID 0000-0002-4347-5116
Коган Дмитрий Израилевич,
Московский государственный университет приборостроения и информатики,
доктор техн. наук, профессор,
ORCID 0000-0002-1203-1539
Федосенко Юрий Семенович,
Волжский государственный университет водного транспорта,
доктор техн. наук, профессор,
ORCID 0000-0001-5582-2325

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 372–391

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–372–391

УДК 517.9

Корпоративная динамика систем логистических уравнений с запаздыванием и с большим запаздывающим управлением

Быкова Н. Д.[1], Кащенко С. А.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: n.bykova90@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru

получена 29 апреля 2015

Ключевые слова: большое управление, квазинормальная форма, запаздывание

Рассматривается система двух логистических уравнений с запаздыванием, связанных через запаздывающее управление. Показано, что при достаточно большом коэффициенте запаздывающего управления задача о динамике исходных систем сводится к исследованию нелокальной динамики специальных семейств уравнений с частными производными, не содержащих малые и большие параметры. На основе представленных результатов численного исследования таких уравнений обнаружен ряд новых и интересных динамических явлений. Рассмотрены системы из трех логистических уравнений с запаздыванием с двумя типами «диффузионных» связей. Для каждой из этих систем были так же построены специальные семейства уравнений с частными производными, не содержащие малых и больших параметров. Приведены результаты исследования динамических свойств исходных уравнений. Показано, что различие в динамике рассмотренных систем трех уравнений может носить принципиальных характер.

Введение

В работе [1] рассмотрено логистическое уравнение с запаздыванием и с запаздывающим управлением

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u + \gamma[u(t - h) - u]. \tag{1}$$

В задачах математической экологии коэффициент r называют мальтузианским коэффициентом, T — время запаздывания, γ — коэффициент запаздывающего управления, h — временная задержка запаздывающего управления. Все эти коэффициенты положительны. Рассматривались решения (1) с положительными начальными

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

(при некотором $t = t_0$) функциями $\varphi(s) \in C_{[-H,0]}$, где $H = \max(T, h)$. Очевидно, что решение (1) с такой начальной функцией остается положительным при всех $t > t_0$. В [1] исследованы динамические свойства (1) при условиях, когда параметр γ либо является асимптотически малым, либо асимптотически большим. В настоящей работе рассматривается система из двух и из трех связанных логистических уравнений с запаздыванием и с запаздывающим управлением. Наибольший интерес представляет изучение ситуации, когда коэффициент γ является достаточно большим:

$$\gamma \gg 1. \tag{2}$$

В §1 исследована система из двух таких уравнений, а в §2 — из трех, причем с различными связями между отдельными уравнениями.

Отметим, что исследованию нелинейных систем уравнений с запаздывающим управлением посвящена значительная литература [2–34]. Применяемая в настоящей работе методика исследования базируется на результатах работ [1, 33–36].

§1. Динамика системы из двух связанных логистических уравнений с запаздыванием

По-видимому, наибольший интерес представляет рассмотрение системы из двух одинаковых связанных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r[1 - u(t-T)]u + \gamma(v(t-h) - u), \\ \dot{v} &= r[1 - v(t-T)]v + \gamma(u(t-h) - v). \end{aligned} \tag{3}$$

Все коэффициенты в (3) и начальные функции $\varphi(s)$, $\psi(s) \in C_{[-H,0]}$ положительны, поэтому решения $u_\varphi(t)$, $v_\psi(t)$ ($u_\varphi(t+s)|_{t=t_0} = \varphi(s)$, $v_\psi(t+s)|_{t=t_0} = \psi(s)$) остаются положительными при $t > t_0$.

Условие (2) открывает путь к применению асимптотических методов. Рассмотрим отдельно два случая. В первом из них вместе с условием (2) выполнено условие $h \ll 1$, а во втором — параметр $h > 0$ фиксирован (при $\gamma \gg 1$).

1.1. Пусть $\varepsilon = \gamma^{-1}$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ и для параметра h выполнено условие

$$h = c\varepsilon. \tag{4}$$

Тем самым $h\gamma = c$. Сформулируем два основных утверждения о динамических свойствах системы (3) при условиях (2) и (4). Ниже через $u_\varphi(t)$, $v_\psi(t)$ обозначаются решения (3) с положительными начальными функциями $\varphi(s)$, $\psi(s) \in C_{[-H,0]}$, заданными при некотором $t = t_0$.

Теорема 1. *Пусть $0 < c < 1$. Фиксируем произвольно положительные начальные функции $\varphi(s)$, $\psi(s) \in C_{[-H,0]}$. Тогда для каждого значения параметра $L > 0$ при каждом $t \in (t_0, t_0 + L]$ выполнено условие*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (u_\varphi(t) - v_\psi(t)) = 0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что определяющую роль в динамике системы (3) при условиях (2), (4) и при условии $0 \leqslant c < 1$ играет поведение решений логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = r[1 - x(t-T)]x. \tag{6}$$

Это уравнение достаточно хорошо изучено [14,16,17,37]. Его устойчивыми решениями могут быть только состояния равновесия $x_0 \equiv 1$ (при $rT \leqslant \frac{\pi}{2}$) или устойчивое (медленно осциллирующее [17]) периодическое решение $x_0(t)$ (при $rT > \frac{\pi}{2}$). Отметим, что при $c = 0$ и при $rT > \frac{\pi}{2}$ каждая из функций (в случае общности положения) стремится к $x_0(t + const)$, но не обязательно $u_\varphi(t) - v_\varphi(t) \to 0$.

Теорема 2. *Пусть $c > 1$. Тогда в ограниченной при $\varepsilon \to 0$ области фазового пространства $C = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$ система (3) не может иметь аттрактор.*

Доказательство этих утверждений довольно простое. Оно основано на том, что при условии (4) можно использовать соотношения $u(t-h) = u(t) - h\,\dot u(t) + O(h^2)$, $v(t-h) = v(t) - h\,\dot v(t) + O(h^2)$. Тогда система (3) в главном имеет вид

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \varepsilon r \begin{pmatrix} (1-u(t-T))u \\ (1-v(t-T))v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

При условии $0 < c < 1$ решения линейной системы

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \dot w = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w \tag{8}$$

стремятся к решению вида $const \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, а при $c > 1$ — к решению вида $const \cdot \exp[2\,(c-1)^{-1}\,\varepsilon^{-1} t]\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Используя эти соотношения, доказательство теорем 1 и 2 завершается без труда.

Обратим внимание, что в условии теоремы 2 «неустойчивость» решений $(u_\varphi(t),\ v_\psi(t))$ системы (3) носит «взрывной» характер: при $\varepsilon \to 0$ они за асимптотически малый отрезок времени покидают ограниченную (фиксированную при $\varepsilon \to 0$) область фазового пространства.

1.2. Ниже предполагается, что параметр $h > 0$ — фиксирован. Здесь существенно используется методика, развитая в [29,38–40]. Она базируется на применении специального асимптотического метода локального анализа — метода квазинормальных форм, разработанного в [29, 32, 41, 42]. Основным результатом этого раздела является построение специальных нелинейных систем уравнений параболического и вырожденно–параболического типа, не содержащих малых и больших параметров, нелокальная динамика которых определяет в главном поведение решений исходной системы (3) в ограниченной при $\gamma \to \infty$ $(\varepsilon \to 0)$ области фазового пространства $C = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$.

После деления на γ система (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot u &= \varepsilon r[1-u(t-T)]u + v(t-h) - u, \\ \varepsilon\dot v &= \varepsilon r[1-v(t-T)]v + u(t-h) - v. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\varepsilon\dot u = v(t-h) - u, \qquad \varepsilon\dot v = u(t-h) - v. \tag{10}$$

Ее характеристический квазиполином имеет вид

$$\varepsilon^2\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + (1 - \exp(-2\lambda h)) = 0. \tag{11}$$

Этот квазиполином имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, и не имеет корней с положительными и отделенными от нуля (при $\varepsilon \to 0$) вещественными частями. Тем самым реализуется критический в задаче об устойчивости решений (9) случай бесконечной размерности. Результаты о существовании инвариантных интегральных многообразий [2, 26, 27] в (9) здесь уже места не имеют. В [28, 29, 31, 41] разработан специальный метод исследования динамики для такого класса систем. Применим его для изучения системы (9). Сначала детальнее рассмотрим решение линейной системы (10). Асимптотика корней $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ характеристического уравнения (11), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, имеет вид

$$\lambda_k^1(\varepsilon) = \frac{2\pi k i}{h} - \varepsilon \frac{2\pi k i}{h^2} - \frac{\varepsilon^2}{h^3}(2\pi^2 k^2 - 2\pi k i) + O(\varepsilon^3)$$

и

$$\lambda_k^2(\varepsilon) = \frac{(2k+1)\pi i}{h} - \varepsilon \frac{(2k+1)\pi i}{h^2} - \frac{\varepsilon^2}{2h^3}((2k+1)^2\pi^2 - 2(2k+1)\pi i) + O(\varepsilon^3).$$

Для соответствующих этим корням решений (10) верны формулы

$$\begin{pmatrix} u_{k1}(t,\varepsilon) \\ v_{k1}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \xi_k \exp(\lambda_k^1(\varepsilon)\, t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \right],$$

$$\begin{pmatrix} u_{k2}(t,\varepsilon) \\ v_{k2}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \eta_k \exp(\lambda_k^2(\varepsilon)\, t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \right],$$

где ξ_k и η_k — произвольные комплексные коэффициенты.

Отметим, что асимптотические формулы для $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ выполняются неравномерно по номеру k. Нас будет интересовать поведение этих корней с номерами k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. В связи с этим обозначим через z произвольное вещественное число, а через $\theta_z = \theta(z,\varepsilon)$ обозначим такую величину из интервала $[0, 2)$, для которой выражение $z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z$ является нечетным целым. Рассмотрим те номера k, которые имеют вид $k = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тогда

$$\lambda_k^1(\varepsilon) = \frac{2\pi m i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1}) - \\ - \frac{2\pi\varepsilon^2}{h^3}\big(\pi(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)^2 m^2 - i(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)m\big) + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_k^2(\varepsilon) = \frac{(2m+1)\pi i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1}) - \\ - \frac{\pi\varepsilon^2}{2h^3}\big(\pi(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)^2(2m+1)^2 - 2i(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(2m+1)\big) + O(\varepsilon^2).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \xi_m(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{2\pi m i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t\right] + \right. \\ \left. + \eta_m(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{(2m+1)\pi i}{h}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t\right] \right\} + \\ + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1(t,\tau) \\ v_1(t,\tau) \end{pmatrix} + \ldots, \quad (12)$$

где зависимость от t функций $u_1(t,\tau)$, $v_1(t,\tau)$, $\ldots$— периодическая, $\tau=\varepsilon t$. Подставим (12) в (9) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε, считая, что θ_z фиксировано (не зависит от ε). Тогда, собирая коэффициенты при первой степени ε, из условий разрешимости получающихся уравнений относительно $u_1(t,\tau)$ и $v_1(t,\tau)$ в указанном классе функций приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$ $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Пусть

$$\xi(\tau,x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\xi_m(\tau)\exp\frac{2\pi m\,i\,x}{h},\quad \eta(\tau,x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\eta_m(\tau)\exp\frac{(2m+1)\pi i\,x}{h},$$

где $x=(z\varepsilon^{-1/2}+\theta_z)(1-\varepsilon h^{-1})\,t$. Положим $w=w(\tau,x)$ и

$$F_\Delta(w)=rw\left[1-w(\tau,x-\Delta)\right]. \tag{13}$$

Как оказывается, полученную для $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$ бесконечную систему уравнений можно компактно записать в терминах вещественных функций $\xi(\tau,x)$ и $\eta(\tau,x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\frac{1}{2h}\left[F_\Delta(\xi+\eta)+F_\Delta(\xi-\eta)\right]+\frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau}=\frac{1}{2h}\left[F_\Delta(\xi+\eta)-F_\Delta(\xi-\eta)\right]+\frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \tag{15}$$

$$\xi\,(\tau,x+h)\equiv\xi(\tau,x),\quad \eta\,(\tau,x+h)\equiv-\eta(\tau,x), \tag{16}$$

где

$$\Delta=T(z\varepsilon^{-1/2}+\theta_z)(1-\varepsilon h^{-1}). \tag{17}$$

Основное утверждение состоит в том, что краевая задача (14), (15), (16) играет роль нормальной формы для системы (9), т.е. установившиеся режимы в (14) – (16) определяют динамику исходной системы. Сформулируем результат более точно.

Теорема 3. *Пусть при некоторых значениях* $z\in(-\infty,\infty)$ *и* $\theta_0\in[0,2)$ *краевая задача (14) – (16) имеет ограниченное при* $\tau\to\infty$ *решение* $(\xi_0(\tau,x),\ \eta_0(\tau,x))$ *и пусть последовательность* $\varepsilon_m\to0$ *определяется из условия* $\theta_z(\varepsilon,z)=\theta_0$. *Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке при* $\varepsilon_m\to0$ *решение*

$$(u(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))=(\xi_0(\tau,x)+\eta_0(\tau,x),\ \xi_0(\tau,x)-\eta_0(\tau,x))+o(1),$$

где $\tau=\varepsilon_m t$, $x=(z\varepsilon_m^{-1/2}+\theta_0)(1-\varepsilon_m h^{-1})t$.

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях типа общности положения можно обосновать результаты о существовании и устойчивости периодических решений системы (9), близких к периодическим решениям краевой задачи (14) – (16).

Краевую задачу (14) – (16) удобно переписать в терминах U и V. Положим в (14) – (16) $U(\tau,x)=\xi(\tau,x)+\eta(\tau,x)$, $V(\tau,x)=\xi(\tau,x)-\eta(\tau,x)$. Тогда приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{1}{h}F_\Delta(U)+z^2(2h)^{-1}\frac{\partial^2U}{\partial x^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=\frac{1}{h}F_\Delta(V)+z^2(2h)^{-1}\frac{\partial^2V}{\partial x^2}, \tag{19}$$

$$U(\tau,x+h)\equiv V(\tau,x),\quad V(\tau,x+h)\equiv U(\tau,x), \tag{20}$$

где параметр Δ определен в (17).

Из теоремы 3 тогда следует, что

$$u(t,\varepsilon) = U(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t) + O(\varepsilon),$$
$$v(t,\varepsilon) = V(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t) + O(\varepsilon).$$

1.3. Более общая конструкция. Центральным моментом для получения квазинормальной формы (14) – (16) было специальное представление корней характеристического квазиполинома (11), которые, во-первых, стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, и, во-вторых, параметр, характеризующий номер рассматриваемого корня асимптотически велик при малых ε. Как оказывается [41], использованные выше представления для таких корней не единственны. Покажем это. Фиксируем произвольно номер $n > 1$ и произвольный набор вещественных ненулевых чисел $z_1, \ldots, z_n$. Через $\theta_j = \theta_j(z_j, \varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим такую величину, для которой выражение $z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j$ является целым. Для корней $\lambda_k^1(\varepsilon)$ и $\lambda_k^2(\varepsilon)$ уравнения (11) можно использовать представление

$$\lambda_k^1(\varepsilon) = \frac{2\pi i}{h}\sum_{j=1}^{n}(z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)m_j - \frac{2\pi\varepsilon i}{h^2}\sum_{j=1}^{n}(z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)m_j - \\ - \varepsilon h^{-3}2\pi^2\left(\sum_{j=1}^{n} z_j m_j\right)^2 + \ldots,$$

$$\lambda_k^2(\varepsilon) = \frac{\pi i}{h}\sum_{j=1}^{n}(z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(2m_j+1) - \frac{\pi\varepsilon i}{h^2}\sum_{j=1}^{n}(z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(2m_j+1) - \\ - \frac{\varepsilon\pi^2}{2h^3}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j(2m_j+1)\right)^2 + \ldots, \quad m_1, \ldots, m_j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Аналогом формального ряда (12) является формальный ряд

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m_j=-\infty}^{\infty}\xi_{m_1,\ldots,m_n}\exp 2\pi h^{-1}(im_1x_1 + \ldots + im_nx_n) + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m_j=-\infty}^{\infty}\eta_{m_1,\ldots,m_n}\exp \pi h^{-1}(i(2m_1+1)x_1 + \ldots + i(2m_n+1)x_n) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x_j = (z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(1 - \varepsilon h^{-1})t$. Подставляя это выражение в (9) и производя стандартные действия, приходим к системе уравнений относительно

$$\xi(\tau, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m_j=-\infty}^{\infty}\xi_{m_1,\ldots,m_n}\exp[2\pi h^{-1}i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)],$$

$$\eta(\tau, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m_j=-\infty}^{\infty}\eta_{m_1,\ldots,m_n}\exp[i\pi h^{-1}((2m_1+1)x_1 + \ldots + (2m_n+1)x_n)].$$

Эту систему удобно записать в терминах $U = \xi + \eta$ и $V = \xi - \eta$ с h-периодическими по $x_1, \ldots, x_n$ краевыми условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{h}\Phi_\sigma(U) + (2h)^{-1}\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + z_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 U, \tag{21}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{h}\Phi_\sigma(V) + (2h)^{-1}\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + z_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 V, \tag{22}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\Phi_\sigma(W(\tau, x_1, \ldots, x_n)) = rW(\tau, x_1, \ldots, x_n)[1 - W(\tau, x_1 - \sigma_1, \ldots, x_n - \sigma_n)]$ и $\sigma_j = T(z_j\varepsilon^{-1/2} + \theta_j)(1 - \varepsilon h^{-1})$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 4. *Пусть при некотором $n > 1$ и некотором наборе вещественных чисел $z_1, \ldots, z_n$ краевая задача (21), (22) имеет ограниченное вместе с производными по τ при $\tau > \tau_0$ решение $U_0(\tau, x_1, \ldots, x_n)$, $V_0(\tau, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon)$ решение*

$$\begin{aligned} u(t,\varepsilon) &= U(\varepsilon t, (z_1\varepsilon^{-1/2} + \theta_1)(1 - \varepsilon h^{-1})t, \ldots, (z_n\varepsilon^{-1/2} + \theta_n)(1 - \varepsilon h^{-1})t), \\ v(t,\varepsilon) &= V(\varepsilon t, (z_1\varepsilon^{-1/2} + \theta_1)(1 - \varepsilon h^{-1})t, \ldots, (z_n\varepsilon^{-1/2} + \theta_n)(1 - \varepsilon h^{-1})t). \end{aligned}$$

Отметим, что при условиях $x_j = \alpha_j x$ краевая задача (21), (22) сворачивается в расщепленную систему двух одинаковых параболических уравнений без граничных условий

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{h}\Phi_\sigma(W) + z_0(2h)^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

1.4. Численное исследование.

Перейдем к численному исследованию задачи (18) – (20). Для этого разобьем отрезок длины h равный периоду по пространственной переменной на N частей. И введем некоторые обозначения. Пусть $\delta = h/N$, $x_i = (i-1)\delta$ и

$$U_i(\tau) = U(\tau, x_i), \quad V_i(\tau) = V(\tau, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Из условия (20) получаем

$$U_{i+N} \equiv V_i, \quad V_{i+N} \equiv U_i. \tag{23}$$

Теперь аппроксимируем вторую производную по пространственной переменной с помощью второй разделенной разности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\tau, x_i) &\approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\delta^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tau, x_i) &\approx \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Для аппроксимации функции $F_\Delta(w)$, определенной формулой (13), нам необходимо вычислить $w(\tau, x - \Delta)$ в точке $x = x_i$. Для этого для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ мы находим такой номер j, что $x_i - \Delta$ принадлежит полуинтервалу $(j\delta,\ (j+1)\delta]$. Далее,

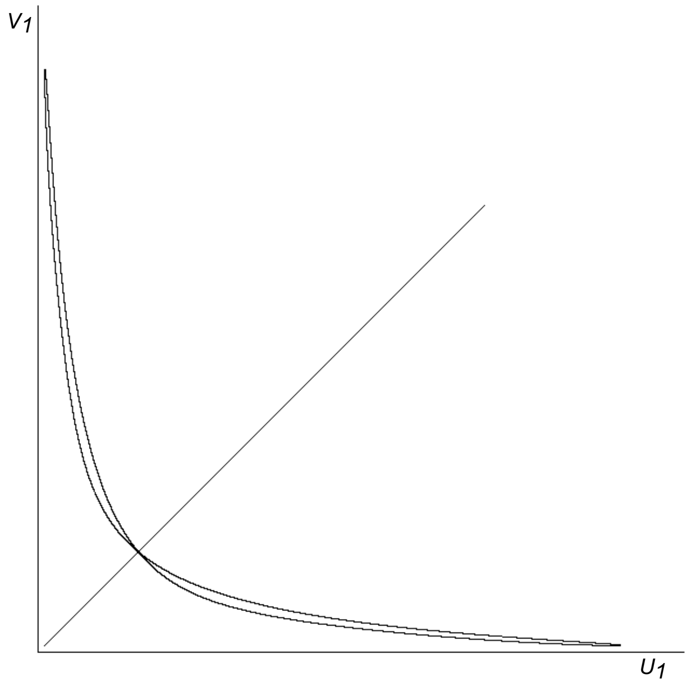

Рис. 1. Возможные циклы в системе (24) – (26).

используя номер отрезка j, определим, с помощью равенства (23), значение какой из функций (U или V) нужно взять, и обозначим его Q_j, тогда

$$w(\tau, x_i - \Delta) \approx \frac{1}{\delta}((\delta - |x_i - \Delta - j\delta|)Q_j + |x_i - \Delta - j\delta|Q_{j+1})$$

и

$$F_\Delta(w(\tau, x_i)) \approx F^*_\Delta(w_i) = rw_i(1 - \delta^{-1}((\delta - |x_i - \Delta - j\delta|)Q_j + |x_i - \Delta - j\delta|Q_{j+1})).$$

Таким образом система (18) – (20) преобразуется к виду

$$\dot{U}_i = \frac{1}{h}F^*_\Delta(U_i) + z^2(2h\delta^2)^{-1}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}), \tag{24}$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{h}F^*_\Delta(V_i) + z^2(2h\delta^2)^{-1}(V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}), \tag{25}$$

$$U_{i+N} \equiv V_i, \quad V_{i+N} \equiv U_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{26}$$

и является уже системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача (24) – (26) исследовалась численно, при фиксированных значениях параметров

$$\varepsilon = 0.1, \quad T = 1, \quad h = 0.6, \quad N = 20,$$

при изменении параметра z, а параметр r брался равным одному из значений: 1, 1.5 или 2.

Оказалось, что аттракторами в системе (24) – (25) могут являться только состояние равновесия или периодические решения двух видов, изображенных на рис. 1.

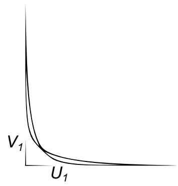

Рис. 2. $z = 0.2$, $r = 1$.

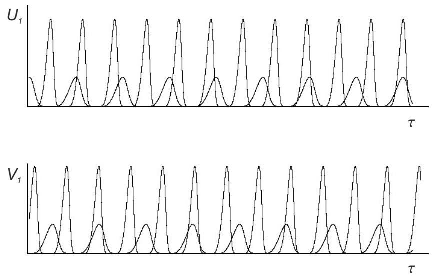

Рис. 3. Увеличение амплитуды при увеличении значения r: $U_1(\tau)$ и $V_1(\tau)$ при $r = 1$ и $r = 1.5$, $z = 0.2$.

Причем такие периодические решения могут сосуществовать. Назовем то из периодических решений, изображенных на рис. 1, для которого $U_1 \equiv V_1$, периодическим решением первого типа, а другое — периодическим решением второго типа. Рассмотрим некоторые из случаев более подробно.

1. Пусть $z = 0.2$. При каждом из указанных значений параметра r в системе устойчивым является периодическое решение второго типа (при $r = 1$ и $r = 1.5$ проекции их фазовых портретов на плоскость U_1V_1 изображены на рис. 2 и рис. 4 соответственно). Можно отметить, что при увеличении параметра r происходит увеличение амплитуды колебаний, что хорошо демонстрирует рис. 3, на котором изображена зависимость функций U_1 и V_1 от τ при $r = 1$ и $r = 1.5$. Кроме того, каждое из этих решений является бегущей волной, что демонстрирует рис. 5 для функций $U_i(\tau)$ и функций $V_i(\tau)$ ($i = 1,\ 6,\ 11,\ 16$), построенных при $r = 1$. На рис. 6 изображены развертки по пространственной переменной при фиксированных значениях t и значениях параметра r равных 1, 1.5 и 2 соответственно.

2. Аналогичные графики были построены при $z = 0.125$. При этом значении z в системе устойчивыми являются решения первого типа. На рис. 7 видно, что амплитуда увеличивается при увеличении параметра r. Здесь решения также являются бегущей волной (см. рис. 8). Развертка по пространственной переменной изображена на рис. 9.

3. Уменьшение значения параметра z до 0.007 привело к сильному усложнению системы. При $r = 1$ удалось найти восемь режимов второго типа (они изображены на рис. 10). Развертка одного из режимов по пространственной переменной имеет вид, изображенный на рис. 11. Найденные решения оказались не гладкими, что говорит о недостаточной мелкости разбиения, поэтому дальнейшие расчеты в этом случае ($z = 0.007$ и $r = 1$) проводились при $N = 100$. Удалось найти четыре устой-

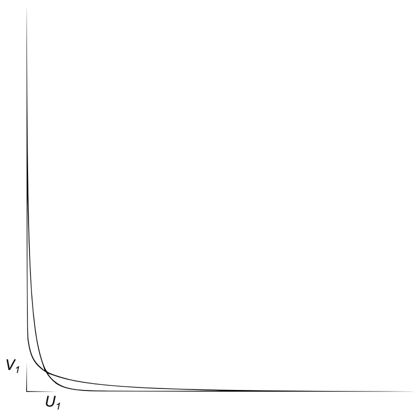

Рис. 4. $z = 0.2$ $r = 1.5$.

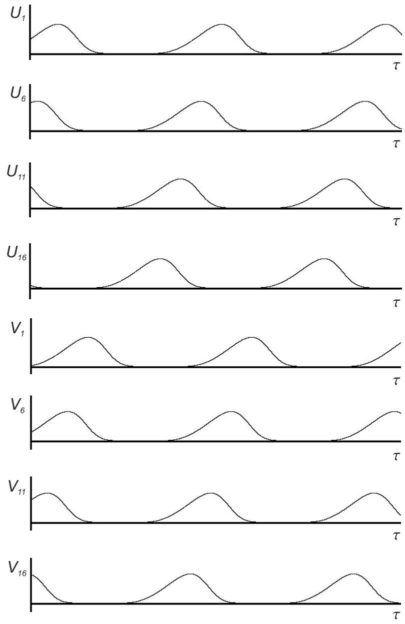

Рис. 5. Зависимость U_1, U_6, U_{11}, U_{16}, V_1, V_6, V_{11}, V_{16} от τ, $r = 1$, $z = 0.2$.

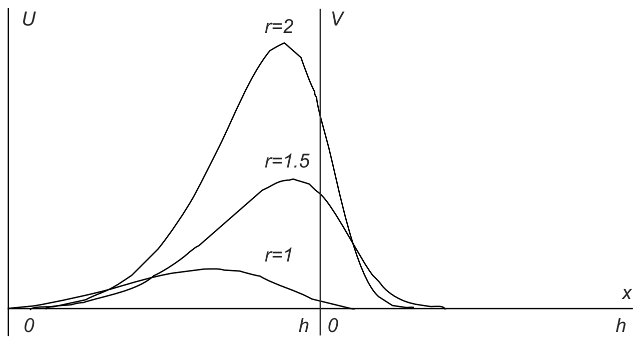

Рис. 6. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.2$.

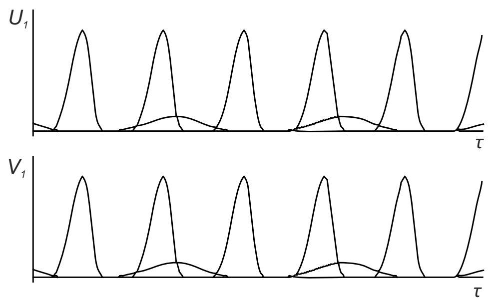

Рис. 7. Увеличение амплитуды при увеличении значения r: $U_1(\tau)$ и $V_1(\tau)$ при $r = 1$ и $r = 1.5$.

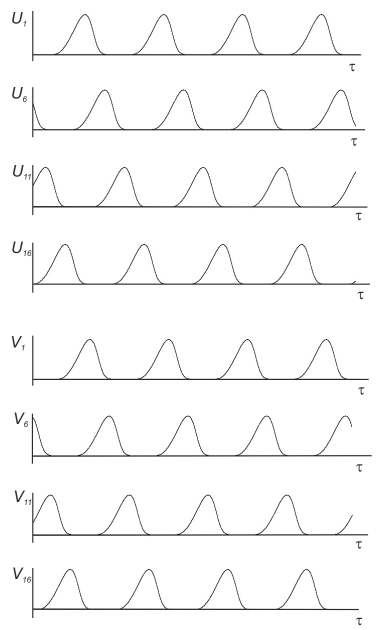

Рис. 8. Зависимость U_1, U_6, U_{11}, U_{16}, V_1, V_6, V_{11}, V_{16} от τ, $r = 1$, $z = 0.125$.

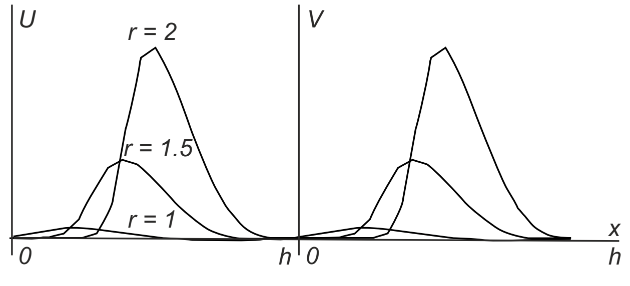

Рис. 9. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.125$.

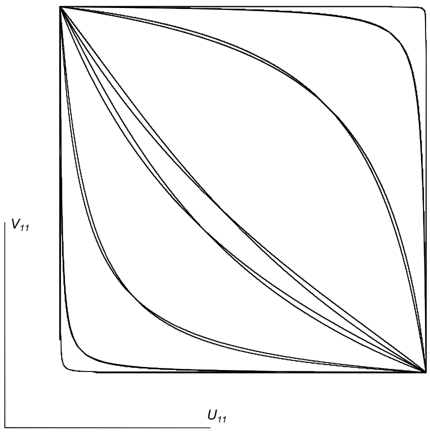

Рис. 10. $z = 0.007$, $r = 1$, $N = 20$.

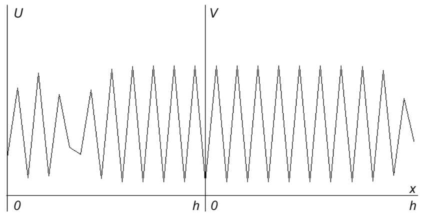

Рис. 11. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$, $r = 1$, $N = 20$.

а) б)

Рис. 12. $z = 0.007$, $r = 1$, $N = 100$. а) ц-1, б) ц-2 в плоскости U_1, V_1 (слева) и плоскости U_1, V_{50} (справа).

чивых периодических режима (будем обозначать эти решения как ц-1, ц-2, ц-3 и ц-4 соответственно), проекции которых изображены на рис. 12 и 13. Стоит отметить, что масштаб последних изображений в 100 раз меньше, чем у рис. 10.

Развертки по пространственной переменной для найденных решений изображены на рис. 14, 15, 16 и 17 соответственно. Легко видеть, что полученные режимы гладкие по пространственной переменной и предложенная модель адекватно описывает систему (18)–(20).

Таким образом, уменьшение параметра z приводит к усложнению пространственной динамики: вместо одного устойчивого периодического режима может появляться два и более сосуществующих. Кроме того, устойчивые режимы, возникающие в задаче, делаются все более изрезанными по пространственной переменной.

§2. О корпоративной динамике системы из трех логистических уравнений с запаздыванием

Рассмотрим вопрос о поведении решений связанных систем логистических уравнений с запаздыванием с двумя типами «диффузионных» связей:

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - 2u_1 + u_3(t-h)],\\ \dot u_2 &= F(u_2) + \gamma[u_1(t-h) - 2u_2 + u_3(t-h)],\\ \dot u_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3] \end{aligned} \tag{27}$$

а) б)

Рис. 13. $z = 0.007$, $r = 1$, $N = 100$. а) ц-3, б) ц-4 в плоскости U_1, V_1 (слева) и плоскости U_1, V_{50} (справа).

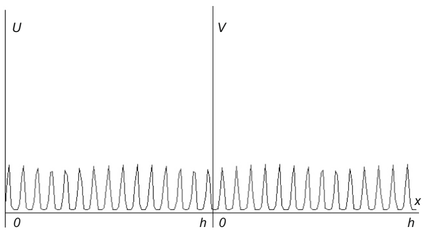

Рис. 14. Ц - 1. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

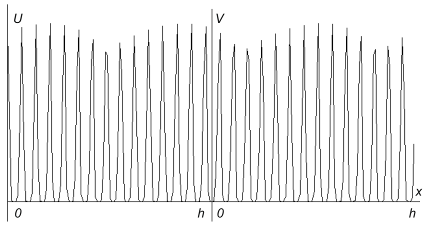

Рис. 15. Ц - 2. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

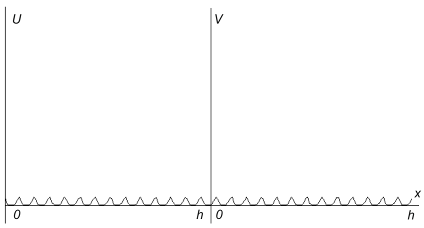

Рис. 16. Ц - 3. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

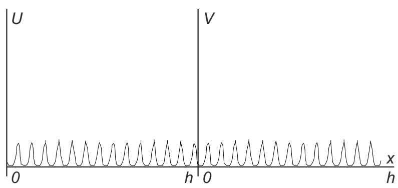

Рис. 17. Ц - 4. Развертка по x U (слева) и V (справа), $z = 0.007$.

и

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - u_1], \\ \dot{u}_2 &= F(u_2) + \gamma[u_3(t-h) - u_2], \\ \dot{u}_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) - u_3], \end{aligned} \tag{28}$$

где $F(u) = ru[1 - u(t-T)]$.

Здесь тоже имеют место аналоги теорем 1 и 2. Пусть $h = \varepsilon c$. При $0 < c < 1$ и при достаточно больших γ динамика (27) и (28) определяется в главном поведением решений уравнения (6), а связь между решениями (6) и асимптотическими по невязке решениями систем (27) и (28) устанавливает формула

$$u_j(t, \varepsilon) = x((1 + o(\varepsilon))\, t) + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Если же $c > 1$, то, как и в §1, в ограниченной при $\varepsilon \to 0$ области фазового пространства $C_0 = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$ системы (27) и (28) не могут иметь аттрактора.

Если же $h > 0$ (и фиксировано при $\varepsilon \to 0$), то динамические свойства систем (27) и (28) существенно отличаются.

2.1. Рассмотрим сначала систему (27) и ее «линейную» часть

$$\varepsilon \dot{u} = A(u), \tag{29}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ и

$$A(u) = \begin{pmatrix} -2u_1 + u_2(t-h) + u_3(t-h) \\ u_1(t-h) - 2u_2 + u_3(t-h) \\ u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический квазиполином для (29) имеет вид

$$-(2 + \varepsilon\lambda)^3 + 3(2 + \varepsilon\lambda)\exp(-2\lambda h) + 2\exp(-3\lambda h) = 0.$$

Его корни можно разделить на две группы. В первую входят все те корни, которые непрерывно зависят от $\varepsilon > 0$ и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Вторую группу составляет бесконечная «цепочка» таких корней $\lambda_k(\varepsilon)$, что для каждого номера k имеем $\lambda_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для каждого $\lambda_k(\varepsilon)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi k i h^{-1} + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + \ldots \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{30}$$

где, в частности,

$$\lambda_{k1} = -h^{-2}\pi k i, \quad \lambda_{k2} = -(2h)^{-1}(\pi k h^{-1})^2 + (2h^2)^{-1}(\pi k h^{-1} i).$$

Собственному значению $\lambda_k(\varepsilon)$ отвечает собственный вектор $a_k(\varepsilon)$ оператора A, причем $a_k(\varepsilon) = a_0 + O(\varepsilon)$ и $a_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Рассмотрим выражения (30) при асимптотически больших номерах k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Фиксируем произвольно $z \neq 0$ и пусть $\theta = \theta(z, \varepsilon)$ — такое значение из полуинтервала $(0, 1]$, что выражение $(z\varepsilon^{-1/2} + \theta)$ является целым. Положим в (30) $k = k_\varepsilon = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)m$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тогда

$$\operatorname{Re}\lambda_{k_\varepsilon}(\varepsilon) = -\varepsilon(2h)^{-1}(\pi z m h^{-1})^2 + o(1).$$

Согласно методике из [28], введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp\frac{\pi imx}{h} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_{11}(\tau, x) \\ u_{21}(\tau, x) \\ u_{31}(\tau, x) \end{pmatrix} + \ldots, \tag{31}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1})\,t$ и u_{ij} — h–периодичны по x. Подставим (31) в (27) и будем собирать в получающемся формальном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда на втором шаге из условия разрешимости получающейся системы относительно $(u_{11},\, u_{21},\, u_{31})$ приходим к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\xi_m(\tau)$. Как оказывается, эту бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде одного уравнения относительно $\xi(\tau, x) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp\frac{\pi imx}{h}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} F_\Delta(\xi) + z^2(2h)^{-1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{32}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x). \tag{33}$$

Параметр Δ в (32) определен в (17). Связь между решениями (27) и (32), (33) устанавливает формула $u_j(t, \varepsilon) = \xi(\tau, x) + O(\varepsilon)$, где $\tau = \varepsilon t$, а $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1})\,t$. Более точное утверждение повторяет формулировку теоремы 3.

2.2. Для системы (28) ситуация существенно сложнее [33, 34]. Выражение $A(u)$ в этом случае имеет вид

$$A(u) = \begin{pmatrix} -u_1 + u_2(t-h) \\ -u_2 + u_3(t-h) \\ u_1(t-h) - u_3 \end{pmatrix},$$

а соответствующий (29) характеристический квазиполином представлен формулой

$$(1 + \varepsilon\lambda)^3 = \exp(-3\lambda h). \tag{34}$$

Ту группу корней (34), которые не являются отделенными от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, можно записать в виде совокупности корней $\lambda_k^0(\varepsilon)$, $\lambda_k^+(\varepsilon)$ и $\lambda_k^-(\varepsilon)$, для которых $\lambda^+(\varepsilon) = \overline{\lambda^-}(\varepsilon)$ и при $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$$\lambda_k^0(\varepsilon) = h^{-1}2\pi ki + \varepsilon\lambda_{k1}^0 + \varepsilon^2\lambda_{k2}^0 + \ldots,$$
$$\lambda_k^+(\varepsilon) = h^{-1}\left(\frac{2\pi i}{3} + 2\pi ki\right) + \varepsilon\lambda_{k1}^+ + \varepsilon^2\lambda_{k2}^+ + \ldots$$

Здесь

$$\lambda_{k1}^0 = -h^{-2}2\pi ik,$$
$$\lambda_{k2}^0 = h^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k}{h}\right)^2 + \frac{1}{h}\left(\frac{2\pi ki}{h}\right)\right],$$
$$\lambda_{k1}^+ = -h^{-2}\left(2\pi ki + \frac{2\pi i}{3}\right),$$
$$\lambda_{k2}^+ = -\frac{1}{2h}\left(\frac{2\pi k}{h}\right)^2 - \frac{4}{3}h^{-3}\pi^2 k + 8\pi^2(9h^3)^{-1} + 2\pi kih^{-3} + \frac{2}{3}h^{-3}\pi i.$$

Корню $\lambda_k^0(\varepsilon)$ отвечает собственный вектор $a(\varepsilon) = a_0 + O(\varepsilon)$ и $a_0 = (1,1,1)$, а корню $\lambda_k^+(\varepsilon)$ — собственный вектор $c(\varepsilon) = c + O(\varepsilon)$, где $c = (c_0^2, c_0, 1)$, а $c_0 = \exp(2\pi i/3)$.

Как и выше, нас будут интересовать номера k порядка $\varepsilon^{-1/2}$. В обозначениях предыдущего раздела положим

$$k = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$(u_1, u_2, u_3) = a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h} + c_0 \exp\left(\frac{2\pi it}{3h}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h} + \\ + \bar{c}_0 \exp\left(-\frac{2\pi it}{3h}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\eta}_m(\tau) \exp\left(-\frac{2\pi imx}{h}\right) + \\ + \varepsilon(u_{11}(\tau,x,t), u_{12}(\tau,x,t), u_{13}(\tau,x,t)) + \ldots, \quad (35)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = ((z\varepsilon^{-1/2} + \theta) - \varepsilon^{1/2}h^{-1}z)t$. Фигурирующие в (35) функции $u_{jn}(\tau,x,t)$ периодичны по x с периодом h и периодичны по t с периодом $3h$. Подставляя (35) в (28) и производя стандартные действия, на втором шаге получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных амплитуд $\xi_m(\tau)$ и $\eta_m(\tau)$. Эту систему в терминах функций $\xi(\tau,x)$ и $\eta(\tau,x)$, где

$$\xi(\tau,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h}, \quad \eta(\tau,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m(\tau) \exp \frac{2\pi imx}{h},$$

можно записать в виде краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (2h)^{-1} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (2h)^{-1} r \Big[\xi - \xi\xi(\tau, x-\Delta) - \\ - \exp\left(\frac{2\pi iT}{3h}\right) \eta\bar{\eta}(\tau, x-\Delta) - \exp\left(-\frac{2\pi iT}{3h}\right) \bar{\eta}\eta(\tau, x-\Delta)\Big], \\ \xi(\tau, x+h) \equiv \xi(\tau, x), \quad (36)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (2h)^{-1} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{2\pi i}{3h^2}\eta + \\ + (2h)^{-1} r \left[\eta - \eta\xi(\tau, x-\Delta) - \exp\left(-\frac{2\pi iT}{3h}\right) \xi\eta(\tau, x-\Delta)\right], \\ \eta(\tau, x+h) \equiv \eta(\tau, x). \quad (37)$$

По аналогии с результатами предыдущего параграфа и здесь можно построить квазинормальные формы, которые отличаются от (36), (37) только тем, что оператор $z\frac{\partial}{\partial x}$ заменяется на $(z_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + z_n\frac{\partial}{\partial x_n})$.

Выводы

1. Известно, что системы параболических уравнений вида (14) – (17) ((18) – (20)), (32), (33) и (36), (37) могут обладать сложной динамикой. Это означает, что система (27) тоже может иметь сложную динамику при больших γ.

2. Построенные выше квазинормальные формы зависят от континуальных параметров (z, θ, z_j). Тем самым при различных их значениях могут реализовываться различные по типу и по количеству установившиеся режимы. Отсюда заключаем, что для систем (27) и (28) (при больших γ) характерно явление мультистабилиности.

3. Присутствие в квазинормальных формах внутреннего параметра θ приводит к выводу о том, что при $\varepsilon \to 0$ $(\gamma \to \infty)$ могут бесконечно часто происходить прямые и обратные бифуркации в системах (27) и (28).

4. Запаздывание T в результате применения описанной выше методики исследования переходит в асимптотически большое (при $\varepsilon \to 0$) отклонение одной или нескольких пространственных переменных. Это, в свою очередь, тоже приводит к процессу неограниченного чередования при $\varepsilon \to 0$ прямых и обратных бифуркаций в уравнениях первого приближения — квазинормальных формах. В связи с этим возникают интересные бифуркационные явления [43] в случаях, когда коэффициент запаздывания T в (27), (28) является асимптотически малым $(T \to \varepsilon^{1/2}T)$.

5. Численное исследование показало, что устойчивые режимы, возникающие в задаче (18)–(20), делаются все более изрезанными по пространственной переменной при уменьшении параметра z.

6. В качестве обобщения предложенной методики рассмотрены две системы, состоящие из трех подсистем, с различными диффузионными связями. Показано, что различие в динамике этих систем может носить принципиальный характер.

Авторы благодарят Глызина С.Д. за большую помощь в работе.

Список литературы

[1] Kashchenko S. A., “Dynamics of the Logistic Equation with Delay and Delay Control”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**:8 (2014), 1440017.

[2] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984; Hale J. K., *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[3] Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O., *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1996.

[5] Haken H., *Brain Dinamics; Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with Delays and Noise*, Springer, 2002.

[6] May R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1974.

[7] Kuramoto Y., *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, 1984.

[8] Kuang Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, New York, 1993.

[9] Huang W., “Global dynamics for a reaction-diffusion equation with time delay”, *J. Differential Equations*, **143** (1998), 293–326.

[10] Pyragas K., “Continious control of chaos by self-controlling feedback”, *Phys. Lett. A*, **170** (1992), 42.

[11] Nakajima H., Ueda Y., “Limitation of generalized delayed feedback control of chaos”, *Physica D*, **111** (1998), 143.

[12] Hovel P., Scholl E., “Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods”, *Physical Review E*, **75** (2005), 046203.

[13] Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hovel P., Scholl E., “Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control”, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007), 114101.

[14] Кащенко С. А., “Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 64–85; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of periodical solution of Hutchinson generalized equation”, *Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii (Studies of Stability and Theory of Oscillations*, YarGU, Yaroslavl, 1981, 64–85, (in Russian).]

[15] Wright E. M., “A non-linear differential equation”, *J. Reine Angew. Math.*, **194**:1–4 (1955), 66–87.

[16] Kakutani S., Markus L., “On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t-\tau))\,y(t)$ contributions to the theory of non-linear oscillations”, *Ann. Math. Stud.*, **IV** (1958), 1–18.

[17] Jones G. S., “The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$”, *T. Math. Anal. and Appl.*, **5** (1962), 435–450.

[18] Кащенко С. А., “Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 32–62; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of Solutions of the Generalized Hutchinson’s Equation”, *Model. and Anal. Inform. Sist.*, **19**:3 (2012), 32–62, (in Russian).]

[19] Григорьева Е. В., Кащенко С. А., *Релаксационные колебания в лазерах*, УРСС, М., 2013; [Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., *Relaxation oscillations in lasers*, URSS, Moscow, 2013, (in Russian).]

[20] Кащенко С. А., “Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу ”хищник-жертва“”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:1 (2013), 52–98; [Kashchenko S. A., “Relaxation Oscillations in a System with Delays Modeling the Predator-Prey Problem”, *Model. and Anal. Inform. Sist.*, **20**:1 (2013), 52–98, (in Russian).]

[21] Кащенко С. А., “Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва”, *ДАН СССР*, **266**:4 (1982), 792–795; English transl.: Kashchenko S. A., “Study by large parameter method of system of nonlinear differential-difference equations modeling ‘predator-sacrifice’ problem”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **266** (1982), 792–795.

[22] Кащенко С. А., “Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:5 (2012), 18–34; [Kashchenko S. A., “Stationary States of a Delay Differentional Equation of Insect Population’s Dynamics”, *Model. and Anal. Inform. Sist.*, **19**:5 (2012), 18–34, (in Russian).]

[23] Кащенко С. А., “Стационарные режимы уравнения, описывающего численности насекомых”, *Докл. АН СССР*, **273**:2 (1983), 328–330; [Kashchenko S. A., “Stationary regimes of equation describing numbers of insects”, *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **273** (1983), 328–330, (in Russian).]

[24] Эдварс Р., *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; Edwards R. E., *Functional Analysis: Theory and Applications*, Dover Pub, New York, 1965.

[25] Кащенко С. А., “Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:4 (2000), 693–702; [Kashchenko S. A., “Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay”, *Zh. vychisl. mat. i mat. fiz.*, **40**:5 (2000), 693–702, (in Russian).]

[26] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; Marsden J., McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[27] Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1964.

[28] Кащенко С. А., “Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной”, *Дифференциальные уравнения*, **25**:8 (1989), 1448–1451; [Kashchenko S. A., “Application of method of normalization for studying of differential-difference equations with small multiplier for derivative”, *Differential Equations*, **25**:8 (1989), 1448–1451, (in Russian).]

[29] Kaschenko S. A., “Normalization in the systems with small diffusion”, *International Journal of Bifurcations and chaos*, **6**:7 (1996), 1093–1109.

[30] Кащенко С. А., “О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией”, *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1053; [Kashchenko S. A., “On the quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion”, *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **299** (1988), 1049–1053, (in Russian).]

[31] Кащенко С. А., “Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием”, *Дифф. уравнения*, **35**:10 (1999), 1343–1355; [Kashchenko S. A., “Local Dynamics of non-linear singular perturbation systems with delay”, *Diff. Equations*, **35**:10 (1999), 1343–1355, (in Russian).]

[32] Кащенко С. А., “Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием”, *Журнал выч. мат. и мат. физ.*, **38**:3 (1998), 457–465; [Kashchenko S. A., “The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **38**:3 (1998), 457–465, (in Russian).]

[33] Кащенко И. С., “Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **437**:6 (2011), 743–747; English transl.: Kashchenko I. S., “Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **83**:2 (2011), 258–261.

[34] Кащенко И. С., “Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление”, *Доклады Академии наук*, **443**:1 (2012), 9–13; English transl.: Kashchenko I. S., “Asymptotic Study of the Corporate Dynamics of Systems of Equations Coupled by Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **85**:2 (2012), 163–166.

[35] Кащенко С. А., “Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:5 (2014), 61–77; [Kashchenko S. A., “Dinamika logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniem i zapazdyvayushchim upravleniem”, *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, **21**:5 (2014), 61–77, (in Russian).]

[36] Кащенко С. А., “Динамика нелинейного уравнения второго порядка с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **457**:6 (2014), 635–638; [Kashchenko S. A., “Dinamika nelineynogo uravneniya vtorogo poryadka s bol’shim koeffitsientom zapazdyvayushchego upravleniya”, *Doklady Akademii nauk*, **457**:6 (2014), 635–638, (in Russian).]

[37] Kashchenko S. A., “Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation”, *Automatic Control and Computer Science*, **47**:7 (2013), 470–494.

[38] Кащенко И. С., “Локальная динамика уравнения с распределенным запаздыванием”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:1 (2014), 17–26; [Kashchenko I. S., “Lokal’naya dinamika uravneniya s raspredelennym zapazdyvaniem”, *Differentsial’nye uravneniya*, **50**:1 (2014), 17–26, (in Russian).]

[39] Kashchenko I., “Normalization of a system with two large delays”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **24**:8 (2014), 1440021.

[40] Кащенко И. С., Кащенко С. А., “Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием и распределенным отклонением пространственной переменной”, *Сибирский математический журнал*, **55**:2 (2014), 315–323; [Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., “Lokal’naya dinamika uravneniya s bol’shim zapazdyvaniem i raspredelennym otkloneniem prostranstvennoy peremennoy”, *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, **55**:2 (2014), 315–323, (in Russian).]

[41] Кащенко И. С., "Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием", *Доклады Академии Наук*, **421**:5 (2008), 586–589; English transl.: Kashchenko I. S., "Asymptotic analysis of the behavior of solutions to equations with large delay", *Doklady Mathematics*, **78**:1 (2008), 570–573.

[42] Кащенко И. С., Кащенко С. А., "Динамика уравнения с большим пространственно-распределенным управлением", *Доклады Академии Наук*, **438**:1 (2011), 30–34; [Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., "Dinamika uravneniya s bol'shim prostranstvenno-raspredelennym upravleniem", *Doklady Akademii Nauk*, **438**:1 (2011), 30–34, (in Russian).]

[43] Кащенко С. А., "Локальная динамика пространственно-распределенного логистического уравнения с запаздыванием и большим коэффициентом переноса", *Дифференциальные уравнения*, **50**:1 (2014), 73; [Kashchenko S. A., "Lokal'naya dinamika prostranstvenno-raspredelennogo logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniem i bol'shim koeffitsientom perenosa", *Differentsial'nye uravneniya*, **50**:1 (2014), 73, (in Russian).]

Corporate Dynamics of Systems of Logistic Delay Equations with Large Delay Control

Bykova N. D., Kaschenko S. A.

National Research Nuclear University MEPhI
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: large control, quasinormal form, delay

A system of two logistic equations with delay coupled by delayed control is considered. It is shown that in the case of a sufficiently large delay control coefficient the problem of the dynamics of the initial systems is reduced to studying the non-local dynamics of special families of partial differential equations that do not contain small and large parameters. New interesting dynamic phenomena were discovered on the basis of the results of numerical analysis. Systems of three logistic delay equations with two types of "diffusion" relation were considered. Special families of partial differential equations that do not contain small and large parameters were also constructed for each of these systems. The results of the study of the original equations dynamic properties are presented. It is shown that the difference in the dynamics of the considered systems of three equations may be of a fundamental nature.

Сведения об авторах:
Быкова Надежда Дмитриевна,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 392–403

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–392–403
UDC 517.9

Does Your Event Log Fit the High-Level Process Model?[1]

Begicheva A. K., Lomazova I. A.

National Research University Higher School of Economics
Myasnitskaya str. 20, Moscow, 101000, Russia

e-mail: ilomazova@hse.ru, akbegicheva@edu.hse.ru

received June 28, 2015

Keywords: Petri nets, high-level process models, event logs, process mining, conformance checking

Process mining is a relatively new field of computer science, which deals with process discovery and analysis based on event logs. In this paper we consider the problem of models and event logs conformance checking. Conformance checking is intensively studied in the frame of process mining research, but only models and event logs of the same granularity were considered in the literature. Here we present and justify the method of checking conformance between a high-level model (e.g. built by an expert) and a low-level log (generated by a system).

The article is published in the author's wording.

Introduction

Process mining [1] is a new technology, that provides variety of methods to discover, monitor and improve real processes by extracting knowledge from event logs. Conformance checking [1, 8, 7, 3] is one of the most prominent process mining tasks. It is needed for diagnosis and quantifying discrepancies between observed and modeled behavior. There are many software products which allow us to use methods of Process Mining. ProM [6] is an open-source tool supporting many techniques of Process Mining, which are represented as plug-ins. Due to a flexibility of this environment it can be used both for research and applications.

Conformance checking uses both an event log and a model, and compares observed behavior written in the log with the behavior produced by the model. The general goal is to find discrepancies between them to improve a model. Conformance checking techniques can also be used for measuring the performance of process discovery algorithms (that

[1]This study was carried out within the National Research University Higher School of Economics' Academic Fund.

restores a model on the basis of a known log) and to repair models that have not got a well alignment with the real behavior of the process.

There are four evaluation criteria in conformance checking: fitness, precision, generalization and simplicity. Fitness shows at what extent traces from the event log can be reproduced by the model. Among the other quality criteria, fitness is the most related to the conformance. An obvious approach to measure fitness is to count the fraction of cases that can be "parsed completely"(i.e. the proportion of cases corresponding to firing sequences leading from *[start]* to *[end]*). Fitness can range from 0 to 1. It is supposed that fitness is equal to 1, if the log *perfectly fits* the model.

More subtle methods for measuring fitness are based on the *replay* approach [8]. When measuring fitness by replaying, we do not stop replaying a trace when we face a problem, but continue replaying the trace, and record a count of all missing tokens and all tokens that are pending at the end.

When working with business processes we typically use detailed logs, which present the full report about sequences of executed activities. Since in most information systems logs are generated automatically, keeping detailed records is not a problem. However, large and detailed models are not good to deal with. Such models are not clear and readable for experts. Experts prefer working with more abstract (high-level) models. More abstract models are easier to construct, understand and analyze. Process models developed by people are, as a rule, not very large and abstract from technical details. The problem has been studied in the literature only for discovering abstract models from low-level event logs. In [4, 5] methods for discovering abstract models based on finding behavior patterns in event logs were proposed. Thus checking conformance of an abstract model and a low-level event log generated by an information system is an important and challenging problem.

In this paper we consider process models represented by workflow nets – a special class of Petri nets for workflow modeling [2]. In an abstract model each separate activity represents a sub-process built from a set of more refined activities. A history of a detailed process behavior is recorded in low-level logs. We present a algorithm for checking conformance between an abstract model and a low-level event log. The algorithm is proved to be correct for perfectly fitted logs. Software implementation of the algorithm is developed as a plug-in for ProM. The algorithm was tested on groups of input data with different characteristics and types of noise.

The paper is organized as follows. In Section II we give a motivating example of handling a request for a compensation within airline in terms of Petri nets. Section III contains some basic definitions and notions, including Petri nets, event log, perfect fitness and refinement. In Section IV we present a method for checking conformance between an abstract model and a low-level log. We also give a justification of this method by proving its correctness in the case of perfect fitness. Experiments that confirm the adequacy of our algorithm on imperfect data are described in Section V. Section VI contains some conclusions.

1. Motivating Example

Let us consider a toy model from [1], which describes handling a request for a compensation from the airline. Here customers may request compensations for various reasons. An

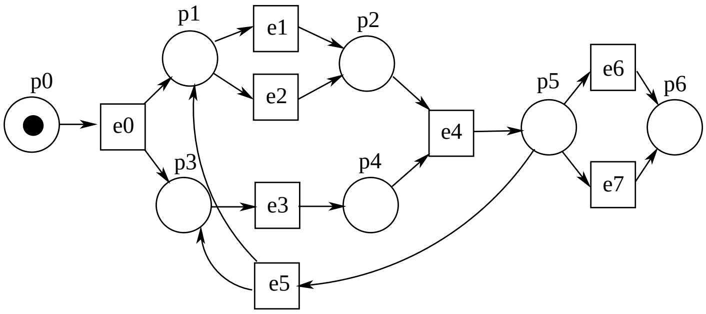

Fig. 1. An abstract model $\mathcal{N}_1$ for handling compensation requests

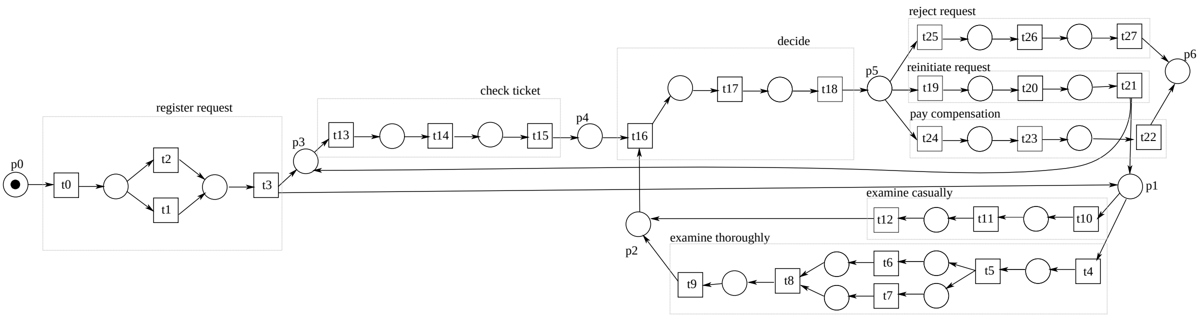

Fig. 2. A low-level model $\mathcal{N}_2$ refined from the model $\mathcal{N}_1$ in Fig. 1

abstract model of this process (expressed in terms of a *Petri net*) is presented in Fig.1. *Transitions*, corresponding to activities, are pictorially represented by squares and connected through other types of elements — *places*. Each place is represented as a circle and models a local state of the process. A distribution of tokens in net places indicates a total state of the system and is called a *marking*. A transition is *enabled* when each of its input places contains a *token*. For example the transition $e0$ can fire since the initial place $p0$ contains a token. When *firing*, a transition consumes one token from each its input place and produces one token for each of its output places.

The process begins with registering the request (transition $e0$). The meaning of other transitions is as follows: $e1$ — examine thoroughly, $e2$ — examine casually, $e3$ — check ticket, $e4$ — decide, $e5$ — re-initiate request, $e6$ — pay compensation and $e7$ — reject request.

Fig.2 presents a refined model of the same process, obtained by substitution of detailed descriptions for abstract activities. For example, 'register request' action is to read the request (transition $t0$) and then to record it in one of two possible ways (transition $t1$, or $t2$). To avoid congestion of activities' names in the low-level model in Fig.2 only places inherited from the abstract model are labeled in the picture. Low-level transitions in Fig.2 are grouped into blocks according to the high-level activities.

We study the situation when a low-level model is not available (or even does not exist). Given an abstract (high-level) model constructed by experts or software developers, and an event log generated by an information system, we would like to know whether the model conforms the real system behavior represented by the event log. A sample of such

$$
\begin{aligned}
L = \{ &< t0, t1, t3, t4, t5, t6, t13, t14, t7, t8, t15, t9, t16, t17, t18, t25, t26, t27 >,\\
&< t0, t1, t3, t4, t13, t14, t5, t7, t15, t6, t8, t9, t16, t17, t18, t24, t23, t22 >,\\
&< t0, t1, t3, t13, t10, t11, t14, t15, t12, t16, t17, t18, t24, t23, t22 >,\\
&< t0, t2, t3, t13, t4, t14, t15, t5, t6, t7, t8, t9, t16, t17, t18, t25, t26, t27 >,\\
&< t0, t2, t3, t4, t13, t14, t15, t5, t7, t6, t8, t9, t16, t17, t18, t24, t23, t22 >,\\
&< t0, t1, t3, t10, t11, t13, t12, t14, t15, t16, t17, t18, t19, t20, t21, t10, t11,\\
&t13, t14, t15, t12, t16, t17, t18, t25, t26, t27 >,\\
&< t0, t2, t3, t13, t10, t14, t15, t11, t12, t16, t17, t18, t24, t23, t22 >,\\
&< t0, t2, t3, t13, t10, t11, t12, t14, t15, t16, t17, t18, t19, t20, t21, t10, t13,\\
&t14, t11, t15, t12, t16, t17, t18, t24, t23, t22 >,\\
&< t0, t2, t3, t13, t14, t10, t11, t15, t12, t16, t17, t18, t25, t26, t27 >\}.
\end{aligned}
$$

Fig. 3. An event log $\mathcal{L}_2$, generated by the refined model $\mathcal{N}_2$ in Fig. 2

an event log for our example is shown in Fig.3. This log is generated by the low-level model in Fig.2, and thus perfectly fits it. An abstract model and a low-level event log cannot be directly compared, since in the model high-level events are used, and the log contains low-level events. So, a one-to -many correspondence between high- and low-level events is needed for checking conformance. In our example the abstract event $e0$ corresponds to the set $\{t0, t1, t2\}$ of low-level events, $e1$ — to the set $\{t13, t14, t15\}$, etc. This correspondence will be used in the algorithm for measuring conformance between a high-level model and a low-level event log.

2. Preliminaries

In this section we give some basic notions and definitions used the paper.

Let S be a set. By S^* we denote the set of all finite sequences (words) over S. $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ is a *partition* of S iff $\forall i, j \in [1, n] : S_i \subseteq S$ and $S_i \cap S_j = \emptyset$.

A *multiset* m over a set S is a mapping $m : S \to Nat$, where Nat is the set of natural numbers (including zero), i.e. a multiset may contain several copies of the same element.

Definition 1 (Petri net)**.** *Let P and T be disjoint finite sets of* places *and* transitions *and $F\colon (P \times T) \cup (T \times P) \to Nat$. Then $N = (P, T, F)$ is a* Petri net*. Let A be a finite set of activities. A labeled Petri net is a Petri net with a labeling function $\lambda : T \to A \cup \{\epsilon\}$ which maps every transition to an activity (a transition label) from A, or a special label ϵ, corresponding to an invisible action.*

A *marking* in a Petri net is a function $m\colon P \to Nat$, mapping each place to some natural number (possibly zero).

For a transition $t \in T$ a *preset* ${}^\bullet t$ and a *postset* $t^\bullet$ are defined as the multisets over P such that ${}^\bullet t = \{p | F(p, t) \neq 0\}$ and $t^\bullet = \{p | F(t, p) \neq 0\}$ for each $p \in P$.

A transition $t \in T$ is *enabled* in a marking m iff $\forall p \in P\ m(p) \geq F(p, t)$. An enabled transition t may *fire* yielding a new marking i. e. $m'(p) = m(p) - F(p, t) + F(t, p)$ for

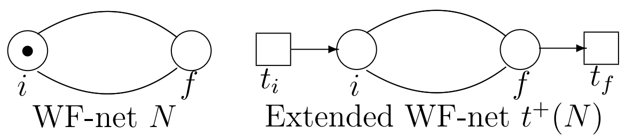

Fig. 4. An extending WF-net with initial and final transitions

each $p \in P$ (denoted $m \xrightarrow{t} m'$).

A *Workflow net* is a (labeled) Petri net with two special places: i and f. These places are used to mark the beginning and the ending of a workflow process.

Definition 2 (Workflow net). *A (labeled) Petri net $N = (P, T, F, \lambda)$ is called a* workflow net (WF-net) *iff*

1. *There is one source place $i \in P$ and one sink place $f \in P$ s. t. $^\bullet i = f^\bullet = \emptyset$;*
2. *Every node from $P \cup T$ is on a path from i to f.*
3. *The initial marking in N contains the only token in its source place.*

By abuse of notation we denote by i both the source place and the initial marking in a WF-net. Similarly, we use f to denote the final marking in a WF-net N, defined as a marking containing the only token in the sink place f.

Let $N = (P, T, F, \lambda)$ be a WF-net. Then we define the *extended WF-net (EWF-net)* $N' = (P', T', F', \lambda')$ as follows: $P' = P, T' = T \cup \{t_i, t_f\}$, and $F' = F \cup \{\langle t_i, i\rangle, \langle f, t_f\rangle\}$, where t_i, t_f are new (not occurring in P, T) nodes. The new transitions t_i, t_f are labeled with invisible activity ϵ in N', all other transitions in N' have the same labels as in N. The initial marking in an extended WF-net contains no tokens. Thus an extended WF-net may start a new case at any moment (cf. Fig.4).

Event logs keep a history of process executions.

Definition 3 (Event log). *Let A be a finite set of activities. A* trace *σ (over A) is a finite sequence of activities, i.e., $\sigma \in A^*$. An* event log *L (over A) is a finite multi-set of traces, i.e. $L \in \mathcal{M}(A^*)$.*

In this paper we study conformance checking. Given a model and an event log we would like to compare the process model behavior and the behavior recorded in the event log. Several metrics for conformance checking were defined in the literature [1]. Among the most important metrics is *fitness*. Informally speaking, fitness measures the proportion of behavior in the event log possible according to the model.

Definition 4 (Perfect fit). *Let N be a WF-net with transition labels from A, an initial marking i, and a final marking f. Let σ be a trace over A. We say that a trace $\sigma = a_1, \ldots, a_k$* perfectly fits *$N$ iff there exists a sequence of firings $i = m_0 \xrightarrow{t_1} \ldots \xrightarrow{t_k} m_{k+1} = f$ in N, s.t. the sequence of activities $\lambda(t_1), \lambda(t_2), \ldots, \lambda(t_k)$ after deleting all invisible activities ϵ coincides with σ. A log L* perfectly fits *N iff every trace from L perfectly fits N.*

Petri nets can be extended by adding a hierarchy as it is done e.g. in Colored Petri nets (CPN) [9]. Hierarchy allows to develop more compact and readable models. In the case of two-level hierarchy there are two models of one process: a high-level (*abstract*) model and a low-level (*refined*) model. The high-level model is a model with abstract transitions. An abstract transition refers to a Petri net sub-process, which refines the activity represented by this transition. The low-level model can be obtained from an abstract model by substituting subprocess models for abstract transitions.

Definition 5 (Substitution)**.** *Let $N_1 = (P_1, T_1, F_1, \lambda_1)$ be a WF-net, $t \in T$ be a transition in N_1. Let also $N_2 = (P_2, T_2, F_2, \lambda_2)$ be an EWF-net with the initial and final transitions t_i, t_f correspondingly. We say that a WF-net $N_3 = (P_3, T_3, F_3, \lambda)$ is obtained by a* substitution $[t \to N_2]$ *of N_2 for t in N_1 iff $P_3 = P_1 \cup P_2$, $T_3 = T_1 \cup T_2 \setminus \{t\}$, $F_3 = F_1 \cup F_2 \setminus \{(p,t) \mid p \in {}^\bullet t\} \setminus \{(t,p) \mid p \in t^\bullet\} \cup \{(p,t_i) \mid p \in {}^\bullet t\} \cup \{(t_f,p) \mid p \in t^\bullet\}$,*

Definition 6 (Refinement)**.** *Let N, N_r be two WF-nets with sets of activities A, A_r correspondingly. Let $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$, and $A_r = A_r^1 \cup A_r^2 \cup \ldots \cup A_r^n$ be a partition of A_r into n subsets, and $N^1, N^2, \ldots N^n$ be EWF-nets with sets of activities $A_r^1, \ldots, A_r^n$ correspondingly. We say that N_r is a refinement of N via substitutions $[a_1 \to N_r^1, a_2 \to N_r^2, \ldots a_n \to N_r^n]$ iff N_r can be obtained from N by simultaneous substitutions of N_r^i for all t s.t. $\lambda(t) = a_i$.*

3. Algorithm for Checking Conformance between an Abstract Model and a Low-Level Event Log

The idea of the algorithm is as follows. To check conformance between an abstract model and a low-level log, we first transform the given log into a log over abstract activities. For this purpose, each low-level activity in the log is replaced by a name of the sub-process (an abstract activity) it belongs to. As a result we get a log over the set of abstract activities.

Traces in this log may contain several sequential occurrences of the same abstract activity, since there are several steps corresponding to this activity in the low-level trace. Then the next step is to get rid of “stuttering"by replacing several sequential occurrences of the same activity with just one.

However, this is still not enough to start checking conformance using known methods. Note, that when we have two concurrent sub-processes, represented by two concurrent abstract activities in an abstract model, stuttering sequences may interleave. To overcome this problem we transform an abstract model into a model allowing stuttering of each abstract activity. This is done by adding loops to transitions in the abstract model.

Now we describe the algorithm for checking conformance between an abstract model and a low-level log more precisely.

Algorithm 1. *(Checking conformance between a high-level model and a low-level event log).*

Let $N = (P, T, F, \lambda)$ be a WF-net corresponding to an abstract model of a process over a set of activities A, and let L_r be an event log (a finite multiset of traces) over a set A_r of low-level activities. Let also $\delta : A_r \to A$ be a function that maps each low-level activity to a certain high-level activity from A.

$$L = \{ <e0, e1, e3, e1, e3, e1, e4, e7>, <e0, e1, e3, e1, e3, e1, e4, e6>,$$
$$<e0, e3, e2, e3, e2, e4, e6>, <e0, e3, e1, e3, e1, e4, e7>, <e0, e1, e3, e1, e4, e6>,$$
$$<e0, e2, e3, e2, e3, e4, e5, e2, e3, e2, e4, e7>, <e0, e3, e2, e3, e2, e4, e6>,$$
$$<e0, e3, e2, e3, e4, e5, e2, e3, e2, e3, e2, e4, e6>, <e0, e3, e2, e3, e2, e4, e7> \}.$$

Fig. 5. The 'abstract' event log $\mathcal{L}_1$ obtained by converting the log $\mathcal{L}_2$ in Fig. 3

Step 1. Convert L_r into an event log L over the set of activities A by replacing each activity $a \in L_r$ in each trace with the activity $\delta(a)$.

Step 2. Get rid of 'stuttering' in L by replacing for each trace each substring consisting of the same repeating activity with one occurrence of this activity.

Step 3. Check whether there are traces in L with with more than one (not consecutive) occurrences of the same activity. If there are no such traces, go to the Step 5, otherwise go to the Step 4.

Step 4. For a trace $\sigma \in L$, let B_σ be the set of activities which have more than one occurrence in σ, and let $B \subseteq A$ be the set of all activities with multiple occurrences in L, i.e. $B = \cup_{\sigma \in L} B_\sigma$.

For each transition t labeled with an activity from B in the net N add a loop, as follows:

- add two new transitions to T in N: a transition t_ϵ labeled by the invisible action ϵ and a transition t' labeled by $\lambda(t)$;
- add a new place p' to P in N;
- add new arcs $(t_\epsilon, p'), (p', t'), (t', p'), (p', t)$, and for each place $p \in {}^\bullet t$ add an arc (p, t_ϵ).

Step 5. Measure the conformance between N (with the added loops) and L (without stuttering) by applying one of existing algorithms (e.g. the replay algorithm).

We illustrate this algorithm by applying it to the WF-net $\mathcal{N}_1$ in Fig. 1 and the log $\mathcal{L}_2$ in Fig. 3. First, we convert the event log $\mathcal{L}_2$ into a high-level log. The log obtained as the result of this is denoted by $\mathcal{L}_1$ and is shown in Fig. 5.

Then we add loops to the abstract model $\mathcal{N}_1$ and obtain the new model $\mathcal{N}_1'$, shown in Fig. 6. Here the invisible transitions are colored in black. The model N_a' allows stuttering of activities $e1, e2$, and $e3$.

And finally we check conformance between the model $\mathcal{N}_1'$ and the log $\mathcal{L}_1$ by replaying traces from $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{N}_1'$. It turns out, that all traces from $\mathcal{L}_1$ can be exactly replayed in $\mathcal{N}_1'$, i.e. the log $\mathcal{L}_1$ perfectly fits $\mathcal{N}_1'$. This is not by chance. The following theorem states, that the proposed conformance checking method is correct under perfect fitness.

Theorem 1. *Let N be a WF-net with transitions labeled by activities from a set A, and let N_r be a WF-net, obtained by refining N with transitions labeled by activities from A_r.*

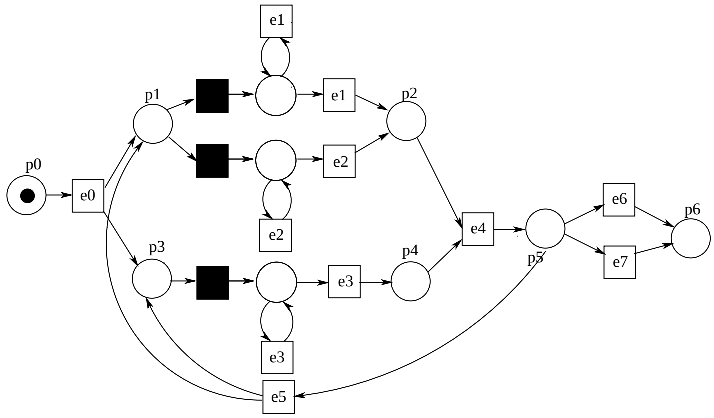

Fig. 6. The abstract model $\mathcal{N}_1$ after adding loops

Let also $L_r \in \mathcal{M}(A_r^*)$ be an event log over the set A_r. Then if L_r perfectly fits N_r, the output of the Algorithm 1 will be equal to 1.

The proof of this theorem is based on checking (by induction on the trace length) that in the theorem conditions each trace from L with removed stutterings can be exactly replayed in N with added loops. We omit the detailed proof of the theorem, since it is rather technical and straightforward.

4. Experimental Validation of Algorithm

We have proven, that our method recognizes perfect fitness between an abstract model and a low-level log correctly. This can be considered as a justification of the proposed approach. However, it is not enough, since it is very important to check the method on logs and/or models with deviations.

To ensure that the algorithm is suitable for checking conformance not only in the case of perfect fitness, we have implemented the algorithm and run it on different input data: event logs with noise, models with some small modifications, and models with significant deviations.

The proposed algorithm was implemented as a plug-in named "Conformance Checking for High-Level model and Event log, Transformation"within the ProM 6 framework [11]. Our plug-in receives a high-level process model in PNML format and a low-level event log in XES format as an input. During the plug-in execution first the Petri net model is visualized, then the user is asked to define a partition for the set of actions occurring in the log and to match an abstract event (occurring in the model) to each subset of the partition. After running the plug-in the user can apply any known algorithm for the standard conformance checking. There are several such algorithms in ProM.

For measuring fitness the plug-in for replay-based conformance analysis (described in [3]) was used.

The first group of experiments concerns event logs with some noise. We consider several kinds of noise:

Kind of noise	Level of noise	Low-level fitness	High-level fitness
adding an event	10	0,888	0,878
	10	0,905	0,894
	10	0,874	0,888
	10	0,888	0,864
adding a new event	10	0,894	0,892
	10	0,885	0,878
skipping an event	10	0,93	1
	20	0,876	1
	30	0,782	0,986
	40	0,706	0,967
	50	0,629	0,920
	60	0,533	0,894

Table 1. Fitness for event logs with noise

Type of routing	Low-level trace fitness	High-level trace fitness
sequential	0,95	0,96
AND-split	0,97	0,96
AND-join	0,97	0,96
OR-split	0,96	0,97
OR-join	0,97	0,96

Table 2. Fitness for event logs with specific noise

1. Adding an extra record for the event occurrence in a random place in the event log for an event presented already in the model.

2. Adding a record for the event occurrence in a random place in the event log for some new event.

3. Skipping randomly a record for the event occurrence.

4. Adding some specific noise, significant for the conformance of the high-level model, while not so important for the low-level conformance.

Experiments were carried out for the artificial model in Fig. 1 and its refinement in Fig. 2. Logs with different kinds and levels of noise were generated with the help of Log Generator plug-in [10], where the level of noise is measured as the probability of applying a certain kind of change to records in the event log.

The obtained results are presented in Table 1 and Table 2. Here the low-level fitness is the fitness for an event log and the refined model, measured by direct replay-based conformance analysis, and the high-level fitness is the fitness for the same event log and the abstract model, computed using our algorithm.

Changing the model	Average fitness
adding a transition	1
adding an arc	0,912
adding a place	0,977
removing a transition	0,884
removing a place	0,963
removing an arc	0,969
swapping two transitions	0,702

Table 3. Fitness for models with minor structural changes

In most cases the high-level fitness values are greater than the corresponding low-level values, since deviations on the low-level may be not noticeable on the level of abstract model.

The cases when the high-level fitness is a little less then the low-level one can be also explained. This can be caused by an artificial random noise inserting a low-level event into a group of events from some different abstract activity. We believe, this case is very rare in real-life logs.

Some information systems record not just event execution, but starting and ending of an event. Then deviations in fixing timestamps may lead to violations in fixing events order. Such cases we consider as a specific noise (connected with fixing timestamps), which could be supposed to crucially influence the high-level fitness values. For imitating this kind of noise we added noise affecting concrete routing constructions. The experiment results in Table 2 shows that such noise is not really important.

The second group of experiments concerns small deviations in the abstract model. Experiments were done for the same artificial abstract model. The question was the extent to which local changes in the model affect the fitness results. To answer this question we have measured fitness of originally perfectly fitting logs for models, obtained from the original abstract model with local structural changes. The results are presented in Table 3. They show the resistance of our algorithm to small structural changes in the model. Note also, that the replay-based algorithm allows not just measure the fitness, but also to localize log deviations in the model. The experiments show that our algorithm localizes deviations in the same way as the original replay-based algorithm. We made some changes in the plug-in, it allows us to verify that after our transformation the location of noise is recognized correctly. This test also was successfully passed.

One more group of experiments concerns measuring fitness, when the level of conformance between a model and an event log is far from being perfect. To check the stability of our algorithm we compare the high-level fitness for an abstract model and an event log, measured by our method, and the low-level fitness, i.e. the fitness of the same event log and a refined model measured by direct replaying the log.

The results for different degrees of conformance are shown in Table 4. As expected, here also the high-level fitness values are greater than the corresponding low-level values. The reason is in more rough granularity of the abstract model, when some subprocess deviations cannot reflected in the model. However, there is a good correspondence between high-level and low-level (used as a reference) fitnesses.

	High degree of conformance		Middle degree of conformance		Low degree of conformance	
	High-level fitness	Low-level fitness	High-level fitness	Low-level fitness	High-level fitness	Low-level fitness
case 1	0.928	0.872	0.655	0.431	0.608	0.412
case 2	0.903	0.866	0.691	0.509	0.633	0.361
case 3	0.866	0.827	0.568	0.312	0.524	0.279
case 4	0.885	0.787	0.599	0.398	0.573	0.346

Table 4. Fitness for models with different degrees of conformance

5. Conclusion

Abstract models are much more clear and more understandable than low-level models. But information systems generate only low-level event logs, which cannot be used for direct conformance checking. So, checking conformance of a high-level business model to a low-level event log is very important for facilitating the work of experts on analysis and enhancement of business information systems.

In this paper we provide a robust technique for solving this problem, which is based on transforming both the model and the log and then applying one of already known methods for measuring fitness. We've proved our method to be correct in the case of perfect conformance between a model and an event logs. Also we had developed a ProM plug-in which implements the proposed algorithm and tested applicability of our technique on artificial imperfect data with noise and deviations.

References

[1] van der Aalst W. M. P., *Process Mining: Discovery, Conformance and Enhancement of Business Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[2] van der Aalst W. M. P., van Hee K. M., *Workflow Management: Models, Methods and Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, 2002.

[3] Adriansyah A., van Dongen B. F., van der Aalst W. M. P., "Conformance Checking Using Cost-Based Fitness Analysis", *IEEE 15th International Enterprise Distributed Object Computing Conference*, 2011, 55–64.

[4] Bose R. P. J. C., van der Aalst W. M. P., "Abstractions in Process Mining: A Taxonomy of Patterns. In Business Process Management", *Lecture Notes in Computer Science*, **5701** (2009), 159–175.

[5] Bose R. P. J. C., Verbeek H. M. W., van der Aalst W. M. P., "Discovering Hierarchical Process Models Using ProM", *CAiSE Forum (Selected Papers)*, 2011, 33–48.

[6] van Dongen B. F., Alves de Medeiros A. K., Verbeek H. M. W., Weijters A. J. M. M., van der Aalst W. M. P., "The ProM framework: A New Era in Process Mining Tool Support", *Lecture Notes in Computer Science*, **3536** (2005), 444–454.

[7] Rozinat A., *Process mining: conformance and extension*, Technische Universiteit, Eindhoven, 2010.

[8] Rozinat A., van der Aalst W. M. P., "Conformance Testing: Measuring the Alignment Between Event Logs and Process Models", *BETA Working Paper Series*, **144** (2005), 203–210.

[9] Jensen K., Kristensen L. M., "Coloured Petri Nets: Modelling and Validation of Concurrent Systems", 2009.

[10] Shugurov I., Mitsyuk A., "Generation of a Set of Event Logs with Noise", *Proc. of the 8th Spring/Summer Young Researchers' Colloquium on Software Engineering (SYRCoSE 2014)*, 2014, 88–95.

[11] Verbeek H. M. W., Buijs J. C. A. M., van Dongen B. F., van der Aalst W. M. P., "Prom 6: The process mining toolkit", *Proc. of BPM Demonstration*, **615**, 2010, 34–39.

Соответствует ли Ваш журнал событий высокоуровневой модели процесса?

Бегичева А.К., Ломазова И.А.

Национальный Исследовательский Университет «Высшая Школа Экономики», 101000, Россия, Москва, ул. Мясницкая, 20

Ключевые слова: сети Петри, высокоуровневые модели процессов, журналы событий, Process Mining, проверка соответствия

Process mining – это технология, которая посредством извлечения данных из журнала событий предоставляет различные методы для исследования реального процесса, его улучшения и контроля над ним. В данной статье мы рассматриваем проблему проверки соответствия между высокоуровневой моделью процесса и журналом событий. Проверка соответствия интенсивно изучается в рамках process mining, но в литературе можно найти только методы, позволяющие измерить этот показатель между логом и моделью одного уровня. В статье мы представляем алгоритм проверки соответствия между высокоуровневой моделью процесса (построенной экспертами) и низкоуровневым журналом событий (сгенерированным системой), а также доказываем его применимость.

Статья публикуется в авторской редакции.

Сведения об авторах:

Бегичева Антонина Константиновна,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Научно-учебная лаборатория ПОИС, стажер-исследователь

Ломазова Ирина Александровна,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 404–419

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–404–419

УДК 517.926

Автоволновые процессы в кольцевой нейронной цепи с однонаправленной связью[1]

Глызин С. Д.*,**, Колесов А. Ю.*, Розов Н. Х.***

* *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14
***НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9*
*** *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

получена 21 мая 2015

Ключевые слова: импульсный нейрон, кольцо однонаправленно связанных осцилляторов, бегущие волны, асимптотическое поведение, устойчивость, феномен буферности

Статья посвящена проблеме математического моделирования нейронной активности. Предлагаются новые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием вольтерровского типа, с помощью которых описывается функционирование как отдельного нейрона, так и нейронных сетей. Проводится исследование аттракторов кольцевой системы однонаправленно связанных импульсных нейронов при неограниченном увеличении числа звеньев цепочки. Для изучения ее периодических решений автоволнового типа используются некоторые специальные приемы, сводящие проблемы существования и устойчивости циклов к анализу вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. На этом пути устанавливается, что при увеличении числа звеньев цепочки количество сосуществующих в ней устойчивых автоволновых решений неограниченно растет, т.е. имеет место известное явление буферности.

1. Постановка задачи

Основой излагаемых ниже построений служит теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, берущая начало с работы Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [1]. К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [2] – [12]), связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов [13], [14]. К указанному

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 15-01-04066а) и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

циклу работ относится и данная статья. В ней анализируется некоторая система сингулярно возмущенных скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующая электрическую активность кольцевой цепочки однонаправленно электрически связанных импульсных нейронов. Рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у этой системы релаксационных циклов со специальными свойствами.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. Будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона моделируется построенным в соответствии с методикой книги [15] дифференциально-разностным уравнением

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \tag{1}$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0,1)$. Относительно фигурирующих в (1) функций $f(u)$, $g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$\begin{gathered} f(0) = 1,\ g(0) = 0;\ \ f(u) = -a_0 + O(1/u),\ uf'(u) = O(1/u),\ u^2 f''(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u),\ \ ug'(u) = O(1/u),\ \ u^2 g''(u) = O(1/u)\ \text{ при }\ u \to +\infty, \end{gathered} \tag{2}$$

где a_0, b_0 – положительные константы.

Уравнение (1) подробно исследовано в статье [12], а ее упрощенный аналог

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u, \tag{3}$$

где функция $f(u)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям (2), рассмотрен в работах [4, 5]. Уравнение (3) получается из (1) при $h = 1$ и при переобозначениях

$$f(u) - g(u) \to f(u), \quad a + b \to a.$$

Для функции $f(u)$ будем считать выполненным следующее дополнительное требование:

$$a > 1. \tag{4}$$

Данное неравенство имеет вполне понятную нейродинамическую интерпретацию, поскольку эквивалентно условию существования у уравнения (3) при достаточно большом λ устойчивого релаксационного цикла, соответствующего режиму генерации спайков (см. [4, 5]) .

В данной работе исследованию подлежат системы однонаправленно электрически связанных нейронов, каждый из которых в отдельности моделируется уравнением (3)

$$\dot{u}_j = d\,(u_{j+1} - u_j) + \lambda f(u_j(t-1))u_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad u_{m+1} = u_1, \tag{5}$$

где $d = \text{const} > 0$.

Математическое исследование модели (5) будем проводить при условии, что $\lambda \gg 1$. Система (5) допускает, очевидно, так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv \ldots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \tag{6}$$

где $u_*(t,\lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения (3) (асимптотика этого решения построена в [5]).

Наш основной результат состоит в том, что при подходящем уменьшении d и при всех $\lambda \gg 1$ эта система имеет как минимум две серии по m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений, которые по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть автоволновыми процессами. А так как размерность m системы (5) мы можем выбирать сколь угодно большой, то это означает реализуемость в рассматриваемой нейронной модели феномена буферности. Для обоснования этого результата будем пользоваться доказанными в [4, 7–10] для случая диффузионной связи основными утверждениями, модифицируя их для нашей задачи. Ниже приводятся базовые теоремы, на основе которых удается найти асимптотические формулы устойчивых периодических решений системы (5).

2. Базовые теоремы

Для удобства дальнейшего асимптотического анализа перейдем в (5) к новым переменным x, $y_1,\ldots,y_{m-1}$ по формулам

$$u_1=\exp(x/\varepsilon),\quad u_j=\exp\left(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j-1}y_k\right),\quad j=2,\ldots,m,\quad \varepsilon=1/\lambda. \tag{7}$$

В результате получаем систему

$$\dot{x}=\varepsilon d\,(\exp y_1-1)+F\big(x(t-1),\,\varepsilon\big), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{y}_j=d\left[\,\exp y_{j+1}-\exp y_j\right]+G_j\big(x(t-1),\,y_1(t-1),\,\ldots,\,y_j(t-1),\,\varepsilon\big),\\ j=1,\ldots,m-1,\end{gathered} \tag{9}$$

где $y_m=-y_1-y_2-\ldots-y_{m-1}$, а функции F, G_j задаются соотношениями

$$\begin{gathered}F(x,\varepsilon)=f\big(\exp(x/\varepsilon)\big),\\ G_j(x,y_1,\ldots,y_j,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\Big\{f\Big(\exp\Big(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j}y_k\Big)\Big)-f\Big(\exp\Big(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j-1}y_k\Big)\Big)\Big\},\\ j=1,\ldots,m-1.\end{gathered} \tag{10}$$

Фиксируем постоянную σ_0, подчиненную требованиям $0<\sigma_0<a-1$, и рассмотрим банахово пространство $\mathscr{F}$ непрерывных при $-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$ вектор-функций $\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$ с нормой

$$||\varphi||_{\mathscr{F}}=\max_{1\le j\le m}\big(\max_{-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0}|\varphi_j(t)|\,\big). \tag{11}$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (8), (9) с начальными условиями из множества

$$S=\big\{\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big):\ \ \varphi_1\in S_1,\,\varphi_2\in S_2,\ldots,\varphi_m\in S_m\big\}\subset\mathscr{F}. \tag{12}$$

Здесь через S_1 обозначено замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi_1(t)$, удовлетворяющих требованиям $-q_1\le\varphi_1(t)\le-q_2$, $\quad\varphi_1(-\sigma_0)=-\sigma_0$, $q_1>\sigma_0$,

$q_2 \in (0, \sigma_0)$, а в качестве $S_2, \ldots, S_m$ взяты произвольные замкнутые и ограниченные подмножества пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов об автоволновых режимах системы (8), (9) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим введем в рассмотрение решение

$$\bigl(x_\varphi(t,\, \varepsilon),\, y_{1,\varphi}(t,\, \varepsilon),\, \ldots,\, y_{m-1,\varphi}(t,\, \varepsilon)\bigr), \quad t \geq -\sigma_0 \tag{13}$$

упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t)$ из множества S. Рассмотрим также второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\, \varepsilon) = -\sigma_0$ (в случае, когда он существует) и на множестве (12) определим оператор $\Pi_\varepsilon : S \to \mathscr{F}$ посредством равенства

$$\begin{gathered}\Pi_\varepsilon(\varphi) = \bigl(x_\varphi(t+T_\varphi,\, \varepsilon),\, y_{1,\varphi}(t+T_\varphi,\, \varepsilon),\, \ldots,\, y_{m-1,\varphi}(t+T_\varphi,\, \varepsilon)\bigr),\\ -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0.\end{gathered} \tag{14}$$

Помимо (14) нам потребуется еще оператор $\Pi_0 : S \to \mathscr{F}$, который зададим формулой

$$\begin{gathered}\Pi_0(\varphi) = \bigl(x_0(t), y_1^0(t+T_0, z), \ldots, y_{m-1}^0(t+T_0, z)\bigr)\Big|_{z=(\varphi_2(-\sigma_0),\ldots,\varphi_m(-\sigma_0))},\\ -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь, как и в [4,5], $T_0 = 2 + a + 1/a$, а $x_0(t)$ – периодическая функция

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1,\\ 1 - a(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1,\\ -a + t - t_0 - 1 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0,\end{cases} \qquad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \tag{16}$$

Что же касается компонент $y_1^0(t,z), \ldots, y_{m-1}^0(t,z)$, зависящих от вектора $z = (z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, то при $-1-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ они удовлетворяют импульсной задаче Коши

$$\begin{gathered}\dot y_j = d\,\bigl[\exp y_{j+1} - \exp y_j\bigr] \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - (1+a)\,y_j(0),\\ y_j(t_0+1+0) = y_j(t_0+1-0) - (1+1/a)\,y_j(t_0), \quad j = 1, \ldots, m-1,\\ y_m = -y_1 - y_2 - \ldots - y_{m-1},\end{gathered} \tag{17}$$

$$(y_1, \ldots, y_{m-1})\big|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \ldots, z_{m-1}), \tag{18}$$

где $t_0 = 1 + 1/a$.

Отдельно остановимся на вопросе о корректности определения оператора (15). Главная проблема здесь заключается в том, что на промежутках времени $-\sigma_0 \leq t < 1$, $1 \leq t < t_0 + 1$ и $t_0 + 1 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ решение задачи Коши (17), (18) удовлетворяет нелинейной системе

$$\dot y_j = d\,\bigl[\exp y_{j+1} - \exp y_j\bigr], \quad j = 1, \ldots, m-1, \quad y_m = -y_1 - y_2 - \ldots - y_{m-1}. \tag{19}$$

Поэтому возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки, длины которых отнюдь не малы. Ответ на него дается в следующем утверждении.

Лемма 1. *Решение* $(y_1(t),\ldots,y_{m-1}(t))$ *системы* (19) *с произвольным начальным условием* $(y_1,\ldots,y_{m-1})\big|_{t=0}=(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1}$ *определено на полуоси* $t\geq 0$ *и стремится к нулю при* $t\to+\infty$.

Для проверки требуемого факта заметим, что любое решение системы (19) записывается в виде

$$y_j(t)=\ln\bigl(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)\bigr),\quad j=1,\ldots,m-1, \tag{20}$$

где $(\xi_1(t),\ldots,\xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j=d\,(\xi_{j+1}-\xi_j),\quad j=1,\ldots,m,\quad \xi_{m+1}=\xi_1 \tag{21}$$

из инвариантного конуса $K=\bigl\{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\xi_j>0, j=1,\ldots,m\bigr\}$.

Свойства системы (21) хорошо известны. Во-первых, все ее решения при $t\to+\infty$ стремятся к устойчивому одномерному инвариантному многообразию $\bigl\{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_m=c,\, c\in\mathbb{R}\bigr\}$, движения на котором задаются уравнением $\dot{c}=0$. Во-вторых, справедлив закон сохранения $\sum_{j=1}^m\xi_j\equiv\mathrm{const}$. Далее, из упомянутых свойств следует, что для любого решения $(\xi_1(t),\ldots,\xi_m(t))\in K$ этой системы выполняются предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\xi_2(t)=\ldots=\lim_{t\to+\infty}\xi_m(t)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_j(0)>0. \tag{22}$$

А отсюда и из (20) утверждение леммы 1 вытекает очевидным образом.

Другая проблема, связанная с корректностью оператора (15), состоит в том, что функции $y_j^0(t,z)$, $j=1,\ldots,m-1$ являются разрывными в точках $t=1$ и $t=t_0+1$, где согласно (17) они претерпевают конечные скачки. Однако в силу неравенства (4) и оценки $\sigma_0<a-1$ функции $y_j^0(t+T_0,z)$, $j=1,\ldots,m-1$ оказываются непрерывными на нужном отрезке $-1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0$, поскольку в этом случае $T_0-1-\sigma_0>t_0+1$. Тем самым, условие (4) гарантирует выполнение требуемого включения $\Pi_0(\varphi)\in\mathscr{F}$ при $\forall\,\varphi\in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi\Pi_0(\varphi)$ операторов (14), (15) по переменной φ. Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathscr{F}_0=\bigl\{\mathrm{g}_0(t)=\bigl(\mathrm{g}_{1,0}(t),\,\mathrm{g}_{2,0}(t),\ldots,\mathrm{g}_{m,0}(t)\bigr)\in\mathscr{F}:\ \mathrm{g}_{1,0}(-\sigma_0)=0\bigr\}$$

с нормой (11), а результаты их применения к произвольному элементу $\mathrm{g}_0(t)$ из $\mathscr{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{gathered}\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)\mathrm{g}_0=\bigl(\mathrm{g}_1(t+T_\varphi,\,\varepsilon),\ldots,\mathrm{g}_m(t+T_\varphi,\,\varepsilon)\bigr)-\\ -l(\mathrm{g}_0)\left(\dot{x}_\varphi(t+T_\varphi,\,\varepsilon),\,\dot{y}_{1,\varphi}(t+T_\varphi,\varepsilon),\ldots,\dot{y}_{m-1,\varphi}(t+T_\varphi,\varepsilon)\right),\\ -1-\sigma_0\leq t\leq-\sigma_0;\end{gathered} \tag{23}$$

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\mathrm{g}_0 =$$
$$= \Bigg(0, \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial y_1^0}{\partial z_s}(t+T_0,z)\mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0), \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial y_2^0}{\partial z_s}(t+T_0,z)\mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0), \ldots$$
$$\ldots, \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial y_{m-1}^0}{\partial z_s}(t+T_0,z)\mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0)\Bigg), \tag{24}$$
$$z = (\varphi_2(-\sigma_0),\ldots,\varphi_m(-\sigma_0)), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0.$$

Здесь $\mathrm{g}(t,\varepsilon) = \big(\mathrm{g}_1(t,\varepsilon),\ldots,\mathrm{g}_m(t,\varepsilon)\big)$, $\mathrm{g}(t,\varepsilon) = \mathrm{g}_0(t)$ при $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ – решение линейной системы, получающейся из (8), (9) при линеаризации на решении (13), а функционал $l : \mathscr{F}_0 \to \mathbb{R}$ определен соотношением

$$l(\mathrm{g}_0) = \mathrm{g}_1(T_\varphi - \sigma_0,\, \varepsilon)/\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0,\, \varepsilon). \tag{25}$$

Естественно возникающий вопрос о связи между операторами (14) и (15) решается следующей теоремой.

Теорема 1 (о $\mathbf{C^1}$-сходимости)**.** *Пусть выполнено условие* (4) *и множество S выбрано описанным выше способом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\varphi\in S} ||\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)||_{\mathscr{F}} = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\varphi\in S} ||\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi\Pi_0(\varphi)||_{\mathscr{F}_0\to\mathscr{F}_0} = 0. \tag{26}$$

Доказательство этой теоремы опустим, поскольку в случае $m = 2$ оно приведено в статье [7]. Переход же от двумерного случая к значениям $m > 2$ носит чисто технический характер.

Остановимся на одном важном следствии из C^1-сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (8), (9). В связи с этим обратим внимание, что в силу (17), (18) предельный оператор (15) является надстройкой над соответствующим $(m-1)$-мерным отображением

$$z \to \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \ldots, y_{m-1}^0(t,z))\big|_{t=T_0-\sigma_0}, \tag{27}$$

где $z = (\varphi_2(-\sigma_0),\ldots,\varphi_m(-\sigma_0))$.

Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\varphi_*(t) = \big(\varphi_1^*(t),\ldots,\varphi_m^*(t)\big) : \ \varphi_1^*(t) = x_0(t),\ \varphi_j^*(t) = y_{j-1}^0(t+T_0,z_*),\ j = 2,\ldots,m,$$
$$-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$$

оператора Π_0 (при условии, конечно, что $\varphi_j^*(t) \in S_j$, $j = 2,\ldots,m$). Последние же требования не являются ограничениями, поскольку, как уже говорилось выше, множества S_j $j = 2,\ldots,m$ из (12) можно считать произвольными замкнутыми и ограниченными подмножествами пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = \bigl(\varphi_1^*(t), \dots, \varphi_m^*(t)\bigr) \in S$ является неподвижной точкой оператора Π_0, то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а вектор $z_* = (\varphi_2^*(-\sigma_0), \dots, \varphi_m^*(-\sigma_0))$ таков, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (24) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух множеств: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и совокупности собственных значений матрицы Якоби $\Phi'(z_*)$.

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 2 (о соответствии). *Каждой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (27), удовлетворяющей условию $\det(I - \Phi'(z_*)) \neq 0$, где I – единичная матрица, соответствует релаксационный цикл системы (8), (9). Этот цикл существует при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и является экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) при $r_* < 1$ (> 1), где r_* – спектральный радиус матрицы $\Phi'(z_*)$.*

Доказательство данного утверждения также опустим, поскольку оно может быть легко получено модификацией соответствующего утверждения из [7,10] для системы связанных осцилляторов с диффузионным взаимодействием.

Теорема 2 сводит интересующую нас проблему автоволновых процессов системы (17) к поиску неподвижных точек отображения (27). Вопрос о количестве и устойчивости последних будет изучен в следующем пункте. Здесь же приведем указанное отображение к некоторому инвариантному виду, не зависящему от начального момента времени $t = -\sigma_0$.

Заметим в первую очередь, что интересующее нас отображение представляет собой оператор сдвига по траекториям системы (17) с T_0-периодическим импульсным воздействием за отрезок времени $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0$. А это означает, что его можно записать в инвариантной форме, заменяя указанный выше отрезок не зависящим от σ_0 промежутком $0 \le t \le T_0$.

Действительно, введем в рассмотрение оператор сдвига $P^t(z)$, $P^0(z) = z$, $P^t(0) \equiv 0$ по траекториям системы (19) и положим $\overline{z} = \Phi(z)$. Тогда отображение (27) может быть представлено в виде

$$\overline{z} = \bigl(P^{T_0 - t_0 - 1 - \sigma_0} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^{1+\sigma_0}\bigr)(z),$$

где через P_1, P_2 обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t = 1$ и $t = t_0 + 1$ соответственно, действующие по правилам

$$P_1(z) = z - (1 + a)P^{-1}(z), \quad P_2(z) = z - (1 + 1/a)P^{-1}(z).$$

Далее, применим к левой и правой части получившегося равенства оператор P^{σ_0}. В результате с учетом очевидных соотношений

$$P^{1+\sigma_0} = P^1 \circ P^{\sigma_0}, \quad P^{T_0 - t_0 - 1 - \sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ P^{T_0 - t_0 - 1}$$

имеем

$$P^{\sigma_0}(\overline{z}) = \bigl(P^{T_0 - t_0 - 1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1\bigr)\bigl(P^{\sigma_0}(z)\bigr).$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что после замены $P^{\sigma_0}(z) \to z$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z \to \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl(P^{T_0-t_0-1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1\bigr)(z),$$

или, что то же самое,

$$z \to \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \dots, y_{m-1}^0(t,z))\big|_{t=T_0}, \tag{28}$$

где $(y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \dots, y_{m-1}^0(t,z))$ – решение аналогичной (17), (18) задачи Коши для системы (17) с начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})\big|_{t=0} = z, \quad z = (z_1, \dots, z_{m-1}). \tag{29}$$

Подчеркнем, что в силу леммы 1 это отображение заведомо определено во всем пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$.

3. Аттракторы предельного отображения

В данном пункте обратимся к актуальному в связи с теоремой 2 вопросу о количестве и устойчивости неподвижных точек отображения (28). Ниже в предположении о малости d будут найдены две группы его устойчивых неподвижных точек. В случае первой из этих групп мы усилим условие (4) и предположим, что

$$a > m - 1. \tag{30}$$

Итак, пусть выполнено условие (30). Тогда подставим в (18) соотношения

$$z_j = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \dots, m-1, \tag{31}$$

где $v = (v_1, \dots, v_{m-1}) \in \Omega$, Ω – произвольный компакт, и, как обычно, обозначим через $\bigl(y_1(t,v,d), \dots, y_{m-1}(t,v,d)\bigr)$ решение получившейся задачи Коши. Несложный ее анализ приводит к выводу, что при $d \to 0$ справедлива серия асимптотических равенств:

$$y_j(t,v,d) = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + v_j + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad 0 \le t < 1, \tag{32}$$

$$y_j(t,v,d) = \ln\frac{1}{d} + \omega_j^0(t,v) + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad 1 \le t < t_0 + 1, \tag{33}$$

$$y_j(t,v,d) = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + \psi_j(v) + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad t_0 + 1 \le t \le T_0, \tag{34}$$

остатки в которых равномерны по t, v и сохраняют свой порядок малости при дифференцировании по v. Далее, фигурирующие в (33) функции $\omega_j^0(t,v)$, $j = 1, \dots, m-1$ определятся из задачи Коши

$$\begin{gathered}
\dot\omega_j = \exp\omega_{j+1} - \exp\omega_j, \quad j = 1, \dots, m-2,\\
\dot\omega_{m-1} = -\exp\omega_{m-1},\\
\omega_j\big|_{t=1} = -a\,v_j, \quad j = 1, \dots, m-1
\end{gathered}$$

и имеют вид

$$\omega^0_{m-1}(t,v)+\ldots+\omega^0_{m-s}(t,v)= \\ =-\ln\left\{\frac{(t-1)^s}{s!}+\sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{(t-1)^\ell}{\ell!}\exp\left(a\sum_{j=1}^{s-\ell}v_{m-j}\right)\right\},\quad s=1,\ldots,m-1. \tag{35}$$

Что же касается функций $\psi_j(v)$ из (34), то они задаются равенствами вида

$$\psi_j(v)=\omega^0_j(t,v)\big|_{t=t_0+1}-(1+1/a)\omega^0_j(t,v)\big|_{t=t_0},\quad j=1,\ldots,m-1. \tag{36}$$

Перечисленные факты (32) – (35) свидетельствуют о том, что после замены переменных (31) отображение (28) имеет при $d\to 0$ в метрике $C^1(\Omega)$ предел вида

$$v_j\to\psi_j(v),\quad j=1,\ldots,m-1. \tag{37}$$

В свою очередь, отображение (37) после перехода к переменным

$$\alpha_s=-v_{m-1}-\ldots-v_{m-s},\quad s=1,\ldots,m-1$$

принимает вид

$$\alpha_k\to\ln\big(r_{1,k}+\exp(-a\alpha_k)\big)-(1+1/a)\ln\big(r_{2,k}+\exp(-a\alpha_k)\big), \\ k=1,\ldots,m-1, \tag{38}$$

где

$$r_{1,1}=1+1/a,\quad r_{2,1}=1/a, \tag{39}$$

$$r_{1,k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})=\frac{(1+1/a)^k}{k!}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{(1+1/a)^\ell}{\ell!}\exp(-a\alpha_{k-\ell}), \\ r_{2,k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})=\frac{1}{a^k\,k!}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{1}{a^\ell\,\ell!}\exp(-a\alpha_{k-\ell}),\quad k=2,\ldots,m-1. \tag{40}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что оно имеет единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $(\alpha^*_1,\ldots,\alpha^*_{m-1})$, которой в исходном отображении (28) отвечает устойчивая неподвижная точка вида

$$z_*=(z^*_1,\ldots,z^*_{m-1}),\quad z^*_j=-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d}+v^*_j+O(d^{1-(m-1)/a}), \\ j=1,\ldots,m-1,\quad d\to 0, \tag{41}$$

где $v^*_{m-1}=-\alpha^*_1$, $v^*_{m-s}=\alpha^*_{s-1}-\alpha^*_s$, $s=2,\ldots,m-1$.

Интересно отметить, что отображение (28) инвариантно относительно преобразования

$$(z_1,\ldots,z_{m-1})\xrightarrow{\mathscr{A}}(z_2,z_3,\ldots,z_{m-1},-z_1-z_2-\ldots-z_{m-1}). \tag{42}$$

Поэтому найденная нами неподвижная точка (41) порождает сразу m устойчивых неподвижных точек

$$z^{(k)}_*=\mathscr{A}^kz_*,\quad k=0,1,\ldots,m-1 \tag{43}$$

(подчеркнем, что $\mathscr{A}^m = I$, где I – единичный оператор). Остается добавить, что в исходной системе (5) этим точкам отвечает набор из m устойчивых релаксационных периодических движений, переходящих друг в друга при циклических перестановках координат u_j, $j = 1, \ldots, m$.

При отыскании второй группы устойчивых неподвижных точек отображения (28) вернемся к прежнему условию (4) на параметр a. Как и в предыдущем случае, здесь достаточно знать какую-либо одну устойчивую неподвижную точку, а остальные получаются из нее по правилам (42), (43).

Итак, положим в (18)

$$z_j = \frac{1}{a(m-1)} \ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \ldots, m-1, \quad v = (v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \Omega, \tag{44}$$

где, как и ранее, Ω – произвольный компакт. Характерная особенность данного случая состоит в том, что при условиях (44) предельное отображение (37) оказывается тождественным по части переменных. Поэтому ниже при построении асимптотики при $d \to 0$ компонент $y_j(t, v, d)$, $j = 1, \ldots, m-1$ решения задачи Коши (17), (18), (44) в некоторых формулах будут учтены поправки порядка d^σ, где $\sigma = 1 - [a(m-1)]^{-1} > 0$.

Обратимся сначала к промежутку $0 \le t < 1$. Несложный подсчет показывает, что здесь

$$y_j(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln\frac{1}{d} + v_j + d^\sigma \delta_j(t, v) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \ldots, m-1, \tag{45}$$

где

$$\delta_j = t(\exp v_{j+1} - \exp v_j), \quad j = 1, \ldots, m-2; \quad \delta_{m-1} = -t \exp v_{m-1}. \tag{46}$$

Далее, при $1 \le t < t_0 + 1$ с учетом уже установленных соотношений (45), (46) приходим к равенствам

$$\begin{gathered} y_j(t, v, d) = -\frac{1}{m-1} \ln\frac{1}{d} - a\,v_j + d^\sigma(\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \\ j = 1, \ldots, m-2; \end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered} y_{m-1}(t, v, d) = -\frac{1}{m-1} \ln\frac{1}{d} + \\ + \ln\left[(t-1)\exp\left(a\sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\,v_{m-1})\right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{48}$$

И наконец, при $t_0 + 1 \le t \le T_0$ получаем асимптотические представления

$$\begin{gathered} y_j(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln\frac{1}{d} + v_j + \\ + d^\sigma(t - t_0 - 1 - 1/a)(\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \ldots, m-2; \end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered} y_{m-1}(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln\frac{1}{d} + \\ + \ln\left[t_0 \exp\left(a\sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\,v_{m-1})\right] - \\ - (1 + 1/a)\ln\left[(t_0 - 1)\exp\left(a\sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\,v_{m-1})\right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{50}$$

Добавим еще, что во всех формулах (45) – (50) остатки имеют указанный порядок малости равномерно по t, v и сохраняют его при дифференцировании по v.

Из приведенного асимптотического анализа следует, что в случае (44) отображение (28) записывается в виде

$$v_j \to v_j + d^\sigma (a - 1/a)(\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \ldots, m-2; \tag{51}$$

$$\begin{gathered} v_{m-1} \to \ln\left[t_0 \exp\left(a\sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\, v_{m-1})\right] - \\ -(1+1/a)\ln\left[(t_0 - 1)\exp\left(a\sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\, v_{m-1})\right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{52}$$

Анализ получившегося отображения тесно связан со свойствами вспомогательного одномерного отображения

$$\alpha \to \psi_{r_1, r_2}(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln\bigl(r_1 + \exp(-a\alpha)\bigr) - (1 + 1/a)\ln\bigl(r_2 + \exp(-a\alpha)\bigr) \tag{53}$$

с двумя параметрами $r_1, r_2 > 0$, удовлетворяющими условию

$$r_1 > (1 + 1/a) r_2. \tag{54}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении неравенства* (54) *отображение* (53) *имеет единственную глобально экспоненциально устойчивую неподвижную точку* $\alpha_* = \alpha_*(r_1, r_2)$.

Доказательство. Отметим сначала вытекающие из явного вида функции $\psi_{r_1,r_2}(\alpha)$ (см. (53)) асимптотические свойства

$$\begin{gathered} \lim_{\alpha\to+\infty} \psi_{r_1,r_2}(\alpha) = \ln r_1 - (1+1/a)\ln r_2, \\ \psi_{r_1,r_2}(\alpha) = \alpha + \bigl(r_1 - (1+1/a)r_2\bigr)\exp(a\alpha) + O\bigl(\exp(2a\alpha)\bigr), \quad \alpha \to -\infty. \end{gathered} \tag{55}$$

Учитывая, далее, в (55) условие (54), приходим к выводу, что при всех достаточно больших $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\psi_{r_1,r_2}(\alpha) < \alpha$, а при всех достаточно больших по модулю отрицательных α – неравенство $\psi_{r_1,r_2}(\alpha) > \alpha$. Таким образом, отображение (53) заведомо имеет хотя бы одну неподвижную точку $\alpha = \alpha_*$, являющуюся, очевидно, корнем уравнения

$$\exp(\alpha_*) = \frac{r_1 + \exp(-a\alpha_*)}{\bigl(r_2 + \exp(-a\alpha_*)\bigr)^{1+1/a}}\,. \tag{56}$$

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденной неподвижной точки. В связи с этим обратим внимание, что требование (54) влечет выполнение неравенства $r_1 > r_2$. Используя данный факт, убеждаемся, что, во-первых,

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\alpha}\,\psi_{r_1,r_2}(\alpha) = \\ = \exp(-a\alpha)\left(\frac{a(r_1 - r_2)}{\bigl(r_1 + \exp(-a\alpha)\bigr)\bigl(r_2 + \exp(-a\alpha)\bigr)} + \frac{1}{r_2 + \exp(-a\alpha)}\right) > 0, \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}; \end{gathered} \tag{57}$$

во-вторых, за устойчивость неподвижной точки $\alpha = \alpha_*$ отвечает мультипликатор

$$\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\alpha}\,\psi_{r_1,r_2}(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_*} = \left(\frac{v_*+r_2}{v_*+r_1}\right)^a \left(1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_1}\right)\Big|_{v_*=\exp(-a\alpha_*)}, \tag{58}$$

являющийся положительным (при выводе равенства (58) привлекались соотношения (56), (57)). Кроме того, учитывая, что $a > 1$, и опираясь на очевидные оценки

$$\left(\frac{v_*+r_1}{v_*+r_2}\right)^a = \left(1+\frac{r_1-r_2}{v_*+r_2}\right)^a > 1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_2} > 1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_1},$$

нетрудно увидеть, что $\mu_* < 1$.

Итак, мы убедились, что любая возможная неподвижная точка $\alpha = \alpha_*$ отображения (53) является экспоненциально устойчивой. А это значит, что на самом деле такая точка единственна и в силу монотонности нашего отображения (см. (57)) глобально устойчива. Лемма 2 доказана.

Вернемся к отображению (51), (52) и заметим, что при $d = 0$ в силу указанных в лемме 2 свойств вспомогательного отображения (53) отображение (51), (52) допускает экспоненциально устойчивое $(m-2)$-мерное инвариантное многообразие, состоящее из неподвижных точек. Упомянутое многообразие задается равенством

$$\begin{gathered}\{(v_1,\ldots,v_{m-1}):\ v_{m-1} = v_* - v_1 - v_2 - \ldots - v_{m-2},\\ v_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,m-2\},\end{gathered} \tag{59}$$

где $v = v_*$ – единственный корень уравнения

$$v = \ln[t_0 + \exp(-a\,v)] - (1+1/a)\ln[t_0 - 1 + \exp(-a\,v)].$$

При малых $d > 0$ аналог инвариантного многообразия (59) сохраняется, а сужение на него отображения (51), (52) представляет собой оператор, асимптотически близкий к тождественному. В связи с этим указанный оператор можно аппроксимировать соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В нашем случае эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dv_j}{d\tau} &= \exp v_{j+1} - \exp v_j, \quad j = 1,\ldots,m-3,\\ \frac{dv_{m-2}}{d\tau} &= \exp(v_* - v_1 - v_2 - \ldots - v_{m-2}) - \exp v_{m-2}.\end{aligned} \tag{60}$$

Ясно также, что любому ее экспоненциально устойчивому состоянию равновесия $\mathscr{O}$ в исходном отображении (51), (52) при всех достаточно малых $d > 0$ отвечает устойчивая неподвижная точка $\mathscr{O}(d)$, асимптотически близкая к $\mathscr{O}$.

Анализ системы (60) не вызывает затруднений. Действительно, после замен $v_j = w_j + v_*/(m-1)$, $j = 1,\ldots,m-2$, $\tau\exp(v_*/(m-1)) \to \tau$ она приводится к виду

$$\begin{gathered}\dot w_j = \exp w_{j+1} - \exp w_j, \quad j = 1,\ldots,m-2,\\ w_{m-1} = -w_1 - w_2 - \ldots - w_{m-2}.\end{gathered} \tag{61}$$

А отсюда и из отмеченных выше свойств аналогичной системы (19) вытекает, что нулевое состояние равновесия системы (61) глобально экспоненциально устойчиво.

Возвращаясь к отображению (28), приходим к выводу, что при условии (4) и при всех $d \ll 1$ оно допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$z_{**} = (z_1^{**}, \ldots, z_{m-1}^{**}), \quad z_j^{**} = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + \frac{v_*}{m-1} + o(1), \\ j = 1, \ldots, m-1, \tag{62}$$

а также серию устойчивых неподвижных точек

$$z_{**}^{(k)} = \mathscr{A}^k z_{**}, \quad k = 1, \ldots, m-1. \tag{63}$$

Как и в случае (41), (43), в исходной системе (5) неподвижным точкам (62), (63) соответствуют устойчивые релаксационные периодические движения, переходящие друг в друга при циклических перестановках компонент u_j, $j = 1, \ldots, m$. Добавим еще, что при условии (30) найденные нами две группы устойчивых периодических решений сосуществуют.

4. Заключение

Подводя итоги работы, отметим, что теорема 2 о соответствии и проделанный в пункте 3 асимптотический анализ отображения (28) приводят к следующему утверждению, являющемуся основным результатом данной статьи.

Теорема 3. *Пусть параметр a удовлетворяет неравенству* (30)*(удовлетворяет неравенству* (4) *и не удовлетворяет неравенству* (30)*). Тогда для любых достаточно малых* $d_2 > d_1 > 0$ *найдется такое достаточно большое* $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$, *что при всех* $d_1 \le d \le d_2$, $\lambda \ge \lambda_0$ *система* (5) *имеет как минимум две (одну) группы решений, каждая из которых состоит из m экспоненциально орбитально устойчивых автоволновых периодических движений.*

Из сформулированной теоремы следует, что при согласованном уменьшении d и увеличении параметров λ, m в системе (5) наблюдается феномен буферности, а точнее, происходит неограниченное накапливание сосуществующих устойчивых циклов. Отметим, что буферность наблюдается и для ряда других классов цепочек осцилляторов с однонаправленной связью (см. [16–20]).

Список литературы

[1] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891; [Mishchenko E. F., Pontryagin L. S., “Periodicheskiye resheniya sistem differentsial’nykh uravneniy, blizkiye k razryvnym”, *Dokl. AN SSSR*, **102**:5 (1955), 889–891, (in Russian).]

[2] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., “Релаксационные колебания в математических моделях экологии”, *Тр. МИРАН*, **199** (1993); English transl.: Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S., “Relaxational oscillations in mathematical models of ecology”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **199** (1995), 1–126.

[3] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та РАН*, **216** (1997), 126–153; English transl.: Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its C^1-approximation”, *Dynamical systems and related topics. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146.

[4] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии”, *Доклады академии наук*, **434**:6 (2010), 735–738; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in delay systems in ecology”, *Doklady mathematics*, **82**:2 (2010), 794–797.

[5] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:12 (2010), 2099–2112; English transl.: Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson's equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:12 (2010), 1990–2002.

[6] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation”, *Sbornik: Mathematics*, **202**:6 (2011), 829–858.

[7] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *УМН*, **67**:2(404) (2012), 109–156; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Math. Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.

[8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.

[9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференц. уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.

[10] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.

[11] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 840–858; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **2**:5 (2012), 702–719.

[12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах”, *Матем. заметки*, **93**:5 (2013), 684–701; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems”, *Mathematical Notes*, **93**:5 (2013), 676–690.

[13] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М, 1975, 248 с.; English transl.: Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, 1980, 228 pp.

[14] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995; [Mishchenko E. F., Kolesov Yu. S., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., *Periodicheskiye dvizheniya i bifurkatsionnyye protsessy v singulyarno vozmushchennykh sistemakh*, Fizmatlit, M., 1995, (in Russian).]

[15] Кащенко С. А., Майоров В. В., *Модели волновой памяти*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009, 288 с.; [Kashchenko S. A., Mayorov V. V., *Modeli volnovoy pamyati*, Knizhnyy dom "LIBROKOM", M., 2009, 288 pp., (in Russian).]

[16] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений”, *Теоретическая и математическая физика*, **175**:1 (2013), 62–83; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Periodic traveling-wave-type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **175**:1 (2013), 499–517.

[17] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Избранные вопросы математической физики и анализа. Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова*, Тр. МИАН, **285**, МАИК, М., 2014, 89–106; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Autowave processes in continual chains of unidirectionally coupled oscillators", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **285**, 2014, 81–98.

[18] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Теоретическая и математическая физика*, **181**:2 (2014), 254–275; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Buffering effect in continuous chains of unidirectionally coupled generators", *Theoretical and Mathematical Physics*, **181**:2 (2014), 1349–1366.

[19] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности и хаос в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Доклады Академии наук*, **457**:3 (2014), 278–281; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Buffer Phenomenon and Chaos in Circular Chains of Unidirectionally Coupled Oscillators", *Doklady Mathematics*, **90**:1 (2014), 509–513.

[20] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Изв. РАН.*, Сер. матем., **78**, 2014, 73–108; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators", *Izvestiya: Mathematics*, **78**, 2014, 708–743.

Self-excited Wave Processes in Chains of Unidirectionally Coupled Impulse Neurons

Glyzin S. D.[*,**], Kolesov A. Yu.[*], Rozov N. Kh..[***]

[*] *P.G. Demidov Yaroslavl State University,*
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
[**] *Scientific Center in Chernogolovka RAS*
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
[***] *M.V. Lomonosov Moscow State University,*
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: impulse neurons, chain of unidirectionally coupled oscillators, travelling wave, asymptotic behaviour, stability, buffer phenomenon

The article is devoted to the mathematical modeling of neural activity. We propose new classes of singularly perturbed differential-difference equations with delay of Volterra type. With these systems, the models as a single neuron or neural networks are described. We study attractors of ring systems of unidirectionally coupled impulse neurons in the case where the number of links in the system increases indefinitely. In order to study periodic solutions of travelling wave type of this system, some special tricks are used which reduce the existence and stability problems for cycles to the investigation of auxiliary system with impulse actions. Using this approach, we establish that the number of stable self-excited waves simultaneously existing in the chain increases unboundedly as the number of links of the chain increases, that is, the well-known buffer phenomenon occurs.

Сведения об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;
Отдел прикладных сетевых исследований НЦЧ РАН,
ведущий научный сотрудник;
Колесов Андрей Юрьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений
Розов Николай Христович,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, декан факультета
педагогического образования

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 420–438

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–420–438

УДК 517.9

Устойчивость непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием

Кащенко А. А.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: sa-ahr@yandex.ru

получена 25 мая 2015

Ключевые слова: уравнение Лэнга–Кобаяши, большое запаздывание, лазерная динамика, устойчивость

В данной работе решается задача существования и устойчивости непрерывных волн для модели полупроводникового лазера. Эта модель была предложена Лэнгом и Кобаяши и имеет вид двух дифференциальных уравнений с запаздыванием. Время запаздывания предполагается достаточно большим. Исследуется вопрос существования непрерывных волн для модели Лэнга–Кобаяши. Построено специальное множество I, зависящее от всех параметров задачи. Условие существования непрерывных волн состоит в том, что „главная часть“ решений должна лежать на множестве I. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн при достаточно больших значениях параметра запаздывания. В случае нулевого коэффициента уширения линии найдены необходимые и достаточные условия устойчивости. Изучено расположение областей устойчивости на множестве I. Доказано, что в случае нулевого коэффициента уширения линии на множестве I может быть не более одной области устойчивости, найдены необходимые и достаточные условия ее существования.

Введение

В работе исследуются важные свойства некоторых уравнений с запаздыванием, играющих особую роль в моделировании многих прикладных задач. Основу этих исследований составляет анализ поведения решений вида непрерывных волн при достаточно больших значениях параметра запаздывания. Близкие по постановке задачи исследовались в работах автора [1–3]. Так, в работе [1] изучаются вопросы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

существования и устойчивости простейших периодических решений для уравнения Стюарта–Ландау с большим запаздыванием [4,5], а в работах [2,3] — вопросы существования и устойчивости непрерывных волн в модели, предложенной для описания динамики лазера [6–9]. Был разработан специальный метод, с помощью которого удалось ответить на вопросы о существовании и устойчивости асимптотически большого множества непрерывных волн. Кроме этого, разработан алгоритм построения асимптотики таких решений при достаточно больших значениях параметра запаздывания. Настоящая работа тесно примыкает к работам автора [1–3]. В ней продолжено исследование поведения решений другой, важной для приложений, системы с запаздыванием Лэнга–Кобаяши [10]. Эта система давно уже стала классической и является одной из основных при описании динамики полупроводниковых лазеров. Во многих работах исследовалась динамика решений модели Лэнга–Кобаяши для фиксированных значений параметра запаздывания [11–21]. В частности, были обнаружены различные сценарии перехода к хаосу [11–15], доказано, что по крайней мере одна мода (с максимальной интенсивностью) всегда остается устойчивой [19]. В настоящей работе строится асимптотика семейства решений вида непрерывных волн для достаточно больших значений запаздывания и рассматривается вопрос об устойчивости таких решений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Лэнга–Кобаяши

$$\begin{gathered}\dot E = \tfrac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma\exp(i\varphi)E(t-T),\\ \dot y = q - y - y|E|^2.\end{gathered}$$

Здесь параметры v, γ, q положительны, параметр α действительный, параметр φ принадлежит полуинтервалу $[0,2\pi)$. Основное предположение состоит в том, что параметр T является достаточно большим: $T \gg 1$. Сделаем перенормировку времени $t \to Tt$ и замену $\varepsilon = 1/T$, тогда система уравнений Лэнга–Кобаяши перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon\dot E = \tfrac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma\exp(i\varphi)E(t-1),\\ \varepsilon\dot y = q - y - y|E|^2.\end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что положительный параметр ε является достаточно малым: $\varepsilon \ll 1$. В данной работе мы будем исследовать вопросы существования и устойчивости в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}(\mathbb{C})\times\mathbb{R}$ решений вида непрерывной волны при достаточно малых значениях параметра ε.

2. Существование решения

Будем искать решения системы (1) в виде непрерывной волны:

$$E = R\exp(i\Delta t), \qquad y = Y. \tag{2}$$

Здесь параметры R, Δ, Y не зависят от времени. Следуя [1–3], будем искать R и Δ в виде: $R = (\rho + \varepsilon w)$, $\Delta = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$. Величина δ действительная, $\rho > 0$,

n — целое число, Ω принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$, $w = w(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ действительные, ограниченные при $\varepsilon \to 0$ функции. Функция $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ определяется таким образом: она принимает значения из полуинтервала $[0, 2\pi)$ и $\delta/\varepsilon + \theta$ делится нацело на 2π.

Подставляя выражения для R и Δ в (2) и (1), получаем уравнение для определения всех фигурирующих в (2) параметров:

$$\begin{aligned} i(\delta + \varepsilon(\theta + \Omega + 2\pi n) + \varepsilon^2 d) &= \frac{1}{2}v(1 + i\alpha)\left(\frac{q}{1 + (\rho + \varepsilon w)^2} - 1\right) + \gamma e^{i(\varphi - \Omega - \varepsilon d)}, \\ Y &= q(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^{-1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Так как ε — малый параметр, то должно выполняться равенство

$$i(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)) - 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1) = \gamma \exp(i(\varphi - \Omega)). \qquad (4)$$

Приравнивая квадраты модулей левой и правой части уравнения (4), получаем условие разрешимости данного уравнения:

$$(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1))^2 + 1/4v^2(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)^2 = \gamma^2. \qquad (5)$$

Пусть значения δ и ρ^2 таковы, что выполняется равенство (5). Тогда для каждого набора параметров исходного уравнения (1) найдется единственное значение Ω из $[0, 2\pi)$, для которого равенство (4) будет выполняться.

Временно зафиксируем значение $\theta(\varepsilon) = \theta$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестных значений w_0 и d_0 функций $w(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$:

$$i(\theta + \Omega + 2\pi n) = -v(1 + i\alpha)q\rho w_0(1 + \rho^2)^{-2} - \gamma i d_0 \exp(i(\varphi - \Omega)).$$

Выделяя действительную и мнимую части этого выражения, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -vq\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 + \gamma \sin(\varphi - \Omega)d_0, \\ \theta + \Omega + 2\pi n &= -v\alpha q\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)d_0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Определитель данной системы равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) = 0. \qquad (7)$$

Если определитель системы (6) отличен от нуля, то в силу теоремы о неявной функции существует локально единственное решение системы (3) для каждого фиксированного θ. Дальше остается только подставить в него вместо значения θ функцию $\theta(\varepsilon)$.

Пусть теперь выполнено условие (7). Используя равенство (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma \cos(\varphi - \Omega) &= -1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1), \\ \gamma \sin(\varphi - \Omega) &= \delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1). \end{aligned} \qquad (8)$$

Таким образом, соотношение (7) эквивалентно равенству

$$\alpha\delta = 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)(1 + \alpha^2). \qquad (9)$$

Заметим, что это равенство задает прямую на плоскости $(\delta, (1+\rho^2)^{-1})$. Тем самым точек пересечения с эллипсом (5) может быть не более двух. Подставив условие (9) в (5), получим, что в данных точках $\delta_{1,2}^2 = \gamma^2(1+\alpha^2)$. Отсюда определяем условие на $\rho_{1,2}^2$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (v\sqrt{1+\alpha^2}(q-1) - 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1+\alpha^2} + 2\alpha\gamma), \\ \rho_2^2 &= (v\sqrt{1+\alpha^2}(q-1) + 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1+\alpha^2} - 2\alpha\gamma). \end{aligned} \tag{10}$$

Остается проверить положительность ρ_1^2 и ρ_2^2. Несложно увидеть, что количество положительных значений среди правых частей (10) может изменяться от нуля до двух. Таким образом, число точек пересечения дуг эллипса (5) с прямой (9) может быть равно нулю (см. рис. 1.a)), одному (см. рис. 1.b)) или двум (см. рис. 1.c)).

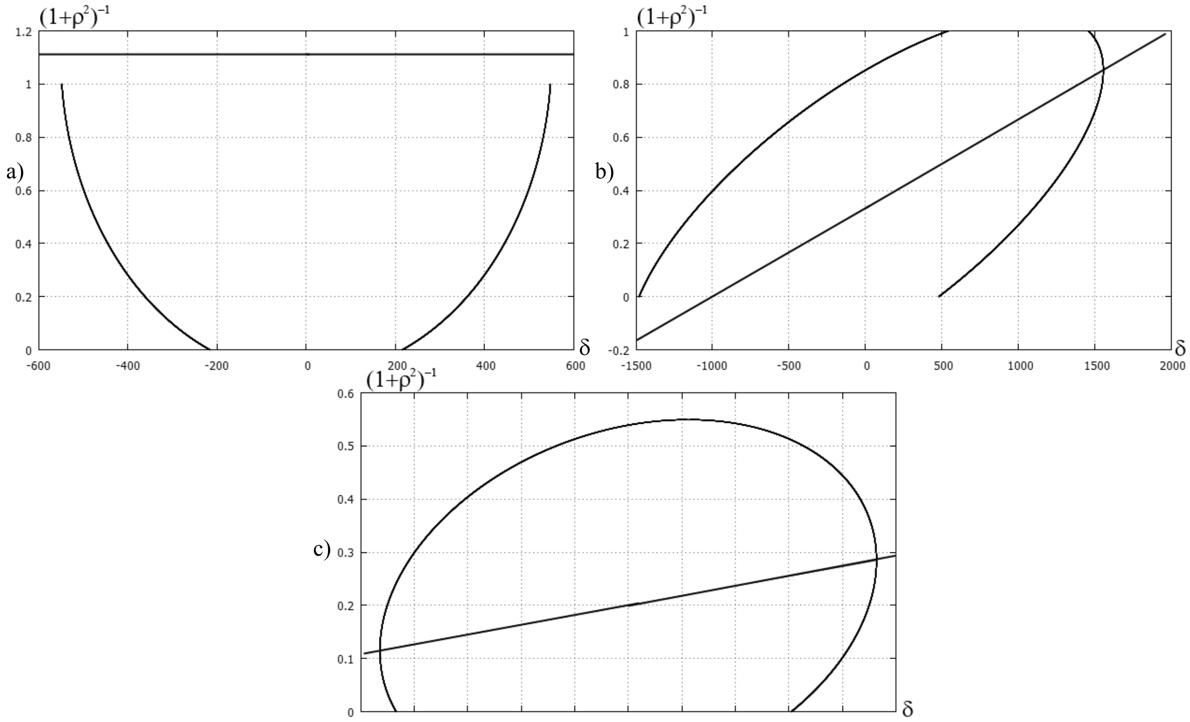

Рис. 1. Количество точек пересечения прямой (9) с дугами эллипсов (5). Значения параметров a) $v = 1012$, $\alpha = 0$, $q = 0.9$, $\gamma = 550$; b) $v = 1000$, $\alpha = 1$, $q = 3$, $\gamma = 1100$; c) $v = 1030$, $\alpha = 0.25$, $q = 5$, $\gamma = 900$.

Сделаем замену переменной

$$r = (1+\rho^2)^{-1}.$$

Тогда переменная r должна принимать значения из полуинтервала $(0, 1]$. Уравнение кривой (5) примет вид

$$(\delta - 1/2v\alpha(qr-1))^2 + 1/4v^2(qr-1)^2 = \gamma^2. \tag{11}$$

Несложно убедиться, что уравнение (11) задает эллипс на плоскости (δ, r). Учитывая условие

$$0 < r \leq 1 \tag{12}$$

и то, что δ должно быть действительным, получаем условие на координату r точки (δ, r) эллипса (11):

$$\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} \le r \le \min\{1, (v + 2\gamma)(vq)^{-1}\}. \tag{13}$$

Из условия положительности v, γ, q следует, что могут реализовываться пять ситуаций (не считая случаев нестрогих неравенств):

$$\begin{array}{rcl} I & : & 1 < (v-2\gamma)(vq)^{-1}, \\ II & : & 0 < (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 1 < (v+2\gamma)(vq)^{-1}, \\ III & : & (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < 1 < (v+2\gamma)(vq)^{-1}, \\ IV & : & (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < (v+2\gamma)(vq)^{-1} < 1, \\ V & : & 0 < (v-2\gamma)(vq)^{-1} < (v+2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \end{array}$$

Обозначим через $I(v, \alpha, q, \gamma)$ множество точек (δ, r), получаемое пересечением эллипса (11) и полосы (12). Тогда в первом случае множество $I(v, \alpha, q, \gamma)$ пустое, во втором и четвертом случаях получается одна дуга эллипса, в третьем две дуги эллипса, а в пятом случае весь эллипс находится внутри полосы (12) (см. рис. 2). Отметим, что для существования решений вида (2) уравнения (1) необходимо вы-

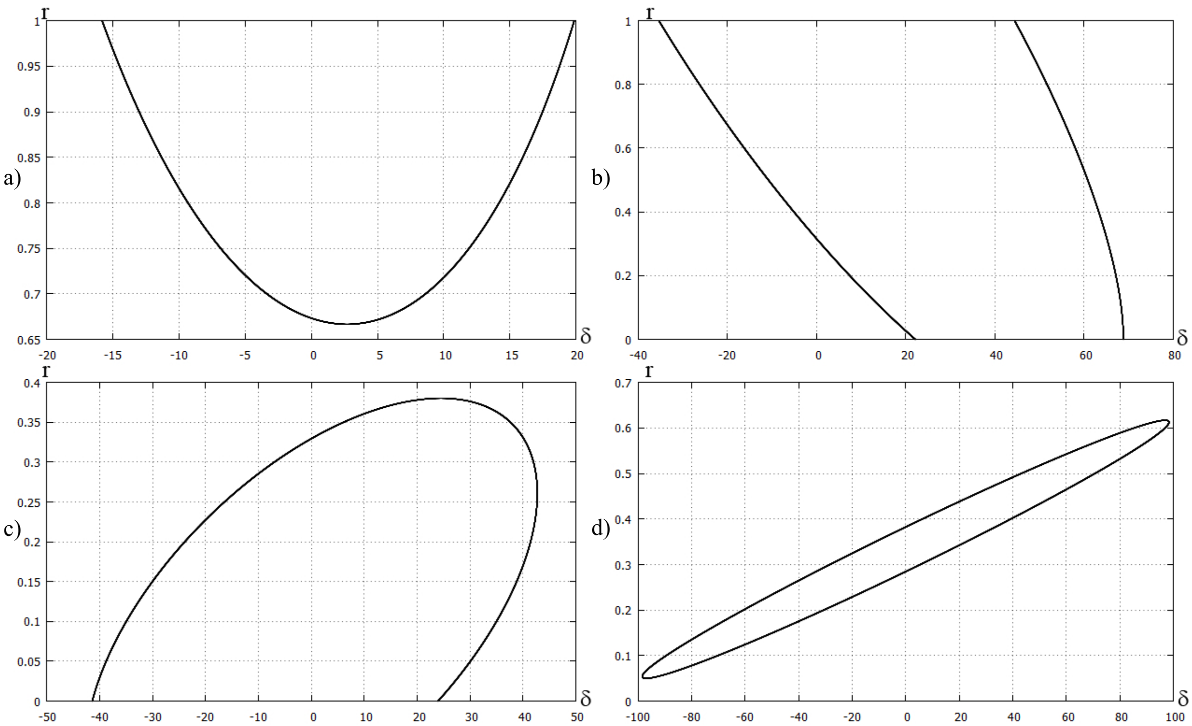

Рис. 2. Виды множеств $I(v, \alpha, q, \gamma)$. a) случай II, b) случай III, c) случай IV, d) случай V.

полнение неравенства

$$(v - 2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \tag{14}$$

Далее будем везде считать, что это неравенство выполнено.

Из приведенных выше построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство* (14). *Тогда для каждого целого значения* n *и каждой точки* $(\delta_0, (1+\rho_0^2)^{-1})$ *на кривой* (5), *кроме, возможно, двух, для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* (2) *уравнения* (1), *где* $R = (\rho_0 + \varepsilon w)$, $\Delta = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$, $Y = q(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-1}$, *а* $d = d(\varepsilon)$ *и* $w = w(\varepsilon)$ *— некоторые ограниченные при* $\varepsilon \to 0$ *функции.*

Ниже предполагаем, что выполнено условие невырожденности, то есть будем рассматривать те точки эллипсов, для которых $\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) \neq 0$.

3. Исследование устойчивости решения

3.1. Постановка задачи об устойчивости

Используя теорему Тихонова [22], выразим решение второго уравнения как функцию от $|E|$ и подставим это выражение в первое уравнение системы (1). Получим следующее уравнение на функцию E:

$$\varepsilon \dot{E} = 1/2v(1+i\alpha)(q(1+|E|^2)^{-1} - 1)E + \gamma \exp(i\varphi) E(t-1). \tag{15}$$

При достаточно малых ε для каждого фиксированного n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ у уравнения (15) есть решение

$$E_0 = (\rho + \varepsilon w) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t]. \tag{16}$$

В данной работе будем искать такие условия устойчивости, чтобы для каждого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решения (16) уравнения (15) были устойчивы в фазовом пространстве $C[-1, 0]$.

3.2. Построение квазиполинома

Линеаризуем уравнение (15) на решении (16). Для этого подставим в уравнение (15) вместо E выражение $E_0(1+z)$, где $z = z_1 + iz_2$, z_1 и z_2 действительные функции. Линеаризованная система будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z} = -v(1+i\alpha)q(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2} z_1 + \gamma \exp(i(\varphi - \Omega - \varepsilon d))(z(t-1) - z). \tag{17}$$

Выделим действительную и мнимую части уравнения (17):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_1 &= -p z_1 + \gamma \cos\Psi (z_1(t-1) - z_1) - \gamma \sin\Psi (z_2(t-1) - z_2), \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= \alpha p z_1 + \gamma \sin\Psi (z_1(t-1) - z_1) + \gamma \cos\Psi (z_2(t-1) - z_2), \end{aligned}$$

где $p = vq(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2}$, а $\Psi = \varphi - \Omega - \varepsilon d$. Тогда приходим к следующему характеристическому уравнению (относительно значений $z_1 = P$, $z_2 = Q$):

$$\varepsilon\lambda \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -p + \gamma\cos\Psi(e^{-\lambda} - 1) & -\gamma \sin\Psi(e^{-\lambda} - 1) \\ \alpha p + \gamma \sin\Psi(e^{-\lambda} - 1) & \gamma\cos\Psi(e^{-\lambda} - 1) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы данное уравнение имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(B - \varepsilon\lambda I) = 0$, где I — единичная матрица. Равенство нулю этого определителя эквивалентно равенству

$$\varepsilon^2\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\left(\frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2} - \gamma\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)(e^{-\lambda}-1)\right) + \gamma^2(e^{-\lambda}-1)^2 -$$
$$- \frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}(e^{-\lambda}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)+\alpha\sin(\varphi-\Omega-\varepsilon d)) = 0. \quad (18)$$

Исследуем расположение корней характеристического квазиполинома (18).

3.3. Изучение расположения корней квазиполинома

Для того, чтобы сделать вывод об устойчивости, необходимо изучить расположение корней характеристического квазиполинома (18). Поскольку мы линеаризовывали уравнение на периодическом решении, то при любых значениях параметров задачи у квазиполинома (18) будет корень $\lambda = 0$. Поэтому речь пойдет об орбитальной устойчивости периодических решений. Изучим расположение остальных корней. Если у квазиполинома (18) при всех достаточно малых значениях ε все корни, кроме одного, расположены в левой полуплоскости, то отсюда будет следовать устойчивость решения. Если же хотя бы один корень будет в правой комплексной полуплоскости, то это повлечет неустойчивость. Так как при каждом значении ε справа от любой вертикальной прямой на комплексной полуплоскости располагается лишь конечное число корней квазиполинома (18) (см. [23]), то среди корней квазиполинома есть корень (один или несколько) с максимальной действительной частью. Если при всех достаточно малых значениях ε максимальная действительная часть всех корней (кроме одного $\lambda = 0$ кратности один) будет отрицательная, то это означает устойчивость. Далее мы будем изучать поведение корней квазиполинома на всевозможных последовательностях $\varepsilon_m \to 0$. Если во всех рассматриваемых случаях корни будут в левой полуплоскости, значит, и корень с максимальной действительной частью будет в левой полуплоскости.

Пусть $\lambda_* = \lambda_*(\varepsilon)$ — некоторый корень (18). Тогда возможны следующие три случая.

Случай 1. $\varepsilon_m\lambda_* \to 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \to 0$.

Случай 2. $\varepsilon_m\lambda_* \to const \neq 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \to 0$.

Случай 3. $|\varepsilon_m\lambda_*| \to \infty$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m \to 0$.

Отметим, что третий случай интереса не представляет, так как из (18) следует, что в данном случае $\operatorname{Re}\lambda_* \to -\infty$ при $\varepsilon_m \to 0$.

Далее последовательно рассмотрим первые два случая.

1. Случай 1.

Потенциально возможны 3 варианта поведения λ_*.
а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что

$\lambda_* \to 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.
б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \to const \neq 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.
в) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $|\lambda_*| \to \infty$ и $\varepsilon_{m_l}\lambda_* \to 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.

Рассмотрим случай 1а). Поскольку мы линеаризовывали задачу на периодическом решении, то при любых значениях параметров есть корень $\lambda = 0$ кратности один, который на устойчивость не влияет.

Определим, к каким ненулевым константам может стремиться λ_* при $\varepsilon_m \to 0$ (случай 1б)). Предельное уравнение имеет вид

$$\gamma^2(e^{-\lambda}-1)^2 - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}(e^{-\lambda}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \qquad (19)$$

Как видно из (19), верно либо $e^{-\lambda_*} = 1+vq\rho^2\gamma^{-1}(1+\rho^2)^{-2}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))+o(1)$, либо $\lambda_* = 2\pi ki + o(1)$. Рассмотрим первую ситуацию. Для устойчивости необходимо, чтобы $|e^{-\lambda_*}| \geq 1$. Далее будем рассматривать только строгие неравенства. Тогда с учетом ограничений на параметры задачи получим необходимое условие устойчивости

$$\left[\begin{array}{lcl} \cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega) & > & 0, \\ \cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega) & < & -2\gamma(1+\rho^2)^2(vq)^{-1}\rho^{-2}. \end{array}\right. \qquad (20)$$

Теперь рассмотрим вторую ситуацию. Для этого подставим представление корня $\lambda_* = 2\pi ki + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ в квазиполином (18). Здесь λ_1 и λ_2 — неизвестные константы, подлежащие определению. Получаем, что

$$\lambda_1 = -2\pi ki\gamma^{-1}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^{-1},$$
$$\lambda_2 = \frac{2\pi ki(1+\gamma d_0(\sin(\varphi-\Omega)-\alpha\cos(\varphi-\Omega)))}{\gamma^2(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^2} -$$
$$-\frac{2\pi^2k^2(-2(1+\alpha^2)\gamma(1+\rho^2)^2\sin^2(\varphi-\Omega)+q\rho^2v(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)))}{\gamma^2q\rho^2v(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^3}.$$

Для устойчивости необходимо $\operatorname{Re}\lambda_2 \leq 0$. Потребуем, чтобы выполнялось строгое неравенство:

$$\frac{q\rho^2v}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{(1+\alpha^2)\gamma\sin^2(\varphi-\Omega)}{(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))} > 0. \qquad (21)$$

Теперь рассмотрим случай 1в). В этом случае $\varepsilon\lambda_* \to 0$, поэтому в пределе корень удовлетворяет уравнению (19). Мы считаем, что полученные ранее условия устойчивости выполняются, поэтому либо корень λ_* будет в левой полуплоскости при малых ε, либо он будет перескакивать из окрестности точки $2\pi h$ в окрестность точки $2\pi(h+1)$ или $2\pi(h-1)$, где h — некоторое целое число (так как мы считаем, что $|\lambda| \to \infty$). В этой ситуации представим $\lambda_*(\varepsilon)$ в виде $\lambda_*(\varepsilon) = 2\pi k(\varepsilon)i + \lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}$. Здесь $k(\varepsilon) \to \infty$, но принимает только целые значения, $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ — неизвестные действительные величины, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \to 0$ (порядок стремления относительно ε заранее не известен). Введем обозначение $\mu = \varepsilon k(\varepsilon)$. Тогда $\mu \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon = o(\mu)$ при $\varepsilon \to 0$. После подстановки в уравнение (18) корня λ_*

приходим к равенству

$$
\begin{gathered}
(2\pi\mu i+\varepsilon\lambda_{k,1}+i\varepsilon\lambda_{k,2})^2+\gamma^2(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)^2+2(2\pi\mu i+\varepsilon\lambda_{k,1}+\\
+i\varepsilon\lambda_{k,2})\left(\frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)\right)-\\
-\frac{\gamma vq(\rho+\varepsilon w)^2}{(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)(\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)+\alpha\sin(\varphi-\Omega-\varepsilon d))=0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Выписывая старшие члены в уравнении (22), находим соотношение на μ и первые приближения $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$:

$$
2\pi qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}i\mu+qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))(\lambda_{k,10}+i\lambda_{k,20})=0. \tag{23}
$$

Так как μ, $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ действительные, то из (23) получаем, что

$$
\begin{gathered}
\lambda_{k,2}=O(\mu),\qquad \lambda_{k,1}=o(\mu)\qquad \text{при}\qquad \mu\to 0,\\
\lambda_{k,20}=-2\pi\mu\gamma^{-1}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^{-1}.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Представим $\lambda_{k,2}=\lambda_{k,20}+\lambda_{k,21}$, где $\lambda_{k,21}=o(\lambda_{k,20})$ при $\lambda_{k,21}\to 0$. Пользуясь соотношениями (24), выпишем следующее приближение в уравнении (22):

$$
\begin{gathered}
-4\pi^2\mu^2-4\pi\mu\lambda_{k,20}\gamma\cos(\varphi-\Omega)-\gamma^2\lambda_{k,20}^2+\\
+qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))(\lambda_{k,10}+\lambda_{k,20}^2+i\lambda_{k,21})=0.
\end{gathered}
$$

Отсюда приходим к выводу, что $\lambda_{k,21}=o(\mu^2)$ и

$$
\lambda_{k,10}=\frac{4\pi^2\mu^2(1+\rho^2)^2\left(\dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))}-\dfrac{qv\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\right)}{\gamma^2qv\rho^2(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^2}.
$$

Так как из (21) следует, что $\lambda_{k,10}<0$, то случай 1в) не дал никаких новых необходимых условий устойчивости.

2. Случай 2.

Потенциально возможны 2 варианта поведения λ_* :
а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re}\lambda_*\to+\infty$ при $\varepsilon_{m_l}\to 0$;
б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re}\lambda_*\to const\ge 0$, а $\operatorname{Im}\lambda_*\to\infty$ при $\varepsilon_{m_l}\to 0$.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_*\to+\infty$ и $\lim\limits_{\varepsilon_{m_l}\to 0}\varepsilon_{m_l}\lambda_*=s$. Тогда предельное уравнение примет вид

$$
s^2+2s(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega))+\gamma^2+vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))=0. \tag{25}
$$

Из уравнения (25) получаем необходимые условия устойчивости

$$
\begin{cases}
1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega)>0,\\
\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)>-\gamma(1+\rho^2)^2/(vq\rho^2).
\end{cases}
\tag{26}
$$

Из условий (20) и (26) следует, что для устойчивости необходимо выполнение системы неравенств

$$\begin{cases} 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} + \gamma\cos(\varphi-\Omega) > 0, \\ \cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega) > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Рассмотрим случай 2б). Введем дополнительные обозначения. Пусть $g = \lim\limits_{\varepsilon_{m,l}\to 0} \exp(-\operatorname{Re}\lambda_*(\varepsilon_{m,l}))$. Тогда $g \in (0,1]$, поскольку $\operatorname{Re}\lambda_* \geq 0$. Отметим, что $\operatorname{Im}\lambda_* \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda_* \to \mathit{const} \geq 0$ и $\varepsilon\lambda_* \to \mathit{const} \neq 0$ при $\varepsilon_{m,l} \to 0$. Отсюда следует, что последовательность $\varepsilon_{m,l}$ можно проредить так, что на получившейся подпоследовательности $\{\varepsilon_j\}$ существует предел $b = \lim\limits_{\varepsilon_j\to 0} \varepsilon_j \operatorname{Im}\lambda_*(\varepsilon_j) \neq 0$. Пусть χ — некоторое число из $[0, 2\pi)$. Тогда семейство предельных уравнений в случае 2б) будет иметь вид

$$-b^2 + 2ib\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(ge^{-i\chi}-1)\right) + \\ + \gamma^2(ge^{-i\chi}-1)^2 - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(ge^{-i\chi}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \tag{28}$$

Если ни при каком значении пары (g,χ) из $(0,1]\times[0,2\pi)$ у уравнения (28) не будет действительных корней $b \neq 0$, то у уравнения (18) не будет корней из случая 2б).

Выделим действительную и мнимую части уравнения (28). Действительная часть:

$$-b^2 - 2b\gamma\cos(\varphi-\Omega)g\sin\chi + \gamma^2((g\cos\chi-1)^2 - g^2\sin^2\chi) - \\ - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(g\cos\chi-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \tag{29}$$

Мнимая:

$$b\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(g\cos\chi-1)\right) = \\ = -\gamma g\sin\chi\left(\gamma(1-g\cos\chi) + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))\right). \tag{30}$$

Пусть

$$1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(g\cos\chi-1) = 0. \tag{31}$$

Тогда исходя из положительности параметров v, q, ρ, получаем, что $\cos(\varphi-\Omega) \neq 0$. Отсюда приходим к равенству

$$g\cos\chi = 1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)}.$$

Если выполняется неравенство

$$\left|1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)}\right| < 1,$$

то найдется пара (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ такая, что равенство (31) выполнится. Для того, чтобы равенство (30) выполнилось в случае зануления коэффициента перед b, необходимо, чтобы правая часть равенства (30) обратилась в 0. Из условия устойчивости (27) и ограничений на параметры следует, что правая часть (30) может быть равна 0 только в случае $\sin\chi = 0$. Действительная часть (29) в этом случае примет вид

$$b^2 = \gamma(g\cos\chi - 1)\left(\gamma(g\cos\chi - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega))\right).$$

В силу неравенства $g\cos\chi < 1$ и условия (27), получаем, что при условии (31) у системы (29), (30) будут действительные ненулевые корни b. Поэтому потребуем невырождения коэффициента при b в (30), то есть выполнения неравенства

$$\left|1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi - \Omega)}\right| > 1. \tag{32}$$

Система (21), (27), (32) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} + 2\gamma\cos(\varphi - \Omega) > 0, \\ \dfrac{qv\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega))} > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Пусть условие (32) выполнено, тогда коэффициент при b в (30) отличен от нуля для любой пары (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$.

Пусть выполнено условие $v - 2\gamma > 0$. Тогда эллипс находится выше оси абсцисс и точка $(\delta_{low}, (1 + \rho_{low}^2)^{-1})$, где

$$(1 + \rho_{low}^2)^{-1} = (v - 2\gamma)/(vq), \qquad \delta_{low} = 1/2v\alpha(q(1 + \rho_{low}^2)^{-1} - 1),$$

принадлежит множеству $I(v, \alpha, q, \gamma)$. В этой точке $\cos(\varphi - \Omega) = 1$, поэтому уравнение (28) в данной точке примет вид

$$-b^2 + 2ib\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma(ge^{-i\chi} - 1)\right) + \\ + \gamma(ge^{-i\chi} - 1)\left(\gamma(ge^{-i\chi} - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\right) = 0. \tag{34}$$

Выделим действительную и мнимую части в уравнении (34):

$$-b^2 - 2b\gamma g\sin\chi + \gamma^2((g\cos\chi - 1)^2 - g^2\sin^2\chi) - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(g\cos\chi - 1) = 0, \tag{35}$$

$$b(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma(g\cos\chi - 1)) = -\gamma g\sin\chi(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma(g\cos\chi - 1)). \tag{36}$$

Из уравнения (36) получаем, что $b = -\gamma g\sin\chi$. Подставляя значение b в уравнение (35), приходим к равенству

$$\gamma(g\cos\chi - 1)(\gamma(g\cos\chi - 1) - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}) = 0.$$

Первый и третий множители данного равенства отличны от нуля, а второй множитель равен нулю только в случае $\cos\chi = 1$, то есть только при $b = 0$, а, согласно построениям данного пункта, $b \neq 0$. Таким образом, в точке $(\delta_{low}, (1+\rho_{low}^2)^{-1})$ у уравнения (28) нет действительных, отличных от нуля корней b, и выполняется система (33).

Следовательно, в данной точке у квазиполинома (18) все корни, кроме одного нулевого, находятся в левой полуплоскости. Для того, чтобы корни оказались в правой полуплоскости, они должны пересечь мнимую ось. В случае 2б) мнимой оси отвечает равенство $g = 1$, поэтому далее мы будем рассматривать уравнение (28) при $g = 1$. После обозначения $u = 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}$ действительная и мнимая части уравнения (28) примут вид

$$- b^2 - 2b\gamma\cos(\varphi-\Omega)\sin\chi + \gamma^2((\cos\chi-1)^2 - \sin^2\chi) - \\ - 2u(\cos\chi - 1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \quad (37)$$

$$b\,(u - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(\cos\chi-1)) = \\ = -\gamma\sin\chi\,(\gamma(1-\cos\chi) + u(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)))\,. \quad (38)$$

Поскольку считаем, что выполнено условие (33), то коэффициент перед b в (38) отличен от нуля. Выразим из (38) значение b:

$$b = -\frac{\gamma\sin\chi\,(\gamma(1-\cos\chi) + u(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)))}{u - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(\cos\chi-1)}. \quad (39)$$

Тогда, подставив (39) в (37), получим уравнение относительно $\cos\chi$. После обозначений $x = \cos\chi$ и $\psi = \varphi - \Omega$ это уравнение примет вид

$$\gamma(u-\gamma\cos\psi(x-1))^{-2}(x-1)(\gamma^3x^3 - \gamma^2(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi + 2\alpha u\sin\psi)x^2 + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3u^2\cos^2\psi + 4\gamma u\cos^3\psi + 4\alpha u^2\cos\psi\sin\psi + \\ + 4\alpha\gamma u\cos^2\psi\sin\psi + \alpha^2u^2\sin^2\psi)x + 2\alpha\gamma^2u\sin\psi - 2u^3\cos\psi - 2\gamma^3\cos^2\psi - 5\gamma u^2\cos^2\psi - \\ - 4\gamma^2u\cos^3\psi + \gamma^3 - 2\alpha u^3\sin\psi - 4\alpha\gamma u^2\cos\psi\sin\psi - \\ - 4\alpha\gamma^2u\cos^2\psi\sin\psi + \alpha^2\gamma u^2\sin^2\psi) = 0. \quad (40)$$

Первые два множителя отличны от нуля в силу условия (33), равенство $x = 1$ эквивалентно равенству $b = 0$, что не соответствует построениям пункта 2б). Обозначим последний множитель (40) через $H(x)$. Поскольку $x = \cos\chi$, то x принимает значения из [-1,1]. Найдем значения H в концах отрезка изменения переменной x.

$$H(-1) = -2(u+2\gamma\cos\psi)^2(\gamma + u(\cos\psi + \alpha\sin\psi)),$$
$$H(1) = -2u^2(u(\cos\psi+\alpha\sin\psi) - \gamma(1+\alpha^2)\sin^2\psi).$$

Из (33) следует, что $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$. Если выполняется (33) и на всем отрезке $[-1,1]$ функция $H(x)$ отрицательна, то у уравнения (28) не будет корней на мнимой оси. Для того, чтобы $H(x)$ было отрицательным при условии $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы или локальный максимум функции H был вне $(-1,1)$ или чтобы он был отрицательным. Для произвольных параметров и точки эллипса это условие легко проверяется численно.

Таким образом, верны следующие утверждения.

Теорема 2 (Достаточное условие устойчивости)**.** *Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$. *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v, \alpha, q, \gamma)$ *выполнена система неравенств* (33), *а уравнение* $H(x) = 0$ *не имеет корней ни при каком значении* x *из* $[-1, 1]$ *для всех точек кратчайшей дуги* $I(v, \alpha, q, \gamma)$, *соединяющей точки* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$ *и* $(\delta_{low}, (1 + \rho_{low}^2)^{-1})$. *Тогда для каждого целого* n *существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение уравнения* (15) *вида* (16), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$, *устойчиво.*

Для формулировки теорем о неустойчивости введем в рассмотрение следующую совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) < 0, \\ \dfrac{vq\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} + 2\gamma \cos(\varphi - \Omega) < 0, \\ \dfrac{vq\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \dfrac{\gamma(1 + \alpha^2) \sin^2(\varphi - \Omega)}{\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega)} < 0. \end{array}\right. \tag{41}$$

Теорема 3 (Достаточное условие неустойчивости 1)**.** *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v, \alpha, q, \gamma)$ *выполняется первое или третье неравенство в* (41). *Тогда для каждого целого* n *существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (16) *уравнения* (15), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$, *неустойчиво.*

Теорема 4 (Достаточное условие неустойчивости 2)**.** *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v, \alpha, q, \gamma)$ *выполняется второе неравенство в* (41). *Тогда для каждого целого* n *существует последовательность* $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m \neq 0$, *такая, что при* $\varepsilon = \varepsilon_m$ *решение уравнения* (15) *вида* (16), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1 + \rho_*^2)^{-1})$, *неустойчиво.*

4. Расположение областей устойчивости при $\alpha = 0$

Рассмотрим вопрос о количестве областей устойчивости на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$. Сначала выпишем систему (33) в координатах (δ, r). Так как $\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} = r - r^2$, то, пользуясь равенствами (8), получаем, что система (33) примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\alpha - 1/2v(1 + \alpha^2)(qr - 1) > 0, \\ -qv/2(r^2 + r - 2/q) > 0, \\ \dfrac{vq(r - r^2)}{2} - \dfrac{(1 + \alpha^2)(\delta - 1/2v\alpha(qr - 1))^2}{\delta\alpha - 1/2v(1 + \alpha^2)(qr - 1)} > 0. \end{array}\right. \tag{42}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = 0$. *Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$, *тогда точки множества* $I(v, 0, q, \gamma)$, *для которых система* (42) *верна, образуют непустую связную область. Если же выполнено неравенство* $v < 2\gamma$, *то система неравенств* (42) *несовместна на множестве* $I(v, 0, q, \gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство системы (42). При $\alpha = 0$ оно принимает вид

$$r < q^{-1}.$$

Заметим, что

$$\max\{0, (v-2\gamma)(vq)^{-1}\} < q^{-1} < (v+2\gamma)(vq)^{-1},$$

поэтому первое неравенство (42) выполняется в нижней точке множества $I(v, 0, q, \gamma)$ и не выполняется при $r = (v+2\gamma)(vq)^{-1}$.

Из системы неравенств (33) (которая эквивалентна системе неравенств (42)) легко видеть, что при $\alpha = 0$ из выполнения первого неравенства системы следует выполнение второго неравенства.

Рассмотрим третье неравенство системы (42). При $\alpha = 0$ оно принимает вид

$$\frac{vq(r-r^2)}{2} + \frac{2\delta^2}{v(qr-1)} > 0.$$

Учитывая, что точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$ принадлежат эллипсу (5), имеем соотношение

$$\delta^2 = \gamma^2 - 1/4v^2(qr-1)^2.$$

Таким образом, для точек множества $I(v, 0, q, \gamma)$ третье неравенство системы (42) можно записать в виде

$$\frac{4\gamma^2 - v^2 + qrv^2 + qr^2v^2 - q^2r^3v^2}{2v(qr-1)} > 0. \tag{43}$$

При выполнении первого неравенства системы (42) знаменатель выражения (43) будет отрицательным, поэтому числитель также должен быть отрицательным.

Введем функцию

$$f(r) = 4\gamma^2 - v^2 + qrv^2 + qr^2v^2 - q^2r^3v^2.$$

Ниже понадобится ее производная

$$f'(r) = qv^2 + 2qrv^2 - 3q^2r^2v^2.$$

Для корней r_1 и r_2 уравнения $f'(r) = 0$ верны формулы

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{1+3q}}{3q}, \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{1+3q}}{3q}.$$

Очевидно, что

$$r_1 < 0 < \max\{0, (v-2\gamma)(vq)^{-1}\}. \tag{44}$$

Докажем, что

$$r_2 \geq \min\{1, q^{-1}\}. \tag{45}$$

Пусть $\min\{1, q^{-1}\} = 1$. Тогда неравенство (45) перепишется в виде

$$1 + \sqrt{1+3q} \geq 3q. \tag{46}$$

В случае $0 < q < 1/3$ это неравенство, очевидно, верно. Если же $1/3 \leq q \leq 1$, то (46) эквивалентно неравенству

$$1 + 3q \geq 9q^2 - 6q + 1.$$

Очевидно, данное неравенство верно при $1/3 \le q \le 1$. Пусть теперь $\min\{1, q^{-1}\} = q^{-1}$. Тогда неравенство (45) принимает вид

$$1 + \sqrt{1 + 3q} \ge 3.$$

Данное неравенство, очевидно, верно при $q \ge 1$.

Из (44) и (45) следует, что на отрезке $[\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}, \min\{1, q^{-1}\}]$ производная $f'(r)$ сохраняет свой знак. Следовательно, функция $f(r)$ монотонна и уравнение $f(r) = 0$ имеет не более одного корня на данном отрезке.

Найдем значения функции f в точках 0, $(v - 2\gamma)(vq)^{-1}$, 1, q^{-1}.

$$\begin{aligned}
&f(0) = (2\gamma - v)(2\gamma + v),\\
&f((v - 2\gamma)(vq)^{-1}) = 2\gamma(2\gamma - v)(2\gamma - (1 - q)v)(qv)^{-1},\\
&f(q^{-1}) = 4\gamma^2,\\
&f(1) = (2\gamma - (1 - q)v)(2\gamma + v(1 - q)).
\end{aligned}$$

Из условия существования решения (14) и ограничений на параметры следует, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(f(0)) = -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma),\\
&\operatorname{sgn}(f((v - 2\gamma)(vq)^{-1})) = -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma),\\
&f(q^{-1}) > 0,\\
&\operatorname{sgn}(f(1)) = \operatorname{sgn}(2\gamma + v(1 - q)).
\end{aligned}$$

Таким образом

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) < 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$, и

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) > 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$.

Из того, что $f(q^{-1}) > 0$ и $f(1) > 0$ при $1 < q^{-1}$, следует, что

$$f(\min\{1, q^{-1}\}) > 0.$$

Далее рассмотрим два случая: 1) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пересекает ось абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$; 2) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ выше оси абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$.

В первом случае на всем отрезке $[0, \min\{1, q^{-1}\}]$ функция f положительна и третье неравенство системы (42) не выполняется на этом отрезке. А на отрезке $[\min\{1, q^{-1}\}, \min\{1, (v+2\gamma)(vq)^{-1}\}]$ не выполняется первое неравенство системы (42). Таким образом, для любой точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$ система (42) не верна.

Во втором случае функция f отрицательна в левом конце отрезка $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\}]$ и положительна в правом. Следовательно, учитывая монотонность f на данном отрезке, имеем, что уравнение $f(r) = 0$ имеет ровно один корень r_* на интервале $((v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\})$ и $f(r) < 0$ при $r \in [(v-2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Таким образом, третье неравенство верно на полуинтервале $[(v-2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Первое и второе неравенства системы (42) выполняются на отрезке $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\}]$, а на отрезке $[\min\{1, q^{-1}\}, \min\{1, (v + 2\gamma)(vq)^{-1}\}]$ первое неравенство системы (42) не верно. Получаем, что система (42) верна на полуинтервале $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$, то есть она выполняется для односвязной области на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$, содержащей точку (δ_{low}, r_{low}), но не для всего множества целиком.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = 0$ *и выполнены условия* (33). *Тогда* $H(x) < 0$ *при* $x \in [-1, 1]$.

Доказательство. Найдем производную $H'(x)$:

$$H'(x) = 3\gamma^3 x^2 - 2\gamma^2 x(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi) + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3u^2\cos^2\psi + 4\gamma u\cos^3\psi).$$

Графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх. Для абсциссы вершины x_v верно равенство

$$x_v = 1/3(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi)\gamma^{-1}.$$

Докажем, что из условий (33) следует неравенство $x_v > 1$. Действительно, в силу условий (33) при $\alpha = 0$ правая часть равенства

$$3\gamma(x_v - 1) = 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi - 2\gamma = 2(2u\cos\psi - \gamma\sin^2\psi) = 2\cos\psi\left(u + u - \frac{\gamma\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)$$

положительна. Следовательно, $x_v > 1$. Для $H'(1)$ имеем формулу

$$H'(1) = \gamma u\left(u + u\sin^2\psi + 4\cos^2\psi\left(u - \frac{\gamma\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)\right).$$

Из (33) следует, что $H'(1) > 0$. Таким образом, графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх с вершиной правее единицы, а в единице функция $H'(x)$ положительна. Следовательно, $H'(x)$ положительна на всем отрезке $[-1, 1]$. Поэтому $H(x) < H(1) < 0$ на всем отрезке $[-1, 1]$ при $\alpha = 0$ и выполнении условий (33), что и требовалось доказать.

Будем говорить, что решение, соответствующее некоторой точке множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$, устойчиво (неустойчиво), если для каждого n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (16) уравнения (15) с параметрами из $I(v, \alpha, q, \gamma)$ устойчиво (неустойчиво).

Из теорем 2, 3 и лемм 1, 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $v < 2\gamma$. *Тогда решения, соответствующие любой точке множества* $I(v, 0, q, \gamma)$, *являются неустойчивыми. Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$. *Тогда на множестве* $I(v, 0, q, \gamma)$ *расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости. Пусть* $v - 2\gamma > qv$. *Тогда множество* $I(v, 0, q, \gamma)$ *пусто.*

Иллюстрацией к теореме 5 служит рис. 3. Черной сплошной линией на рисунке 3 обозначены области устойчивости, серым пунктиром — области неустойчивости.

Выводы

1. Доказано, что существует однопараметрическое семейство на плоскости (δ, r), зависящее от параметров v, α, q, γ, каждой точке которого соответствует счетное число непрерывных волн. При малых значениях параметра ε найдено асимптотическое приближение этих решений, зависящее от разрывной функции $\theta(\varepsilon, \delta)$.

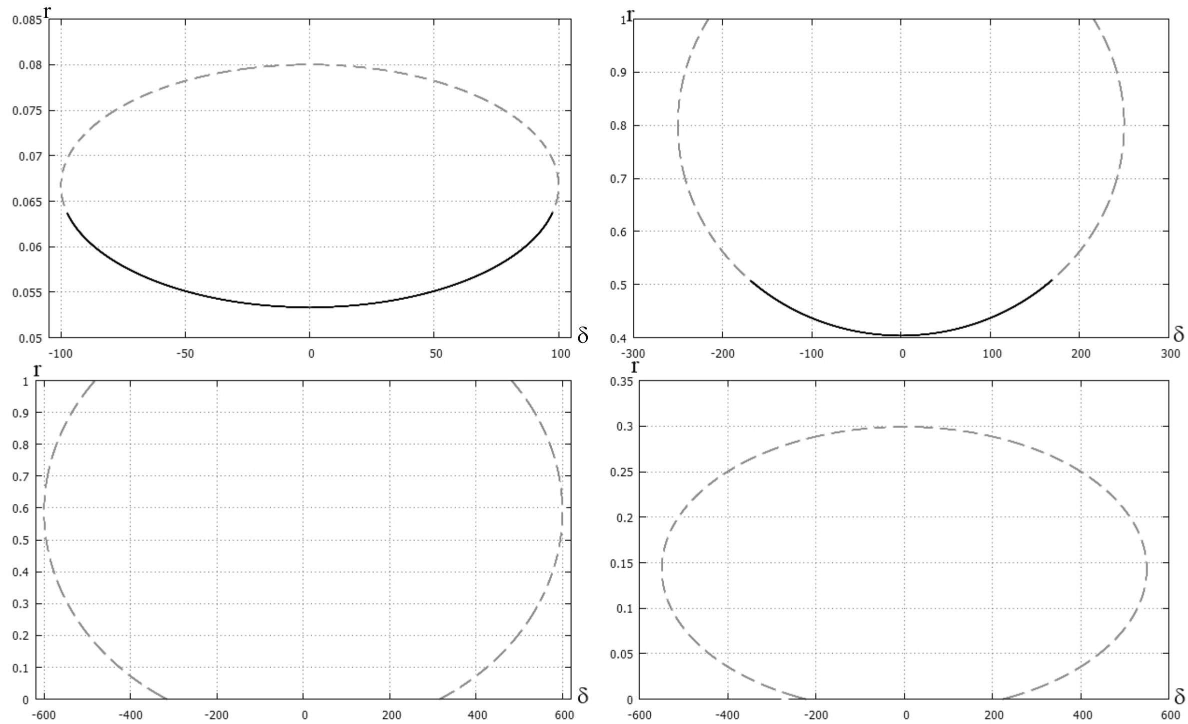

Рис. 3. Расположение областей устойчивости на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$. Значения параметров: a) $v = 1000$, $q = 15$, $\gamma = 100$; b) $v = 1010$, $q = 1.25$, $\gamma = 250$; c) $v = 1020$, $q = 1.7$, $\gamma = 600$; d) $v = 1005$, $q = 7$, $\gamma = 550$.

2. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн. В случае $\alpha = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. В случае $\alpha = 0$ показано, что на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ может быть 0 или 1 область устойчивости. Множество точек (v, q, γ) поделено на три подмножества. В первом из них множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пусто, во втором на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ нет областей устойчивости, а в третьем на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ расположена одна область устойчивости. Для третьего подмножества аналитически найдены границы области устойчивости в координатах (δ, r).

Список литературы

[1] Кащенко А. А., “Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта-Ландау с большим запаздыванием”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 136–141; English transl.: Kashchenko A. A., “Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart-Landau Equation with Large Delay”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 566–570.

[2] Кащенко А. А., “Устойчивость непрерывных волн для модели FDML лазера”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:3 (2014), 35–54; [Kashchenko A. A., “Ustoychivost nepreryvnykh voln dlya modeli FDML lazera”, *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, **21**:3 (2014), 35–54, (in Russian).]

[3] Kashchenko A., “Stability of continuous wave solutions of one laser model with large delay”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20**:2 (2015), 173–183.

[4] Reddy D. V. R., Sen A., Johnston G. L., "Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation", *Physica D.*, **129** (1999), 15–34.

[5] Reddy D. V. R., Sen A., Johnston G. L., "Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks", *Physica D.*, **144** (2000), 335–357.

[6] Slepneva S., Kelleher B., O'Shaughnessy B., Hegarty S. P., Vladimirov A. G., Huyet G., "Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers", *Opt. Express*, **21** (2013), 19240–19251.

[7] Vladimirov A. G., Turaev D., "Model for passive mode-locking in semiconductor lasers", *Phys. Rev A.*, **72** (2005), 033808.

[8] Vladimirov A., Turaev D., Kozyreff G., "Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers", *Opt. Lett.*, **29** (2004), 1221–1223.

[9] Vladimirov A., Turaev D., "A new model for a mode-locked semiconductor laser", *Radiophysics and Quantum Electronics*, **47** (2004), 769–776.

[10] Lang R., Kobayashi K., "External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties", *Quantum Electronics*, **16**:3 (1980), 347–355.

[11] Mork J., Tromborg B., Mark J., "Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment", *J. Quant. Electr.*, **28** (1992), 93–108.

[12] Tartwijk G., Lenstra D., "Semiconductor lasers with optical injection and feedback", *Quantum. Semiclass. Opt.*, **7** (1995), 87–143.

[13] Jun Y., Hua L., McInerney J. G., "Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback", *Phys. Rev. A*, **47** (1993), 2249–2252.

[14] Fischer I., Hess O., Elsasser W., Gobel, "High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser", *Phys.Rev.Lett.*, **73** (1994), 2188–2191.

[15] Sano T., "Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherent collapse of semiconductor lasers with optical feedback", *Phys. Rev. A.*, **50** (1994), 2719–2726.

[16] Ritter A., Haug H., "Theory of laser diodes with weak optical feedback. I. Small-signal analysis and side-mode spectra", *JOSA B*, **10** (1993), 130–144.

[17] Heil T., Fischer I., Elsasser W., "Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback", *Phys.Rev. A.*, **60** (1999), 634–640.

[18] Huyet G., Balle S., Giudici M., Green C., Giacomelli G., Tredicce J. R., "Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback", *Opt.Commun.*, **149** (1999), 341–347.

[19] Levine A. M., Tartwijk G. H. M., Lenstra D., Erneux T., "Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode", *Phys. Rev. A.*, **52** (1995), 3436–3439.

[20] Lythe G., Erneux T., "Low pump limit of the bifurcation to periodic intensities in a semiconductor laser subject to external optical feedback", *Phys. Rev. A.*, **55** (1997), 4443–4448.

[21] Grigorieva E. V., "Quasiperiodicity in Lang-Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback", *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **4** (2001), 333–340.

[22] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasileva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]

[23] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer, 1996.

Stability of CW Solutions of Semiconductor Laser with Large Delay

Kashchenko A. A.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: Lang Kobayashi equation, large delay, laser dynamics, stability

In this paper the problem of existence and stability of continuous waves in a semiconductor laser model is studied. This model was proposed by Lang and Kobayashi and has the form of two differential equations with delay. The delay time is assumed to be large. We study the existence of continuous waves in the Lang-Kobayashi model. A special set I depending on all parameters of the problem is built. The condition of existence of continuous waves is that the "'main parts"' of solutions must be located on the set I. Sufficient conditions of stability and instability of continuous waves are found for all sufficiently large values of delay. In the case of a zero linewidth enhancement factor the necessary and sufficient conditions of stability are found. Location of stability regions on the sets I is studied. It is proved that in the case of the zero linewidth enhancement factor the number of regions of stability on the set I is less than two. Necessary and sufficient conditions of existence of stability regions on the set I are found in this case.

Сведения об авторе:
Кащенко Александра Андреевна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант, orcid.org/0000-0003-3823-9351

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 439–447

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–439–447

УДК 517.9

Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае

Кубышкин Е. П., Морякова А. Р.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kubysh.e@yandex.ru, alyona_moryakova@mail.ru

получена 5 июля 2015

Ключевые слова: D-разбиения, метод интегральных многообразий, теория бифуркаций, хаотические колебания

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение второго порядка запаздывающего типа. Уравнения такого типа возникают при моделировании работы ряда электронных устройств. Изучается характер потери устойчивости нулевого решения. Показана возможность потери устойчивости, связанная с прохождением через мнимую ось двух пар чисто мнимых корней характеристического квазиполинома, находящихся в резонансе 1:3. Изучаются бифурцирующие при этом автоколебательные решения. Отмечено существование хаотического аттрактора, для которого вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность. В качестве метода исследования используется теория интегральных многообразий и метод нормальных форм нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Анализ устойчивости нулевого решения

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \tag{1}$$

в котором $A, h > 0,\ f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + ...,\ g(x) = g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + ...$ гладкие при $|x| \leq x_0$ функции.

Изучается характер потери устойчивости нулевого решения уравнения (1) и бифуркации автоколебательных решений в критическом случае потери устойчивости.

Рассмотрим линейную часть уравнения (1)

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f_1x(t-h) + g_1\dot{x}(t-h) = 0 \tag{2}$$

и изучим расположение корней ее характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1)\exp(-\lambda h) = 0. \qquad (3)$$

Для этого воспользуемся методом D-разбиений [1], который позволяет исследовать движение корней уравнения (3) при изменении параметров и построить в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1). Положим в характеристическом уравнении $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$, $i = \sqrt{-1}$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$-\omega^2 + 1 + f_1\cos(\omega h) + \omega g_1 \sin(\omega h) = 0,$$

$$A\omega - f_1\sin(\omega h) + \omega g_1\cos(\omega h) = 0.$$

Преобразуя эту систему, находим

$$f_1 = \pm\sqrt{A\omega^2 + (1-\omega^2)^2 - \omega^2 g_1^2}, \qquad (4)$$

$$h_n(\omega) = \begin{cases} \omega^{-1}(\mathrm{arctg}((\omega(\omega-1)g_1 + Af_1)/((\omega^2-1)f_1 - \omega^2 A g_1)) + \pi n), \\ \qquad 0 < \omega < \omega_1, \\ \omega^{-1}(\mathrm{arctg}((\omega(\omega-1)g_1 + Af_1)/((\omega^2-1)f_1 - \omega^2 A g_1) - \pi + \pi n), \\ \qquad \omega_1 < \omega < \infty, \end{cases} \qquad (5)$$

где ω_1 является решением уравнения

$$\omega^8 + (A - 4 - g_1^2)\omega^6 + \omega^4(6 - 2A + 2g_1^2 - Ag_1^2) + \omega^2(A - 4 - g_1^2) + 1 = 0,$$

$$h_n(\omega_1) = \lim_{\omega\to\omega_1}(\omega^{-1}(\mathrm{arctg}((\omega(\omega-1)g_1 + Af_1)/((\omega^2-1)f_1 - \omega^2 A g_1)) + \pi n)),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти соотношения позволяют построить в плоскости $(f_1;\ h)$ кривые, на которых уравнение (3) имеет корни, лежащие на мнимой оси (границы областей D-разбиений). Уравнение (3) также имеет корень $\lambda = 0$ при $f_1 = -1$. Область D_j соответствует наличию j корней уравнения (3) в правой комплексной полуплоскости.

На рис. 1 приведены картины D-разбиений плоскости параметров $(f_1;\ h)$ при $A = 1$ для различных значений параметра g_1.

Возможны следующие механизмы потери устойчивости нулевого решения уравнения (2), связанные с прохождением корней характеристического уравнения (3) через мнимую ось из левой комплексной полуплоскости в правую:

1) прохождение пары комплексно сопряженных корней,

2) прохождение одновременно двух пар комплексно сопряженных корней,

3) прохождение одного нулевого корня,

4) прохождение одновременно нулевого корня и пары комплексно сопряженных корней.

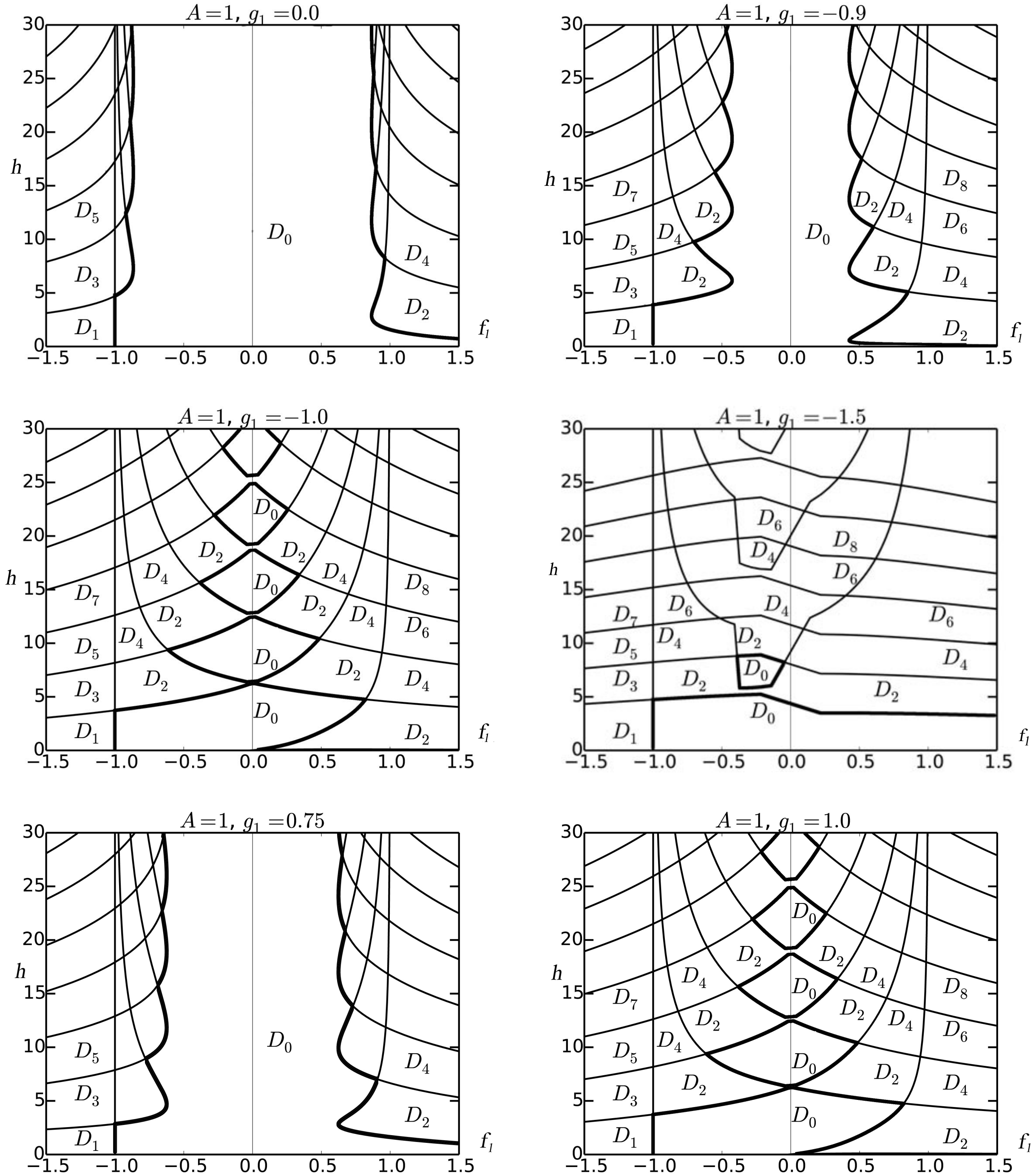

Рис. 1. D-разбиения для квазиполинома (3)

Численный анализ показал, что при прохождении двух пар комплексно сопряженных корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $(\omega_1 > 0,\ \omega_2 > 0)$ возможен внутренний резонанс 1:3 $(\omega_1/\omega_2 = 1/3,\ \omega_1 \approx 0.432, \omega_2 \approx 1.29)$, при этом остальные корни характеристического уравнения находятся в левой комплексной полуплоскости. Соответствующие значения параметров равны $A = A_0 \approx 0.768$, $f_1 = f_{10} \approx 0.827$, $g_1 = g_{10} \approx -0.8$, $h = h_0 \approx 4.996$. Картина D- разбиения для этого случая качественно похожа на картину при значениях параметров $A = 1,\ g_1 = -0.9$. Этот критический случай представляет значительный интерес с точки зрения теорий бифуркаций и изучается в дальнейшем.

2. Характер поведения решений уравнения (1) в окрестности резонанса 1:3

Положим в (3) $A = A_0+\varepsilon A_1,\ f_1 = f_{10}+\varepsilon f_{11},\ g_1 = g_{10}+\varepsilon g_{11},\ h = h_0+\varepsilon h_1,\ 0 < \varepsilon \ll 1$, тогда уравнение (3) примет вид

$$P(\lambda;\varepsilon) \equiv \lambda^2+(A_0+\varepsilon A_1)\lambda+1+(f_{10}+\varepsilon f_{11}+\lambda(g_{10}+\varepsilon g_{11}))\exp(-\lambda(h_0+\varepsilon h_1)) = 0. \quad (6)$$

Считая $\lambda_j(\varepsilon) = i\omega_j + \varepsilon\lambda_{j1} + \varepsilon^2\lambda_{j2} + \dots,\ j = 1, 2$, из равенства $P(\lambda(\varepsilon);\varepsilon) = 0$ с необходимостью имеем

$$\lambda_{j1} = -\frac{P'_\varepsilon(i\omega_j;0)}{P'_\lambda(i\omega_j;0)} = -\frac{A_1 i\omega_j - \exp(-i\omega_j)(f_{11}+i\omega_j g_{11}+f_{10}+i\omega_j g_{10})}{2i\omega_j + A_0 - h_0(f_{10}+i\omega_j g_{10})\exp(-i\omega_j)+g_{10}\exp(-i\omega_j)}. \quad (7)$$

Отметим, что $\operatorname{Re}\lambda_{j1}$ может быть величиной любого знака за счет выбора A_1, f_{11}, g_{11}, h_1. Изучим поведение решений исходного уравнения с начальными условиями из некоторого шара $S(r_0)$ радиуса r_0 фазового пространства $H = C[-h,0]\oplus C^1[-h,0]$ уравнения (1) с центром в нуле.

Перейдем от уравнения (1) к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s}\Big|_{s=0} = l(u(t,s);\varepsilon). \quad (9)$$

Здесь $u(t,s) = \operatorname{col}(u_1(t,s), u_2(t,s)) = \operatorname{col}(x(t,s), \dot{x}(t,s))$, $l(u(s);\varepsilon) : H \to R^2$— гладкий нелинейный функционал, имеющий вид:

$$l(u(s);\varepsilon) = l_1(u(s);\varepsilon) + l_2(u(s);\varepsilon) + l_3(u(s);\varepsilon) + ..., \quad (10)$$

$$l_1(u(s);\varepsilon) = \operatorname{col}(u_2(0), -(A_0+\varepsilon A_1)u_2(0) - u_1(0) - (f_{10}+\varepsilon f_{11})u_1(t, -(h_0+\varepsilon h_1)) - \\ - (g_{10}+\varepsilon g_{11})u_2(t, -(h_0+\varepsilon h_1))), \quad (11)$$

$$l_2(u(s);\varepsilon) = \operatorname{col}(0, -f_2 u_1^2(-(h_0+\varepsilon h_1)) - g_2 u_2^2(-(h_0+\varepsilon h_1))), \quad (12)$$

$$l_3(u(s);\varepsilon) = \operatorname{col}(0, -f_3 u_1^3(-(h_0+\varepsilon h_1)) - g_3 u_2^3(-(h_0+\varepsilon h_1))). \quad (13)$$

В окрестности нуля фазового пространства H краевая задача (8),(9) имеет [2,3] локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное центральное многообразие $\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon)$, $z_1,\ z_2 \in C$, $-h \leq s \leq 0$, может быть представлено в виде разложения по $\varepsilon, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$

$$\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon) = (u_{10}(s) + \varepsilon u_{10}^{(1)}(s) + \dots)z_1 + (u_{02}(s) + \varepsilon u_{02}^{(1)}(s) + \dots)z_2 + (u_{-10}(s) + \varepsilon u_{-10}^{(1)}(s) + \dots)\bar{z}_1 + (u_{0-2}(s) + \varepsilon u_{0-2}^{(1)}(s) + \dots)\bar{z}_2 + (u_{11}(s) + \varepsilon u_{11}^{(1)}(s) + \dots)z_1^2 + (u_{12}(s) + \dots)z_1 z_2 + \dots, \quad (14)$$

где $u_{10}(s) = \mathrm{col}\,(1, i\omega_1)\exp(i\omega_1 s)$, $\quad u_{02}(s) = \mathrm{col}\,(1, i\omega_2)\exp(i\omega_2 s)$,
$u_*(s) = \mathrm{col}\ (u_{*1}(s), u_{*2}(s))$ – гладкие вектор-функции.

Поведение решений краевой задачи (8),(9) на многообразии определяет поведение траекторий следующей гладко зависящей от своих переменных и параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\omega_1 + \lambda_1^1\varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1\bar{z}_1^2 z_2 + \dots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (15)$$

$$\dot{z}_2 = (i\omega_2 + \lambda_2^1\varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2\bar{z}_1^3 + \dots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (16)$$

в которой $\lambda_j^{(1)} = \tau_j^1 + i\omega_j^1$ определено согласно (7), комплексные постоянные $d_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}, d_j (j, k = 1, 2)$ подлежат определению и точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по $\varepsilon z_j,\ \varepsilon\bar{z}_j, z_j\bar{z}_j$.

Подставим выражение (14) с учетом (15)-(16) в краевую задачу (8)-(9). В результате получим тождества

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}Z_1(\cdot) + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_1}\bar{Z}_1(\cdot) + \frac{\partial\Phi}{\partial z_2}Z_2(\cdot) + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_2}\bar{Z}_2(\cdot) \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial s} \quad (17)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_{s=0} \equiv l(\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon); \varepsilon) \quad (18)$$

для определения функций $u_*(s)$ и коэффициентов уравнений (15)–(16). Приравнивая в (17)-(18) последовательно коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon z_1, \varepsilon\bar{z}_1, \varepsilon z_2$, $\varepsilon\bar{z}_2, z_1 z_2, \dots$ получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$u_{10}(s)d_1^* + u_{02}(s)d_2^* + (p_1 i\omega_1 + p_2 i\omega_2)u_* = \frac{du_*}{ds} \quad (19)$$

$$\left.\frac{du_*}{ds}\right|_{s=0} = l_1(u_*(s)) + f_*, \quad (20)$$

где p_1, p_2 – целые числа, d_1^*, d_2^* – коэффициенты, входящие в (15)–(16), f_* – постоянный вектор.

Условия разрешимости этих краевых задач позволяют эффективно и однозначно вычислить коэффициенты системы уравнений (15)–(16)и функции разложения (14).

С необходимостью имеем

$$d_{11} = i\omega_1 \exp(-i\omega_1 h_0)(G_{11}(-2f_2 - 4g_2\omega^2) - 2G_{1-1}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_1^3))/P'_\lambda(i\omega_1; 0),$$
$$d_{12} = -\exp(-i\omega_1 h_0)((-G_{12}(f_2 + g_2\omega_2(\omega_1+\omega_2)) - 2G_{1-2}(f_2 + (\omega_2-\omega_1)\omega_2 g_2))+$$
$$+ (f_2 G_{2-2} + 3(f_3 + ig_3\omega_1\omega_2^2))/P'_\lambda(i\omega_1; 0)),$$
$$d_{21} = -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)((-2G_{1-2}(f_2 - (\omega_2-\omega_1)\omega_1 g_2))-$$
$$-(2G_{12}(f_2 + g_2\omega_1(\omega_1+\omega_2))2f_2 G_{1-1} + 3(f_3 + ig_3\omega_1^2\omega_2)))/P'_\lambda(i\omega_2; 0),$$
$$d_{22} = -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)(-2G_{02}(f_2 + 2g_2\omega_2^2) - 2G_{2-2}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_2^3))/P'_\lambda(i\omega_2; 0),$$
$$d_1 = i(2\omega_1 - \omega_2)\exp(i(2\omega_1-\omega_2)h_0)((-(2f_2 - 4g_2\omega_1(\omega_2-\omega_1))G_{-12})+$$
$$+((-f_2 - 4g_2\omega_1\omega_2)G_{-20} - 3f_3 + 3g_3 i\omega_1^2\omega_2))/P'_\lambda(i\omega_2; 0),$$
$$d_2 = -3i\omega_1 \exp(3i\omega_1 h_0)((-2f_2 + 4g_2\omega_1^2)G_{-20} - 3f_3\exp(3i\omega_1 h_0) - 3g_3 i\omega_1^3)/P'_\lambda(i\omega_2; 0),$$

где

$$G_{11} = (-f_2 + \omega_1^2 g_2)\exp(-2i\omega_1 h_0)/P(2i\omega_1; 0);\ G_{1-1} = (-2f_2 + 2\omega_1^2 g_2)(1 + f_{10}),$$
$$G_{12} = -2(f_2 + \omega_1\omega_2 g_2)\exp(-i(\omega_1+\omega_2)h_0)/P(i(\omega_1+\omega_2); 0);$$
$$G_{2-2} = (-2f_2 - 2\omega_2^2 g_2)/(1 + f_{10}),$$
$$G_{1-2} = -2(f_2 + \omega_1\omega_2 g_2)\exp(-i(\omega_2-\omega_1)h_0)/P(i(\omega_1-\omega_2); 0),$$
$$G_{-20} = (-f_2 + \omega_1^2 g_2)\exp(2i\omega_1 h_0)/P(-2i\omega_1; 0).$$

Зависимость коэффициентов d_{jk} и $A_j,\ j,k = 1,2$ от параметров $f_2,\ g_2,\ f_3,\ g_3$ весьма сложная. Выберем эти параметры таким образом, чтобы $a_{11},\ a_{22} < 0$. Это в частности будет выполнено при

$$f_2 = -0.6,\ f_3,\ = -0.9,\ g_2 = 0.6,\ g_3 = 0.2. \tag{21}$$

Рассмотрим "главную" часть системы уравнений (15)–(16) и выполним в ней замену $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j), \rho_j \geq 0, -\infty < \tau_j < \infty (j = 1,2)$. Вводя теперь "медленные" переменные $\rho_1,\ \rho_2,\ \theta = 2\tau_1 - \tau_2$ и быструю переменную τ_1, предварительно положив $d_j = |d_j|\exp(i\gamma_j), 0 \leq \gamma_j < 2\pi$ и выполнив нормировки $\rho_j = \rho_j/(-a_{jj})^{1/2},\ j = 1,2,\ t \to t/\varepsilon$, а также выбрав $A_1,\ f_{11},\ g_{11},\ h_1$ таким образом, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$, получим следующую систему уравнений "медленных" переменных:

$$\dot\rho_1 = (1 - \rho_1^2 + a_1\rho_2^2)\rho_1 + b_1\cos(-\theta + \gamma_1)\rho_1^2\rho_2, \tag{22}$$
$$\dot\rho_2 = (1 + a_2\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + b_2\cos(\theta + \gamma_2)\rho_1^3, \tag{23}$$
$$\dot\theta = \omega + c_1\rho_1^2 + c_2\rho_2^2 - 3b_1\sin(-\theta + \gamma_1)\rho_1\rho_2 - b_2\sin(\theta + \gamma_2)\rho_1^3/\rho_2, \tag{24}$$

где $a_1 = a_{12}/(-a_{22}),\ a_2 = a_{21}/(-a_{11}), b_1 = |d_1|/(a_{11}a_{22})^{1/2}, b_2 = |d_2|/(-a_{11})^{3/2}(-a_{22})^{1/2}$, $c_1 = (3c_{11} - c_{21})/(-a_{11}), c_2 = (3c_{12} - c_{22})/(-a_{22}),\ \omega = 2\omega_1^1 - \omega_2^1$.

Как известно, "грубым", т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия системы уравнений (22)–(24) при малых ε в системе уравнений (15)–(16) и соответственно в краевой задаче (8)–(9) соответствует периодическое решение периода близкого к $2\pi/\omega_1$, того же характера устойчивости. "Грубым" периодическим решениям системы уравнений при малых ε в системе уравнений (15)–(16) и краевой задаче (8)–(9) соответствуют двумерные инвариантные торы [4].

Изучим характер фазовых перестроек системы (22) - (24). Считая $a_1 < 0,\ a_2 < 0$, зафиксируем значения параметров $f_2,\ f_3 = 0.2,\ g_2 = 0.3$ согласно (21) и будем менять значение g_3. Было отмечено существование следующего бифуркационного сценария:

1. При $g_3 < \kappa_0,\ \kappa_0 \approx 0.2$ существует устойчивый цикл.

2. На промежутке $\kappa_0 < g_3 < \kappa_1,\ \kappa_1 \approx 0.3$ происходит каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла.

3. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к появлению хаотического аттрактора при $g_3 \approx \kappa_1$.

4. Полученный хаотический аттрактор существует для значений параметра g_3 из промежутка $\kappa_1 < g_3 < \kappa_2,\ \kappa_2 \approx 0.9$.

5. При $g_3 \approx \kappa_2$ хаотический аттрактор исчезает и возникает устойчивое состояние равновесия.

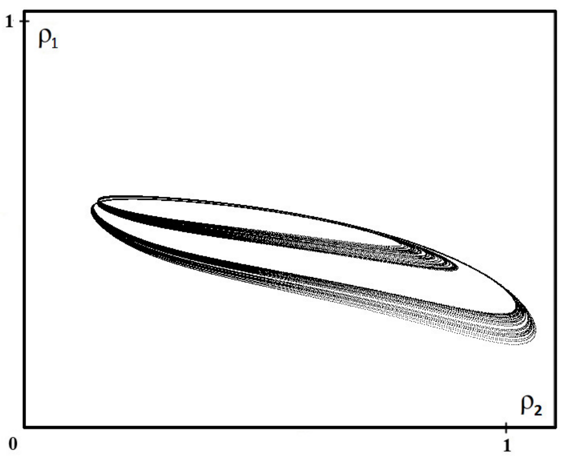

Рис. 2. Проекция хаотического аттрактора на плоскость $(\rho_1;\ \rho_2)$ при $g_3 \approx 0.42$

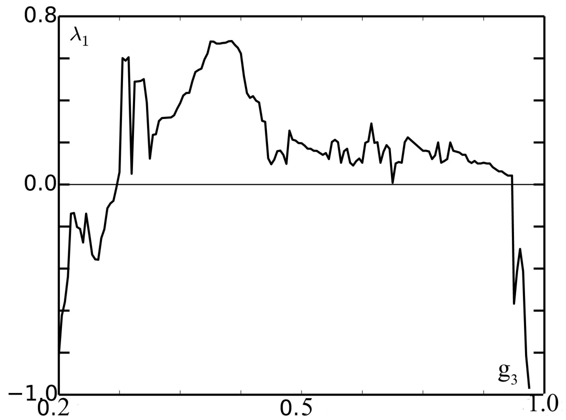

Рис. 3. График зависимости старшего ляпуновского показателя от бифуркационного параметра g_3

Для изучения характера хаотических колебаний было проведено численное исследование старшего ляпуновского показателя в зависимости от параметра g_3. Результаты этого исследования приведены на рис. 3 в виде графика. Вычисления выполнены с шагом 1/100 по параметру. Видно, что в моменты происхождения каскада удвоения периода и исчезновения хаотического аттрактора старшие ляпуновские показатели равны 0, а в зоне хаотических колебаний они положительны. Максимальное значение достигают при значении бифуркационного параметра $g_3 \approx 0.42$. В этом случае можно наблюдать развитой хаос, значения ляпуновских показателей для которого равны $\lambda_1 \approx 0.68,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \approx -2.58,\ d_L \approx 2.63$. Проекция данного аттрактора приведена на рис. 2.

Список литературы

[1] Неймарк Ю. И., "D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем", *ПММ*, **13**:4 (1949), 349–380; [Neymark Yu. I., "D-razbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustoychivosti linearizovannykh raspredelennykh sistem", *PMM*, **13**:4 (1949), 349–380, (in Russian).]

[2] Куликов А. Н., "О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ред. Ю. С. Колесова, ЯрГУ, Ярославль, 1976, 114–129; [Kulikov A. N., "O gladkikh invariantnykh mnogoobraziyakh polugruppy nelineynykh operatorov v banakhovom prostranstve", *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, ed. Yu. S. Kolesova, YarGU, Yaroslavl', 1976, 114–129, (in Russian).]

[3] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980, 368 с.; English transl.: Marsden J. E., McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[4] Хейл Дж., *Колебания в нелинейных системах*, Наука, М., 1966; English transl.: Hale J. K., *Oscillations in Nonlinear Systems*, McGraw-Hill, N.Y., 1963.

[5] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора", *Дифференциальные уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor", *Differential Equations*, **41**:2 (2005), 284–289.

Investigation of Oscillatory Solutions of Differential-Difference Equations of Second Order in a Critical Case

Kubyshkin E. P., Moryakova A.R.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: D-splitting, method of integral manifolds, bifurcation theory, chaotic oscillations

We consider a differential-difference equation of second order of delay type, containing the delay of the function and its derivatives. Such equations occur in the modeling of electronic devices. The nature of the loss of the zero solution stability is studied. The possibility of stability loss related to the passing of two pairs of purely imaginary roots, that are in resonance 1:3, through an imaginary axis is shown. In this case bifurcating oscillatory solutions are studied. It is noted the existence of a chaotic attractor for which Lyapunov exponents and Lyapunov dimension are calculated. As an investigation techniques we use the theory of integral manifolds and normal forms method for nonlinear differential equations.

Сведения об авторе:
Кубышкин Евгений Павлович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1796-0190
Морякова Алёна Романовна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант, orcid.org/0000-0003-2529-6277