ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 22 № 5(59) 2015

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Главный редактор
В.А. Соколов,
доктор физико-математических наук, профессор, Россия

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **В.С. Афраймович**, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия; **В.Н. Белых**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Кушнаренко**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания, **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **П.Г. Парфенов**, канд. физ.-мат. наук, доцент, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАО, Россия; **Н. Сидорова**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **М.Б. Трахтенброт**, д-р комп. наук, Израиль, **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Х. Файт**, д-р наук, проф., Австрия; **Ф. Шнеблен**, проф., Франция

Ответственный секретарь **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

12+

©Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, №5. 2015

Kuramoto Phase Model with Inertia:
Bifurcations Leading to the Loss of Synchrony and to the Emergence of Chaos
Belykh V. N., Bolotov M. I., Osipov G. V. 595

Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова
с отклонением по пространственной переменной
Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А. 609

Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений:
неприведенные схемы модулей
Тимофеева Н. В. 629

Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах
методом коллокаций и наименьших невязок
Ворожцов Е. В., Шапеев В. П. 648

Одномодовые и двухмодовые неоднородные диссипативные структуры
в нелокальной модели эрозии
Ковалева А. М., Куликов Д. А. 665

Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного
дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота
Кащенко С. А. 682

Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием,
зависящим от искомой функции
Голубенец В. О. 711

Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега
Тимофеев Е. А. 723

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ №ФС77-49724 от 11.05.2012 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Каталоге российской прессы "Почта России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 28.10.2015. Дата выхода в свет 17.12. 2015. Формат 60x84$^1/_8$. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 15,5. Объем 140 с. Тираж 50 экз. Свободная цена. Заказ 080/015. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150000 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 22 No 5(59) 2015

Founded in 1999
6 issues per year

Editor-in-Chief

V. A. Sokolov,
Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

Editorial Board

S.M. Abramov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **P.G. Parfionov**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **H. Veith**, Prof., Dr. Sci., Austria

Responsible Secretary **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2015

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5. 2015

Kuramoto Phase Model with Inertia:
Bifurcations Leading to the Loss of Synchrony and to the Emergence of Chaos
Belykh V. N., Bolotov M. I., Osipov G. V. 595

Dynamical Properties of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation
with Deviation of the Spatial Variable
Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A. 609

Isomorphism of Compactifications of Vector Bundles Moduli: Nonreduced Moduli
Timofeeva N. V. 629

Numerical Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates
by the Method of Collocations and Least Residuals
Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. 648

Single-Mode and Dual-Mode Nongomogeneous Dissipative Structures
in the Nonlocal Model of Erosion
Kovaleva A. M., Kulikov D. A. 665

Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem
for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points
Kaschenko S. A. 682

Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation
Golubenets V. O. 711

Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function
Timofeev E. A. 723

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 595–608
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 595–608

©Belykh V. N., Bolotov M. I., Osipov G. V., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-595-608

UDC 519.987

Kuramoto Phase Model with Inertia: Bifurcations Leading to the Loss of Synchrony and to the Emergence of Chaos

Belykh V. N., Bolotov M. I., Osipov G. V.

Received September 15, 2015

We consider a finite-dimensional model of phase oscillators with inertia in the case of star configuration of coupling. The system of equations is reduced to a nonlinearly coupled system of pendulum equations. We prove that the transition from synchronous to asynchronous oscillations occurs via bifurcation of saddle-node equilibrium. In this connection the asynchronous regime can be partially synchronous rotations. We find that the reverse transition from asynchronous to synchronous regime occurs via bifurcation of homoclinic orbit both of the saddle equilibrium point and of the saddle periodic orbit. In the case of homoclinic loop of the saddle point the synchrony appears only from asynchronous mode without partially synchronized rotations. In the case of the homoclinic curve of the saddle periodic orbit the system undergoes a chaotic rotation regime which results in a random return to synchrony. We establish that return transitions are hysteretic in the case of large inertia.

Keywords: oscillators, synchronization, pendulum, star

For citation: Belykh V. N., Bolotov M. I., Osipov G. V., "Kuramoto Phase Model with Inertia: Bifurcations Leading to the Loss of Synchrony and to the Emergence of Chaos", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 595–608.

On the authors:
Belykh Vladimir Nikolaevich, orcid.org/0000-0002-1506-8070,
Department of Control Theory, Nizhny Novgorod University, Gagarin Ave., 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia,
Volga State University of Water Transport, Nesterova str., 5, Nizhny Novgorod, 603950, Russia
e-mail: belykh@vgavt-nn.ru

Bolotov Maxim Ilich, orcid.org/0000-0002-0915-4132,
Department of Control Theory, Nizhny Novgorod University, Gagarin Ave., 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia,
e-mail: bolotov_maxim_ilich@mail.ru

Osipov Grigory Vladimirovich, orcid.org/0000-0003-2841-8399,
Department of Control Theory, Nizhny Novgorod University, Gagarin Ave., 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia,
e-mail: grosipov@gmail.com

Acknowledgments:
This work was supported by the RSF (Project No. 14-12- 00811) (Sections 1,2) and by the RFBR (project 15-01-08776) (Section 3).

Synchronous behavior is one of ubiquitous collective phenomena in ensembles of oscillatory systems. The Kuramoto model is arguably the most studied model that describes synchronization [1, 2, 3]. This model captures essential features of synchronization, observed in science and applications. Examples are arrays of coupled Josephson junctions [4], semiconductor laser arrays [5], the ensembles of the cells in the heart [6], Hodgkin-Huxley neurons [7], central pattern generator for animal locomotion [8], rhythmic applause [9], pedestrian crowd synchrony on London's Millennium bridge [10], microwave oscillator arrays [11] etc. For other examples, see [12], [13] and [14]. In this paper, an analytical study of a star motif of Kuramoto oscillators is presented. The system consists of a central node, the hub, connected to an arbitrary number of peripheral nodes. The star configuration of ensemble of oscillators for the different models has been studied. In [15], starting from the analysis of the topological properties of the star configuration, some analytical considerations have been applied to derive the bifurcation diagram of the system with respect to the parameter mismatch between peripheral oscillators and hub and to the coupling strength. The analysis revealed that the system may become fully synchronized (more precisely, the peripheral oscillators are completely synchronized among each other and phase synchronized with the hub). In the case of star-coupled ensemble of phase oscillators the analytical description of the parameter regions of existence of different synchronous regimes has been obtained in [16]. It was shown that peripheral oscillators compete for the synchronization with the hub and only a given number of peripheral oscillators can win this competition.

1. Kuramoto phase model with inertia

We consider the Kuramoto phase model with inertia of N coupled phase oscillators [17, 18]

$$\beta\ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i), \tag{1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N,$$

where θ_i is instantaneous phase, ω_i is natural frequency of the i-th oscillator, $K_{i,j}$ are the entries of a coupling symmetric matrix $K = \{K_{ij}\}_N^N$, β is a positive parameter representing an inertia of oscillators. In the case $\beta = 0$ and $K_{ij} = K$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ the system (1) becomes the original paradigmatic Kuramoto model [1, 2, 3].

We consider the star configuration of coupling [19, 20, 21] when the matrix K has the form

$$K = \begin{pmatrix} 0 & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1N} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

i.e. the first element is the hub of the configuration, and the system (1) reads

$$\begin{cases} \beta\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 = \omega_1 + \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=2}^{N} K_{1j}\sin(\theta_j - \theta_1), \\ \beta\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2 = \omega_2 + \dfrac{1}{N}\Big(K_{12}\sin(\theta_1 - \theta_2)\Big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \beta\ddot{\theta}_N + \dot{\theta}_N = \omega_N + \dfrac{1}{N}\Big(K_{1N}\sin(\theta_1 - \theta_N)\Big). \end{cases} \tag{2}$$

We introduce new variables and new parameters

$$\phi_i = \theta_{i+1} - \theta_1, \Delta_i = \omega_{i+1} - \omega_1, \frac{K_{1,i+1}}{N} = a_i, \tag{3}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n = N - 1,$$

where ϕ_i is the phase difference between the hub and each another peripheral oscillator, Δ_i is the frequency mismatch of $(i+1)$'s peripheral oscillator and the first hub oscillator. Using (3) we rewrite the system (2) in the form

$$\begin{cases} \beta\ddot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 = \Delta_1 - (2a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2 + \cdots + a_n\sin\phi_n), \\ \beta\ddot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2 = \Delta_2 - (a_1\sin\phi_1 + 2a_2\sin\phi_2 + \cdots + a_n\sin\phi_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \beta\ddot{\phi}_n + \dot{\phi}_n = \Delta_n - (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2 + \cdots + 2a_n\sin\phi_n). \end{cases} \tag{4}$$

The phase synchronization of oscillators in the model (1) is defined as an attractor of the system (4) which trajectories $(\phi_i^s(t), \dot{\phi}_i^s(t))$ satisfy the conditions

$$|\phi_i^s(t)| < \varepsilon, \langle\dot{\phi}_i^s(t)\rangle = 0, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

where $\langle\cdot\rangle$ denotes the mean value, and parameter $\varepsilon < \pi/2$ is a measure of synchronization.

Respectively, the steady trajectories $(\phi_i^a(t), \dot{\phi}_i^a(t))$ of the system (4) defining asynchronous mode of the oscillators in (1) satisfy the condition

$$\langle\dot{\phi}_i^a(t)\rangle \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

The mutual synchronization of the peripheral oscillators is characterized by the rotation numbers

$$r_{ij} = \lim_{t\to\infty}\frac{\phi_i^a(t)}{\phi_j^a(t)}, i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

The main candidate for synchronous state of the system (1) is the stable equilibrium point of the system (4).

The phase space of the system (4) written in Cauchy form with coordinates $(\phi_i, y_i = \dot{\phi}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, is the cylinder $G = \{\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n\}$.

From the boundness of the right parts in (4) follows the next

Statement 1. *The solid torus* $G_0 = \{\phi_i \in \mathbb{S}^1, |y_i| < \Delta_i + N\overline{a}, i = 1, 2, \ldots, n\}$, $G_0 \subset G$, *where* $\overline{a} = \max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} a_i$, *is the absorbing domain of the system (4).*

Equilibria of the system (4) are the solutions of the system

$$MS = \Gamma, \tag{8}$$

where

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$

$S = column(a_1 \sin\phi_1, a_2 \sin\phi_2, \ldots, a_n \sin\phi_n)$, $\Gamma = column(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$.

Since $\det M = n + 1 = N$ the system (8) has a unique solution

$$a_i \sin\phi_i = \tilde{\Delta}_i, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

where $\tilde{\Delta}_i$ are the entries of the column $M^{-1}\Gamma$, and (9) reads

$$\sin\phi_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\Delta_i}{n} - \frac{\Delta_j}{N} \right), \tag{10}$$

The system (9) for $|\tilde{\Delta}_i| < a_i$ has 2^n equilibria in G. The principal equilibrium corresponding to the synchronous mode is the point $O(\phi_1^+, \phi_2^+, \ldots, \phi_n^+)$, $\phi_i^+ = \arcsin \tilde{\Delta}_i a_i^{-1}$. All the rest equilibria coordinates are obtained from O by changing $\phi_{i_k}^+$ to $\phi_{i_k}^- = \pi - \phi_{i_k}^+$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

The stability of the equilibria is defined by the variational linear system of ODE ($\phi_i = \phi_i^+ + x_i$)

$$\begin{cases} \beta\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + 2\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \\ \beta\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + \alpha_1 x_1 + 2\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta\ddot{x}_n + \dot{x}_n + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + 2\alpha_n x_n = 0, \end{cases} \tag{11}$$

where $\alpha_i = a_i \cos\phi_i^+ = \sqrt{a_i^2 - \tilde{\Delta}_i^2}$ (or $\alpha_i = a_i \cos\phi_i^- = -\sqrt{a_i^2 - \tilde{\Delta}_i^2}$).

We seek a solution of the system (11) in the form $x_i = c_i e^{pt}$ and obtain the next characteristic equation for the system (11)

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \sigma_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

where $\sigma_i = (\beta p^2 + p + 2\alpha_i)\alpha_i^{-1}$.

Hence, the equilibrium O is stable, i.e. the complete synchronization regime is stable, when the real parts of $2n$ roots of the equation (12) for $\alpha_i = \sqrt{a_i^2 - \tilde{\Delta}_i^2}$ are negative.

Let us consider the particular case of the system (4)

$$\alpha_i = \sqrt{a_i^2 - \tilde{\Delta}_i^2} = \alpha = const, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

This condition implies the uniform coupling in the system (4): $a_i = a$, $\Delta_i = \Delta$. In this case $\tilde{\Delta}_i = \Delta/N$, and $\alpha_i = \sqrt{a_i^2 - (\Delta/N)^2} = \alpha$, and $\sigma_i = \sigma$. In this case the equation (12) takes the form

$$(\sigma - 1)^{n-1}(\sigma + n - 1) = 0. \tag{14}$$

Then $\sigma - 1 = 0$ gives the equation

$$\beta p^2 + p + \alpha = 0, \tag{15}$$

and $\sigma + n - 1 = 0$ leads to the equation

$$\beta p^2 + p + N\alpha = 0. \tag{16}$$

From (15) repeated $(n - 1)$ times and (16) we conclude that the real parts of all the roots of the equation (12) are negative and therefore the equilibrium O is asymptotically stable. In this case from equation (2) we obtain the following expression for frequency of complete synchronization

$$\omega_s^G = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \omega_i. \tag{17}$$

It's easy to verify that in homogeneous case (13) all the rest equilibria are saddles with different dimensions of unstable manifolds.

Hence, we proved the next statement

Theorem 1. *Let for $\Delta_i = \Delta$, $a_i = a$ the following condition holds*

$$|\Delta| < Na. \tag{18}$$

Then the system (4) has the stable equilibrium point O, corresponding to the synchronous mode of the system (1) when the hub oscillator synchronizes the enclosing ones.

Corollary 1. *The stability of the equilibrium point O is preserved for small mismatch $|\alpha_i - \alpha| < \mu$ due to its structural stability. For large mismatch the stability conditions one can derive using (12).*

Corollary 2. *The system (4) has no equilibrium points if $|\tilde{\Delta}_i| > a_i$ at least for one $i = i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Indeed, in this case the system (9) has no solution, and the synchronization loss occurs due to disappearance of the stable equilibrium O via saddle-node bifurcation.

2. The uniform coupling in star configuration of Kuramoto model

Consider the case of uniform coupling when $a_i = a = const$, $\Delta_i = \Delta = const$, but rewrite the system (4) in another form

$$\beta\ddot{\phi}_i + \dot{\phi}_i = \Delta - a\sin\phi_i - b\sum_{j=1}^{n}\sin\phi_j, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

where new parameter $b > 0$ is not necessary equal to a.

Lemma 1. *The system (19) has the invariant manifold* $M : \{u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u\}$ *where* $u_i = (\phi_i, \dot{\phi}_i = y_i)$, $\dim M = 2$. *The dynamics in the manifold* M *is determined by the pendulum equation*

$$\beta\ddot{\phi} + \dot{\phi} = \Delta - \alpha\sin\phi, \tag{20}$$

where $\alpha = a + bn$.

Indeed, each equation (19) after substitution $u_i = u$ becomes one and the same equation (20), and any trajectory of the system (19) with uniform initial condition $u_i = u^0 \in M$, does not leave M.

The local stability of the manifold M is defined by the variational equation

$$\beta\ddot{\xi}_i + \dot{\xi}_i = \cos\phi[-a\xi_i - b\sum_{j=1}^{n}\xi_j], \tag{21}$$

where $\xi_i = \phi_i - \phi$ and ϕ is driven by the system (20).

First we present well known [22, 23, 24] bifurcational diagram and qualitative phase pictures of the pendulum equation (20) which for new time $t' = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}t$ and new parameters $\lambda = (\alpha\beta)^{-1/2}$, $\gamma = \Delta/\alpha$ takes the form

$$\ddot{\phi} + \lambda\dot{\phi} + \sin\phi = \gamma. \tag{22}$$

For $\lambda > 0$ the bifurcations in this equation are saddle-node for $|\gamma| = 1$ and the homoclinic loop encircling the cylinder $(\phi, y = \dot{\phi})$ at $|\gamma| = \gamma_h(\lambda)$, where $\gamma_h(\lambda)$ is Tricomi curve satisfying the conditions

$$\gamma_h(0) = 0; \gamma_h'(0) = \frac{4}{\pi}; \gamma_h'(\lambda) > 0, 0 < \lambda < \lambda_{sn}; \tag{23}$$

$$\gamma_h(\lambda) = 0, \lambda \geq \lambda_{sn}, \tag{24}$$

where the value $\lambda_{sn} \approx 1.2$ corresponds to the homoclinic loop of the saddle-node. The condition $\gamma_h'(0) = \frac{4}{\pi}$ one can obtain using averaging method for small parameters λ and γ in (22), and increasing property, $\gamma_h'(\lambda) > 0$, of the function $\gamma = \gamma_h(\lambda)$ follows from clockwise rotation of the vector field $(\dot{\phi} = y, \dot{y})$ given by the equation (22), while parameter λ increases.

For the parameters β, α, Δ of the equation (20) the bifurcations read

$$|\Delta| = \alpha\gamma_h((\beta\alpha)^{-1/2}) \tag{25}$$

is the homoclinic bifurcation, and

$$|\Delta| = \alpha \tag{26}$$

is the saddle-node bifurcation.

Lemma 2. *The system given by the equation (20)*

$$\dot{\phi} = y, \beta\dot{y} + y + \alpha\sin\phi = \Delta \tag{27}$$

in the phase cylinder $G = \{\phi \in \mathbb{S}^1, y \in \mathbb{R}^1\}$ *has the following phase portraits:*

1) In the parameter domain

$$d_1 : \{|\Delta| < \alpha\gamma_h((\beta\alpha)^{-1/2})\}$$

the system (27) is globally asymptotically stable (Fig.1,S) such that the stable focus (or node) $O_f(\phi_f = \arcsin\dfrac{\Delta}{\alpha}, y_f = 0)$ *attracts the whole cylinder besides the stable separatrices of the saddle* $O_s(\phi_s = \pi - \phi_f, y_s = 0)$.

2) In the parameter domain

$$d_2 : \{\alpha\gamma_h((\beta\alpha)^{-1/2}) < |\Delta| < \alpha, (\beta\alpha)^{-1/2} < \lambda_{sn}\},$$

the system (27) is bistable: it has the stable focus (node) and the unique stable limit cycle $l_c(\phi = \phi_c(t), y = y_c(t))$ *encircling the cylinder; the basins of the focus and the cycle are separated by the stable separatrices of the saddle (Fig.1,B).*

3) In the parameter domain

$$d_3 : \{|\Delta| > \alpha\}$$

the system (27) has the unique limit cycle attracting the whole cylinder (Fig.1,R).

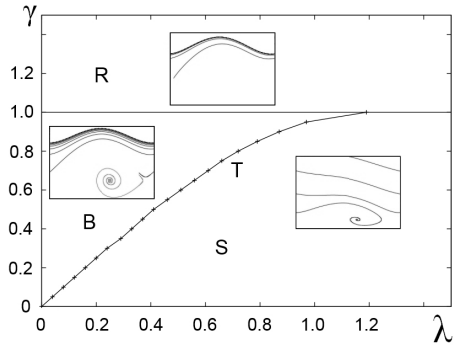


Fig. 1. Phase portraits of the system (20) for different value of parameters

Fig.1 corresponds to $\Delta > 0$. For $\Delta < 0$ the phase portraits are the same for the reverse coordinates $(\phi, y) \to (-\phi, -y)$.

Consider the local stability of the trajectories $l^*(\phi^*(t), y^*(t))$ in the invariant manifolds M, especially of the limiting set, which consist of the stable focus (node) $O_f(\phi, 0)$, the saddle $O_s(\phi_s, 0)$ and limit cycle $l_c(\phi_c, y_c)$.

Obviously, the stability along the manifold M is defined by the variational equation of the equation (20) ($\phi = \phi^* + \xi$)

$$\beta\ddot{\xi} + \dot{\xi} + \alpha\cos\phi^*(t)\xi = 0, \alpha = a + nb, \tag{28}$$

which obviously determines type of the equilibria stability and for the limit cycle, $\phi^* = \phi_c$, gives one zero and one negative ($div(\dot{\phi}, \dot{y}) = -(\beta\alpha)^{-1/2} < 0$) Lyapunov exponents.

The variational equation (21) for original system (19) along the manifold M, i.e. along the vector $(1, 1, \ldots, 1)$ gives the same equation (28).

In the transverse direction to the manifold (transversally to the vector $(1, 1, \ldots, 1)$) the system (21) takes the form

$$\beta\ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i + a\cos\phi^*(t)\eta_i = 0, \tag{29}$$

where $\eta_i = \xi_i - \xi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, and $\phi^*(t)$ is driven by the equation (20). The equation (29) similarly to (12) determines the stability of the focus (node) O_f in the transverse direction and unstability of the saddle O_s in the transverse direction. The equation (29) for the trajectories $\phi^*(t)$ from the basin of node O_f lying in the band $|\phi| < \dfrac{\pi}{2}$, providing $\cos\phi^*(t) > 0$, at least for $(\beta a)^{-1/2} \geq \lambda_{sn}$ guarantees the local stability of this part of the manifold M. The transverse stability of the limit cycle is defined by the equation (29) for $\phi^* = \phi_c(t)$. Since $\dot{\phi}_c(t) = y_c(t) > 0$ the phase $\phi_c(t)$ rotates and the term $\cos\phi_c(t)$ in (29) changes the sign thereby creating a problem of the cycle transverse stability. We solve it in the case when $|\Delta| = (\beta a)^{-1/2} + \varepsilon$, for small enough $\varepsilon > 0$. In this case the cycle just appearing from the homoclinic loop of the system (27) passes a small neighborhood of the saddle O_s and therefore spends the most time (of order $1/\varepsilon$) in the neighborhood $|\phi - \phi_s| < \varepsilon$. Since $\cos\phi_s < 0$, due to (29) the limit cycle l_c is born being unstable.

From above reasoning we conclude

Statement 2. *1) If the Lyapunov-Floquet exponents from (29) for $\phi^*(t) = \phi_c(t)$ are negative then the asynchronous mode is such that the peripheral oscillators are synchronized with rotation numbers equaled* 1.

2) The homoclinic bifurcation of the system (19) leads to an asynchronous mode of the peripheral oscillators.

For sufficiently large inertia such that $(\beta a)^{-1/2} < \lambda_{sn}$, the transition from coherence to incoherence of oscillators is hysteretic. When the frequency difference Δ increases the transition from the stable equilibrium O_f (coherence) to the rotation mode in the solid torus G_0 (incoherence) occurs via the saddle-node bifurcation $|\Delta| = a$. Obviously, this rotation mode can be the stable cycle $l_c = (\phi_c(t), \dot{\phi}_c(t))$ in the manifold M. In this case one observes the transition from complete phase synchronization to the synchronous state of the peripheral oscillators being asynchronous to the hub oscillator with mean frequency difference $\langle\dot{\phi}_c(t)\rangle$. When the frequency difference Δ decreases from large values corresponding to the rotation mode at the bifurcation of homoclinic orbit of the saddle $|\Delta| = a\gamma_h((\beta a)^{-1/2})$ the reverse transition to the complete synchronization due to

Statement 2 occurs only from the asynchronous mode of the peripheral oscillators. Note that this hysteretic behaviour being similar to the transitions in the Josephson junction model [25] was discussed in the recent paper [26].

3. Nonsymmetric coupling

We consider the general case of nonsymmetric coupling but, as an example, for three oscillators in the star configuration. Similarly to symmetrical case (2), (4) we obtain the system

$$\begin{cases} \beta_1\ddot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 + a_1 \sin\phi_1 = \Delta_1 - b_1 \sin\phi_2, \\ \beta_2\ddot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2 + a_2 \sin\phi_2 = \Delta_2 - b_2 \sin\phi_1, \end{cases} \tag{30}$$

where $\beta_{1,2}$ are different inertias of peripheral oscillators, $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ are the coupling matrix entries, and $\Delta_{1,2}$ are frequency differences. Our goal is to introduce several parameter domains exhibiting different simple and complicated dynamics of the system (30).

3.1. Equilibria

The system (30) has four equilibria in the region

$$\tilde{\Delta}_{1,2} < \delta \tag{31}$$

where $\tilde{\Delta}_{1,2} = a_{2,1}\Delta_{1,2} - b_{1,2}\Delta_{2,1}$, $\delta = a_1a_2 - b_1b_2$, defined by the equation

$$\sin\phi_{1,2} = \tilde{\Delta}_{1,2}\delta^{-1}, \tag{32}$$

giving solutions $\phi_{1,2}^{+(-)}$ similarly to (9). For $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ the stability of the equilibria in this case is defined by the equation

$$\sigma^2 + r\sigma + \alpha_1\alpha_2\delta = 0, \tag{33}$$

where $r = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, $\alpha_{1,2} = \cos\phi_{1,2}^{+(-)}$, $\sigma = \beta p^2 + p$. Due to (33) the principal equilibrium $O_f(\phi_1^+, \phi_2^+)$ is stable and three other equilibria are saddles.

3.2. Comparison systems

We rewrite the equations (30) in the form of the systems

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{1,2} = y_{1,2}, \\ \beta_{1,2}\dot{y}_{1,2} = \Delta_{1,2} - y_{1,2} - a_{1,2}\sin\phi_{1,2} - b_{1,2}\sin\phi_{2,1}, \end{cases} \tag{34}$$

Introduce two comparison $2D$ systems (see [27] and ref. within) for each subsystem in (34) $A_i^{+(-)}$:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = y_i, \\ \beta_i\dot{y}_i = \Delta_i \pm b_i - y_i - a_i\sin\phi_i, \end{cases} \tag{35}$$

$i = 1, 2$, acting in $2D$-cylinder $G = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$. The systems $A_i^{+(-)}$ are the system (27) with $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \pm b_i$, $i = 1, 2$, standing for Δ.

The vector projection of the system (35) on the cylinder (ϕ, y) is rotated clockwise (counterclockwise) relatively to the vector of A_i^+ (A_i^-, respectively) in the half-cylinder $(\phi, y > 0)$ and vise versa in the half-cylinder $(\phi, y < 0)$. Now we depict the separatrices of the saddles and cycles simultaneously for the systems A_i^+ and A_i^-. The unstable (stable) separatrices form the strips between them-sparatrix channels g_i^u (g_i^s respectively). Introduce the intersection $g_i^o = g_i^u \cap g_i^s$, called the saddle cell [27], the annulus K_i^s bounded by the stable cycles of the system A_i^+ and A_i^-, and the absorbing domain g_i^+ bounded by unstable separatrices of the systems A_i^+ and A_i^-, and segments $\phi = const$ (see Fig. 2), $i = 1, 2$. We select three pairs of parameter domains $d_{ki} = d_{ki}^+ \cup d_{ki}^-$, where $d_{ki}^{+(-)}$, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, are domains d_k, $k = 1, 2, 3$ from Lemma 2 with $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \pm b_i$, a_i and β_i, $i = 1, 2$, standing for Δ, a and β respectively. Both systems A_i^+ and A_i^- have the same qualitative phase portraits in each of these domains d_{ki}, $k = 1, 2, 3$, forming mutual arrangement of the saddle channels, annulus and absorbing domain depicted in Fig.2. Using the above geometric structures we obtain the following findings.

Theorem 2. *Let the parameters of the system (34) be in the domain $\overline{d}_1 = d_{11} \cup d_{12}$ when the comparison systems $A_1^{+(-)}$ and $A_2^{+(-)}$ form the same structure of Fig.2-1. Then the equilibrium point $O_f(\phi_1^+, \phi_2^+)$ is globally asymptotically stable. Herewith three oscillators are globally synchronized.*

Proof. The system (34) has no entire trajectories besides the saddles in the domains $g_1^o \times g_2^o$, $g_{1,2}^o \times g_{1,2}^o$. It follows from Lyapunov-Chetaev function for monotone functions $\sin\phi_{1,2}$ at the intervals of $\phi_{1,2}$ for $g_{1,2}^{o(+)}$ in the system (34). The domain $\overline{g}^+ = g_1^+ \cup g_2^+$ is the attracting domain of the trajectories of the system (34) (besides the stable manifolds of the saddles) for the parameter region $d_{11} \cup d_{12}$ due to the directing property of the comparison systems (see Fig.2-1). The stability of the locally stable point O_f in the globally attracting domain $\overline{g}^+$ can be derived with the Lyapunov function using the monotonicity of $\sin\phi_{1,2}$ in the square $|\phi_{1,2} - \phi_{1,2}^+| < \varepsilon$ corresponding to $\overline{g}^+$.

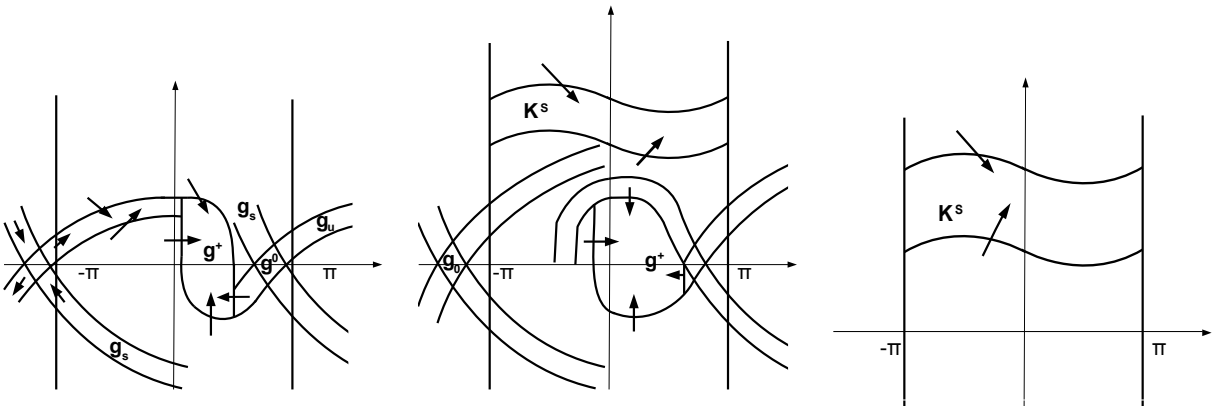
Theorem 3. *Let the parameters of the system (34) be in the domain $\overline{d}_3 = d_{31} \cup d_{32}$, when the comparison systems $A_1^{+(-)}$ and $A_2^{+(-)}$ form the same structures of Fig.2-3. Then the solid torus $\overline{K}^+ = K_1^s \times K_2^s$ attracts all the trajectories of the system (34). The nonwandering set of trajectories in $\overline{K}^+$ is rotating and defines the asynchronous mode of the oscillators.*

This statement immediately follows from the simple structure of Fig.2-3 forcing all trajectories of the system (34) to enter $\overline{K}^+$.

Theorem 4. *Let the parameters of the system (34) be in the domain $\overline{d}_2 = d_{21} \cup d_{22}$ with the same structures of comparison systems (Fig.2-2). Then the system (34) is fourfold-stable, that is, it has four separate components of limiting set in four absorbing domains $\overline{g}^+$, $\overline{K}^+$, $M_1^+ = g_1^+ \times K_2^s$, $M_2^+ = g_2^+ \times K_1^s$.*

Proof. In the parameter domain $\overline{d}_2$ a trajectory of the system (34) given by a solution $\phi_i = \tilde{\phi}_i(t, \phi_1^o, y_1^o, \phi_2^o, y_2^o)$, $y_i = \tilde{y}_i(t, \phi_1^o, y_1^o, \phi_2^o, y_2^o)$, $i = 1, 2$, with initial conditions $(\phi_i^o, y_i^o) \in g_i^+(K_i^s)$, $i = 1, 2$, is such that due to the comparison principal the coordinates of the first (second, respectively) subsystem remain in the first (second, respectively) absorbing

domain, $(\tilde{\phi}_i, \tilde{y}_i) \in g_i^+(K_i^s)$, $i = 1, 2$, for any $t > 0$. This implies that in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ the trajectory of the system (34) with any initial point in the domain $\overline{g}^+$ ($\overline{K}^+$, $\overline{M}_1^+$, $\overline{M}_2^+$, respectively), stay in these domains for any $t > 0$.



(1) (2) (3)

Fig. 2. Illustration of the comparison system (35)

3.3. Bifurcational transitions

First we note that in all cases of system the bifurcations of equilibria are simple and occur via the saddle-node when the frequency differences increase. In order to exhibit the complicated bifurcations leading to emergence of chaos we consider the reduced system (30) for $b_2 = 0$ corresponding to the unidirectional coupling of one of the peripheral oscillators. The second ("master") equation in (30) has the pendulum dynamics and in the simple case $|\Delta_2| > a_2$ which we consider has the unique rotating limit cycle $\phi_c(t) = \phi_c(t + T)$ (see Lemma 2). The first ("slave") equation is the pendulum one as well but it is driven by periodic force $-b_1 \sin \phi_c(t)$. Using the results from [25, 27] we obtain the next

Theorem 5. *1) In the parameter region $b_2 = 0$, $|\Delta_2| > a_2$, $|\Delta_1| < a_1 - b_1$ the system (30) in the solid torus $g_1^o \times K_2^s$ has a unique saddle cycle l_s which stable W_1^s and unstable W_1^u manifolds lie in the channels $W_1^s \subset g_1^s \times K_2^s$, $W_1^u \subset g_1^u \times K_2^s$ and have mutual arrangement corresponding for d_{11} to Fig.2-1 and for d_{12} to Fig.2-2.*

2) There exists an interval $|\Delta_1 - a_1\gamma_h((\beta_1 a_1)^{-1/2})| < \varepsilon$ corresponding to a structurally stable homoclinic orbit to the cycle l_s providing a chaotic compement of the system (30) limiting set containing infinite numbers of saddle cycles.

3) There exist an interval linking to the bifurcational point $\Delta_1 = a_1\gamma_h((\beta_1 a_1)^{-1/2}) + \varepsilon$ for which the system (30) has a quasi-strange rotating attractor.

The proof of the theorem is based [25, 27] on the fact that when the parameter Δ_1 increases from the values from the domain d_{11} (corresponding to Fig.2-1) up to the values from the domain d_{12} (corresponding to Fig.2-2) the channels g_1^s and g_1^u as well as the manifolds W_1^s and W_1^u change their mutual arrangement causing the birth, existence and death of the homoclinic orbits $H_1 = W_1^s \cap W_1^u$. Omitting the details we note the

important property of the hysteretic bifurcational transition in the system (30). When the parameter Δ_1 decreases the transition from asynchronous rotation to the synchrony occurs at random values of the parameter Δ_1 from the interval corresponding to the quasi-attractor existence. This complexity of the system (30) dynamics is similar to that of the shunted Josephson junction [27].

Hence, the example of three oscillators exhibits the complexity of the system dynamics which obviously is typical for the general system (1).

Finally we emphasize that the main reason of the complicated dynamics is relatively large inertia of oscillators. Indeed, in the limiting case $\beta_{1,2} \to \infty$ ($\lambda_{1,2} \to \infty$ for rescaled system (22)) the system (30) reduces to the divergence-free nonintegrable system

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + a_1 \sin\phi_1 + b_1 \sin\phi_2 = \Delta_1, \\ \ddot{\phi}_2 + a_2 \sin\phi_2 + b_2 \sin\phi_1 = \Delta_2, \end{cases} \tag{36}$$

In this system the parameters $b_{1,2}$ increase from zero causes due to KAM theory the invariant tori breakdowns corresponding to the "conservative chaos".

Acknowledgment

This work was supported by the RSF (Project No. 14-12- 00811) (Sections 1,2) and by the RFBR (project 15-01-08776) (Section 3).

References

[1] Winfree A. T., “Biological rhythms and the behavior of coupled oscillators”, *J. Theoret. Biol.*, **16** (1967), 15–42.

[2] Kuramoto Y., Proc. of Int. Symp. on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, **39**, ed. H. Araki, Springer, New York, 1975.

[3] Kuramoto Y., *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer Verlag, Berlin/Düsseldorf, 1984.

[4] Wiesenfeldt K., Colet P., Strogatz S., “Frequency locking in Josephson junction arrays: Connection with the Kuramoto model”, *Physical Review E*, **57** (1998), 1563–1567.

[5] Kozyrev G., Vladimirov A. G., Mandel P., “Global coupling with the time delay in an array of semiconductor lasers”, *Physical Review Letters*, **85(18)** (2000), 3809–3812.

[6] Michaels D. C., Matyas E. P., Jalife J., “Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization a new hypothesis”, *Circulation Research*, **61(5)** (1987), 704–714.

[7] Brown E., Holmes P., Moehlis J., “Globally coupled oscillator networks”, *Perspectives and Problems in Nonlinear Science: A Celebratory Volume in Honor of Larry Sirovich*, eds. E. Kaplan, J. E. Marsden, K. R. Sreenivasan, Springer, 2003, 183–215.

[8] Kopell N., Ermentrout G. B., “Coupled oscillators and the design of central pattern generators”, *Mathematical Biosciences*, **90** (1988), 87–109.

[9] Neda Z., Ravasz E., Vicsek T., Brecht Y., Barabasi A.-L., “Physics of the rhythmic applause”, *Physical Review E*, **61** (2000), 6987–6992.

[10] Strogatz S. H., Abrams D. M., McRobie A., Eckhardt B., Ott E., “Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millenium Bridge”, *Nature*, **438 (70640)** (2005), 43–44.

[11] York R. A., Compton R. C., “Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57(4)** (2012), 920–935.

[12] F. Dorfler, F. Bullo, "Synchronization in Complex Networks of Phase Oscillators: A Survey", *Automatica*, **50(6)** (2014), 1539–1564.

[13] Acebron J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigler R., "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena", *Reviews of Modern Physics*, **77(1)** (2005), 137–185.

[14] Belykh V. N., Petrov V. S., Osipov G. V., "Dynamics of the Finite-dimensional Kuramoto Model: Global and Cluster Synchronization", *Regular and Chaotic Dynamics*, **20(1)** (2015), 37–48.

[15] Frasca M., Bergner A., Kurths J., Fortuna L., "Bifurcations in a Star-Like Network of Stuart–Landau Oscillators", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22(7)** (2012), 1250173.

[16] Kazanovich Y., Burylko O., Borisyuk R., "Competition for synchronization in a phase oscillator system", *Physica D*, **261** (2013), 114–124.

[17] Tanaka H. A., Lichtenberg A. J., Oishi S., "First Order Phase Transition Resulting from Finite Inertia in Coupled Oscillator Systems", *Phys. Rev. Lett.*, **78(2104)** (1997).

[18] Tanaka H. A., Lichtenberg A. J., Oishi S., "Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses", *Physica D*, **100(279)** (1997).

[19] Pecora L., Carrol T., "Synchronization in chaotic systems", *PRL*, **64(821)** (1990).

[20] Belykh V. N., Belykh I. V., Hasler M., "Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems", *Physica D*, **195** (2004), 159–187.

[21] Belykh V. N., Osipov G. V., Petrov V. S., "Cluster synchrsonization in oscillatory networks", *Chaos*, **13** (2008), 037106.

[22] Tricomi F., "Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica", 11, **2**, 1933.

[23] Urabe M., "The least upper bound of a damping coefficient ensuring the existense of a periodic motion of a pendulum under constant torque", A 18, Hiroshima University, 1955, 379–389.

[24] Belykh V. N., Pedersen N., Soerenses O., "Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case", *Phys. Rev.*, **B 16** (1977), 4853.

[25] Belykh V. N., Pedersen N., Soerenses O., "Shunted-Josephson-junction model. II. The nonautonomous case", *Phys. Rev.*, **B 16** (1977), 4860.

[26] Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A., "Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia", *Phys. Rev. E*, **90** (2014), 042905.

[27] Belykh V. N., "Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps", *Advances in the Mathematical Sciences American Math. Soc. Translations*, **2(200)** (2000), 51–62.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-595-608

Фазовая модель Курамото с инерцией: бифуркации потери синхронности и перехода к хаосу

Белых В. Н., Болотов М. И., Осипов Г. В.

получена 15 сентября 2015

В данной работе рассматривается конечномерная модель Курамото с инерцией в случае топологии типа "звезда". Система уравнений сводится к нелинейно связанной системе маятниковых уравнений. Мы докажем, что переход от синхронных к асинхронным колебаниям происходит через седлоузловую бифуркацию состояния равновесия. Таким образом, асинхронный режим может представлять собой частично синхронные вращения. Обратный переход от асинхронного режима к синхронному происходит через бифуркацию гомоклинической орбиты как седлового состояния равновесия, так и седловой периодической орбиты. В случае гомоклинической петли седла синхронность возникает только из асинхронного режима без частично синхронных вращений. В случае гомоклинической кривой седловой периодической орбиты в системе имеет место хаотический режим вращения, который приводит к случайному возврату синхронности. Установлено, что переходы туда и обратно происходят с гистерезисом при большой инерции.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: осцилляторы, синхронизация, маятник, звезда

Для цитирования: Белых В. Н., Болотов М. И., Осипов Г. В., "Фазовая модель Курамото с инерцией: бифуркации потери синхронности и перехода к хаосу", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 595–608.

Об авторах:
Белых Владимир Николаевич, д-р физ.-мат. наук., профессор,
кафедра теории управления и динамики систем, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия,
Волжский государственный университет водного транспорта, ул. Нестерова, 5, Нижний Новгород, 603950, Россия
e-mail: belykh@vgavt-nn.ru

Болотов Максим Ильич, лаборант, кафедра теории управления и динамики систем, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия,
e-mail: bolotov_maxim_ilich@mail.ru

Осипов Григорий Владимирович, д-р физ.-мат. наук.,
кафедра теории управления и динамики систем, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия,
e-mail: grosipov@gmail.com

Благодарности:
Эта работа была поддержана RSF (project 14-12- 00811) (раздел 1,2) и RFBR (project 15-01-08776) (раздел 3).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 609–628
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 609–628

©Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-609-628

УДК 517.9

Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением по пространственной переменной

Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А.

получена 10 августа 2015

Рассматривается задача распространения волны плотности в логистическом уравнении с диффузией и отклонением по пространственной переменной (уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением). Для исследования качественного поведения решений этого уравнения было рассмотрено уравнение профиля волны и найдены условия возникновения у него колебательных режимов. Затем проанализирована соответствующая логистическому уравнению с отклонением краевая задача с периодическими условиями, для которой изучена проблема потери устойчивости пространственно однородного состояния равновесия и найдены ответвляющиеся от него пространственно неоднородные колебательные режимы. Численный анализ процесса распространения волны показал, что при достаточно малых значениях запаздывания данное уравнение имеет решения, близкие к решениям стандартного уравнения КПП. Увеличение параметра запаздывания приводит сначала к появлению затухающей колебательной составляющей в пространственном распределении решения. Дальнейший рост данного параметра приводит к разрушению бегущей волны. Это выражается в том, что на участке распространения волны, противоположном направлению отклонения, сохраняются незатухающие по времени и медленно распространяющиеся по пространству колебания, близкие к решениям соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями. Наконец, если значение отклонения достаточно велико, то во всей области распространения волны наблюдаются интенсивные пространственно-временные колебания.

Ключевые слова: аттрактор, бифуркация, уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, уравнение Гинзбурга–Ландау, отклонение по пространству

Для цитирования: Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., "Особенности динамики уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с отклонением по пространственной переменной", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 609–628.

Об авторах:
Алешин Сергей Владимирович, старший лаборант-исследователь ОПСИ НЦЧ РАН, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,
НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: fktiby@yandex.ru

Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, ведущий научный сотрудник ОПСИ НЦЧ РАН, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,
НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Введение

Одним из наиболее простых нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих распространение волн плотности распределения изучаемой величины, является рассмотренное А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым в статье [2] логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1-u], \tag{1}$$

которое ниже будем называть уравнением КПП. Это уравнение было привлечено авторами для описания процесса распространения генной волны. Здесь $u(t,x)$ — плотность распределения числа особей, обладающих доминантным геном, $t \geqslant 0$ — временная переменная, а $x \in (-\infty, \infty)$ — пространственная. Рассматривается задача распространения волны плотности численности от некоторого ненулевого начального условия. Почти одновременно с работой [2] появилась статья Р. А. Фишера [1], также посвященная анализу волн плотности численности в уравнении (1), в связи с чем уравнение (1) часто называют уравнением Фишера или Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Уравнение (1) находит применение в широкой области приложений, связанных с распространением в пространстве волн различной природы, от концентрации некоторого реагирующего вещества до волн плотности популяции. Среди большого количества публикаций, посвященных данной теме, выделим книги [3–5], в которых содержатся суммирующие результаты по проблеме, отметим также обширный библиографический список, содержащийся в [5].

В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о таких неотрицательных решениях $u(t,x)$, для которых при каждом $t > 0$ выполнены условия: $u(t,x) \to 1$ при $x \to +\infty$ и $u(t,x) \to 0$ при $x \to -\infty$. Показано, что при достаточно больших t функция $u(t,x)$ принимает некоторую фиксированную форму.

Обобщения уравнения (1) могут быть связаны с учетом зависимостей нелинейных слагаемых этого уравнения от сдвигов по пространству и по времени. В работах [6, 7] логистическое уравнение (1) с различными краевыми условиями и запаздывающим аргументом было применено к моделированию динамики плотности популяции. Несколько более общий подход продемонстрирован в статье [8], где дана развернутая постановка задачи, в которой изучается пространственное распределение плотности популяции. В частности, предлагается использовать следующее уравнение (см. также работы Н. Британа [9, 10]):

$$\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \Delta N(t,x) + N(t,x)\big[1 + \alpha N(t,x) - (1+\alpha)(g * N)(t,x)\big], \tag{2}$$

где $N(t,x)$ — плотность популяции в момент времени t в точке x ареала обитания, выражение $1 + \alpha N(t,x) - (1 + \alpha(g * N)(t,x))$ определяет изменения плотности численности, Δ — оператор Лапласа, а функция g характеризует пространственно временные неоднородности. В статье [10] предлагается следующий вид свертки $(g * N)$:

$$(g * N)(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\Omega} g(t-\tau, x-y) N(\tau, y) dy d\tau, \tag{3}$$

где Ω — область распределения популяции. Функция g должна удовлетворять условию нормировки $(g * 1)(t, x) = 1$. В предельном случае, когда g представляет собой дельта-функцию, сосредоточенную в начале координат, получаем уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (1). Если точку сосредоточения сдвинуть по оси времени, то получится уравнение с запаздыванием, подробно рассмотренное в статье авторов [11], если же точку сосредоточения сдвинуть по пространственной переменной, то получится уравнение с отклонением по пространству.

Рассмотрим обобщение уравнения КПП (1), содержащее отклонение по пространству

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t, x - h)]. \tag{4}$$

Величину h пространственного отклонения будем считать положительным числом, поскольку в противном случае можно заменить переменную x на $-x$, что приводит к смене знака параметра отклонения.

Исследование качественного поведения решений уравнения (4) открывается в первом разделе статьи анализом уравнения профиля волны, для которого найдены условия возникновения колебательных режимов. Затем, во втором разделе, проанализирована соответствующая уравнению (4) краевая задача с периодическими условиями, для которой изучена проблема потери устойчивости пространственно однородного состояния равновесия и найдены ответвляющиеся от него пространственно неоднородные колебательные режимы.

Учитывая, что для многих приложений представляет интерес задача о распространении волн концентрации в задаче (4), в последней части работы приведены результаты численного моделирования для уравнения (4) в случае неограниченной по x области.

1. Некоторые свойства волновых решений задачи

В работе [2] было показано, что в уравнении (1) волны распространяются вдоль направлений $2t \pm x = \text{const}$, и был определен профиль волны, приводящей к переходу от нулевых значений переменной к единичным. Как и в работе [11], выполним в уравнении (4) замену в виде бегущей волны вида $u(t, x) = w(2t \pm x)$ и перейдем к новой временной переменной $s = 2t \pm x$, тогда для переменной $w(s)$ имеем следующее уравнение второго порядка с запаздыванием:

$$w'' - 2w' + w[1 - w(s - h)] = 0, \tag{5}$$

где штрихом обозначена производная по переменной s. Свойства устойчивости нулевого решения уравнения (5) не зависят от h, это решение представляет собой неустойчивый узел с кратным корнем равным единице. Свойства устойчивости единичного состояния равновесия определяются расположением корней характеристического квазиполинома

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda). \tag{6}$$

Свойства квазиполинома (6) аналогичны свойствам квазимногочлена, полученного в предыдущей части работы. Приведем без доказательства утверждения, касающиеся расположения корней квазиполинома (6). Рассмотрим сначала расположение и количество вещественных корней квазиполинома $P(\lambda)$. Простейший анализ

свойств трансцендентного уравнения $P(\lambda) = 0$ показывает, что при всех положительных h оно имеет либо один, либо три корня. Один из этих корней положительный, а два других отрицательны и появляются при критическом значении h_1^*, для нахождения которого имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - 2\lambda - \exp(-h\lambda) = 0, \\ &2\lambda - 2 + h\exp(-h\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая систему (7), имеем $\lambda \approx -1.23141$, $h = h_1^* \approx 1.12154$. Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. *Квазиполином $P(\lambda)$ имеет при $0 < h < h_1^*$ ровно три вещественных корня: один положительный и два отрицательных, а при $h > h_1^*$ — единственный положительный вещественный корень.*

Таким образом, в спектре устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (5) всегда есть положительный вещественный корень. Рассмотрим теперь расположение остальных корней квазимногочлена $P(\lambda)$. Выполнено утверждение.

Лемма 2. *Все корни квазиполинома $P(\lambda)$, кроме одного вещественного положительного, лежат при $0 < h < h_2^*$ в левой комплексной полуплоскости. Здесь*

$$h_2^* = \frac{\arccos\left(-\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} \approx 3.72346, \tag{8}$$

При $h = h_2^*$ на мнимую ось выходит пара чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega_0$, причем

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0.48587. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь окрестность решения $w(s) \equiv 1$ и найдем асимптотику режима, ответвляющегося от этого решения при $h = h_2^* + \mu$, где $0 < \mu \ll 1$. Для этого применим стандартную замену метода нормальных форм

$$w(s,\mu) = 1 + \sqrt{\mu}\big(z(\tau)\exp(i\omega_0 s) + \bar{z}(\tau)\exp(-i\omega_0 s)\big) + \mu w_1(s,\tau) + \mu^{3/2} w_2(s,\tau) + \dots, \tag{10}$$

где $\tau = \mu s$, $w_j(s,\tau)$ $(j = 1, 2)$ — тригонометрические полиномы по переменной s, $z(\tau)$ — медленно меняющаяся амплитуда, подлежащая определению. Подстановка выражения (10) в уравнение (5) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ приводит на третьем шаге к уравнению относительно $w_2(s,\tau)$, из условий разрешимости которого в классе тригонометрических полиномов получаем следующее уравнение на медленную амплитуду $z(\tau)$:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \tag{11}$$

где $\varphi_0 = \dfrac{2\omega_0^2(-1+i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}$, $\varphi_1 = \dfrac{1}{P'(i\omega_0)}\left(2\omega_0^2(1-\omega_0^2-2i\omega_0) + \beta\left((\omega_0^2+2i\omega_0)^2 - \dfrac{1}{\omega_0^2+2i\omega_0}\right)\right)$, $\beta = \dfrac{\omega_0^2+2i\omega_0}{4\omega_0^2+4i\omega_0+(\omega_0^2+2i\omega_0)^2}$. Используя полученное представление и формулы (8), (9), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов уравнения (11) $\varphi_0 \approx 0.136807 - 0.20660i$, $\varphi_1 \approx -0.04429 - 0.03664i$. Учитывая, что $\mathrm{Re}\,(\varphi_0) > 0$, а $\mathrm{Re}\,(\varphi_1) < 0$, можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $h = h_2^* + \mu$, *где* $0 < \mu \ll 1$, *тогда существует такое* $\mu_0 > 0$, *что для всех* $0 < \mu < \mu_0$ *уравнение* (5) *имеет дихотомичный цикл, неустойчивое многообразие которого одномерно, а асимптотика задается формулой* (10), *в которой комплексная амплитуда* $z(\tau)$ *заменена выражением*

$$\sqrt{-\mathrm{Re}\,(\varphi_0)/\mathrm{Re}\,(\varphi_1)}\exp\Big(i\varepsilon s\big(\mathrm{Im}\,(\varphi_0)\mathrm{Re}\,(\varphi_1) - \mathrm{Re}\,(\varphi_0)\mathrm{Im}\,(\varphi_1)\big)/\mathrm{Re}\,(\varphi_0) + i\gamma\Big),$$

где γ — *произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла.*

2. Волновые решения в задаче с периодическими условиями

В этом разделе рассмотрим логистическое уравнение с диффузией и отклонением (4), дополненное периодическими краевыми условиями

$$u(t,x) = u(t,x+T), \tag{12}$$

где $T > 0$ — период. В этой ситуации фазовым пространством задачи (4), (12) будем считать соболевское пространство T-периодических функций $W_2^2(0,T)$. Для исследования устойчивости состояния равновесия $u(t,x) \equiv 1$ краевой задачи (4), (12) линеаризуем ее на этом решении, приходим к краевой задаче (аналогичные действия для задачи с запаздыванием выполнялись в работах [12–18])

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(t,x-h), \quad v(t,x) = v(t,x+T). \tag{13}$$

Если в (13) выполнить разложение по пространственным модам, то на каждой из мод после замены $v(t,x) = \exp\lambda \exp i\omega x$ приходим к уравнению

$$\lambda = -\omega^2 - \exp i\omega h. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых h величина $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Найдем первое положительное значение параметра h, при котором $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Для этого необходимо решить алгебраическую систему

$$-\omega^2 - \cos\omega h = 0, \quad -2\omega + h\sin\omega h = 0. \tag{15}$$

Эта система сводится к трансцендентному уравнению

$$-\omega h = 2\,\mathrm{ctg}(\omega h), \tag{16}$$

решая которое относительно ωh, получаем решение системы (15):

$$h^* = 2.791544, \quad \omega^* = 0.88077. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что при $h < h^*$ состояние равновесия $u(t,x) \equiv 1$ краевой задачи (4), (12) асимптотически устойчиво. Предположим теперь, что $T = 2\pi/\omega^*$, а $h = h^* + \varepsilon$, где ε положительно и мало, и выясним характер потери устойчивости этого

состояния равновесия. Для этого выполним в (4), (12) стандартную замену метода нормальных форм

$$u(t,x,\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}u_0(t,\tau,x) + \varepsilon u_1(t,\tau,x) + \varepsilon^{3/2}u_2(t,\tau,x) + \dots, \tag{18}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время,

$$u_0(t,\tau,x) = z(\tau)\exp\big(i(\omega_0 t + \omega^* x)\big) + \bar{z}(\tau)\exp\big(-i(\omega_0 t + \omega^* x)\big), \quad \omega_0 = \sin\omega^* h^*.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ и отыскивая $u_j(t,\tau,x)$, $j = 1,2$ в виде тригонометрических многочленов по t, получаем на втором шаге функцию

$$u_1(t,\tau,x) = -2|z|^2\cos\omega^* h^* + \Big(z^2 w_2 \exp\big(2i(\omega_0 t + \omega^* x)\big) + \text{к.с.}\Big), \tag{19}$$

где под к.с. подразумевается выражение комплексно сопряженное с данным в той же скобке, $w_2 = -\big(2\omega_0 i + 4\omega^* + \exp(-2i\omega^* h^*)\big)^{-1}\exp(-i\omega^* h^*)$.

На третьем шаге выполнения алгоритма в краевой задаче для $u_2(t,\tau,x)$ из условий ее разрешимости в классе тригонометрических многочленов по t получаем следующее укороченное уравнение нормальной формы:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi_0 z + \varphi_1 |z|^2 z, \tag{20}$$

где

$$\varphi_0 = i\omega^*\exp(-i\omega^* h^*),$$
$$\varphi_1 = 2\cos\omega^* h^*\big(1 + \exp(-i\omega^* h^*)\big) - \big(\exp(-2i\omega^* h^*) + \exp(i\omega^* h^*)\big)w_2.$$

Используя полученное представление и формулу (17), нетрудно найти приближенные значения коэффициентов нормальной формы

$$\varphi_0 \approx 0.5558 - 0.6833i, \quad \varphi_1 \approx -0.1701 + 0.59i.$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $h = h^* + \varepsilon$, тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ краевая задача (4), (12) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл, асимптотика которого задается формулой (18), где медленная переменная z заменена выражением*

$$z = \sqrt{-\mathrm{Re}\,(\varphi_0)/\mathrm{Re}\,(\varphi_1)}\exp\Big(i\varepsilon t\big(\mathrm{Im}\,(\varphi_0)\mathrm{Re}\,(\varphi_1) - \mathrm{Re}\,(\varphi_0)\mathrm{Im}\,(\varphi_1)\big)/\mathrm{Re}\,(\varphi_0) + i\gamma\Big),$$

(γ — произвольная константа, определяющая фазовый сдвиг вдоль цикла).

Проиллюстрируем полученный результат численно. В краевой задаче (4), (12) зафиксируем величину отклонения h больше критического значения h^* и будем ее решать численно с начальными условиями вида

$$u(0,x) = 1 + 0.35\sin(0.88x + 0.1). \tag{21}$$

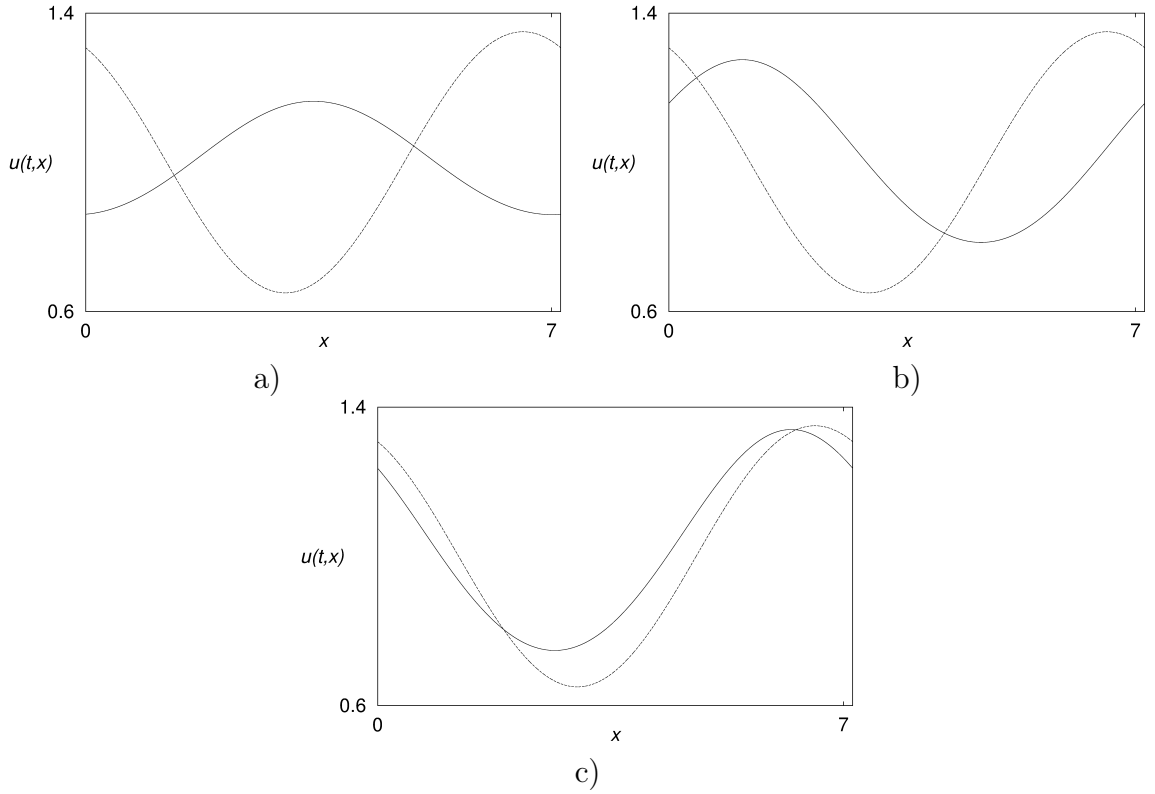


Рис. 1. Пространственное распределение решения краевой задачи (4), (12) с начальными условиями (21) при $t = 1000$ и значениях отклонения равных: a) $h = 2.793$; b) $h = 2.796$; c) $h = 2.798$

Начальные условия (21) выбраны близкими к единичному состоянию равновесия, с частотой по x близкой к ω^* (см. формулу (17)).

Для вычислений были взяты три значения величины отклонения h равные 2.793; 2.796; 2.798. В каждом из этих случаев решение асимптотически приближалось к пространственно неоднородному циклу, распределение которого по переменной x при $t = 1000$ приведено на рис. 1. Для полученных циклов были вычислены максимальные отклонения от единичного значения, которые оказались равными 0.160; 0.275 и 0.340 соответственно. Следует отметить, что амплитуды колебаний относительно единичного значения, полученные в вычислительном эксперименте, близки к найденным по асимптотической формуле (относительная ошибка менее 0.02), вытекающей из (18)

$$\sqrt{-(h - h^*)\mathrm{Re}\,(\varphi_0)/\mathrm{Re}\,(\varphi_1)}.$$

Представленные в первых двух разделах работы аналитические результаты позволяют получить некоторую информацию о решениях уравнения (4), однако для анализа зависимости решений от отклонения по пространству и начальных условий требуется численный эксперимент, описанию которого и посвящен следующий раздел статьи.

3. Численный анализ уравнения КПП с пространственным отклонением

Численное исследование распространения волн концентрации в уравнении (4) от локализованного по пространству начального возмущения выполнялось на некотором отрезке $[a, b]$. При этом разница $|a - b|$ выбиралась достаточно большой для того, чтобы можно было проследить за распространением волны от начального момента до момента встречи фронта волны с границами a или b. Учитывая, что рассматривается задача о распространении локального возмущения, зададим на границах отрезка нулевые краевые условия $u(t, a) = u(t, b) = 0$.

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной в правой части уравнения (4) заменим конечной разностью второго порядка. Для этого отрезок $[a, b]$ разобьем на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $\Delta x = (b-a)/N$ так, что $x_j = a+j\Delta x$, где $j = 0, \ldots, N-1$. Обозначим через $u_j(t)$ значение функции $u(t, x)$ в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \bigl[1 - u_{j-k}\bigr]u_j, \quad j = 0, \ldots, N-1, \tag{22}$$

где $k = \lfloor h/\Delta x \rfloor$ отвечает за пространственное отклонение (здесь $\lfloor\cdot\rfloor$ обозначена целая часть числа). Для учета краевых условий полагаем $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Численный эксперимент выполнялся на вычислительном кластере ЯрГУ (МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне). Одновременно решалось от $N = 1.8 \cdot 10^5$ до $N = 1.8 \cdot 10^6$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Для вычислений использовался метод Дормана–Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешности алгоритма были приняты равными 10^{-12}. Начальный шаг интегрирования взят равным 10^{-3}.

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка $[a, b]$. В частности, для случая $x \in [0, 1800]$:

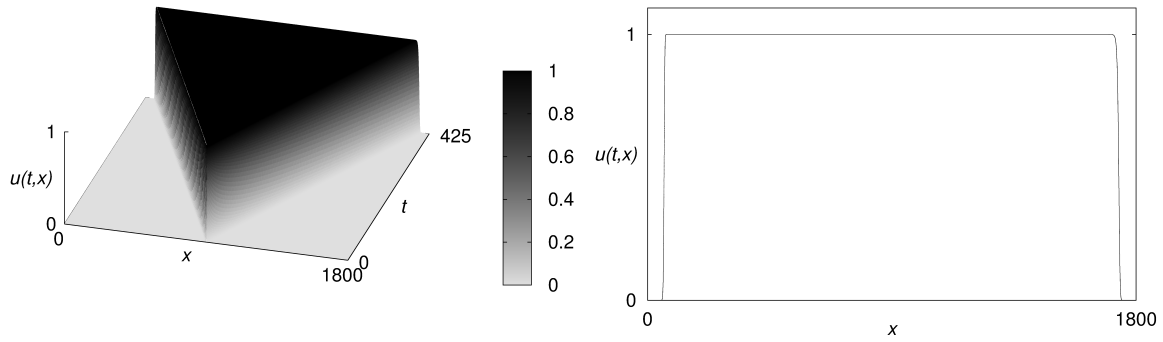
$$u_j(0) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{23}$$

Для последующего анализа и графического отображения полученные данные прореживались.

Перейдем к результатам численного моделирования. Описание поведения решений уравнения (4) с отклонением пространственной переменной будем проводить в сравнении с классическим уравнением КПП без отклонения. На рис. 2 представлено распространение волны постоянной высоты от начального всплеска единичной ширины и высоты 0.1 при $h = 1.2$. Скорость распространения волны согласно [2] равнялась двум. (На соответствующих рисунках скорость распространения равна углу наклона профиля волны.) Нетрудно видеть, что при этих значениях отклонения график процесса распространения волны для задачи с отклонением и без отклонения практически не отличается.

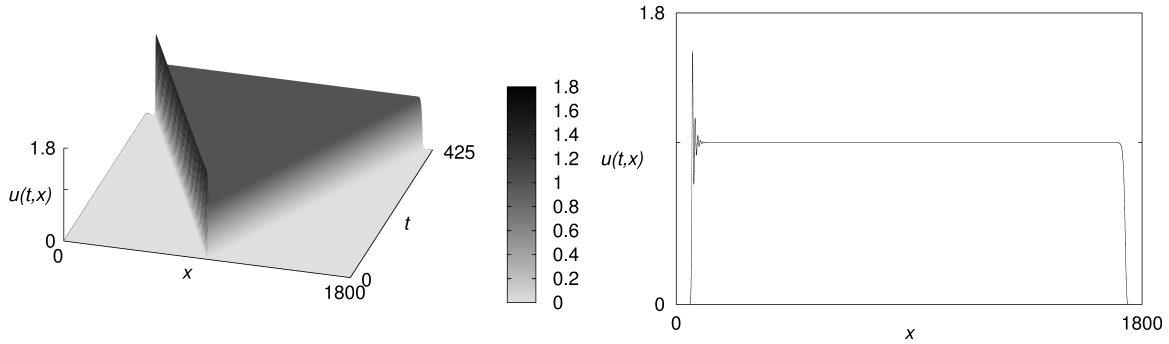
При увеличении параметра h можно выделить несколько этапов качественно различного поведения решений системы (22).

1. При относительно малом значении h на промежутке от нуля до h_1^* поведение системы (22) практически не отличимо от поведения системы КПП без отклонения. Величина h_1^* ограничивает данный промежуток, по-видимому, в связи с тем, что решения уравнения (5) на устойчивом инвариантном многообразии единичного состояния равновесия монотонно стремятся к этому состоянию (см. рис. 2 при $h = 1.2$).



a) b)

Рис. 2. Решение системы (22) с начальными условиями (23) при отклонении $h = 1.2$: a) распространение волны на плоскости (x, t); b) разрез при $t = 425$



a) b)

Рис. 3. Решение системы (22) с начальными условиями (23) при отклонении $h = 2.7$: a) распространение волны на плоскости (x, t); b) разрез при $t = 425$

2. При $h_1^* < h < h^*$ фронт распространения волны приближается к единичному значению колебательным образом. На рис. 3 показана такая волна при $h = 2.7$. В этом случае максимальная амплитуда всплеска равна примерно 1.5, а после прохождения фронта волны значение $u(t, x)$ быстро приближается к единице.

3. Следующее существенное изменение в распространении фронта волны уравнения (4) наблюдается при $h > h^*$. Существенной особенностью решения в этом случае является то, что оно перестает удовлетворять уравнению (5). Это происходит в силу того, что решение $u \equiv 1$ периодической краевой задачи (4), (12) колебательно теряет устойчивость и от него ответвляется орбитально асимптотически устойчивый пространственно неоднородный цикл. Указанное обстоятельство приводит к тому, что в правой части области распространения волны появляется расширяющийся с течением времени участок с интенсивными пространственными колебаниями. На рис. 4 показано распространение волны при $h = 2.81$, при этом на рис. 5 приведен

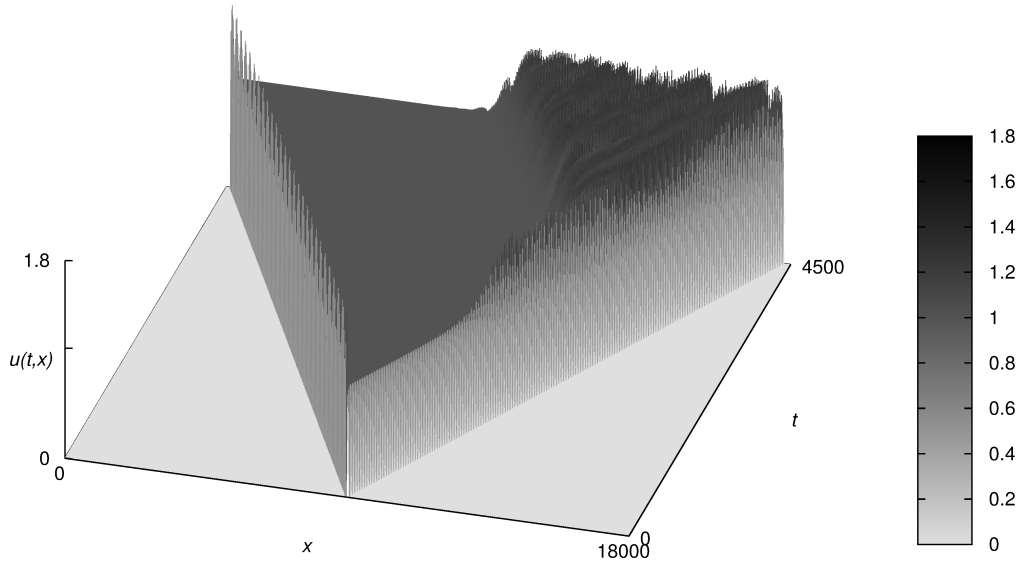


Рис. 4. Распространение волны в системе (22) при $h = 2.81$

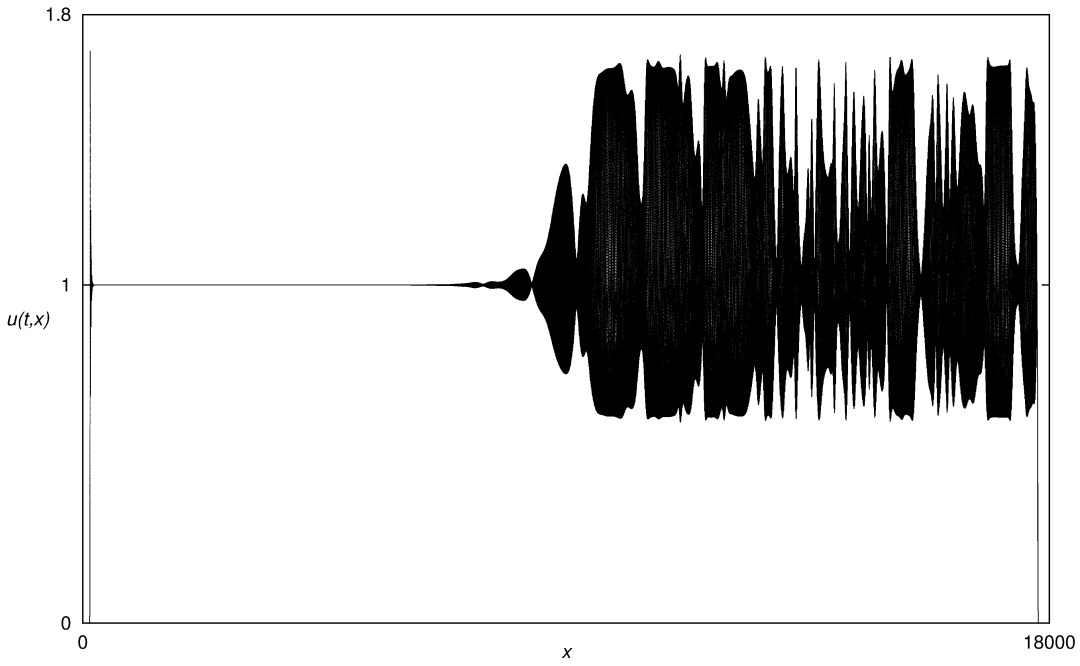


Рис. 5. Пространственное распределение решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$

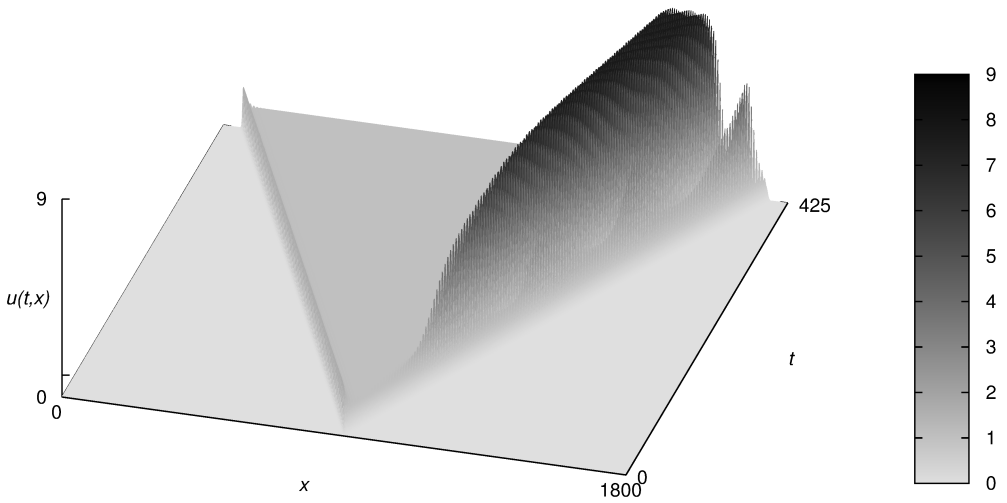


Рис. 6. Распространение волны в системе (22) при $h = 3$

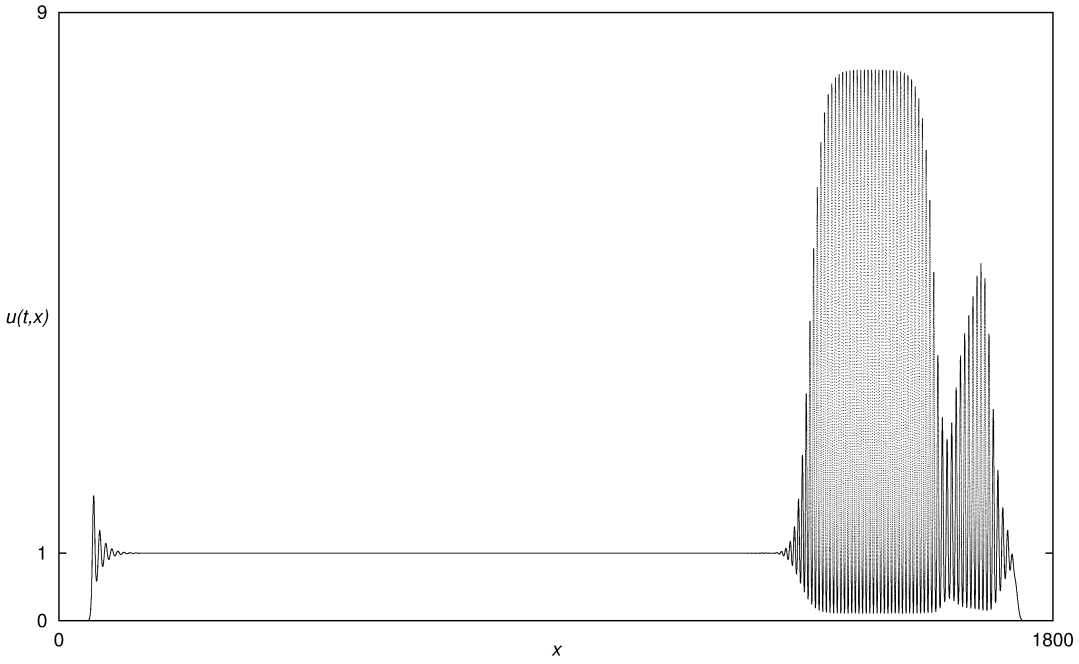


Рис. 7. Пространственное распределение решения системы (22) при $t = 425$ и отклонении $h = 3$

график зависимости $u(t,x)$ при $t = 4500$ и изменении пространственной переменной x в пределах от 0 до 18000. Структура колебательного процесса, представленного на данных графиках, видимо, является установившейся. Во всяком случае, к моменту времени $t = 4500$ амплитуда колебаний не растет с ростом t и в целом сохраняется довольно сложная пространственная структура решения $u(t,x)$, о которой ниже будет сказано дополнительно.

4. Численный эксперимент не удалось продолжить для значений отклонения h, существенно отличающихся от h^*. Так, уже при $h = 3$ в правой части графика распространения волны возникают весьма интенсивные колебания, достигающие при $t = 400$ значения около 9. На рис. 6 показано распространение волны при $h = 3$, при этом на рис. 7 приведен график зависимости $u(t,x)$ при $t = 425$ и $x \in [0, 1800]$.

Дальнейшее изменение отклонения приводит к резкому увеличению амплитуды колебательного режима, что, с одной стороны, влечет необходимость дробления шага по времени для сохранения точности вычислений, а с другой, значительно замедляет вычислительный процесс. По указанным причинам вычислительный эксперимент не был распространен на большие значения отклонения.

Рассмотрим более подробно пространственное распределение решения при $h = 2.81$. График решения $u(t,x)$ при $t = 4500$ может быть разбит на три части с визуально различной структурой. Ниже вычисляются статистические инвариантные характеристики для массивов данных, которые позволяют судить о сложности выделенных частей. Область интенсивных колебаний на рис. 7 разбита на следующие подобласти: $[9380, 12500]$; $[12500, 14970]$; $[14970, 17765]$. На рис. 8 эти участки графика приведены в более крупном масштабе, что позволяет увидеть отличия в их структуре.

В качестве инвариантных статистических характеристик, при помощи которых будем различать эти три части графика, используется корреляционный интеграл и корреляционная размерность. По выборке $u_j(4500)$, $j = 1, \dots M$ строится набор m–мерных векторов ξ_i, каждый из которых состоит из значений от $u_{(i-1)*m+1}$ до u_{i*m}. Напомним, что корреляционный интеграл можно оценить при помощи корреляционной суммы (см., например, [19])

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^{M} \Theta(\varepsilon - \|\xi_i - \xi_j\|), \tag{24}$$

где M — объем выборки, Θ — функция Хевисайда, $\|\cdot\|$ — некоторая норма (нами использовалась евклидова норма $\|x\|^2 = \sum x_l$), ε — некоторое пороговое значение, ξ_i — построенные m–мерные вектора, m — размерность пространства вложения.

Корреляционную размерность d_C можно определить как

$$d_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \tag{25}$$

В случае эмпирического вычисления корреляционная размерность d_C берется равной углу наклона прямой наилучшего приближения в смысле наименьших квадратов к наиболее линейной части графика, построенного по узлам $\{\log C(\varepsilon), \log \varepsilon\}$.

Были проведены вычисления корреляционного интеграла для размерностей пространства вложения $m = 3$ и $m = 5$, а также с различным шагом по переменной x.

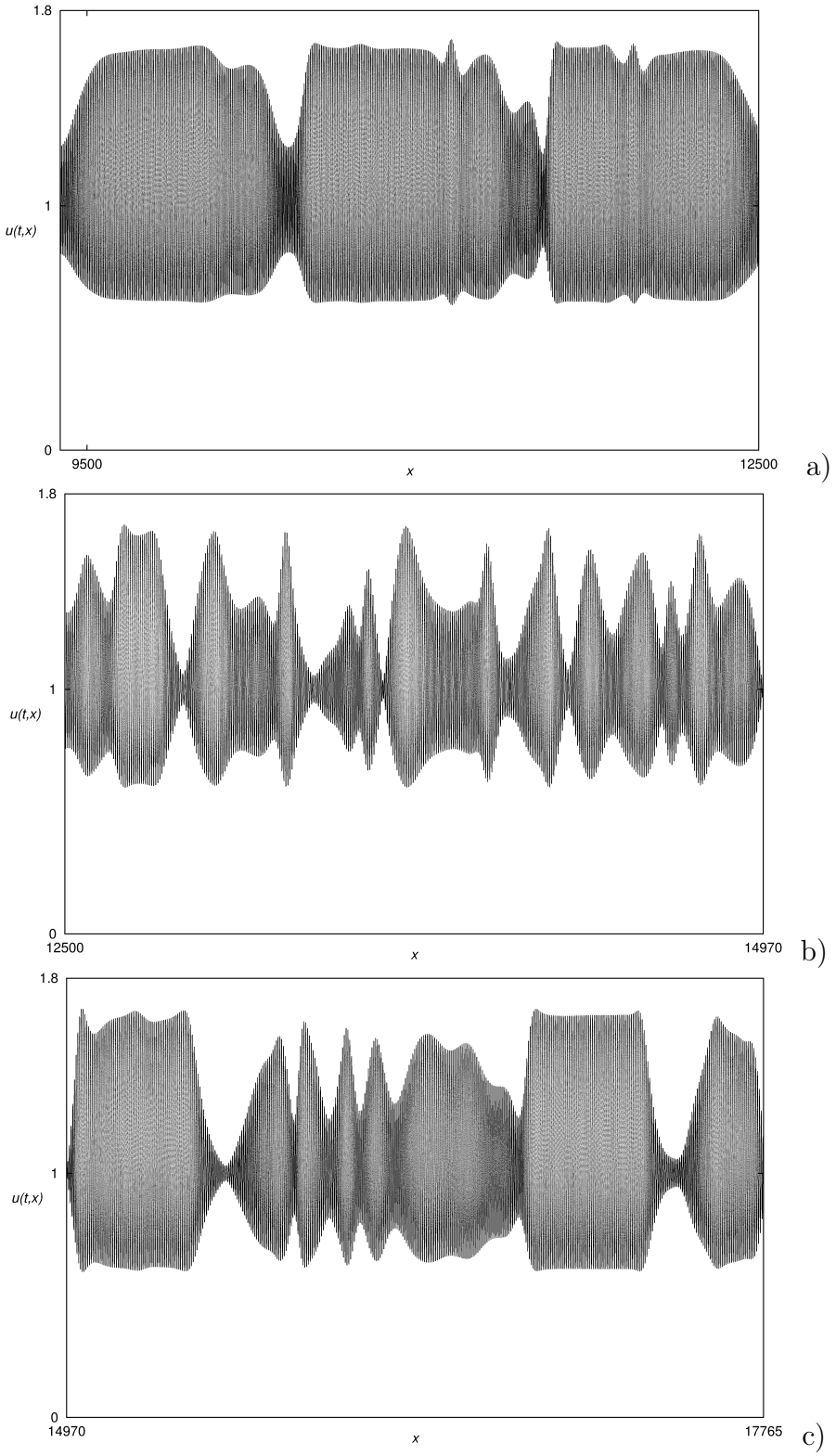


Рис. 8. Пространственное распределение решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$: a) $x \in [9380, 12500]$; b) $x \in [12500, 14970]$; c) $x \in [14970, 17765]$

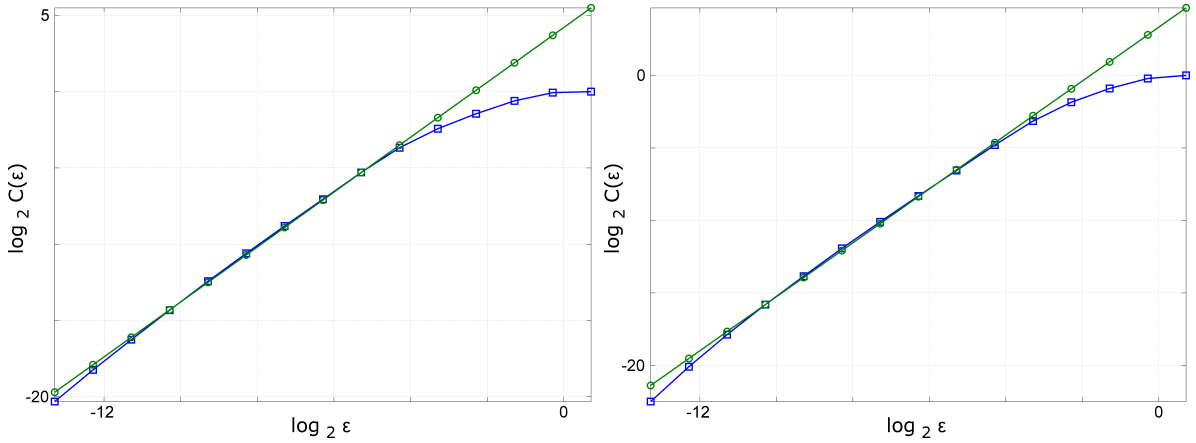


Рис. 9. $x \in [9380, 17765]$, шаг по x равен 0.1

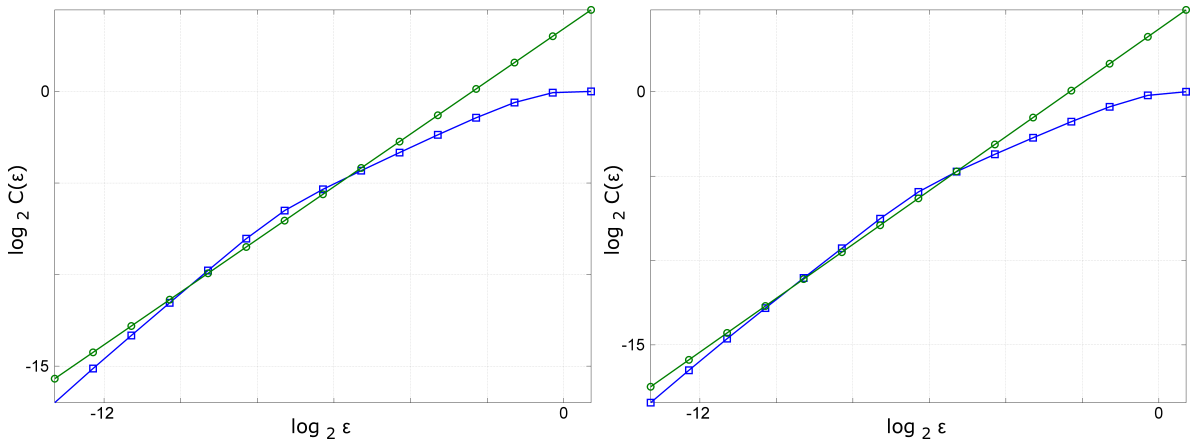


Рис. 10. $x \in [9380, 12500]$, x равен 0.01

На рис. 9 и 10 приведены зависимости логарифма корреляционного интеграла от логарифма ε, найденные для пространственного распределения решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$. Размерность пространства вложения для графиков слева — три; справа — пять. При этом на рис. 9 шаг по пространству выбран равным 0.1, а на рис. 10 — 0.01. Нетрудно видеть, что в первом из этих случаев наиболее линейный участок выделяется лучше, чем во втором и, тем самым, шаг достаточно брать равным 0.1. Величина d_C, оцениваемая по углу наклона графика зависимости корреляционного интеграла, оказалась равной для шага 0.1 и $m = 3$ $d_C \approx 1.799$ (среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 0.289$), а для шага 0.01 — $d_C \approx 1.437$ (среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 1.13$). Последний случай, очевидно, показывает, что подходящего линейного участка нет. Аналогичные результаты выходят и для $m = 5$, где для шага 0.1 имеем $d_C \approx 1.859$ (среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 0.35$), а для шага 0.01 — $d_C \approx 1.595$ (среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 0.907$).

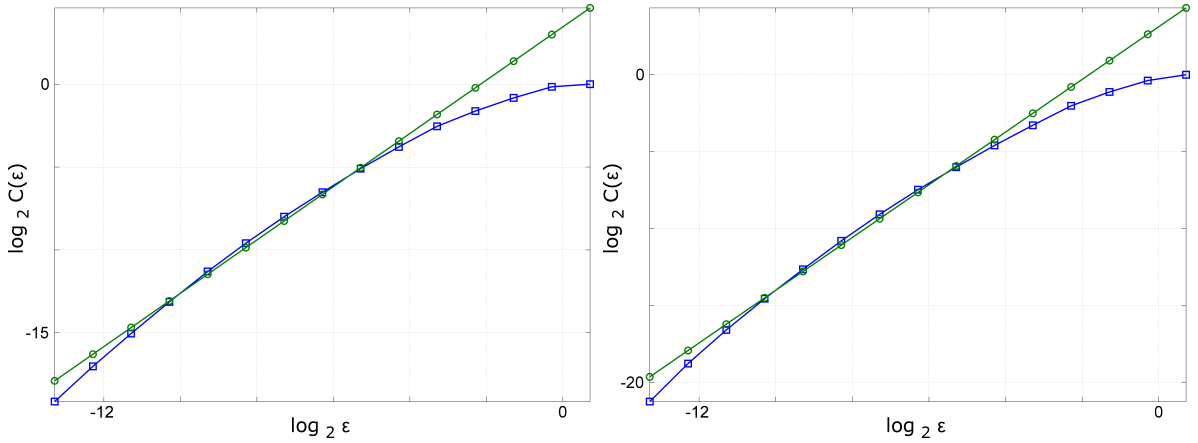


Рис. 11. $x \in [9380, 12500]$

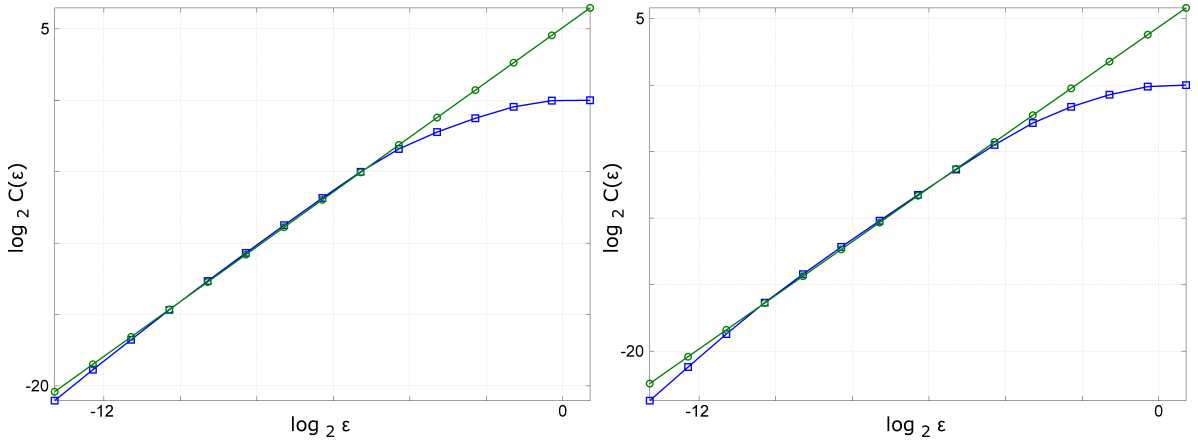


Рис. 12. $x \in [12500, 14970]$

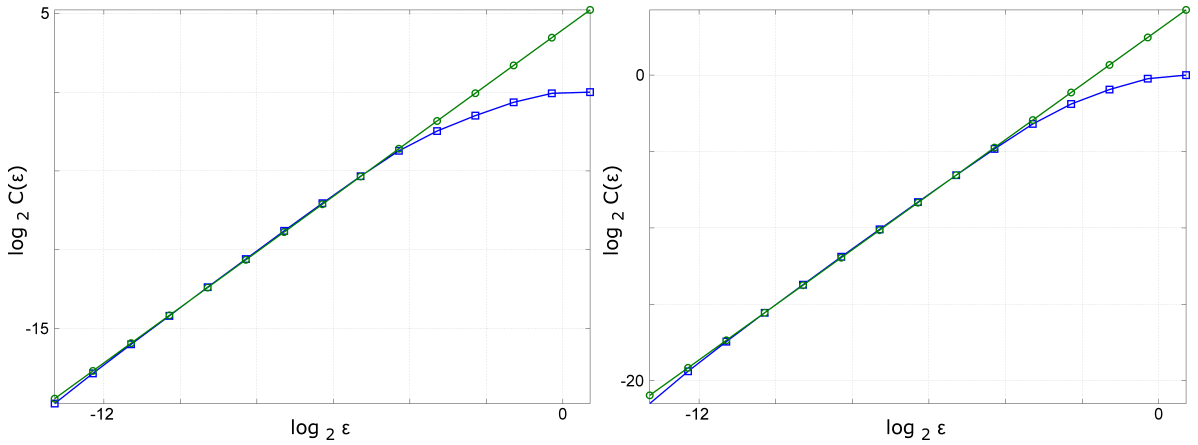


Рис. 13. $x \in [14970, 17765]$

Ситуация меняется, если выполнить расчеты для перечисленных выше отдельных участков решения. На рисунках 11, 12, 13 приведены графики зависимостей корреляционного интеграла для значений пространственной переменной из промежутков $x \in [9380, 12500]$; $x \in [12500, 14970]$ и $x \in [14970, 17765]$ соответственно. Размерность пространства вложения для графиков слева $m = 3$; справа — $m = 5$. Приведем оценки корреляционного интеграла.
$x \in [9380, 12500]$ при $m = 3$ $d_C \approx 1.6071$, $\sigma \approx 0.6658$; при $m = 5$ $d_C \approx 1.7129$, $\sigma \approx 0.7051$.
$x \in [12500, 14970]$ при $m = 3$ $d_C \approx 1.9199$, $\sigma \approx 0.4227$; при $m = 5$ $d_C \approx 2.0172$, $\sigma \approx 0.4732$.
$x \in [14970, 17765]$ при $m = 3$ $d_C \approx 1.7615$, $\sigma \approx 0.1952$; при $m = 5$ $d_C \approx 1.8009$, $\sigma \approx 0.1566$.

Полученные оценки позволяют утверждать, что участки пространственного распределения решения $u(t, x)$ уравнения (4) существенно отличаются, в частности, оценка корреляционного интеграла для среднего участка дает бóльшие значения, чем для крайних. Близость результатов для размерностей $m = 3$ и $m = 5$ пространства вложения показывает, что в рассмотрении больших значений размерности нет необходимости.

Отметим, что определенную информацию о решении уравнения (4) дает и отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$. На рис. 14 построены точки, соответствующие подряд идущим экстремумам, а на рис. 15 точки построены через пять единиц.

Заключение

Распространение возмущения в активной среде при учете отклонения по пространственной переменной представляет собой сложный процесс. Эта сложность обусловливает необходимость применения различных сочетаний аналитических и численных методов. На этом пути были получены следующие результаты.

1. Изучение уравнения распространения волны (5) позволило найти критические значения параметра запаздывания, при которых меняется вид пространственного распределения решения задачи.

2. Для выяснения некоторых особенностей качественного поведения решений уравнения КПП с отклонением было изучено уравнение (4) с периодическими краевыми условиями вблизи состояния равновесия $u_0 \equiv 1$. Это позволило выяснить характер потери устойчивости пространственно однородного решения этой задачи и найти асимптотику режимов, возникающих при этом.

3. Численный анализ, выполненный с учетом аналитических результатов, позволил выделить следующие промежутки значений отклонения:

   - промежуток, на котором поведение решений уравнения с отклонением близко к их поведению в задаче без отклонения;

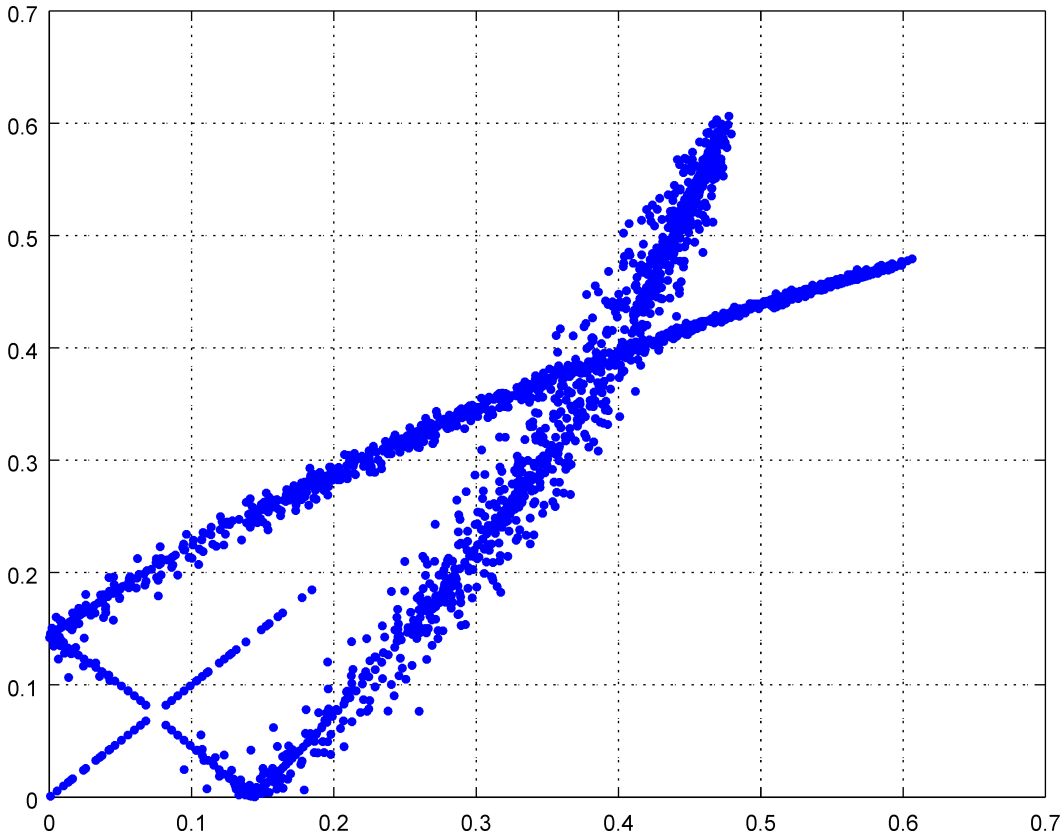


Рис. 14. Отображение, построенное по идущим друг за другом экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$

- промежуток значений отклонения, при которых на левом фронте области распространения волны появляются участки с колебаниями, затухающими к единице.
- промежуток значений отклонения, при которых вся область распространения волны заполняется интенсивными колебаниями решения со сложным пространственным распределением; найдены статистические характеристики (корреляционный интеграл) этих режимов.

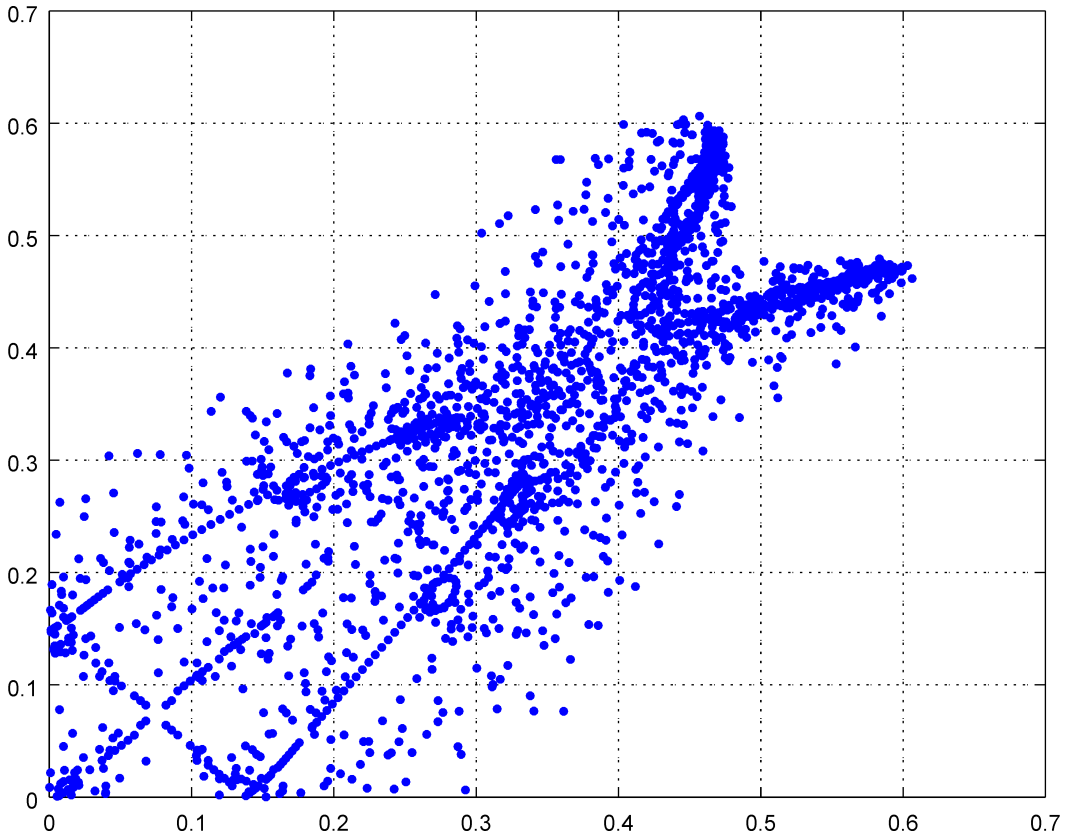


Рис. 15. Отображение, построенное по экстремумам пространственного распределения решения системы (22) при $t = 4500$ и отклонении $h = 2.81$, идущим через 5 единиц друг за другом

Список литературы / References

[1] Fisher R. A., "The Wave of Advance of Advantageous Genes", *Annals of Eugenics*, **7** (1937), 355–369.

[2] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., "Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме", Сер. А. Математика и Механика, **1**, 1937, 1–26; [French transl.: Kolmogorov A., Petrovsky I., Piscounov N., "Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique", *Moscou Univ. Bull. Math.*, **1**:6 (1937), 1–25.]

[3] Murray J. D., *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Third Edition, Berlin, 2001.

[4] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A., *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[5] Volpert A., Volpert V., Volpert V., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, American Mathematical Society, 2000.

[6] Колесов Ю. С., "Математические модели экологии", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1979, 3–40; [Kolesov Yu. S., "Matematicheskiye modeli ekologii", *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, 1979, 3–40, (in Russian).]

[7] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., *Релаксационные колебания в математических моделях экологии*, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 126 с.; [Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S., *Relaxational oscillations in mathematical models of ecology*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **199**, ed. E. F. Mishchenko, Nauka, Moscow, 1993, 126 pp., (in Russian).]

[8] Гурли С. А., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х., "Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика", *Современная математика. Фундаментальные направления*, **1** (2003), 84–120; [English transl.: Gourley S. A., So J. W.-H., Wu J. H., "Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics", *Journal of Mathematical Sciences*, **124**:4 (2004), 5119–5153, (in Russian).]

[9] Britton N. F., *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*, Academic Press, New York, 1986.

[10] Britton N. F., "Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model", *SIAM J. Appl. Math.*, **50** (1990), 1663–1688.

[11] Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А., "Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:2 (2015), 304–321; [Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A., "Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Delay", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:2 (2015), 304–321, (in Russian).]

[12] Кащенко С. А., "Об установившихся режимах уравнения Хатчинсона с диффузией", *ДАН СССР*, **292**:2 (1987), 327–330; [Kashchenko S. A., "Ob ustanovivshihsja rezhimah uravnenija Hatchinsona s diffuziej", *DAN SSSR*, **292**:2 (1987), 327–330, (in Russian).]

[13] Кащенко С. А., "Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией", *Математическое моделирование*, **2**:9 (1990), 49–69; [English transl.: Kashchenko S. A., "Spatial heterogeneous structures in the simplest models with delay and diffusion", *Matem. mod.*, **2**:9 (1990), 49–69, (in Russian).]

[14] Kashchenko S. A., "Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation", *Automatic Control and Computer Science*, **47**:7 (2013), 470–494.

[15] Глызин С. Д., "Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке", *Моделирование и анализ информационных систем*, **16**:3 (2009), 96–116; [Glyzin S. D., "Difference approximations of "reaction – diffusion" equation on a segment", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:3 (2009), 96–116, (in Russian).]

[16] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[17] Glyzin S. D., "Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos", *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 452–469.

[18] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Конечномерные модели диффузионного хаоса", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:5 (2010), 860–875; [English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Finite-dimensional models of diffusion chaos", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:5 (2010), 816–830, (in Russian).]

[19] Schuster H. G., *Deterministic Chaos: An Introduction*, 3 edition, Wiley-VCH, 1995, 320 pp.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-609-628

Dynamical Properties of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Deviation of the Spatial Variable

Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A.

Received August 10, 2015

We consider the problem of density wave propagation of a logistic equation with deviation of the spatial variable and diffusion (Fisher-Kolmogorov equation with deviation of the spatial variable). A Ginzburg–Landau equation was constructed in order to study the qualitative behavior of the solution near the equilibrium state. We analyzed the profile of the wave equation and found conditions for the appearance of oscillatory regimes. The numerical analysis of wave propagation shows that for a suficiently small spatial deviation this equation has a solution similar to the solution of the classical Fisher–Kolmogorov equation. The spatial deviation increasing leads to the existence of the oscillatory component in the spatial distribution of solutions. A further increase of the spatial deviation leads to destruction of the traveling wave. That is expressed in the fact that undamped spatio-temporal fluctuations exist in a neighborhood of the initial perturbation. These fluctuations are close to the solution of the corresponding boundary value problem with periodic boundary conditions. Finally, when the spatial deviation is suficiently large we observe intensive spatio-temporal fluctuations in the whole area of wave propagation.

Keywords: attractor, bifurcation, Fisher-Kolmogorov equation, Ginzburg-Landau equation

For citation: Aleshin S. V., Glyzin S. D., Kaschenko S. A., "Dynamical Properties of the Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piscounov Equation with Deviation of the Spatial Variable ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 609–628.

On the authors:
Aleshin Sergei Vladimirovich, старший лаборант-исследователь,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: fktiby@yandex.ru

Glyzin Sergei Dmitrievich, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Kaschenko S. A., Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research №14-21-00158.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 629–647
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 629–647

©Тимофеева Н. В., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-629-647

УДК 512.722+512.723

Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений: неприведенные схемы модулей

Тимофеева Н. В.

получена 15 мая 2015

В работе продолжено изучение компактификации схемы модулей полустабильных по Гизекеру векторных расслоений на неособой неприводимой проективной алгебраической поверхности S с поляризацией L, локально свободными пучками. Исследуется связь основных компонент функтора модулей допустимых полустабильных пар и основных компонент функтора модулей Гизекера – Маруямы (полустабильных когерентных пучков без кручения) с тем же полиномом Гильберта на поверхности S.

Рассматриваемая компактификация получается, если семейства полустабильных по Гизекеру векторных расслоений E на поляризованной неособой проективной поверхности (S, L) пополняются векторными расслоениями $\widetilde{E}$ на проективных поляризованных схемах $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ специального вида. Вид схемы $\widetilde{S}$, поляризации $\widetilde{L}$ и расслоения $\widetilde{E}$ описан в тексте работы. Набор $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ назван полустабильной допустимой парой. Векторные расслоения E на поверхности (S, L) и $\widetilde{E}$ на схемах $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ предполагаются имеющими равные ранги и полиномы Гильберта, вычисляемые относительно поляризаций L и $\widetilde{L}$ соответственно. Пары вида $((S, L), E)$, называемые S-парами, также входят в рассматриваемый класс. Поскольку целью исследования является изучение компактификации пространства модулей векторных расслоений, рассматриваются только семейства, содержащие S-пары.

Построено естественное преобразование функтора модулей допустимых полустабильных пар в функтор модулей Гизекера – Маруямы полустабильных когерентных пучков без кручения на поверхности (S, L), имеющих те же ранг и полином Гильберта. Показано, что это естественное преобразование является двусторонним обратным к естественному преобразованию, построенному в предшествующей работе и определяемому стандартным разрешением семейства когерентных пучков без кручения, имеющего возможно неприведенную базисную схему. Построенный изоморфизм функторов модулей определяет изоморфизм компактификаций пространства модулей полустабильных векторных расслоений на поверхности (S, L) как алгебраических схем.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, полустабильные допустимые пары, функтор модулей, векторные расслоения, алгебраическая поверхность.

Для цитирования: Тимофеева Н. В., "Изоморфизм компактификаций модулей векторных расслоений: неприведенные схемы модулей", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 629–647.

Об авторах:
Тимофеева Надежда Владимировна, orcid.org/0000-0003-4363-1331, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: nadezdavtimofeeva@gmail.com

Светлой памяти мамы

Введение

В настоящей работе продолжено изучение компактификации модулей стабильных векторных расслоений на поверхности локально свободными пучками. Различные аспекты построения и основные свойства ее были даны в предыдущих работах автора [1] – [9].

В настоящей статье S — гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $\mathcal{O}_S$ — ее структурный пучок, E — когерентный $\mathcal{O}_S$-модуль без кручения, $E^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(E, \mathcal{O}_S)$ — двойственный $\mathcal{O}_S$-модуль. При этом $E^\vee$ рефлексивен и, следовательно, локально свободен. Всюду в этой работе локально свободный когерентный пучок и соответствующее ему векторное расслоение не будут различаться, и оба термина употребляются как синонимы. Пусть L — обильный обратимый пучок на S; он считается фиксированным и будет использоваться в качестве поляризации. Символ $\chi(\cdot)$ означает эйлерову характеристику, $c_i(\cdot)$ — i-й класс Чженя.

Зафиксируем натуральное число r и полином $p(n)$ с рациональными коэффициентами. Будем считать, что рассматриваемые когерентные пучки E имеют ранг r и полином Гильберта $\chi(E \otimes L^n)$, равный $rp(n)$. Его коэффициенты зависят от ранга r и классов Чженя $c_i = c_i(E)$, $i = 1, 2$, когерентного пучка E.

Определение 0.1. [4, 5] Назовем поляризованную алгебраическую схему $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ *допустимой*, если схема $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ удовлетворяет одному из условий

i) $(\widetilde{S}, \widetilde{L}) \cong (S, L)$,

ii) $\widetilde{S} \cong \operatorname{Proj} \bigoplus_{s\geq 0}(I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$, где $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ для артинова фактора пучка $q_0 : \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \varkappa$ длины $l(\varkappa) \leq c_2$, причем $\widetilde{L} = L \otimes (\sigma^{-1}I \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}})$ — обильный обратимый пучок на схеме $\widetilde{S}$; эту поляризацию $\widetilde{L}$ будем называть *выделенной*.

Напомним известное из коммутативной алгебры определение пучка нулевых идеалов Фиттинга, использованное в приведенном определении. Пусть X – связная схема, F – $\mathcal{O}_X$-модуль с конечным представлением $F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \to F$. Без потери общности будем считать, что $\operatorname{rank} F_1 \geq \operatorname{rank} F_0$.

Определение 0.2. *Пучок нулевых идеалов Фиттинга* $\mathcal{O}_X$-модуля F определяется как $\mathcal{F}itt^0 F = \operatorname{im}(\bigwedge^{\operatorname{rank} F_0} F_1 \otimes \bigwedge^{\operatorname{rank} F_0} F_0^\vee \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{O}_X)$, где φ' – морфизм $\mathcal{O}_X$-модулей, индуцированный морфизмом φ.

Замечание 0.1. При необходимости L заменяется его достаточно большой тензорной степенью так, чтобы все $\widetilde{L}$ оказались обильными. Эта степень, как показано в работе [5], может быть выбрана постоянной, конечной и фиксированной. Все полиномы Гильберта вычисляются относительно новых L и $\widetilde{L}$ соответственно.

Как показано в [4], если схема $\widetilde{S}$ удовлетворяет условию (ii) в определении 0.1, она представима в виде объединения нескольких компонент $\widetilde{S} = \bigcup_{i\geq 0} \widetilde{S}_i$ и обладает морфизмом $\sigma : \widetilde{S} \to S$. Этот морфизм индуцирован структурой $\mathcal{O}_S$-алгебры на градуированном объекте $\bigoplus_{s\geq 0}(I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$.

Определение 0.3. [5] *S-стабильной* (соответственно *полустабильной*) *парой* $((\widetilde{S},\widetilde{L}),\widetilde{E})$ назовем следующие данные:

- $\widetilde{S}=\bigcup_{i\geq 0}\widetilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma:\widetilde{S}\to S$ — морфизм, называемый *каноническим*, $\sigma_i:\widetilde{S}_i\to S$ — его ограничения на компоненты $\widetilde{S}_i$, $i\geq 0$;
- $\widetilde{E}$ — векторное расслоение на схеме $\widetilde{S}$;
- $\widetilde{L}\in\operatorname{Pic}\widetilde{S}$ — выделенная поляризация;

такие, что

- $\chi(\widetilde{E}\otimes\widetilde{L}^n)=rp(n)$, полином $p(n)$ и ранг r пучка $\widetilde{E}$ считаются фиксированными;
- на схеме $\widetilde{S}$ пучок $\widetilde{E}$ *стабилен* (соответственно *полустабилен*) *по Гизекеру,* то есть для любого собственного подпучка $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ при $n\gg 0$

$$\frac{h^0(\widetilde{F}\otimes\widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank}F} < \frac{h^0(\widetilde{E}\otimes\widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank}E},$$
$$\left(\text{соответственно } \frac{h^0(\widetilde{F}\otimes\widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank}F} \leq \frac{h^0(\widetilde{E}\otimes\widetilde{L}^n)}{\operatorname{rank}E}\right);$$

- на каждой из дополнительных компонент $\widetilde{S}_i, i>0$, пучок $\widetilde{E}_i:=\widetilde{E}|_{\widetilde{S}_i}$ *квазиидеален,* то есть обладает описанием вида

$$\widetilde{E}_i=\sigma_i^*\ker q_0/tors_i \tag{0.1}$$

для некоторого $q_0\in\bigsqcup_{l\leq c_2}\operatorname{Quot}^l\bigoplus^r\mathcal{O}_S$. Эпиморфизм $q_0:\bigoplus^r\mathcal{O}_S\twoheadrightarrow\varkappa$ и число $l=\operatorname{length}\varkappa$ являются общими для всех компонент $\widetilde{S}_i$ схемы $\widetilde{S}$.

Описание пучка $tors_i$ будет приведено далее.

Пары $((\widetilde{S},\widetilde{L}),\widetilde{E})$ такие, что $(\widetilde{S},\widetilde{L})\cong(S,L)$, будем называть *S-парами.*

В серии работ автора [1] — [5] построена проективная алгебраическая схема $\widetilde{M}$ как приведенная схема модулей S-полустабильных допустимых пар. В работе [6] построена схема $\widetilde{M}$ как пространство модулей с возможно неприведенной схемной структурой.

Схема $\widetilde{M}$ содержит открытую подсхему $\widetilde{M}_0$, изоморфную подсхеме M_0 полустабильных в смысле Гизекера векторных расслоений в схеме модулей $\overline{M}$ Гизекера — Маруямы полустабильных пучков без кручения с полиномом Гильберта, равным $\chi(E\otimes L^n)=rp(n)$. При этом используется следующее определение полустабильности в смысле Гизекера.

Определение 0.4. [10] Когерентный $\mathcal{O}_S$-пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F\subset E$ ранга $r'=\operatorname{rank}F$ при $n\gg 0$

$$\frac{\chi(E\otimes L^n)}{r}>\frac{\chi(F\otimes L^n)}{r'}\left(\text{соответственно } \frac{\chi(E\otimes L^n)}{r}\geq\frac{\chi(F\otimes L^n)}{r'}\right).$$

Пусть E — полустабильный локально свободный пучок. Тогда, очевидно, пучок $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ тривиален, и $\widetilde{S} \cong S$. Тем самым $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E}) \cong ((S, L), E)$, что поставляет биективное соответствие $\widetilde{M_0} \cong M_0$.

Пусть E — полустабильный не локально свободный когерентный пучок; тогда схема $\widetilde{S}$ содержит приведенную неприводимую компоненту $\widetilde{S}_0$ такую, что морфизм $\sigma_0 := \sigma|_{\widetilde{S}_0} : \widetilde{S}_0 \to S$ — морфизм раздутия схемы S в пучке идеалов $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. Формирование пучка I является способом охарактеризовать особенности пучка E, то есть его отличие от локально свободного. Действительно, факторпучок $\varkappa := E^{\vee\vee}/E$ — артинов длины, не превосходящей $c_2(E)$, и $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \cong \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$. Тогда $\mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ — пучок идеалов (в общем случае неприведенной) подсхемы Z ограниченной [6] длины с носителем в конечном наборе точек на поверхности S. Поэтому, как показано в [4], остальные неприводимые компоненты $\widetilde{S}_i, i > 0$ схемы $\widetilde{S}$ в общем случае несут неприведенную схемную структуру. Пересечение $\widetilde{S}_0 \cap \bigcup_{i>0} \widetilde{S}_i$ совпадает как подсхема с исключительным дивизором раздутия $\sigma|_{\widetilde{S}_0} : \widetilde{S}_0 \to S$.

Каждому полустабильному когерентному пучку без кручения E ставится в соответствие пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, где $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ определяется только что описанным способом.

Теперь обратимся к описанию подпучков $tors_i$ в (0.1). Пусть U — открытое по Зарискому подмножество одной из компонент $\widetilde{S}_i, i \geq 0$, и $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ — соответствующая группа сечений, являющаяся $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$-модулем. Сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, аннулируемые простыми идеалами положительной коразмерности в $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$, образуют подмодуль в $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, который будем обозначать $tors'_i(U)$. Соответствие $U \mapsto tors'_i(U)$ определяет подпучок $tors'_i \subset \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}$. Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, соответствуют подсхемам с носителями в прообразе $\sigma^{-1}(\operatorname{Supp}\varkappa) = \bigcup_{i>0} \widetilde{S}_i$. Поскольку по построению схема $\widetilde{S} = \bigcup_{i\geq 0} \widetilde{S}_i$ связна [4], то подпучки $tors'_i, i \geq 0$, позволяют построить подпучок $tors \subset \sigma^*E$. Последний определяется следующим образом. Сечение $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ удовлетворяет условию $s \in tors|_{\widetilde{S}_i}(U)$ тогда и только тогда, когда

- существует сечение $y \in \mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$ такое, что $ys = 0$,
- выполнено хотя бы одно из двух условий: либо $y \in \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал положительной коразмерности, аннулирующий s; либо существует открытое по Зарискому подмножество $V \subset \widetilde{S}$ и сечение $s' \in \sigma^*E(V)$ такие, что $V \supset U$, $s'|_U = s$, и $s'|_{V\cap\widetilde{S}_0} \in tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})(V \cap \widetilde{S}_0)$. В последнем выражении подпучок кручения $tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})$ понимается в обычном смысле.

Подпучок $tors \subset \sigma^*E$ играет в рассматриваемой конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы. Поскольку путаница исключена, то символ $tors$ всюду понимается в указанном смысле, а подпучок $tors$ называется *подпучком кручения*. Пучки $tors_i$ определяются как ограничения $tors_i := tors|_{\widetilde{S}_i}$.

В работе [5] доказано, что пучки $\sigma^*E/tors$ локально свободны. Пучок $\widetilde{E}$, входящий в пару $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, определяется соотношением $\widetilde{E} = \sigma^*E/tors$. При этом имеет место изоморфизм $H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}) \cong H^0(S, E \otimes L)$.

Там же показано, что ограничение пучка $\widetilde{E}$ на каждую из компонент $\widetilde{S}_i$, $i > 0$, дается соотношением квазиидеальности (0.1), где $q_0 : \mathcal{O}_S^{\oplus r} \twoheadrightarrow \varkappa$ — эпиморфизм, определяемый точной тройкой $0 \to E \to E^{\vee\vee} \to \varkappa \to 0$ с учетом локальной свободы пучка $E^{\vee\vee}$.

Разрешение особенностей полустабильного пучка E может быть глобализовано в плоском семействе с помощью конструкции, развитой в различных вариантах в работах [2,3,5]. Пусть T — приведенная неприводимая квазипроективная схема, $\mathbb{E}$ — пучок $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей, $\mathbb{L}$ — обратимый $\mathcal{O}_{T\times S}$-пучок, очень обильный относительно T такой, что $\mathbb{L}|_{t\times S} = L$, причем $\chi(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^n|_{t\times S}) = rp(n)$ для всех замкнутых точек $t \in T$. Также будем предполагать, что T содержит непустое открытое подмножество T_0 такое, что $\mathbb{E}|_{T_0\times S}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{T_0\times S}$-модуль. Тогда определены:

- $\widetilde{T}$ — целая нормальная схема, полученная некоторым бирациональным преобразованием $\phi : \widetilde{T} \to T$ схемы T,
- $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T}$ — плоское семейство допустимых схем с обратимым $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модулем $\widetilde{\mathbb{L}}$ таким, что $\widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^t(t)}$ — выделенная поляризация схемы $\pi^{-1}(t)$,
- $\widetilde{\mathbb{E}}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модуль, причем $((\pi^{-1}(t), \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)}), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)})$ — S-полустабильная допустимая пара.

При этом имеет место морфизм раздутия $\Phi : \widetilde{\Sigma} \to \widetilde{T} \times S$, и

$$(\Phi_*\widetilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = (\phi, id_S)^*\mathbb{E}; \tag{0.2}$$

что следует из совпадения пучков в левой и правой части, которые рефлексивны, на открытом подмножестве вне коразмерности 3. При этом важно, что схема $\widetilde{T} \times S$ является целой и нормальной.

Указанный механизм назван в [5] *стандартным разрешением.*

В работе [9] процедура стандартного разрешения обобщена на случай семейств с неприведенной базой. При этом показано, что преобразование семейства когерентных пучков без кручения E может быть выполнено так, что получится семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ с той же базой T, т.е. базисная схема не претерпевает бирационального преобразования, и ϕ – тождественный изоморфизм.

Замечание 0.2. В [9] не доказывалось соотношение, аналогичное (0.2). Поэтому, говоря о стандартном разрешении семейства с неприведенной базой, мы не подразумеваем истинности аналогичного соотношения.

В разделе 1 мы напомним определение функтора $\mathfrak{f}^{GM}$ модулей когерентных полустабильных пучков без кручения ("функтор Гизекера – Маруямы") и определение функтора $\mathfrak{f}$ модулей допустимых полустабильных пар. Ранг r и полином $p(n)$ фиксированы и одинаковы для обоих функторов модулей. После этого будет дано описание преобразования семейства полустабильных допустимых пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ с (возможно, неприведенной) базисной схемой T в семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E}$ с той же базой T. Построенное преобразование поставляет морфизм функтора допустимых полустабильных пар $\mathfrak{f}$ в функтор Гизекера – Маруямы $\mathfrak{f}^{GM}$.

В разделе 2 мы покажем, что построенный морфизм функторов является двусторонним обратным к морфизму $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$, построенному в [9]. Тем самым, рассматриваемые функторы (а именно, их подфункторы, отвечающие семействам с неприведенными базами, содержащим локально свободные пучки и S-пары соответственно) изоморфны.

В настоящей статье доказываются следующие результаты.

Теорема 0.1. *Имеет место естественное преобразование $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ каждого максимального замкнутого неприводимого подфунктора функтора модулей допустимых полустабильных пар, содержащего S-пары, в соответствующий максимальный замкнутый неприводимый подфунктор функтора модулей Гизекера – Маруямы, содержащий локально свободные пучки с теми же рангом и полиномом Гильберта. Это естественное преобразование является обратным к естественному преобразованию $\underline{\kappa}$, построенному в [9] и индуцированному процедурой стандартного разрешения, развитой в той же работе. Тем самым, оба морфизма неприведенных функторов модулей $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ и $\underline{\tau} : \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ являются изоморфизмами.*

Следствие 0.1. *Объединение основных компонент неприведенной схемы модулей $\widetilde{M}$ для функтора $\mathfrak{f}$ изоморфно объединению основных компонент неприведенной схемы Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ для пучков с теми же рангом и полиномом Гильберта.*

Следствие 0.2. *Схема модулей допустимых полустабильных пар $\widetilde{M}$ обладает универсальным семейством в точности тогда, когда схема Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ для пучков с теми же $r, p(n)$ обладает универсальным семейством.*

1 Морфизм функторов модулей

Следуя [11, гл. 2, п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $\mathcal{C}^o$ — двойственная к ней категория, $\mathcal{C}' = \mathcal{F}unct(\mathcal{C}^o, Sets)$ — категория функторов в категорию множеств. По лемме Ионеды, функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{C}' : F \mapsto (\underline{F} : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F))$ вкладывает $\mathcal{C}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{C}'$.

Определение 1.1. [11, гл. 2, определение 2.2.1] Функтор $\mathfrak{f} \in Ob\,\mathcal{C}'$ *копредставлен объектом* $M \in Ob\,\mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$-морфизм $\psi : \mathfrak{f} \to \underline{M}$ такой, что любой морфизм $\psi' : \mathfrak{f} \to \underline{F}'$ пропускается через единственный морфизм $\omega : \underline{M} \to \underline{F}'$.

Определение 1.2. Схема $\widetilde{M}$ — *грубое пространство модулей* функтора $\mathfrak{f}$, если $\mathfrak{f}$ копредставлен схемой $\widetilde{M}$.

Пусть T – схема над полем k, $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ – морфизм k-схем. Введем следующее

Определение 1.3. Семейство схем $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ *бирационально S-тривиально*, если существуют изоморфные открытые подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0 \subset \widetilde{\Sigma}$ и $\Sigma_0 \subset T \times S$ и выполнено схемное равенство $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$.

Последнее равенство означает, что все слои морфизма π имеют непустые пересечения с открытой подсхемой $\widetilde{\Sigma}_0$.

В частности если $T = \operatorname{Spec} k$, то π — постоянный морфизм и $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \Sigma_0$ — открытая подсхема в S.

Рассматриваются множества семейств полустабильных пар

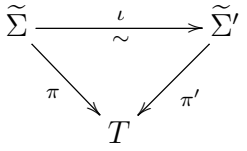
$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{l} \pi : \widetilde{\Sigma} \to T \ \text{ бирационально } S\text{-тривиальное}, \\ \widetilde{\mathbb{L}} \in \operatorname{Pic} \widetilde{\Sigma} \ \text{ плоский над } T, \\ \text{при } m \gg 0 \ \widetilde{\mathbb{L}}^m \text{ обилен относительно } T, \\ \forall t \in T \ \widetilde{L}_t = \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)} \ \text{ обилен}; \\ (\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t) \text{ допустимая схема с выделенной поляризацией}; \\ \chi(\widetilde{L}_t^n) \ \text{ не зависит от } t, \\ \widetilde{\mathbb{E}} - \text{локально свободный } \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} - \text{пучок, плоский над } T; \\ \chi(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^n)|_{\pi^{-1}(t)}) = rp(n); \\ ((\pi^{-1}(t), \widetilde{L}_t), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)}) - \text{полустабильная пара} \end{array} \right\}$$

и функтор

$$\mathfrak{f} : (Schemes_k)^o \to (Sets)$$

из категории k-схем в категорию множеств, ставящий в соответствие схеме T множество классов эквивалентности семейств вида $(\mathfrak{F}_T / \sim)$.

Отношение эквивалентности $\sim$ определяется следующим образом. Семейства $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ и $((\pi' : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$ из класса $\mathfrak{F}_T$ считаются эквивалентными (обозначение: $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}}) \sim ((\pi' : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$), если
1) существует изоморфизм $\iota : \widetilde{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Sigma}'$ такой, что диаграмма



коммутативна;
2) существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\iota^* \widetilde{\mathbb{E}}' = \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \pi^* L'$, $\iota^* \widetilde{\mathbb{L}}' = \widetilde{\mathbb{L}} \otimes \pi^* L''$.

Поясним, каковы "размеры" наибольшей по включению из тех открытых подсхем $\widetilde{\Sigma}_0$ в семействе допустимых схем $\widetilde{\Sigma}$, которые изоморфны подходящим открытым подсхемам в $T \times S$ в определении 1.3. Множество $F = \widetilde{\Sigma} \setminus \widetilde{\Sigma}_0$ замкнуто. Если T_0 –открытая в T подсхема, слои над которыми изоморфны S, то $\widetilde{\Sigma}_0 \supsetneqq \pi^{-1} T_0$ (неравенство строгое, поскольку в определении 1.3 $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$). Изоморфная подсхеме $\widetilde{\Sigma}_0$ открытая в $T \times S$ подсхема Σ_0 такова, что $\Sigma_0 \supsetneqq T_0 \times S$. В теоретико-множественном смысле, если $\pi : \widetilde{\Sigma} \to T$ – семейство допустимых схем, то $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \widetilde{\Sigma} \setminus F$, где F – объединение дополнительных компонент слоев, не изоморфных S.

Под схемой Гизекера — Маруямы $\overline{M}$ будем понимать объединение тех компонент неприведенной схемы модулей полустабильных когерентных пучков без кручения, которые содержат локально свободные пучки.

Функтор Гизекера – Маруямы

$$\mathfrak{f}^{GM} : (Schemes_k)^o \to Sets,$$

ставит в соответствие каждой схеме T множество классов эквивалентности семейств вида $\mathfrak{F}_T^{GM}/\sim$, где

$$\mathfrak{F}_T^{GM} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}\text{– пучок } \mathcal{O}_{T\times S} - \text{модулей, плоский над } T; \\ \mathbb{L}\text{– обратимый пучок } \mathcal{O}_{T\times S} - \text{модулей,} \\ \text{обильный относительно } T \\ \text{и такой, что } L_t := \mathbb{L}|_{t\times S} \cong L \text{ для любой точки } t \in T; \\ E_t := \mathbb{E}|_{t\times S} \text{ без кручения и полустабилен по Гизекеру;} \\ \chi(E_t \otimes L_t^n) = rp(n). \end{array} \right\}$$

Семейства $\mathbb{E}, \mathbb{L}$ и $\mathbb{E}', \mathbb{L}'$ из класса $\mathfrak{F}_T^{GM}$ считаются эквивалентными (обозначение: $(\mathbb{E}, \mathbb{L}) \sim (\mathbb{E}', \mathbb{L}')$), если существуют линейные расслоения L', L'' на схеме T такие, что $\mathbb{E}' = \mathbb{E} \otimes p^*L'$, $\mathbb{L}' = \mathbb{L} \otimes p^*L''$, где $p : T \times S \to T$ – проекция на сомножитель.

Замечание 1.1. Поскольку $\operatorname{Pic}(T \times S) = \operatorname{Pic} T \times \operatorname{Pic} S$, то данное нами определение функтора модулей $\mathfrak{f}^{GM}$ эквивалентно стандартному, приведенному, например, в [11]: различие в выборе семейств поляризаций $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$, имеющих изоморфные ограничения на слои над базой T, устраняется эквивалентностью, индуцированной тензорным умножением на обратный образ обратимого пучка L'' с базы T.

Морфизм функторов $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ в [9] определяется коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc} T & \longmapsto & \mathfrak{F}_T^{GM}/\sim \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathfrak{F}_T/\sim \end{array}$$

где $T \in \mathcal{O}bSchemes_k$, $\underline{\kappa}(T) : (\mathfrak{F}_T^{GM}/\sim) \to (\mathfrak{F}_T/\sim)$ – морфизм в категории множеств (отображение).

Замечание 1.2. Мы рассматриваем подфункторы в $\mathfrak{f}^{GM}$ (соответственно в $\mathfrak{f}$), определяемые следующими требованиями. Любое семейство $(\mathbb{L}, \mathbb{E})$ (соответственно $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{L}), \widetilde{E})$) с базой T индуцировано семейством $(\mathbb{L}', \mathbb{E}')$ (соответственно $((\pi' : \widetilde{\Sigma}' \to T', \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$) согласно расслоенной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & T \times S \\ {\scriptstyle o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (o, id_S)} \\ T' & \longleftarrow & T' \times S \end{array} \quad (\text{соотв.}, \quad \begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & \widetilde{\Sigma} \\ {\scriptstyle o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{o}} \\ T' & \longleftarrow & \widetilde{\Sigma}' \end{array})$$

А именно, $\mathbb{E} = (o, id_S)^*\mathbb{E}'$ (соответственно $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' \times_{T'} T$, $\widetilde{o} : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \widetilde{\Sigma}'$ — индуцированный морфизм, $\widetilde{\mathbb{E}} = \widetilde{o}^*\widetilde{\mathbb{E}}'$, $\widetilde{\mathbb{L}} = \widetilde{o}^*\widetilde{\mathbb{L}}'$). Ограничение семейства $(\mathbb{L}', \mathbb{E}')$ (соответственно $((\pi' : \widetilde{\Sigma}' \to T', \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$) на каждую компоненту T'' схемы T' такую, что ее редукция T''_{red} неприводима, содержит локально свободные пучки (соответственно S-пары). В процессе доказательств можно предполагать, что семейство $(\mathbb{L}, \mathbb{E})$ (соответственно $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{L}), \widetilde{E})$) содержит локально свободные пучки (соответственно S-пары), и его база T такова, что ее редукция T_{red} неприводима. Это означает, что рассматриваются допустимые полустабильные пары, деформационно эквивалентные S-парам [5].

Под схемой Гизекера – Маруямы $\overline{M}$ подразумевается объединение тех компонент неприведенной схемы модулей полустабильных когерентных пучков без кручения, которые содержат локально свободные пучки, под схемой модулей $\widetilde{M}$ — объединение ее компонент, содержащих S-пары.

Далее мы покажем, что имеется морфизм неприведенного функтора модулей допустимых полустабильных пар на неприведенный функтор модулей Гизекера – Маруямы. А именно, построим для каждой схемы T соответствие $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}}) \mapsto (\mathbb{L}, \mathbb{E})$, задающее отображение множеств $(\{((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})\}/\sim) \to (\{\mathbb{L}, \mathbb{E}\}/\sim)$. Это означает, что по каждому плоскому над базой T бирационально тривиальному семейству $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ допустимых полустабильных пар можно построить семейство полустабильных когерентных пучков без кручения $\mathbb{E}$ с той же базой T.

Пусть $((\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ – бирационально тривиальное семейство допустимых полустабильных пар с базой T. Мы предполагаем, что схема T_{red} неприводима и содержит хотя бы одну замкнутую точку, соответствующую S-паре, т.е. точку $x \in T$, для которой $\pi^{-1}(x) = \widetilde{S}_x \cong S$. Последнее условие обеспечивается замечанием 1.2. В такой точке $\widetilde{E}|_{\pi^{-1}(x)} = \widetilde{E}_x$ – локально свободный пучок на поверхности S, полустабильный по Гизекеру относительно поляризации $\widetilde{\mathbb{L}}|_{\widetilde{S}_x} = \widetilde{L}_x \cong L$. Пусть $\widetilde{\Sigma}_0$ – максимальная по включению открытая подсхема в $\widetilde{\Sigma}$, изоморфная открытой подсхеме произведения $T \times S$. Выберем $m \gg 0$ такое, что морфизм $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модулей $\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m) \to \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m$ сюръективен. После, быть может, тензорного умножения пучка $\widetilde{\mathbb{E}}$ на подходящий обратимый пучок с базы T, для локально свободного $\mathcal{O}_T$-пучка $\mathbb{V} := \pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m)$ имеем $\pi^*\mathbb{V} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \cong \mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\Sigma_0}$, принимая во внимание изоморфизм $\widetilde{\Sigma}_0 \cong \Sigma_0$. Имеет место эпиморфизм $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_0}$-модулей $\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\Sigma_0} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Напомним, что если T_0 – подмножество точек в T, соответствующих S-парам, то $\pi^{-1}T_0 \subsetneqq \widetilde{\Sigma}_0$, и $\pi(\widetilde{\Sigma}_0) = T$.

Рассмотрим относительную схему Гротендика $\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \to T$. Она снабжена универсальным $\mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S}$-факторпучком

$$\mathbb{V} \boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})} \boxtimes L^{-m} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}\,.$$

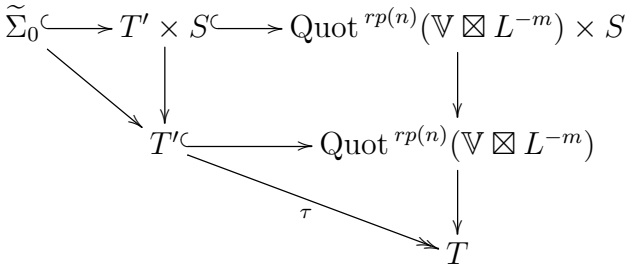
Морфизм $\pi^*\mathbb{V} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m$ индуцирует морфизм T-схем

$$\widetilde{\Sigma}_0 \to \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S,$$

являющийся локально замкнутым вложением.

Пусть $T' \subset \mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$ – (возможно, неприведенная) подсхема, образованная всеми факторпучками $q_t : V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E_t$ такими, что $q_t|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)}$ изоморфен $(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}|_{\Sigma_0 \cap (t \times S)}$, где символом V обозначено k-векторное пространство $V \cong H^0(\widetilde{S}_t = \pi^{-1}(t), \widetilde{E}_t \otimes \widetilde{L}_t^m)$ размерности $rp(m)$, изоморфное слою векторного расслоения $\mathbb{V}$ в точке $t \in T$. Равносильно, T' – это схемный образ подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0$ в $\mathrm{Quot}^{\,rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$. Имеем коммутативную диаграмму T-схем с расслоенным квад-

ратом



Двойная стрелка в диаграмме схем означает, что теоретико-схемный образ морфизма τ совпадает с его областью значений, т.е. образ схемы T' при морфизме τ имеет такую же схемную структуру, что и T. Это так, поскольку образ подсхемы $\widetilde{\Sigma}_0$ при проектировании на T совпадает с T.

Утверждается, что τ – изоморфизм. Для доказательства рассмотрим сначала замкнутую точку $\mathfrak{m} \in T$, образ слоя $\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ в $\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S$ (который по-прежнему будем обозначать $\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$) и соответствующий точке $\mathfrak{m}$ эпиморфизм

$$\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})} \twoheadrightarrow \mathbb{E}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})}. \tag{1.1}$$

Заметим, что в ситуации замечания 1.2 образ подмножества $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \setminus (\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m}))$ в S – это конечный набор точек на поверхности $S = \mathfrak{m} \times S \subset \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \times S$. Действительно, это "предел" замкнутых вложений поверхностей, изоморфных поверхности S, несущих полустабильные локально свободные пучки (в смысле функтора Гизекера – Маруямы). Получается снова изоморфная S поверхность, несущая полустабильный когерентный пучок без кручения.

Подсхема $U := (\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})) \subset \mathfrak{m} \times S$ неаффинна и строго больше любой собственной аффинной подсхемы в S, не содержащей подмножество $\mathfrak{m} \times S \setminus U$.

Мы покажем, что морфизм (1.1) имеет однозначное продолжение на всю подсхему $\mathfrak{m} \times S$. Это означает, что подмодуль $\ker (\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})} \to \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0 \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})})$ имеет однозначное продолжение на всю подсхему $\mathfrak{m} \times S$. Далее используется обозначение $E := \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\mathfrak{m} \times S}$.

Для любого открытого $U' \subset S$ такого, что $U' \cap (S \setminus U) \neq \emptyset$, элемент $f \in (V \otimes L^{-m})(U') = \mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\mathfrak{m} \times S}(U')$, обращающийся в 0 в $E(U' \cap U)$, обращается в $0 \in E(U')$ на всем U'. Тем самым, в слое над замкнутой точкой $\mathfrak{m} \in T$ имеет место однозначное продолжение эпиморфизма $V \otimes L^{-m}|_U \twoheadrightarrow E|_U$ до гомоморфизма $V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E$. Поскольку морфизм $\kappa_{red} : \overline{M} \to \widetilde{M}$ биективен [5] и каждой полустабильной паре $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ соответствует когерентный полустабильный пучок E без кручения, и при $m \gg 0$ построенный гомоморфизм $V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E$ определяет точку в подсхеме $Q \subset \mathrm{Quot}^{rp(n)}(V \otimes L^{-m})$, соответствующей полустабильным пучкам без кручения, то гомоморфизм, полученный продолжением, является эпиморфизмом.

Теперь обратимся к продолжению эпиморфизма $\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Пусть $\mathbb{U}' \subset T' \times S$ – открытая подсхема такая, что $\mathbb{U}' \cap \widetilde{\Sigma}_0 \neq \emptyset$. Предположим, что существует элемент $f \in (\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})(\mathbb{U}')$, обращающийся в 0 в $\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T' \times S}(\mathbb{U}' \cap \widetilde{\Sigma}_0)$, но не в $\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T' \times S}(\mathbb{U}')$. Это означает, что $f|_{\mathbb{U}' \cap (T' \times S \setminus \widetilde{\Sigma}_0)} \neq 0$, что приводит к разложению неприводимого топологического пространства $T' \times S$ в несвязное объединение двух открытых подмножеств. Полученное противоречие доказывает однозначную

продолжаемость эпиморфизма $\mathbb{V}\boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})}\boxtimes L^{-m}|_{\widetilde{\Sigma}_0} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$ до эпиморфизма $\mathbb{V}\boxtimes_T \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})}\boxtimes L^{-m}|_{T'\times S} \twoheadrightarrow \mathbb{E}$, где $\mathbb{E} := \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{T'\times S}$.

Заметим, что построенное соответствие $T \mapsto T'$ функториально и осуществляет морфизм функторов $\mathrm{Hom}_{Schemes_k}(-,T) \to \mathrm{Hom}_{Schemes_k}(-,T')$ и, тем самым, естественное преобразование функторов точек для схем T и T'. Это означает [12, лекция 3, предложение], что определен морфизм схем $\tau^{-1}: T \to T'$, обратный к τ.

Итак, остается убедиться в том, что подсхема $T' \subset \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})$ целиком попадает в подсхему Q, соответствующую полустабильным когерентным фактор-пучкам без кручения. Для этого будем считать, что $T' = \operatorname{Spec} A$, где A – локальная k-алгебра конечного типа с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Поскольку замкнутая точка $\mathfrak{m} \in T$, соответствующая допустимой полустабильной паре $((\widetilde{S},\widetilde{L}),\widetilde{E})$, переходит при нашей конструкции в когерентный L-полустабильный пучок без кручения $E_{\mathfrak{m}}$, то, переходя к локализации кольца A в любом из его простых идеалов $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A = T'$, мы можем заключить, что все полустабильные допустимые пары, соответствующие точкам схемы T', переходят в полустабильные когерентные пучки без кручения и, тем самым, T'_{red} принадлежит подсхеме Q полустабильных когерентных пучков без кручения. Однако свойство отсутствия кручения и свойство полустабильности по Гизекеру являются открытыми в плоских семействах когерентных пучков. Поэтому, если верно, что T'_{red} принадлежит подсхеме полустабильных пучков без кручения, то же самое верно относительно самой подсхемы T'.

Действительно, предположим, что T' – локальная схема с единственной замкнутой точкой $\mathfrak{m}$, и T' не принадлежит подсхеме полустабильных пучков без кручения. Поскольку $E_{\mathfrak{m}}$ – полустабильный пучок без кручения, то существует непустая замкнутая подсхема в схеме T', содержащая замкнутую точку, соответствующую неполустабильному пучку или пучку с кручением. Это невозможно, поскольку единственная замкнутая точка схемы T' соответствует полустабильному пучку без кручения.

Итак, мы показали, что определено естественное преобразование $\underline{\tau}: \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$ функтора допустимых полустабильных пар в функтор полустабильных когерентных пучков без кручения. Это естественное преобразование определяется серией коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} T & \overset{\mathfrak{f}}{\longmapsto} & \mathfrak{F}_T/\sim \\ \| & & \downarrow \\ T & \overset{\mathfrak{f}^{GM}}{\longmapsto} & \mathfrak{F}_T^{GM}/\sim \end{array}$$

и приводит с помощью хорошо известной процедуры к морфизму схем модулей $\tau: \widetilde{M} \to \overline{M}$. В частности, описание вывода морфизма схем модулей из морфизма функторов приведено в [9].

Замечание 1.3. В [9] построены естественное преобразование $\underline{\kappa}: \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ и соответствующий морфизм возможно неприведенных схем модулей $\kappa: \overline{M} \to \widetilde{M}$.

2 Изоморфизм функторов модулей

Итак, конструкция предыдущего параграфа устанавливает морфизм функторов $\underline{\tau}: \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}^{GM}$. В работе [9] построен морфизм $\underline{\kappa}$ в противоположном направлении.

Необходимо убедиться в том, что эти два морфизма взаимно обратны и поставляют изоморфизм функторов.

Сначала покажем, что $\underline{\tau} \circ \underline{\kappa} = id_{\mathfrak{f}^{GM}}$. Для этого возьмем семейство полустабильных когерентных пучков без кручения $\mathbb{E}$ и семейство поляризаций $\mathbb{L}$. Домножив, если это необходимо, эти пучки на подходящие обратимые $\mathcal{O}_T$-пучки, считаем, что локально свободные пучки $p_*(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m)$ и $p_*\mathbb{L}^m$ имеют первый класс Чженя, равный 0. Применим к выбранному семейству стандартное разрешение из [9]. Получим семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$. Теперь выполним преобразование, описанное в предыдущем параграфе. Получим снова семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E}''$ и семейство поляризаций $\mathbb{L}''$. Теперь, домножив оба $\mathcal{O}_{T\times S}$-модуля на подходящие обратимые пучки, поднятые с базы T, и получив $\mathcal{O}_{T\times S}$-модули $\mathbb{E}'$ и $\mathbb{L}'$ соответственно, считаем, что локально свободные $\mathcal{O}_T$-пучки $p_*(\mathbb{E}' \otimes \mathbb{L}'^m)$ и $p_*\mathbb{L}'^m$ имеют первый класс Чженя, равный 0. Семейства $(\mathbb{L}, \mathbb{E})$ и $(\mathbb{L}', \mathbb{E}')$ совпадают на подсхеме Σ_0, в обозначениях раздела 1. Согласно рассуждению о продолжении в разделе 1, они совпадают на всем произведении $\Sigma = T \times S$. Отсюда заключаем, что $(\mathbb{L}, \mathbb{E}) \sim (\mathbb{L}', \mathbb{E}')$. Доказанное означает, что естественное преобразование $\underline{\kappa} : \mathfrak{f}^{GM} \to \mathfrak{f}$ является сечением естественного преобразования $\underline{\tau}$ и, следовательно, морфизм пространств модулей $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$ является сечением морфизма $\tau : \widetilde{M} \to \overline{M}$. Таким образом, $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$ – замкнутое вложение. Это следует из следующей общей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм схем и $s : Y \to X$ – его сечение. Тогда s – замкнутое вложение.*

Доказательство. Поскольку $f \circ s = \mathrm{id}_Y$, морфизм s осуществляет изоморфизм схемы Y на ее образ в X. Теперь перейдем к аффинным подсхемам и будем считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, где A, B – коммутативные кольца, $f^\sharp : B \to A$, $s^\sharp : A \to B$ – их гомоморфизмы, порождающие одноименные морфизмы схем. При этом $s^\sharp \circ f^\sharp = \mathrm{id}_B$. Тогда $f^\sharp$ отображает B изоморфно на его образ в A, а $s^\sharp$ отображает подкольцо $f^\sharp(B) \subset A$ на B. Тем самым, $s^\sharp$ – сюръективный гомоморфизм, и B изоморфно факторкольцу кольца A. Отсюда заключаем, что $s : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ – замкнутое вложение. □

Итак, каждая допустимая полустабильная пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ соответствует когерентному полустабильному пучку E без кручения, и имеется замкнутое вложение $\kappa : \overline{M} \hookrightarrow \widetilde{M}$.

Теперь убедимся в том, что $\underline{\kappa} \circ \underline{\tau} = id_{\mathfrak{f}}$. Пусть T_0 – максимальная непустая открытая подсхема в T, замкнутые точки которой соответствуют S-парам. Ограничение семейства $((\widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{E})$ на T_0 индуцирует локально замкнутое вложение $\mu_0 : T_0 \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$, в композиции со структурной проекцией на базу T поставляющее изоморфизм $\mu_0(T_0) \cong T_0$. При этом $(\mu_0, \mathrm{id}_S)^*\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}} = \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(T_0)}$.

Образуем расслоение Грассмана $\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$ r-факторпространств слоев векторного расслоения $\mathbb{V}$. Слоем расслоения $\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$ в точке $t \in T$ является обычное многообразие Грассмана $G(V_t, r)$. Поскольку все векторные пространства $V_t \cong V$ изоморфны как имеющие одинаковые размерности, то и все слои грассманова расслоения также изоморфны: $G(V_t, r) \cong G(V, r)$. Для допустимой полустабильной пары $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ при $m \gg 0$ определено замкнутое вложение $j : \widetilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$, определенное эпиморфизмом локально свободных пучков

$H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) \boxtimes \widetilde{L}^{-m} \twoheadrightarrow \widetilde{E}$. Пусть $\mathcal{O}_{G(V,r)}(1)$ – положительная образующая группы $\operatorname{Pic} G(V,r)$, тогда $P(n) := \chi(j^*\mathcal{O}_{G(V,r)}(n))$ – полином Гильберта замкнутой подсхемы $j(\widetilde{S})$. Зафиксируем полином $P(n)$ и рассмотрим схему Гильберта $\operatorname{Hilb}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r)$ подсхем в $\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r)$, имеющих полином Гильберта $P(n)$, и ее универсальную подсхему $\operatorname{Univ}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \to \operatorname{Hilb}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r)$.

Семейство допустимых полустабильных пар $((\pi : \widetilde{\Sigma} \to T, \widetilde{\mathbb{L}}), \widetilde{\mathbb{E}})$ индуцирует расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma} & \longrightarrow & \operatorname{Univ}^{P(n)} G(V,r) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & \operatorname{Hilb}^{P(n)} G(V,r) \end{array}$$

для подходящего $V \cong H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)$, и диаграмму с расслоенным квадратом и вложениями в "относительные" схемы

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{\widetilde{\mu}} & \operatorname{Univ}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\mu} & \operatorname{Hilb}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \\ & {\scriptstyle\sim}\searrow & \downarrow \\ & & T \end{array}$$

Рассматриваемое семейство содержит S-пары; возьмем максимальное открытое $\widetilde{\Sigma}_0 \subset \widetilde{\Sigma}$, локально изоморфное открытому подмножеству произведения $T \times S$. Рассмотрим относительную схему Гротендика $\operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$ и диагональное вложение

$$\delta_0 : \widetilde{\Sigma}_0 \hookrightarrow \operatorname{Univ}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}).$$

Пусть морфизм φ определяется композицией морфизмов T-схем

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma}_0 & \xrightarrow{\delta_0} & \operatorname{Univ}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow & \downarrow \\ & & \operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}) \end{array}$$

Согласно приведенному в предыдущем разделе рассуждению о естественном преобразовании $\underline{\tau}$, вложение δ_0 продолжается до вложения

$$\delta : \widetilde{\Sigma} \hookrightarrow \operatorname{Univ}^{P(n)}\operatorname{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m}).$$

Морфизм φ имеет своим образом схему T', изоморфную T. Изоморфизм осуществляется проектированием на базу относительных схем T.

Таким образом, имеем вложение $\mu' : \varphi(\widetilde{\Sigma}_0) \cong T \hookrightarrow \operatorname{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$, которое поставляет семейство когерентных полустабильных пучков без кручения $\mathbb{E} = (\mu', \mathrm{id}_S)^*\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}$. Семейство поляризаций $\mathbb{L}$ дается, например, формулой $\mathbb{L} = \mathcal{O}_T \boxtimes L$.

Теперь выполним стандартное разрешение полученного семейства $\mathbb{E}$ так, как оно описано в [9]. При этом нас по-прежнему интересует та версия стандартного

разрешения, которая не меняет базисную схему T. Стандартное разрешение, предложенное в [9], использует раздутие $\boldsymbol{\varpi} : \widehat{\Sigma} \to \Sigma$ произведения $\Sigma = T \times S$ в пучке идеалов Фиттинга $\mathbb{I} = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)$. В той же статье доказано, что композиция $f := p_1 \circ \boldsymbol{\varpi} : \widehat{\Sigma} \to T$ — плоский морфизм. Получим семейство допустимых полустабильных пар $((\pi' : \widetilde{\Sigma}' \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'), \widetilde{\mathbb{E}}')$, где $\widetilde{\Sigma}' = \widehat{\Sigma}$, $\pi' = f$, $\widetilde{\mathbb{L}}' = \boldsymbol{\varpi}^*\mathbb{L} \otimes \boldsymbol{\varpi}^{-1}\mathbb{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$, пучок $\widetilde{\mathbb{E}}'$ таков, как описано в работе [9]. Оно поставляет локально свободный пучок $\pi'_*(\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m)$. Нам необходимо следующее предложение, доказательство которого будет приведено позднее.

Предложение 2.1. *После тензорного умножения на подходящие обратимые $\mathcal{O}_T$-пучки следующие локально свободные пучки изоморфны:* $\mathbb{V} = \pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m)$, $\mathbb{V}_0 = p_*(\mathbb{E} \otimes \mathbb{L}^m)$, *и* $\mathbb{V}' = \pi'_*(\widetilde{\mathbb{E}}' \otimes (\widetilde{\mathbb{L}}')^m)$.

В силу предложения 2.1 определены вложения T-схем

$$\delta' : \widetilde{\Sigma}' \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V} \boxtimes L^{-m})$$

и

$$\widetilde{\mu}' : \widetilde{\Sigma}' \hookrightarrow \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r),$$

индуцированные соответственно пучками $\mathbb{V} \cong \mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}'$. Схема $\widetilde{\Sigma}'$ содержит открытую подсхему $\widetilde{\Sigma}'_0$, изоморфную подсхеме $\widetilde{\Sigma}_0$, причем при учете этого изоморфизма и по конструкции стандартного разрешения имеют место изоморфизмы $\widetilde{\mathbb{L}}'|_{\widetilde{\Sigma}'_0} \cong \widetilde{\mathbb{L}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$ и $\widetilde{\mathbb{E}}'|_{\widetilde{\Sigma}'_0} \cong \widetilde{\mathbb{E}}|_{\widetilde{\Sigma}_0}$. Кроме того, слои семейств $\widetilde{\Sigma}$ и $\widetilde{\Sigma}'$ в замкнутых точках совпадают.

Итак, в $\mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$ имеется две T-подсхемы $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma})$ и $\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma})$, совпадающие при ограничениях на редукцию T_{red} и на открытых подмножествах $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)$.

Замечание 2.1. Совпадение на редукциях следует из единственности схемного замыкания для $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_{0red}) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_{0red})$ в $\mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \times_T T_{red}$. Отсюда получается изоморфизм приведенных функторов модулей $\mathfrak{f}^{GM}_{red} \cong \mathfrak{f}_{red}$ и, тем самым, изоморфизм приведенных схем модулей $\overline{M}_{red} \cong \widetilde{M}_{red}$.

Теперь заметим, что относительно проекции

$$\pi : \mathrm{Univ}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to \mathrm{Hilb}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r)$$

имеем

$$\pi(\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0)) = \mu(T) = \mu'(T) = \pi(\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)),$$

причем эта подсхема изоморфно отображается на базу T структурной проекцией $\mathrm{Hilb}^{P(n)}\mathrm{Grass}(\mathbb{V}, r) \to T$.

По построению и универсальному свойству схемы Гильберта имеем

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}) = \pi^{-1}\pi(\widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma}_0)) = \pi^{-1}\mu(T) = \pi^{-1}\mu'(T) = \pi^{-1}\pi(\widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}'_0)) = \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}').$$

Изоморфизмы $\widetilde{\Sigma} \cong \widetilde{\mu}(\widetilde{\Sigma})$ и $\widetilde{\Sigma}' \cong \widetilde{\mu}'(\widetilde{\Sigma}')$ завершают доказательство.

Доказательство предложения 2.1. Рассмотрим эпиморфизм $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей

$$\mathbb{V} \boxtimes L^{-m} \twoheadrightarrow \mathbb{E},$$

связанный с вложением $T \hookrightarrow \mathrm{Quot}^{rp(n)}(\mathbb{V}\boxtimes L^{-m})$. Тензорное умножение на $\mathcal{O}_S$-пучок L^m и формирование прямого образа p_* приводит к морфизму локально свободных $\mathcal{O}_T$-модулей $\psi : \mathbb{V} \to p_*(\mathbb{E}\boxtimes L^m)$. Пучок справа отличается от $\mathbb{V}_0$ умножением на некоторый обратимый $\mathcal{O}_T$-модуль, что и доказывает предложение для $\mathcal{O}_T$-модулей $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}_0$.

Теперь обратимся к паре $\mathbb{V}_0$ и $\mathbb{V}'$. Напомним, что пучки $\widetilde{\mathbb{E}}'$ и $\widetilde{\mathbb{L}}'$ получены стандартным разрешением семейства $\mathbb{E}$. В ходе этой процедуры получается эпиморфизм $\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}'$ [9]. Подкрутка на $(\widetilde{\mathbb{L}}')^m$ и формирование прямого образа $\boldsymbol{\sigma}_*$ приводят к морфизму $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей

$$\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E}\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m) \to \boldsymbol{\sigma}_*(\widetilde{\mathbb{E}}'\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m). \tag{2.1}$$

Теперь нам потребуется лемма, являющаяся обобщением известной формулы проекции.

Лемма 2.2. *Пусть $f : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ – морфизм локально окольцованных пространств такой, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, $\mathcal{E}$ – конечно представимый $\mathcal{O}_Y$-модуль, $\mathcal{F}$ – $\mathcal{O}_X$-модуль. Тогда имеет место мономорфизм $\mathcal{E}\otimes f_*\mathcal{F} \hookrightarrow f_*[f^*\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}]$.*

Доказательство леммы. Зафиксируем какое-нибудь конечное представление для пучка $\mathcal{E}$:

$$E_1 \to E_0 \to \mathcal{E} \to 0,$$

где E_0, E_1 – локально свободные $\mathcal{O}_Y$-модули. Формирование обратного образа f^*, тензорное умножение на $\otimes_X\mathcal{F}$ и затем формирование прямого образа f_* приводит к комплексу

$$\cdots \to f_*[f^*E_1\otimes_X\mathcal{F}] \to f_*[f^*E_0\otimes_X\mathcal{F}] \to f_*[f^*\mathcal{E}\otimes_X\mathcal{F}] \to \ldots$$

Согласно обычной формуле проекции, первые два выписанных члена равны соответственно $E_1\otimes_Y f_*\mathcal{F}$ и $E_0\otimes_Y f_*\mathcal{F}$. Тем самым имеем

$$\mathcal{E}\otimes_Y f_*\mathcal{F} = \mathrm{coker}\,(E_1\otimes_Y f_*\mathcal{F} \to E_0\otimes_Y f_*\mathcal{F}) \hookrightarrow f_*[f^*\mathcal{E}\otimes_X\mathcal{F}].$$

Это доказывает лемму. □

Применив лемму, имеем мономорфизм

$$(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m)\otimes\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m \hookrightarrow \boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E}\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m). \tag{2.2}$$

Применение прямого образа p_* к морфизмам (2.1) и (2.2) и учет равенства $\pi = p\circ\boldsymbol{\sigma}$ приводит к диаграмме

$$\begin{array}{ccc} p_*[(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m)\otimes\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m] & \longrightarrow & p_*[\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m] \\ \big\downarrow & \overset{\eta}{\searrow} & \\ \pi_*[\boldsymbol{\sigma}^*\mathbb{E}\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m] & \longrightarrow & \pi_*[\widetilde{\mathbb{E}}'\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m] \end{array} \tag{2.3}$$

Верхняя горизонтальная стрелка индуцирована вложением $\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$. Нижняя горизонтальная стрелка – эпиморфизм, поскольку $m \gg 0$ и $\widetilde{\mathbb{L}}'$ обилен относительно проекции π. Наклонная стрелка определяется как композиция морфизмов и потребуется в дальнейшем.

В диаграмме (2.3) пучки справа локально свободны ранга $rp(m)$. Домножив $\mathbb{E}$ (или $\widetilde{\mathbb{E}}'$) на подходящий обратимый пучок $\mathcal{L}$ с базы T, добьемся того, чтобы пучки, стоящие справа в (2.3), совпадали на открытом подмножестве, полученном исключением подсхемы коразмерности ≥ 2. Кроме того, известно [15], что для пучка идеалов $\mathbb{I}$ на схеме Σ и любого обратимого $\mathcal{O}_\Sigma$-пучка $\mathcal{L}'$ раздутия этой схемы, определяемые пучками $\mathbb{I}$ и $\mathbb{I}\otimes\mathcal{L}'$, изоморфны. Поэтому, домножив при необходимости пучок идеалов $\mathbb{I}$ на подходящий обратимый $\mathcal{O}_T$-пучок $\mathcal{L}'$, добьемся того, чтобы пучки в верхней строке диаграммы (2.3) совпадали на открытом подмножестве, полученном удалением подсхемы коразмерности ≥ 2. Такое преобразование приводит к умножению пучка $\widetilde{\mathbb{L}}'$ на $\pi^*\mathcal{L}'$.

После такого преобразования верхняя горизонтальная стрелка в (2.3) – это канонический морфизм пучка $p_*[(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m)\otimes\boldsymbol{\sigma}_*(\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbb{I}\cdot\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}})^m]$ в его рефлексивную оболочку. Наклонная стрелка – морфизм того же пучка в локально свободный пучок, который очевидно рефлексивен. Следовательно, этот морфизм пропускается через рефлексивную оболочку. Таким образом получаем (дважды двойственный к η) морфизм $\eta^{\vee\vee} : p_*[\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m] \to \pi_*[\widetilde{\mathbb{E}}'\otimes(\widetilde{\mathbb{L}}')^m]$ локально свободных $\mathcal{O}_T$-пучков, который является изоморфизмом на открытом подмножестве, полученном удалением подсхемы коразмерности не ниже 2. Кроме этого, совпадают ограничения обоих локально свободных пучков на редукцию T_{red}. Совпадение пучков на всей схеме T следует из простой алгебраической леммы.

Лемма 2.3. *Пусть A – коммутативное кольцо, M – A-модуль конечного типа, $\Phi : M \to M$ – A-эндоморфизм. Пусть редукция $\Phi_{red} : M_{red} \to M_{red}$ – A_{red}-автоморфизм. Тогда Φ – A-автоморфизм.*

□

Доказательство леммы. Поскольку гомоморфизм Φ_{red} сюръективен и нильрадикал принадлежит радикалу Джекобсона, то, согласно [13, глава 2, упражнение 10], Φ тоже сюръективен. Тогда согласно [14, теорема 2.4] Φ – автоморфизм. □

Полученный изоморфизм завершает доказательство теоремы 0.1 и позволяет усилить результат работы [7] о существовании универсального семейства на схеме $\widetilde{M}$, доказав следствие 0.2.

Для этого напомним

Определение 2.1. [11, определение 2.2.1] Функтор $\mathfrak{f} : \mathcal{C}^o \to Sets$ *представлен объектом* $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, если он изоморфен функтору $\underline{M} : T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$.

Если $\mathcal{C} = (Schemes_k)$ и, соответственно, $\mathfrak{f} : T \mapsto \mathfrak{F}_T/\sim$, то объект (схема) M называется *тонким пространством модулей* функтора $\mathfrak{f}$.

Изоморфизм функторов $\mathfrak{f} \cong \underline{M}$ определяется серией коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} T & = & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{F}_T/\sim) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M) \end{array} \qquad (2.4)$$

в которых нижняя горизонтальная стрелка – биекция. Положим $T = M$. Любой представитель класса $\xi \in (\mathfrak{F}_M/\sim)$, являющегося прообразом тождественного морфизма $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$, есть универсальное семейство [16, ch. 1, §2] для тонкого пространства модулей M.

Пусть теперь $\mathfrak{f}, \widetilde{\mathfrak{f}} : (Schemes_k)^o \to Sets$ – два функтора модулей, между которыми имеется изоморфизм $\underline{\kappa} : \mathfrak{f} \to \widetilde{\mathfrak{f}}$, определяемый серией коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} T & = & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{F}_T/\sim) & \xrightarrow[\underline{\kappa}(T)]{\sim} & (\widetilde{\mathfrak{F}}_T/\sim) \end{array} \tag{2.5}$$

Тогда функтор $\widetilde{\mathfrak{f}}$ представлен схемой $\widetilde{M}$ тогда и только тогда, когда функтор $\mathfrak{f}$ представлен той же, с точностью до изоморфизма, схемой $M \cong \widetilde{M}$. Этот вывод следует сразу же из объединения диаграмм (2.4) и (2.5).

Пусть теперь $u \in \mathfrak{F}_M$ – универсальное семейство для $\mathfrak{f}$, $\xi = [u] \in \mathfrak{F}_M/\sim$ – его класс. Тогда класс $\underline{\kappa}(M)(\xi)$ отображается в $\mathrm{id}_{\widetilde{M}}$, а любой представитель $\widetilde{u} \in \underline{\kappa}(M)(\xi)$ поставляет универсальное семейство для $\widetilde{f}$. Тем самым следствие 0.2 доказано.

Список литературы / References

[1] Тимофеева Н. В., "Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности", *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756 – 769; [Timofeeva N. V., "Compactification in Hilbert scheme of moduli scheme of stable 2-vector bundles on a surface", *Math. Notes*, **82**:5 (2007), 677–690].

[2] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности", *Матем. сборник*, **199**:7 (2008), 103–122; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface", *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070].

[3] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, II", *Матем. сборник*, **200**:3 (2009), 95–118; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. II", *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 405–427].

[4] Тимофеева Н. В., "О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений", *Матем. заметки*, **90**:1 (2011), 143– 150; [Timofeeva N. V., "On degeneration of surface in Fitting compactification of moduli of stable vector bundles", *Math. Notes*, **90** (2011), 142–148].

[5] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, III: Функториальный подход", *Матем. сборник*, **202**:3 (2011), 107–160; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. III: Functorial approach", *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 413–465].

[6] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, IV: Неприведенная схема модулей", *Матем. сборник*, **204**:1 (2013), 139–160; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. IV: Nonreduced moduli", *Sb. Math.*, **204**:1 (2013), 133–153].

[7] Тимофеева Н. В., "О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, V: Существование универсального семейства", *Матем. сборник*, **204**:3 (2013), 107–134; [Timofeeva N. V., "On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. V: Existence of universal family", *Sb. Math.*, **204**:3 (2013), 411–437].

[8] Тимофеева Н. В., "Об одном изоморфизме компактификаций схемы модулей векторных расслоений", *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:1 (2012), 37–50; [Timofeeva N. V., "On some isomorphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles", *ArXiv:1103.5327v2].*

[9] Timofeeva N. V., "On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **12** (2015), 577–591.

[10] Gieseker D., "On the moduli of vector bundles on an algebraic surface", *Annals of Math.*, **106** (1977), 45–60.

[11] Huybrechts D., Lehn M., *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Vieweg, 1997.

[12] Мамфорд Д., *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968; [Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton Univ. Press, Princeton – New Jersey, 1966, Annals of Mathematical Studies, 59]

[13] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; [Atiyah M. F., Macdonald I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publ. Co., Massachusets, 1969].

[14] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, 1986, transl. from Japanese by M. Reid.

[15] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; [Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977, Graduate Texts in Mathematics, 52].

[16] Newstead P. E., *Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978, Publ. for the Tata Institute for Fundamental Research, Bombay. Lectures on mathematics and Physics, vol. 51.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-629-647

Isomorphism of Compactifications of Vector Bundles Moduli: Nonreduced Moduli

Timofeeva N. V.

Received May 15, 2015

We continue the study of the compactification of the moduli scheme for Gieseker-semistable vector bundles on a nonsingular irreducible projective algebraic surface S with polarization L, by locally free sheaves. The relation of main components of the moduli functor for admissible semistable pairs and main components of the Gieseker – Maruyama moduli functor (for semistable torsion-free coherent sheaves) with the same Hilbert polynomial on the surface S is investigated.

The compactification of interest arises when families of Gieseker-semistable vector bundles E on the nonsingular polarized projective surface (S, L) are completed by vector bundles $\widetilde{E}$ on projective polarized schemes $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ of special form. The form of the scheme $\widetilde{S}$, of its polarization $\widetilde{L}$ and of the vector bundle $\widetilde{E}$ is described in the text. The collection $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ is called a semistable admissible pair. Vector bundles E on the surface (S, L) and $\widetilde{E}$ on schemes $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ are supposed to have equal ranks and Hilbert polynomials which are compute with respect to polarizations L and $\widetilde{L}$, respectively. Pairs of the form $((S, L), E)$ named as S-pairs are also included into the class under the scope. Since the purpose is to study the compactification of moduli space for vector bundles, only families which contain S-pairs are considered.

We build up the natural transformation of the moduli functor for admissible semistable pairs to the Gieseker – Maruyama moduli functor for semistable torsion-free coherent sheaves on the surface (S, L), with same rank and Hilbert polynomial. It is demonstrated that this natural transformation is inverse to the natural transformation built in the preceding paper and defined by the standard resolution of a family of torsion-free coherent sheaves with a possibly nonreduced base scheme. The functorial isomorphism constructed determines the scheme isomorphism of compactifications of moduli space for semistable vector bundles on the surface (S, L).

Keywords: moduli space, semistable coherent sheaves, semistable admissible pairs, moduli functor, vector bundles, algebraic surface.

For citation: Timofeeva N. V., "Isomorphism of Compactifications of Vector Bundles Moduli: Nonreduced Moduli", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 629–647.

On the authors:
Timofeeva Nadezhda Vladimirovna, orcid.org/0002-0007-1896-0951, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: nadezdavtimofeeva@gmail.com

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 648–664
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 648–664

©Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664

УДК 519.63.4:532.51.5

Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок

Ворожцов Е. В., Шапеев В. П.

получена 17 августа 2015

Предложен вариант метода коллокаций и наименьших невязок для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах на неравномерных сетках. Путем введения общих криволинейных координат исходное уравнение Пуассона приводится к уравнению Бельтрами. В криволинейных координатах используется равномерная сетка. Неравномерность сетки в плоскости исходных полярных координат обеспечивается с помощью функций, управляющих растяжением сетки и входящих в формулы перехода от полярных координат к криволинейным. Метод верифицирован на двух тестовых задачах, имеющих точные аналитические решения. Результаты расчетов показывают, что если начало радиальной координатной оси не входит в расчетную область, то предлагаемый метод имеет второй порядок точности. Если расчетная область содержит эту сингулярность, то применение неравномерной сетки вдоль радиальной координаты позволяет повысить точность численного решения в 1.7–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки при том же количестве ее узлов.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, полярные координаты, метод коллокаций и наименьших невязок

Для цитирования: Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., "Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 648–664.

Об авторах:
Ворожцов Евгений Васильевич, orcid.org/0000-0003-2753-8399, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия,
e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Шапеев Василий Павлович, orcid.org/0000-0001-6761-7273, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия,
Новосибирский национальный исследовательский университет,
ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090 Россия,
e-mail: vshapeev@ngs.ru

Благодарности:

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 13–01–00227).

Введение

При моделировании многих физических процессов необходимо решать уравнение Пуассона в круге либо в кольцевом зазоре между двумя концентрическими окружностями. В частности, при численном решении уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости, с помощью проекционных методов требуется решение уравнения Пуассона для давления. Существующие численные методы решения уравнения Пуассона в областях с круглыми границами (в двумерном случае) и в областях с цилиндрическими границами (в трехмерном случае) можно разбить на две группы.

В первую группу входят методы, которые позволяют решать уравнения Пуассона в дисковидных или кольцевых областях непосредственно в декартовых прямоугольных координатах. В двумерном случае решается уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

где x, y — декартовы прямоугольные координаты, а $f(\cdot)$ — заданная функция. В работе [1] был впервые предложен метод погруженных границ, в котором использовалась аппроксимация δ-функции; с ее помощью решение «размазывалось» в окрестности границ расчетной области в пределах тонкой полосы. В [2] была предложена симметричная дискретизация уравнения Пуассона в случае, когда на границе нерегулярной пространственной области заданы условия Дирихле. Согласно [2], расчетная область дополняется до прямоугольной, а в фиктивных ячейках, лежащих вне исходной нерегулярной расчетной области и вблизи ее границы, значения численного решения вычисляются с помощью линейной экстраполяции. Это позволяет применять для аппроксимации оператора Лапласа стандартные центрально-разностные формулы во всей расчетной области. В [3] было осуществлено повышение порядка аппроксимации метода погруженных границ, описанного в [2], до третьего и четвертого с помощью задания величин в фиктивных ячейках по экстраполяционным формулам более высоких порядков, чем первый.

В [4] был представлен метод конечных объемов для численного решения уравнения Пуассона с переменными коэффициентами в декартовых координатах в нерегулярных областях с граничными условиями Дирихле. Кроме того, в [4] использовался многосеточный алгоритм для ускорения сходимости. В [5] разностным методом высокого порядка точности со специальной аппроксимацией граничного условия решалось уравнение Пуассона в эллиптической области. В [6] методом коллокаций и наименьших квадратов в области с криволинейной границей решалось уравнение конвекции-диффузии на адаптивной прямоугольной сетке с нерегулярными ячейками на границе области. В [7] был предложен проекционный численный метод решения уравнений Навье–Стокса на адаптивной декартовой прямоугольной сетке. В рамках этого метода численно решалось уравнение Пуассона для давления, при этом налагалось ограничение на сетку, состоящее в том, что отношение размеров двух соседних ячеек не может превышать значение 2. Указанное ограничение на отношение размеров соседних ячеек было снято в работе [8], где была представлена конечно-разностная схема для численного решения уравнения Пуассона в нерегулярных областях на адаптивной прямоугольной сетке, измельчающейся вблизи границы области. Критерий измельчения основан на оценке близости к нерегулярной

границе, так что ячейки наименьшего размера располагаются на границе. Для того, чтобы хранить данные о пространственной дискретизации, в [7] использовалась структура данных в виде октарного дерева, а в [8] – структуры данных в виде квадрадерева и октарного дерева. В [8] был указан недостаток использования структур данных в виде квадрадерева и октарного дерева, состоящий в том, что требуется некоторый расход машинного времени для того, чтобы обойти дерево от его корня до нужного узла графа.

Во вторую группу работ, посвященных разработке численных методов решения уравнения Пуассона в дисковидных или цилиндрических областях, входят работы, в которых решается в двумерном случае уравнение Пуассона в полярных координатах, а в трехмерном — в цилиндрических. Удобство использования указанных криволинейных координат состоит в том, что пространственная расчетная область становится прямоугольником в двумерном случае и параллелепипедом — в трехмерном. В работе [9] двумерное уравнение Пуассона в полярных координатах аппроксимировалось конечно-разностной схемой, имеющей центрированный трехточечный шаблон по каждой из двух полярных координат. Позднее были разработаны эффективные спектрально-разностные методы для решения уравнений Пуассона в полярных и цилиндрических координатах с применением быстрого дискретного преобразования Фурье. В двумерном случае для коэффициентов разложения Фурье получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая эффективно решается методом прогонки, а в трехмерном случае возникающая СЛАУ решается методом матричной прогонки. В [10] для коэффициентов Фурье была построена разностная схема второго порядка точности. В [11] была представлена компактная разностная схема четвертого порядка точности для коэффициентов Фурье в случае решения уравнения Пуассона в полярных координатах. В [12] спектрально-разностный метод работы [10] был применен для численного решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах для поправки давления в рамках конечно-разностного метода [14], с помощью которого была решена численно задача о течении вязкого несжимаемого газа в цилиндрическом кожухе с вращающимся диском.

Необходимо отметить недостаток спектрально-разностных методов решения уравнений Пуассона в полярных и цилиндрических координатах, который состоит в том, что сетка вдоль окружной координаты должна быть равномерной. При этом наибольшая эффективность быстрого дискретного преобразования Фурье достигается только в случае, когда число узлов N_θ по окружной координате имеет вид $N_\theta = 2^N + 1$, где N — целое положительное число, $N > 1$.

Как известно, при адекватном относительно задачи построении и использовании неравномерных сеток можно существенно повысить точность численного решения по сравнению со случаем использования равномерной сетки с тем же количеством узлов [6, 15, 16]. В этой связи был разработан ряд численных методов для решения уравнения Пуассона в полярных координатах на неравномерной сетке. В частности, в работе [17] был предложен численный метод с применением функции Грина, в котором сетка была неравномерной только в радиальном направлении. В [18] была предложена компактная разностная схема четвертого порядка точности на неравномерной сетке для двумерного уравнения конвекции-диффузии в полярных координатах. Тестовые расчеты подтвердили четвертый порядок точности схемы.

Имеется много прикладных задач, в которых желательно применять неравно-

мерную сетку вдоль окружной координаты θ. Это задачи расчета течений жидкости в устройствах, для которых характерно наличие сопряжения с какими-то технологическими элементами в интервале изменения окружной координаты $0 < \theta \le 2\pi$, размер которых намного меньше, чем внешний диаметр устройства. Примерами таких устройств являются форсунки и гидроприводы, применяемые в технике.

Ранее в работах [13, 19–24] была продемонстрирована достаточно универсальная применимость метода коллокаций и наименьших невязок (КНН) для численного решения разнообразных краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных различных типов. В этой связи представляется целесообразным исследовать применимость этого метода также для численного решения уравнений Пуассона в полярных координатах.

Метод КНН численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений возник недавно. Он является проекционно-сеточным методом. В нем решение в каждой ячейке разностной сетки ищется в виде линейной комбинации базисных элементов некоторого конечномерного функционального пространства. В качестве последнего в силу определенных удобств, в основном, используется пространство многочленов. Метод КНН отличается от других численных методов тем, что численное решение задачи сводится к решению переопределенной СЛАУ. Решение последней ищется из требования минимизации функционала невязки уравнений задачи на ее численном решении. Вследствие такого комбинирования метода коллокаций с “сильным” требованием к решению дискретной задачи улучшаются его свойства (гладкость, точность) в сравнении с решениями, получаемыми простым методом коллокаций. На самом деле метод КНН обладает и другими улучшенными свойствами в сравнении с методом коллокаций. В частности, минимизация функционала невязки способствует подавлению (демпфированию) различных возмущений, возникающих в процессе решения задачи и ускоряет сходимость решения при итерационном способе его построения. Более подробный обзор литературы по методу КНН, а также описание прикладных задач, решенных этим методом, можно найти в [20, 23–25].

В настоящей работе предлагаются варианты метода КНН для численного решения двумерного уравнения Пуассона в полярных координатах как на равномерных, так и неравномерных сетках.

1. Метод КНН для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах

В результате перехода от декартовых координат x, y к полярным координатам r, θ по формулам $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ уравнение Пуассона (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \overline{f}(\theta, r), \tag{2}$$

где $\overline{f}(\theta, r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. В дальнейшем для краткости черту над f опустим. Уравнение (2) решается в прямоугольной области

$$\Omega = \{(\theta, r),\ 0 \le \theta < 2\pi,\ R_1 \le r \le R_2\} \tag{3}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u = g_1(\theta),\ r = R_1; \quad u = g_2(\theta),\ r = R_2; \quad 0 \le \theta < 2\pi. \tag{4}$$

В (3), (4) R_1 и R_2 — заданные величины, $0 \le R_1 < R_2$. На границах $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ задается условие периодичности

$$u(0, r) = u(2\pi, r), \quad R_1 \le r \le R_2. \tag{5}$$

Сформулируем "дискретную" задачу, аппроксимирующую исходную дифференциальную краевую задачу. В методе КНН в пространственной расчетной области (3) строится расчетная сетка, которая может быть неравномерной вдоль обеих координат θ, r. Обозначим r-координату j-го узла сетки на оси r через r_j, и пусть N_r – число узлов неравномерной сетки в промежутке $[R_1, R_2]$. Множество узлов сетки $r_1, \ldots, r_{N_r}$ должно удовлетворять соотношениям $R_1 = r_1 < r_2 < \cdots < r_{N_r} = R_2$. Аналогично, в интервале $[0, 2\pi)$ задается множество узлов сетки $\theta_1, \ldots, \theta_{N_\theta}$ так, чтобы выполнялись соотношения $0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{N_\theta} = 2\pi$, где N_θ — число узлов сетки в интервале $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\Omega_{i,j}$ подобласть области (3), занимаемую ячейкой с индексами i, j, то есть

$$\Omega_{i,j} = \{(\theta, r),\ \theta_i \le \theta \le \theta_{i+1},\ r_j \le r \le r_{j+1}\},\ i = 1, \ldots, N_\theta - 1,\ j = 1, \ldots, N_r - 1. \tag{6}$$

В задачах гидродинамики часто встречаются пространственные подобласти, в которых решение имеет большие градиенты. В случае равномерной сетки такие подобласти могут иметь размер менее, чем один шаг сетки; в этих случаях расчетный алгоритм может попросту "не заметить" подобные узкие переходные области, и это может привести к значительным ошибкам и неправильным результатам численного моделирования. В таких ситуациях применение неравномерных сеток, сгущающихся в подобластях больших градиентов решения, позволяет увеличить точность моделирования.

Один из наиболее простых способов управления растяжением сетки в случае уравнения Пуассона (1) состоит в использовании отображения [15]

$$x = f_2(\eta)\cos f_1(\xi), \quad y = f_2(\eta)\sin f_1(\xi), \tag{7}$$

где управляющие функции $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ входят в соотношения $\theta = f_1(\xi)$, $r = f_2(\eta)$ и задаются пользователем с учетом специфики решаемой задачи. Расчетная область в плоскости криволинейных координат (ξ, η) по-прежнему остается прямоугольной, как и в случае, когда $f_1(\xi) = \xi$, $f_2(\eta) = \eta$. Предположим, следуя [15, 16], что расчетная сетка в плоскости (ξ, η) является квадратной с шагами $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Если $f_1(\xi) \ne \xi$ или $f_2(\eta) \ne \eta$, то расчетная сетка в исходной плоскости (θ, r) будет неравномерной.

Уравнение (1) при переходе от переменных x, y к криволинейным координатам ξ, η принимает следующий вид [16]:

$$\Delta_{\mathrm{B}} u(\xi, \eta) = \overline{f}(\xi, \eta), \tag{8}$$

где $\Delta_{\mathrm{B}} u$ — оператор Бельтрами, $\overline{f}(\xi, \eta) = f(f_2(\eta)\cos f_1(\xi), f_2(\eta)\sin f_1(\xi))$,

$$\Delta_{\mathrm{B}} u = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22} u_\xi - g_{12} u_\eta}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{g_{11} u_\eta - g_{12} u_\xi}{\sqrt{g}} \right) \right], \tag{9}$$

g_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — скалярные произведения ковариантных касательных векторов, $g_{ij} = \vec{x}_{\xi_i} \cdot \vec{x}_{\xi_j}$, $i, j = 1, 2$, где $\xi_1 \equiv \xi$, $\xi_2 \equiv \eta$, $x_\xi = \partial x(\xi, \eta)/\partial \xi$, $y_\xi = \partial y(\xi, \eta)/\partial \xi$ и т.д., $\vec{x}_\xi = (x_\xi, y_\xi)$, $\vec{x}_\eta = (x_\eta, y_\eta)$, то есть

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \ g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \ g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \ \sqrt{g} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi. \tag{10}$$

Вычисление величин g_{ij} согласно (10) в конкретном случае отображения (7) приводит к следующему выражению для оператора Бельтрами:

$$\Delta_{\mathrm{B}} u = \frac{1}{f_2(\eta) f_1'(\xi) f_2'(\eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{f_2'(\eta) u_\xi}{f_2(\eta) f_1'(\xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{f_1'(\xi) f_2(\eta) u_\eta}{f_2'(\eta)} \right] \right\}. \tag{11}$$

В методе КНН, наряду с глобальными координатами ξ, η, в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ используются локальные координаты y_1, y_2. Для реализации метода КНН удобно ввести локальные координаты так, чтобы в пределах ячейки они менялись от -1 до $+1$. Поскольку расчетная сетка в плоскости (ξ, η) имеет шаги $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, то локальные переменные y_1, y_2 вводятся по формулам:

$$y_1 = \frac{\xi - \xi_{i+1/2}}{0.5}, \quad y_2 = \frac{\eta - \eta_{j+1/2}}{0.5}, \tag{12}$$

где $(\xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2})$ — координаты геометрического центра ячейки $\Omega_{i,j}$ в плоскости (ξ, η). Формулы

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{dy_1}{d\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{0.5} \frac{\partial}{\partial y_1} = 2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial}{\partial y_2} \tag{13}$$

позволяют заменить дифференцирование по ξ и η в (11) на дифференцирования по y_1, y_2. Кроме того, необходимо заменить ξ и η в $f_2(\eta)$, $f_1'(\xi), f_2'(\eta)$ по формулам: $\xi = 0.5 y_1 + \xi_{i+1/2}$, $\eta = 0.5 y_2 + \eta_{j+1/2}$.

В упомянутых во введении работах по применению метода КНН для решения различных краевых задач для уравнений в частных производных использовались полиномы от локальных координат для аппроксимации решения в каждой ячейке расчетной сетки. В настоящей работе также используется полиномиальное представление решения уравнения Пуассона в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$. Пусть $U(y_1, y_2)$ — приближенное решение в ячейке в виде полинома. Для того, чтобы можно было аппроксимировать вторые производные, полином должен иметь, как минимум, вторую степень по переменным y_1, y_2. Поэтому ниже используется многочлен второй степени вида

$$U(y_1, y_2) = a_1 + a_2 y_1 + a_3 y_2 + a_4 y_1^2 + 2 a_5 y_1 y_2 + a_6 y_2^2. \tag{14}$$

В формулу (11) входят производные $f_1'(\xi)$, $f_2'(\eta)$, $f_1''(\xi)$, $f_2''(\eta)$. Эти производные аппроксимировались в центре ячейки $\Omega_{i,j}$ со вторым порядком точности. Проиллюстрируем процедуру вычисления этих производных на примере производных $f_2'(\eta)$,

$f_2''(\eta)$. Для их аппроксимации во внутренних ячейках используем центральные разности [15, 16]

$$f_2'(\eta_{j+1/2}) = r_{j+1} - r_j, \quad f_2''(\eta_{j+1/2}) = r_{j+3/2} - 2r_{j+1/2} + r_{j-1/2}. \tag{15}$$

В левой граничной ячейке $\Omega_{i,1}$ применим правые односторонние разности:

$$f_2'(\eta_{3/2}) = (1/2)\left(4r_{5/2} - 3r_{3/2} - r_{7/2}\right), \quad f_2''(\eta_{3/2}) = r_{7/2} - 2r_{5/2} + r_{3/2}. \tag{16}$$

В правой граничной ячейке Ω_{i,N_r-1} применим левые односторонние разности

$$\begin{array}{l} f_2'(\eta_{N_r-1/2}) = \frac{1}{2}\left(r_{N_r-1/2} - 4r_{N_r-3/2} + r_{N_r-5/2}\right), \\ f_2''(\eta_{N_r-1/2}) = r_{N_r-1/2} - 2r_{N_r-3/2} + r_{N_r-5/2}. \end{array} \tag{17}$$

Следует заметить, что при применении метода КНН для решения любых задач важно, чтобы уравнения переопределенной системы, которые играют одинаковую роль в приближенном решении, имели примерно равные весовые коэффициенты. Обозначим через $\Delta_{\mathrm{B},y_1,y_2}$ оператор Бельтрами в локальных переменных y_1, y_2. Заметим, что в оператор Бельтрами (8) входит множитель $1/[f_2'(\eta)]^2$, который в случае равномерной сетки имеет порядок малости $1/O(h_r^2)$, где h_r — шаг сетки в промежутке $[R_1, R_2]$. А коэффициенты уравнений, получаемых из краевого условия, имеют порядок малости $O(1)$. Для того, чтобы коэффициенты всех уравнений алгебраической системы относительно $a_1, \ldots, a_6$ имели одинаковые порядки малости, достаточно умножить уравнение Бельтрами на величину порядка $O(h_r^2)$. Это можно обеспечить умножением его на величину $[f_2'(\eta)]^2$:

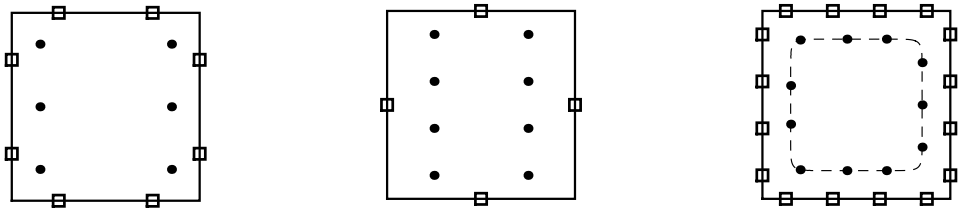
$$[f_2'(\eta)]^2 \, \Delta_{\mathrm{B},y_1,y_2} U = [f_2'(\eta)]^2 \, F(y_1, y_2), \tag{18}$$

где $F(y_1, y_2) = \overline{f}(0.5y_1 + \xi_{i+1/2}, 0.5y_2 + \eta_{j+1/2})$. Этот прием несколько улучшает точность численного решения.

Количество точек коллокации N_c в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ и их расположение внутри ячейки задаются пользователем, и это может делаться различными способами. В данном исследовании были реализованы более 20 вариантов задания локальных координат $(y_{1,i,m}, y_{2,j,m})$ точек коллокации. При этом для значений $N_c = 6$, $N_c = 8$ были реализованы два различных способа размещения точек коллокации внутри ячейки. В первом способе при $N_c = 6$ координаты точек коллокации таковы: $(\pm\omega, -\frac{2}{3}), (\pm\omega, 0), (\pm\omega, \frac{2}{3})$, где ω — значение, задаваемое пользователем в интервале $0 < \omega < 1$, см. рис. 1, (а). На рис. 1 точки коллокации показаны черными кружками, при этом $\omega = 0.7$. При $N_c = 8$ локальные координаты точек коллокации вычислялись в первом способе по формулам: $(\pm\omega, -\frac{3}{4}), (\pm\omega, -\frac{1}{4}), (\pm\omega, \frac{1}{4}), \pm\omega, \frac{3}{4})$, см. рис. 1, (б). Таким образом, при $N_c = 6$ и $N_c = 8$ вдоль полярной оси r в ячейке задавалось больше рядов точек коллокации, чем вдоль оси θ. Это делалось с целью более точного расчета решения вблизи границ $r = R_1$, $r = R_2$, где могут иметься пограничные слои с большими градиентами решения.

В той же компьютерной программе был реализован при $N_c \geq 2$ и другой алгоритм задания точек коллокации. В этом алгоритме точки коллокации задавались на равном угловом расстоянии друг от друга на замкнутой кривой

$$\left(\frac{y_1}{\omega}\right)^M + \left(\frac{y_2}{\omega}\right)^M = 1, \tag{19}$$



(а) (б) (в)

Рис. 1. Варианты задания точек коллокации и точек согласования: (а) $N_c = 6$, $N_m = 2$; (б) $N_c = 8$, $N_m = 1$; (в) $N_c = 11$, $N_m = 4$

где M — четное число, $M \geq 2$; оно задается пользователем. На рис. 1, (в) показан пример задания 11 точек коллокации данным способом; штриховой линией показана кривая (19) при $M = 12$. Следует отметить, что точки коллокации располагаются в ячейке $\Omega_{i,j}$ несимметрично относительно прямых $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ при нечетных N_c (см. рис. 1, (в)), что может несколько ухудшить точность решения, получаемого по методу КНН. Поэтому желательно использовать четные значения параметра N_c.

Подстановка выражения (14) в (18) приводит к алгебраическому уравнению, линейному относительно коэффициентов $a_1, \ldots, a_6$. Затем в это линейное уравнение подставляются координаты N_c точек коллокаций $(y_{1,i,m}, y_{2,j,m})$, $m = 1, \ldots, N_c$. В результате получаются N_c уравнений коллокаций. Так как число неизвестных коэффициентов $a_1, \ldots, a_6$ в (14) равно шести, то желательно задавать в каждой ячейке шесть и более точек коллокаций.

Как и в [22–24], на сторонах каждой ячейки задаются условия согласования решения в ней с решением в соседних ячейках, обеспечивающие единственное кусочно-полиномиальное решение. В качестве таких условий здесь взяты записанные в нескольких точках на общих сторонах рассматриваемой ячейки и соседних с ней требования непрерывности линейной комбинации значений приближенного решения и ее производной по нормали к стороне:

$$\sigma_1 h \partial(U^+)/\partial n + \sigma_2(U^+) = \sigma_1 h \partial(U^-)/\partial n + \sigma_2(U^-). \tag{20}$$

В левой части этих соотношений берется решение в рассматриваемой ячейке, а в правой части — решение в соседней ячейке. Точки, в которых записываются уравнения (20), называются точками согласования. Здесь $n = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к стороне ячейки, U^+, U^- – пределы функции U при стремлении ее аргументов к стороне ячейки изнутри и снаружи ячейки; σ_1, σ_2 – неотрицательные весовые параметры, которые влияют в некоторых пределах на обусловленность полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и скорость сходимости решения [26].

Величина h в (20) задается следующим образом: на стороне $r = r_{j+1}$ ячейки $\Omega_{i,j}$ в соответствии с (12) полагаем $h = \frac{1}{2}$. Тогда $h\partial(U^+)/\partial n = h \cdot \frac{dy_2}{d\eta} \cdot \frac{\partial U^+}{\partial y_2} = \frac{\partial U^+}{\partial y_2}$. Аналогично, на стороне $\theta = \theta_{i+1}$ имеем: $h_\theta \partial(U^+)/\partial n = h_\theta \partial(U^+)/\partial\theta = \partial U^+/\partial y_1$, $h_\theta = \frac{1}{2}$. Обозначим через N_m количество точек согласования на каждой стороне ячейки. Так как число сторон ячейки равно четырем, получаем $4N_m$ условий согласования в каждой ячейке (на рис. 1 точки согласования показаны малыми квадратами).

Если сторона ячейки, на которой $r = \text{const}$, принадлежит границе области Ω,

то вместо условий согласования на этой стороне в точках, которым на сторонах в ячейках внутри области соответствуют точки записи условий согласования, записываются граничные условия $U(y_1, y_2) = g_1$ или $U(y_1, y_2) = g_2$ в соответствии с (4).

Вдоль координаты θ в граничных ячейках $\Omega_{1,j}$ и $\Omega_{N_\theta-1,j}$, $j = 1, \ldots, N_r - 1$ учитывались условия периодичности (5) в условиях согласования (20). Рассмотрим сначала ячейку $\Omega_{1,j}$. Сторона $\theta_1 = 0$ этой ячейки одновременно является стороной $\theta_1 = 2\pi$ ячейки $\Omega_{N_\theta-1,j}$. Поэтому равенство (20) было реализовано в ячейке $\Omega_{1,j}$ следующим образом:

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2)\right]_{i=1, y_1=-1} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2)\right]_{i=N_\theta-1, y_1=1}. \quad (21)$$

Аналогично, при формировании СЛАУ в ячейке $\Omega_{N_\theta-1,j}$ в СЛАУ включалось уравнение

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2)\right]_{i=N_\theta-1, y_1=1} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U(y_1, y_2)\right]_{i=1, y_1=-1}. \quad (22)$$

В реализованном здесь варианте метода численное решение глобальной задачи находится итерационно в так называемом процессе Гаусса–Зейделя. В нем, после того, как начальное приближение присвоено решению в каждой ячейке, на каждой глобальной итерации последовательно перебираются все ячейки области. В каждой ячейке решается СЛАУ, определяющее «локальный» кусок глобального решения в ней. В реализованном варианте решение в ней находилось ортогональным методом путем приведения матрицы переопределенной СЛАУ методом Гивенса к верхнетреугольному виду. При этом решение в очередной ячейке «согласовывается» посредством условий согласования с решением, имеющимся в соседних ячейках. Если очередная ячейка принадлежит границе области, то в ней реализуются краевые условия задачи, поскольку их аппроксимация включена в СЛАУ, определяющую решение в этой ячейке. Глобальные итерации заканчиваются при выполнении критерия прекращения итераций (27), (28).

При практической реализации метода КНН решение находится в ячейках $\Omega_{i,j}$ в направлении возрастания индексов i, j. Поэтому при формировании СЛАУ в ячейке $\Omega_{1,j}$ еще неизвестно решение в ячейке $\Omega_{N_\theta-1,j}$. В этой связи был реализован расчет с применением альтернирующего метода Шварца [28]. В соответствии с этим методом в качестве U^- в (20), (21) брались значения, известные на момент решения в данной ячейке. Пусть k — номер итерации, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда условие (21) реализовывалось так:

$$\left[\sigma_1 \frac{\partial U^{k+1}(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U^{k+1}(y_1, y_2)\right]_{\substack{i=1,\\ y_1=-1}} = \left[\sigma_1 \frac{\partial U^{k}(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \sigma_2 U^{k}(y_1, y_2)\right]_{\substack{i=N_\theta-1,\\ y_1=1}}.$$

А в правой части уравнения (22) можно брать значения $U(y_1, y_2)$ и $\partial U(y_1, y_2)/\partial y_1$ на $(k+1)$-ой итерации, так как при счете в направлении возрастающего индекса i значения коэффициентов $a_1, \ldots, a_6$ в (14) уже известны к тому моменту, когда вычислительный процесс достигнет граничной ячейки $(N_\theta - 1, j)$.

Начальное приближение $u^0(\theta, r)$ задавалось с учетом краевых условий (5) линейной интерполяцией значений $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$:

$$u^0(\theta, r) = \frac{[g_1(\theta) - g_2(\theta)]r + g_2(\theta)R_1 - g_1(\theta)R_2}{R_1 - R_2}.$$

В результате в каждой ячейке путем включения в СЛАУ уравнений коллокаций и условий согласования получается система, содержащая $N_c + 4N_m$ уравнений, где $N_c \geq 6$, $N_m \geq 1$. В силу того, что $N_c + 4N_m \geq 10$, СЛАУ для нахождения шести неизвестных коэффициентов $a_1, \ldots, a_6$ в (14) переопределена. Для численного решения этой СЛАУ применялся метод Гивенса [23, 29].

Уравнение Пуассона (2) содержит сингулярность в точке $r = 0$. При этом само решение регулярно, если правая часть уравнения Пуассона и краевые условия достаточно гладкие. В спектрально-разностных методах [10, 11] проблема сингулярности была решена путем использования на оси r равномерной сетки, смещенной на полушаг от точки $r = 0$, и условия симметричности коэффициентов разложения в ряд Фурье.

В предлагаемом методе КНН проблема сингулярности отсутствует при конечных величинах шагов сетки. Точки коллокации задаются внутри ячейки, поэтому всегда $r = r_{j,m} > 0$ ($j = 1, \ldots, N_r - 1$; $m = 1, \ldots, N_c$). В условиях согласования (20) нет деления на r, то есть в них нет сингулярности.

Для вывода рабочих формул численного алгоритма решения задачи методом КНН все указанные выше действия были осуществлены в системе символьных вычислений MATHEMATICA. При этом все арифметические операторы были переведены в операторы ФОРТРАНА с помощью этой системы и включены в соответствующие места компьютерной программы численного решения задачи.

2. Результаты численных расчетов

Для исследования точности предложенного выше варианта метода КНН были взяты следующие тестовые решения уравнения Пуассона (1) [10, 17]:

$$u(x, y) = 3e^{x+y}(x - x^2)(y - y^2) + 5, \tag{23}$$

$$u(x, y) = \frac{e^x + e^y}{1 + xy}. \tag{24}$$

Соответствующие правые части $f(x, y)$ легко получаются подстановкой решений (23)–(24) в левую часть уравнения (1). Затем находится выражение для функции $\overline{f}(\theta, r)$ в (2). Заметим, что при использовании теста (24) необходимо задавать в (3) $R_2 < \sqrt{2}$, так как при $R_2 = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ знаменатель в (24) обращается в ноль.

Расчеты по методу КНН выполнялись как на равномерных, так и неравномерных сетках вдоль осей θ, r. Неравномерные сетки были сгенерированы вдоль каждой из осей θ, r по одному и тому же алгоритму, описанному в [15]. Кратко опишем алгоритм получения неравномерной сетки в промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$. В этом алгоритме нужно сначала задать шаги сетки $r_2 - r_1$ и $r_{N_r} - r_{N_r-1}$ по формулам: $r_2 - r_1 = \lambda_{r,L} \cdot h_r$, $r_{N_r} - r_{N_r-1} = \lambda_{r,R} \cdot h_r$, где h_r — шаг равномерной сетки в промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$, имеющей N_r узлов, то есть $h_r = (R_2 - R_1)/(N_r - 1)$; $\lambda_{r,L}$ и $\lambda_{r,R}$ — коэффициенты, задаваемые пользователем, $0 < \lambda_{r,L}, \lambda_{r,R} \leq 1$. Если $\lambda_{r,L} < 1$, $\lambda_{r,R} =$

1, то получается вдоль оси r сетка, сгущающаяся вблизи границы $r = R_1$; если $\lambda_{r,L} < 1$ и $\lambda_{r,R} < 1$, то сетка сгущается вблизи обеих границ $r = R_1$ и $r = R_2$; если $\lambda_{r,L} = 1$, $\lambda_{r,R} < 1$, то сетка сгущается вблизи границы $r = R_2$; и, наконец, при $\lambda_{r,L} = \lambda_{r,R} = 1$ получается равномерная сетка. В вычислениях координат узлов сетки в этом алгоритме участвует функция $\mathrm{sh}(\zeta)$.

Чтобы определить погрешность метода на конкретной пространственной расчетной сетке, вычислялись сеточные аналоги норм погрешности с использованием норм пространств L_p $(p \geq 1)$ по формуле

$$\| \delta u^k \|_p = \left[\frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \sum_{i=1}^{N_\theta - 1} \sum_{j=1}^{N_r - 1} \left(u^k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u^{ex}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right)^p r_{j+\frac{1}{2}} (r_{j+1} - r_j)(\theta_{i+1} - \theta_i) \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{25}$$

где $u^{ex}_{i+1/2,j+1/2}$ и $u^k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ — соответственно, точное решение и приближенное решение по методу КНН, вычисленные в центре ячейки $\Omega_{i,j}$.

Порядок сходимости ν_p метода КНН на последовательности сеток при мельчении сетки вычислялся по известной в численном анализе формуле

$$\nu_p = \frac{\log \left(\| \delta u^k(h_{m-1}) \|_p \, / \, \| \delta u^k(h_m) \|_p \right)}{\log(h_{m-1}/h_m)}, \tag{26}$$

где h_m, $m = 2, 3, \ldots$ — некоторые значения шагов h_r и h_θ, такие, что $|h_{r,m-1} - h_{r,m}| + |h_{\theta,m-1} - h_{\theta,m}| > 0$.

Пусть $a^k_{i,j,l}$ $(k = 0, 1, \ldots; l = 1, \ldots, 6)$ — значение коэффициента a_l в (14) в ячейке $\Omega_{i,j}$ на k-ой итерации. Использовалось следующее условие окончания итераций по альтернирующему методу Шварца:

$$\| \delta a^{k+1} \| < \varepsilon, \tag{27}$$

где

$$\| \delta a^{k+1} \| = \max_{i,j} \left(\max_{1 \leq l \leq 6} \left| a^{k+1}_{i,j,l} - a^k_{i,j,l} \right| \right), \tag{28}$$

ε — малое положительное число, задаваемое вычислителем,

$$\varepsilon << \left[\min_{i,j} \{ (\theta_{i+1} - \theta_i), (r_{j+1} - r_j) \} \right]^2.$$

Численные результаты, представленные в таблицах 1 и 2, были получены со значением $\omega = 0.7$ при задании точек коллокации; $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ в (20). В критерии останова счета (27) брали значение $\varepsilon = 10^{-9}$. Использовалось шесть точек коллокации в каждой ячейке, для задания их координат применялось уравнение (20) с $M = 2$. Кроме того, на каждой стороне ячейки $\Omega_{i,j}$ задавалось по четыре точки согласования.

В табл. 1 представлены результаты расчетов по методу КНН в кольцевом зазоре между двумя концентрическими окружностями радиусов $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1.0$, то есть сингулярность $r = 0$ находится вне расчетной области. Из этой таблицы видно, что порядок сходимости ν_2 весьма близок ко второму; порядок сходимости ν_∞ тоже близок ко второму, хотя и несколько ниже, чем 2.

Таблица 1. Погрешности $\| \delta u \|_2, \| \delta u \|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток, $u(x,y) = 3e^{x+y}(x-x^2)(y-y^2) + 5, \;\; 0.5 \le r \le 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\| \delta u \|_2$	ν_2	$\| \delta u \|_\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	6	5.0539E−04		1.1629E−03	
100	8	2.8206E−04	2.03	6.6402E−04	1.95
150	12	1.2498E−04	2.01	2.9861E−04	1.97
200	16	7.0317E−05	2.00	1.6847E−04	1.99
250	20	4.5033E−05	2.00	1.0805E−04	1.99
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.93$, $\lambda_{r,R} = 1.0$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	6	5.6142E−04		1.1213E−03	
100	8	3.0738E−04	2.09	6.8916E−04	1.69
150	12	1.3454E−04	2.04	3.2792E−04	1.83
200	16	7.5413E−05	2.01	1.9028E−04	1.89
250	20	4.8216E−05	2.00	1.2396E−04	1.92
Равномерная сетка вдоль оси r и неравномерная сетка вдоль оси θ ($\lambda_{\theta,L} = \lambda_{\theta,R} = 0.6$)					
75	6	4.7726E−04		1.1430E−03	
100	8	2.6860E−04	2.00	6.6327E−04	1.89
150	12	1.1989E−04	1.99	3.0050E−04	1.95
200	16	6.7660E−05	1.99	1.6884E−04	2.00
250	20	4.3404E−05	1.99	1.0842E−04	1.99

Таблица 2. Погрешности $\| \delta u \|_2, \| \delta u \|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток, $u(x,y) = 3e^{x+y}(x-x^2)(y-y^2) + 5, \;\; 0 \le r \le 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\| \delta u \|_2$	ν_2	$\| \delta u \|_\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	12	3.4861E−03		2.5131E−02	
100	16	2.3369E−03	1.39	2.0583E−02	0.69
150	24	1.3983E−03	1.27	1.5271E−02	0.74
200	32	1.0222E−03	1.09	1.2481E−02	0.70
250	40	8.2012E−04	0.99	1.1284E−02	0.45
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.4$, $\lambda_{r,R} = 0.998$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	12	2.0722E−03		1.1213E−03	
100	16	1.2641E−03	1.72	7.1873E−03	1.30
150	24	6.2044E−04	1.76	4.3878E−03	1.22
200	32	3.7129E−04	1.78	3.0676E−03	1.24
250	40	2.4852E−04	1.80	2.3191E−03	1.25

Таблица 3. Погрешности $\| \delta u \|_2, \| \delta u \|_\infty$ и порядки сходимости ν_2, ν_∞ на последовательности сеток, $u(x,y) = (e^x + e^y)/(1+xy)$, $0 \le r \le 1$

$N_\theta - 1$	$N_r - 1$	$\| \delta u \|_2$	ν_2	$\| \delta u \|_\infty$	ν_∞
Равномерная сетка					
75	12	1.2773E−03		7.7051E−02	
100	16	1.0188E−02	0.79	6.9087E−02	0.38
150	24	7.3624E−03	0.80	5.6739E−02	0.49
200	32	5.8088E−03	0.82	4.8329E−02	0.56
250	40	4.8153E−03	0.84	4.2320E−02	0.60
Неравномерная сетка вдоль оси r ($\lambda_{r,L} = 0.3$, $\lambda_{r,R} = 1.0$) и равномерная сетка вдоль оси θ					
75	12	8.9070E−03		4.9344E−02	
100	16	5.9090E−03	1.43	3.8715E−02	0.84
150	24	3.3825E−03	1.38	2.8247E−02	0.78
200	32	2.2881E−03	1.36	2.2689E−02	0.76
250	40	1.6888E−03	1.36	1.9107E−02	0.77

Далее, как видно из табл. 1, в случае решения уравнения Пуассона в кольцевом зазоре $0.5 \le r \le 1$ применение неравномерной сетки вдоль оси r практически не дает выигрыша в точности. Если же используется неравномерная сетка вдоль оси θ, то имеется небольшой выигрыш в точности решения.

Однако если сингулярная точка $r = 0$ является граничной точкой расчетной области, то применение неравномерной сетки вдоль оси r приводит к заметному повышению точности, см. табл. 2. При этом происходит уменьшение погрешностей $\| \delta u \|_2$, $\| \delta u \|_\infty$ соответственно в 1.7–3.3 раза и в 2–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки.

Из сравнения таблиц 1 и 2 видно, что если точка $r = 0$ является границей расчетной области (то есть $R_1 = 0$), то происходит существенное (на один-два десятичных порядка) увеличение погрешностей $\| \delta u \|_2$ и $\| \delta u \|_\infty$ по сравнению со случаем, когда $R_1 = 0.5$. Этот эффект можно объяснить следующим образом на примере равномерной сетки с шагами h_r и h_θ вдоль осей соответственно r и θ. Рассмотрим ячейки $\Omega_{i,j}$, лежащие вблизи точки $r = 0$. Согласно(2), производная $\partial u/\partial r$ делится на r. В ячейке $\Omega_{i,1}$ координаты $r_{j,m}$ точек коллокаций удовлетворяют неравенствам $0 < r_{j,m} < h_r$. Это приводит к тому, что в рассматриваемой ячейке порядок погрешности аппроксимации члена $(1/r)\partial u/\partial r$ уменьшается. Если же $R_1 = O(1)$, то такая потеря точности численного решения не наблюдается.

В случае тестового решения (24) погрешности численного решения по методу КНН выше, чем в случае теста (23), ср. табл. 1 и 2 с табл. 3. Аналогичный эффект потери точности численного решения в случае теста (24) по сравнению с (23) был отмечен ранее в [11], где была предложена компактная разностная схема для уравнения (2). Здесь в численных экспериментах установлено, что применение неравномерной сетки вдоль оси r позволило повысить точность численного решения в два-три раза по сравнению со случаем равномерной сетки, см. табл. 3.

3. Заключение

Представлен новый вариант метода коллокаций и наименьших невязок для численного решения уравнения Пуассона в полярных координатах. Метод верифицирован на двух тестовых задачах, имеющих точные аналитические решения. Показано, что если начало радиальной координаты не входит в расчетную область, то предлагаемый метод имеет второй порядок точности.

Если сингулярность — начало радиальной координатной оси — входит в расчетную область, то применение неравномерной сетки вдоль радиальной координаты позволяет повысить точность численного решения в 1.7–5 раз по сравнению со случаем равномерной сетки.

Можно также отметить, что метод КНН хорошо распараллеливается. В нем всю расчетную область можно разрезать вдоль границ ячеек сетки на несколько подобластей, содержащих примерно равное количество ячеек. Расчет глобальной задачи можно вести параллельно в каждой подобласти.

Список литературы / References

[1] Peskin C., "Numerical analysis of blood flow in the heart", *J. Comput. Phys.*, **25** (1977), 220–252.

[2] Gibou F., Fedkiw R., Cheng L.-T., Kang M., "A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains", *J. Comput. Phys.*, **176** (2002), 205–227.

[3] Gibou F., Fedkiw R., "A fourth order accurate discretization for the laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the stefan problem", *J. Comput. Phys.*, **202** (2005), 577–601.

[4] Johansen H., Colella P., "A cartesian grid embedded boundary method for poisson's equation on irregular domains", *J. Comput. Phys.*, **147** (1998), 60–85.

[5] Шапеев А. В., Шапеев В. П., "Разностные схемы повышенной точности для решения эллиптических уравнений в области с криволинейной границей", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:2 (2000), 223–232; English transl.: Shapeev A. V., Shapeev V. P., "Difference schemes of increased order of accuracy for solving elliptical equations in domain with curvilinear boundary", *Computat. Math. and Math. Phys.*, **40**:2 (2000), 213–221.

[6] Беляев В. В., Шапеев В. П., "Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей", *Вычисл. технологии*, **5**:4 (2000), 12-–21; (Belyaev V. V., Shapeev V. P., "Metod kollokatsiy i naimenshih kvadratov na adaptivnyh setkah v oblasti s krivolineynoi granitsey", *Vychislitelnye tehnologii*, **5**:4 (2000), 12–21.)

[7] Popinet S., "Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries", *J. Comput. Phys.*, **190** (2003), 572–600.

[8] Chen H., Min C., Gibou F., "A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids", *J. Sci. Computing*, **31**:1/2 (2007), 19–60.

[9] Swartztrauber P. N., Sweet R. A., "The direct solution of the discrete Poisson equation on a disc", *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 900–907.

[10] Lai M.-C., Lin W.-W., Wang W., "A fast spectral/difference method without pole conditions for Poisson-type equations in cylindrical and spherical geometries", *IMA J. Numer. Anal.*, **22**:4 (2002), 537–548.

[11] Lai M.-C., "A simple compact fourth-order Poisson solver on polar geometry", *J. Comput. Phys.*, **182** (2002), 337–345.

[12] Ворожцов Е. В., "Аналитическое и численное исследование течения газа в кожухе с вращающимся диском", *Вычислит. методы и программирование*, **10**:2 (2009), 162–176; (Vorozhtsov E. V., "Analytic and Numerical Investigation of Gas Flow in a Casing with Rotating Disc", *Vychisl. Metody Programm.*, **10**:2 (2009), 162–176, [in Russian].)

[13] Слепцов А. Г., "Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач", *Моделирование в механике*, **5(22)**:2 (1991), 101–126; (Sleptsov A. G., "Kollokatsionno-setochnoe reshenie ellipticheskih kraevyh zadach", *Modelirovanie v mekhanike*, **5(22)**:2 (1991), 101–126, [in Russian].)

[14] Verzicco R., Orlandi P., "A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates", *J. Comput. Phys.*, **123**:2 (1996), 402–414.

[15] Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W., *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North-Holland, New York, 1985, 483 pp.

[16] Knupp P., Steinberg S., *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press, Boca Raton, 1994, 286 pp.

[17] Borges L., Daripa P., "A fast parallel algorithm for the Poisson equation on a disk", *J. Comput. Phys.*, **169** (2001), 151–192.

[18] Ray R. K., Kalita J. C., "A transformation-free HOC scheme for incompressible viscous flows on nonuniform polar grids", *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, **62** (2010), 683–708.

[19] Семин Л. Г., Слепцов А. Г., Шапеев В. П., "Метод коллокаций–наименьших квадратов для уравнений Стокса", *Вычисл. технологии*, **1**:2 (1996), 90–98; (Semin L. G., Sleptsov A. G., Shapeev V. P., "Metod kollokatsiy–naimenshih kvadratov dlia uravneniy Stoksa", *Vychislitelnye tehnologii*, **1**:2 (1996), 90–98, [in Russian].)

[20] Исаев В. И., Шапеев В. П., "Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:10 (2010), 1758–1770; (English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., "High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations", *Computat. Math. and Math. Phys.*, **50**:10 (2010), 1670–1681.)

[21] Исаев В. И., Шапеев В. П., "Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса", *Докл. Академии наук*, **442**:4 (2012), 442–445; (English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., "High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier - Stokes equations", *Dokl. Math.*, **85** (2012), 71–74.)

[22] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., "CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations", LNCS, **8136**, eds. Gerdt V. P., Koepf W., Mayr E. W., Vorozhtsov E. V., Springer, Heidelberg, 2013, 381–392.

[23] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В., "Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса", *Вычислительные методы и программирование*, **14**:3 (2013), 306–322; (Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V., "The Method of Collocations and Least Residuals for Three-dimensional Navier–Stokes Equations", *Vychisl. Metody Programm.*, **14**:3 (2013), 306–322, [in Russian].)

[24] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., "Применение систем компьютерной алгебры для построения метода коллокаций и наименьших невязок решения трехмерных уравнений Навье-Стокса", *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:5 (2014), 131–147; (Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., "Application of Computer Algebra Systems to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for Solving the 3D Navier–Stokes Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21**:5 (2014), 131–147, [in Russian].)

[25] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., "CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg–de Vries–Burgers equations", LNCS, **8660**, eds. Gerdt V. P., Koepf W., Mayr E. W., Vorozhtsov E. V., Springer, Heidelberg, 2014, 432–446.

[26] Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А., "Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса", *Вычислительные технологии*, **12**:3 (2007), 53–70; (Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A., "Issledovanie svoistv metoda kollokatsii i naimenshih kvadratov resheniya kraevyh zadach dlia uravneniya Puassona i uravneniy Navie–Stoksa", *Vychislitelnye tehnologii*, **12**:3 (2007), 53–70, [in Russian].)

[27] Ferziger J. H., Perić M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 423 pp.

[28] Schwarz H. A., "Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren", *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **15** (1870), 272–286.

[29] Golub G. H., Van Loan C. F., *Matrix Computations*, 3rd Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996, 694 pp.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664

Numerical Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates by the Method of Collocations and Least Residuals

Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P.

Received August 17, 2015

A version of the method of collocations and least residuals is proposed for the numerical solution of the Poisson equation in polar coordinates on non-uniform grids. By introducing general curvilinear coordinates the original Poisson equation is reduced to the Beltrami equation. A uniform grid is used in curvilinear coordinates. The grid non-uniformity in the plane of the original polar coordinates is ensured with the aid of functions which control the grid stretching and entering the formulas of the passage from polar coordinates to the curvilinear ones. The method was verified on two test problems having exact analytic solutions. The examples of numerical computations show that if the radial coordinate axis origin lies outside the computational region, the proposed method has the second order of accuracy. If the computational region contains the singularity, the application of a non-uniform grid along the radial coordinate enables an increase in the numerical solution accuracy by factors from 1.7 to 5 in comparison with the uniform grid case at the same number of grid nodes.

Keywords: Poisson equation, polar coordinates, the method of collocations and least residuals

For citation: Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P., "Numerical Solution of the Poisson Equation in Polar Coordinates by the Method of Collocations and Least Residuals", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 648–664.

On the authors:
Vorozhtsov Evgenii Vasilyevich, orcid.org/0000-0003-2753-8399, Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia,
e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Shapeev Vasily Pavlovich, orcid.org/0000-0001-6761-7273, Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk National Research University,
Pirogov str., 2, Novosibirsk, 630090, Russia,
e-mail: vshapeev@ngs.ru

Acknowledgments:

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 13–01–00227).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 665–681
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 665–681

©Ковалева А. М., Куликов Д.А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-665-681

УДК 517.9

Одномодовые и двухмодовые неоднородные диссипативные структуры в нелокальной модели эрозии

Ковалева А. М., Куликов Д.А.

получена 15 мая 2015

Рассмотрена периодическая краевая задача для одного нелинейного уравнения с отклоняющимся пространственным аргументом в случае, когда отклонение мало. Данное уравнение называют пространственно нелокальным уравнением эрозии. Оно описывает формирование волнообразного рельефа под воздействием ионной бомбардировки и может быть проинтерпретировано как развитие известной модели Бредли–Харпера. В работе показано, что неоднородный рельеф может появиться при смене устойчивости однородными состояниями равновесия. В данной краевой задаче потеря устойчивости может происходить на высоких модах. Номер такой моды зависит от многих факторов. Например, от угла падения потока. В работе также показано, что данная нелинейная краевая задача может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений, разрешимость задачи для которых была изучена в работах П.Е. Соболевского и предполагает использование аналитической теории полугрупп линейных ограниченных операторов. Для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий), таких как: метод интегральных многообразий, нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, а также асимптотические методы анализа. При этом разобраны обе задачи, возможные в данной ситуации: коразмерности один и коразмерности два. В частности, были получены асимптотические формулы для решений, которые описывают неоднородный волнообразный рельеф. Изучен вопрос об устойчивости данных решений. Приведен некоторый анализ нормальной формы. Приведены также асимптотические формулы для неоднородных волнообразных решений. В заключении статьи указаны некоторые возможные интерпретации результатов, которые получены в результате анализа данной краевой задачи.

Ключевые слова: нелокальное уравнение эрозии, периодическая краевая задача, устойчивость, бифуркации

Для цитирования: Ковалева А. М., Куликов Д.А., "Одномодовые и двухмодовые неоднородные диссипативные структуры в нелокальной модели эрозиии", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 665–681.

Об авторах:
Ковалева Анастасия Михайловна, orcid.org/0000-0002-9863-0929, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: nyama55@yandex.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, orcid.org/0000-0002-6307-0941, канд. физ.-мат. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (контракт МК-5932.2015.1), а также гранта РФФИ (контракт 14-01-31159 мол_а)

Введение

В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющимся пространственным аргументом, которое моделирует процесс формирования нанорельефа при бомбардировке плоской поверхности мишени потоком ионов [1–3]. Этот технологический процесс имеет широкое применение в микроэлектронике (наноэлектронике). Математические модели, описывающие данный процесс, базируются на основополагающих идеях П. Зигмунда (см., например, [4]). В настоящее время более известной математической моделью следует считать уравнение Бредли–Харпера [5]. Основу последней модели составляет уравнение с частными производными, которое называют обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского [6]. Отметим, что уравнение Курамото–Сивашинского широко известно в связи с приложениями в химической кинетике и гидродинамике. В работе [7], где изучалась модель Бредли–Харпера, был предложен один из возможных механизмов формирования наноструктур в результате потери устойчивости плоского состояния равновесия (СР). В данной работе продемонстрирована возможность реализации аналогичного механизма, но уже в рамках нелокальной модели эрозии.

1. Постановка математической задачи

Будем изучать следующее уравнение, которое приведено в перенормированном виде и носит название "нелокальное уравнение эрозии" (см., например, [1–3]):

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u-w)w_x + b_2w_x^2 + b_3(u-w)w_x^2, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x)$ – нормированное отклонение от плоского фронта мишени, $w = u(t,x-h), h \in R, h > 0$. Коэффициенты a, c, b_1, b_2, b_3 характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени потоком ионов. Все они зависят от угла θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. Наконец, $a, c > 0$, а знак остальных коэффициентов произволен.

Как и в работах [1–3, 5–7], уравнение (1.1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{1.2}$$

В качестве пространственного отклонения возьмем $h = \pi/4$. Выбор периодических краевых условий мотивирован прежде всего постановкой аналогичных задач для уравнения Бредли–Харпера [5–6]. С физической точки зрения такой выбор вполне объясним следующей причиной: все основные физические параметры на концах подложки (образца, находящегося под воздействием потока ионов) можно считать одинаковыми. Речь идет о силах, воздействующих на кромки, моментах сил и так далее. Период 2π выбран в результате перенормировок. Наконец, выбор $h = \pi/4$ обусловлен, конечно, менее глубокими причинами и предложен в качестве примера. В работе [1] указаны способы определения h. Еще раз уместно подчеркнуть, что $\pi/4$ предложен в качестве простейшего варианта, когда возможно, что будет

показано ниже, появление одномодовых и двухмодовых структур. Последнее, отчасти, мотивирует причину, по которой имеет смысл традиционную модель Бредли–Харпера заменить на уравнение (1.1). Традиционный вариант постановок задач в модели Бредли–Харпера приводит, как правило, лишь к "одномодовым" решениям, и потеря устойчивости имеет место только на первой моде, то есть к выявлению длинноволнового рельефа. В задачах наноэлектроники предпочтителен рельеф с относительно малой длиной волны.

Далее рассмотрим вопрос, связанный с описанием структуры окрестности нулевого СР. Дополним краевую задачу (1.1), (1.2) начальным условием

$$u(0,x) = f(x). \tag{1.3}$$

Будем считать, что $f(x) \in Q_2(\delta)$ – достаточно малому шару гильбертова пространства H_2^2. Из работ [8, 9] вытекает, что смешанная краевая задача (1.1)–(1.3) локально корректно разрешима. Через H_2^2 обозначено пространство Соболева 2π периодических функций $f(x) \in L_2(0,2\pi)$, у которых существуют обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(0,2\pi)$.

Отметим, что краевая задача (1.1)–(1.3), наряду с решением $u(t,x)$, допускает решение $u(t,x) + const$. Откуда следует, что данная краевая задача инвариантна относительно замены $u \to u + const$. С физической точки зрения данное свойство означает инвариантность уравнения относительно преобразований Галилея – одного из основных принципов классической физики. С математической точки зрения это дает относительную свободу в выборе системы координат. В частности, можно считать, что уравнение $u = 0$ задает невозмущенную поверхность до начала технологического процесса. Окрестность иных СР $u(t,x) = const$ в силу вышесказанного может быть заменена на окрестность нулевого СР. Ниже именно ее и будем иметь в виду.

2. Линейный анализ

Для исследования устойчивости нулевого решения рассмотрим вспомогательную краевую задачу, возникающую после линеаризации краевой задачи (1.1), (1.2) в окрестности нулевого СР. В результате получим следующую краевую задачу:

$$u_t = A(a,c)u, \quad u(t,x+2\pi) = u(t,x), \tag{2.1}$$

где $A(a,c)$ – линейный дифференциальный оператор (ЛДО), определенный на достаточно гладких 2π периодических функциях $v(x)$ равенством

$$A(a,c)v(x) = av'' - cv'_h + v - v_h, \quad v_h = v(x-h).$$

В силу полноты семейства функций $\exp(inx)$ в пространстве $L_2(0,2\pi)$ все его собственные значения (СЗ)

$$\lambda_n = \lambda_n(a,c) = \tau_n \pm i\sigma_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \tag{2.2}$$

где $\tau_n = -an^2 - cn\sin(nh) + 1 - \cos(nh)$, $\sigma_n = -cn\cos(nh) + \sin(nh)$. Откуда, в частности, вытекает, что

а) $\lim \tau_n = -\infty$, при $|n| \to \infty$;

б) существует такая положительная постоянная M, что справедливо неравенство $|\sigma_n| \le M|\tau_n|$ при $|n| \ge n_0, n_0 \in N$.

Данное свойство СЗ, а также полнота собственных функций (СФ) ЛДО $A(a,c)$, дают основание сформулировать утверждение (см., например, [8]).

Лемма 2.1. *ЛДО $A(a,c)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в пространстве 2π периодических и интегрируемых с квадратом на $(0,2\pi)$ функций.*

Добавим, что вне зависимости от выбора h справедливо равенство $\lambda_0 = 0$. Расположение остальных точек спектра на комплексной плоскости изучим более подробно при специальном выборе отклонения $h(h = \pi/4)$. При таком выборе отклонения получаем уточнение формулы (2.2)

$$\tau_{\text{n}} = -an^2 - cn\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad \sigma_n = -cn\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), n \ne 0. \quad (2.3)$$

Подчеркнем, что неравенство

$$Re\lambda_n \le 0 \quad (2.4)$$

выполнено при всех n, если a достаточно велико. Напротив, при $a = 0$ (или очень малом) обязательно найдется такое $n = n_0$, при котором выполнено неравенство $Re\lambda_{n_0} > 0$. Выберем теперь такое максимальное $a = a_{\text{кр}} > 0$, при котором неравенство (2.4) выполнено при всех n, но уже при $a < a_{\text{кр}}$ реализуется противоположный вариант, то есть когда можно указать такой номер k, что $Re\lambda_k > 0$. Из этих рассуждений получаем, что величину $a_{\text{кр}} > 0$ можно и необходимо выбрать следующим образом:

$$a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max_{n \ne 0} b_n, \quad b_n = \frac{-cn\sin(\pi n/4) + 1 - \cos(\pi n/4)}{n^2},$$

если такой положительный максимум существует. Будем рассматривать лишь натуральные номера n, так как $b_{-n} = b_n$. Рассмотрим восемь подпоследовательностей последовательности b_m

$$b_m = b_n(k),$$

где $m = 8(n-1) + k, k = 0, 1, 2, ...7, n = 1, 2, ...$

Пусть $a_k = \max\limits_{n \in N} b_n(k)$. Тогда $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}(c) = \max\{a_0, a_1, ..., a_7\}$. В результате громоздких, но не очень сложных вычислений удалось выделить 6 интервалов $I_j = (c_{j-1}, c_j), j = 1, \ldots, 6$, для которых справедливо равенство $a_{\text{кр}} = a_j$. Пусть ЛДО $A(a,c)$ при $a = a_j$ имеет СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_j = i\sigma_j, \quad \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j, \quad \sigma_j = -cj\cos\frac{\pi}{4}j + \sin\frac{\pi}{4}j.$$

Им отвечают СФ $e_0(x) = 1, e_j(x) = \exp(ijx), \overline{e}_j(x) = \exp(-ijx)$ соответственно. Остальные СЗ ЛДО $A(a,c) = A(a_j,c) = A(a_{\text{кр}},c)$ лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделенной неравенством

$$Re\lambda_p \le -\gamma < 0 \quad (p \ne 0, p \ne j), \quad (2.5)$$

где $\gamma = const > 0$. Такой критический случай будем называть критическим случаем первого типа (коразмерности 1), так как он реализуется за счет выбора одного параметра.

При $c = c_j > 0$ выполняется $a_j = a_{j+1}$, где $j = 1, 2, 3, 4, 5$. В этом случае ЛДО $A(a_j, c_j)$ имеет уже 5 СЗ, лежащих на мнимой оси. Для них справедливы равенства

$$\begin{gathered}\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_j = i\sigma_j,\ \ \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j,\ \ \sigma_j = -cj\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4),\\ \lambda_{j+1} = i\sigma_{j+1},\ \ \overline{\lambda}_{j+1} = -i\sigma_{j+1},\\ \sigma_{j+1} = -c(j+1)\cos(\pi(j+1)/4) + \sin(\pi(j+1)/4),\end{gathered} \tag{2.6}$$

а соответствующие СФ, отвечающие СЗ, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}e_0(x) = 1,\ \ e_j(x) = \exp(ijx),\ \ \overline{e}_j(x) = \exp(-ijx),\\ e_{j+1}(x) = \exp(i(j+1)x),\ \ \overline{e}_{j+1}(x) = \exp(-i(j+1)x).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Для остальных СЗ ЛДО $A(a, c)$, как и раньше, выполняется условие (2.5), где уже $p \neq 0, p \neq j, p \neq j+1$. Такой критический случай будем называть критическим случаем второго типа (коразмерности 2), так как он реализуется за счет выбора двух параметров. Сформулируем все вышесказанное, как в случае коразмерности 1, так и коразмерности 2, более детально в виде утверждений.

Лемма 2.2. *Пусть* $c \in (c_{j-1}, c_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *где*

$$\begin{gathered}c_0 = 0,\ c_1 = (\sqrt{2}-1)/2 \approx 0.207,\ c_2 = (11-\sqrt{2})/42 \approx 0.228,\ c_3 = (8-\sqrt{2})/24 \approx 0.274,\\ c_4 = (17\sqrt{2}-8)/40 \approx 0.401,\ \ c_5 = (163+123\sqrt{2})/210 \approx 1.605,\ \ c_6 = \infty.\end{gathered}$$

Тогда $a_{кр} = a_j$, *где*

$$\begin{gathered}a_1 = (2-\sqrt{2}-c\sqrt{2})/2,\ \ a_2 = (1-2c)/4,\ \ a_3 = (2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}c)/18,\\ a_4 = 1/8,\ \ a_5 = (5\sqrt{2}c+2+\sqrt{2})/50,\ \ a_6 = (1+6c)/36.\end{gathered}$$

Соответствующие СЗ и СФ ЛДО $A(a_j, c_j)$ *определяются по следующим формулам:*

$$\begin{gathered}e_j(x) = \exp(ijx),\ \ e_{-j}(x) = \exp(-ijx),\ \ \lambda_j = i\sigma_j,\\ \overline{\lambda}_j = -i\sigma_j,\ \ \sigma_j = -cj\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4).\end{gathered}$$

Доказательство леммы базируется на анализе неравенств $a_j(c) < a_{j+1}(c)$ с последующим выбором $a_{\text{Кр}}$. Подчеркнем, что справедливы неравенства

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5,$$

проверка которых достаточно стандартна.

Лемма 2.3. *Пусть* $c = c_p$ $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$. *Тогда* $a_{кр} = a_p = a_{p+1} = a_{p,p+1}$. *При этом оказалось, что*

$$a_{1,2} \approx 0.146,\ \ a_{2,3} \approx 0.136,\ \ a_{3,4} = 0.125,\ \ a_{4,5} = 0.125,\ \ a_{5,6} \approx 0.049.$$

Соответствующие СЗ и СФ ЛДО $A(a_{p,p+1}, c_p)$ *определяются по формулам (2.6), (2.7) при соответствующем выборе* $j = p$.

Ниже рассмотрим нелинейные краевые задачи в случаях, близких к отмеченным критическим.

3. Бифуркации пространственно неоднородных решений. Случай коразмерности 1

Пусть $c \in I_k$ и, следовательно, реализуется первый критический случай в задаче об устойчивости, т.е. $a_{\text{кр}} = a_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Положим $a = a_k(1 - \varepsilon\beta), \beta = \pm 1, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \ll 1$. Тогда ЛДО $A_k(\varepsilon) = A(a_k(1 - \varepsilon\beta), c)$ имеет уже СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k(\varepsilon) = \tau_k(\varepsilon) + i\sigma_k(\varepsilon), \quad \overline{\lambda}_k(\varepsilon) = \tau_k(\varepsilon) - i\sigma_k(\varepsilon), \quad \tau_k(\varepsilon) = \varepsilon\beta a_k k^2, \quad \sigma_k(\varepsilon) = \sigma_k.$$

Далее будем использовать обозначения A_k ($A_k = A_k(0)$). При $\beta = 1$ и возрастании ε два СЗ переходят в правую полуплоскость, а при $\beta = -1$ имеет место противоположный вариант. Возникшая ситуация близка к условиям теоремы Андронова–Хопфа, но всегда существует СЗ $\lambda_0 = 0$. Следовательно, поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений трехмерной системы дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии (см., например, [10, 11]). Поэтому далее для исследования бифуркаций в краевой задаче

$$\begin{gathered} u_t = A_k(\varepsilon)u + F_2(u) + F_3(u), \quad F_2(u) = b_1(u - w)w_x + b_2 w_x^2, \\ F_3(u) = b_3(u - w)w_x^2, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x) \tag{3.2}$$

используем метод инвариантных многообразий в сочетании с методом нормальных форм (НФ). Как уже сказано выше, динамику решений определяет трехмерное устойчивое инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$, а систему обыкновенных дифференциальных уравнений, принадлежащих $M_3(\varepsilon)$, называют НФ.

Для построения НФ на трехмерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова–Боголюбова. Подробное описание алгоритма построения НФ можно найти в работах [12–15]. Далее изложение будет следовать методике, изложенной в работах [7, 16, 17]. Решение краевой задачи (3.1), (3.2) будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^{3/2}), \tag{3.3}$$

где $s = \varepsilon t$, а достаточно гладкие по совокупности переменных функции u_1, u_2, u_3 обладают следующими свойствами:

1) они удовлетворяют краевым условиям (3.2);
2) по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_k$;
3) при фиксированных t и s функции $u_j(t, x, s) \in H_2^2$;
4) для функций $u_j(t, x, s)$ $(j = 2, 3)$ справедливы равенства

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} u_j(t, x)dxdt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi/\sigma_k} \int\limits_0^{2\pi} u_j(t, x) \exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t)dxdt = 0.$$

Этот класс функций обозначим через W_{σ_k}.

Замечание: *напомним достаточно хорошо известный факт. Рассмотрим неоднородную краевую задачу*

$$v_t = A_k v + g(t,x), \quad v(t, x+2\pi) = v(t,x),$$

где $k = \overline{1,6}$*, а функция* $g(t,x)$ *имеет по переменной* t *период* $2\pi/\sigma_k$*, а по* x -2π*. Тогда данная неоднородная краевая задача имеет* $2\pi/\sigma_k$ *-периодические решения по переменной* t*, если выполнены условия разрешимости*

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_k}\int\limits_0^{2\pi} g(t,x)dxdt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_k}\int\limits_0^{2\pi} g(t,x)\exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t)dxdt = 0.$$

Равенства

$$\frac{\sigma_k}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_k}\int\limits_0^{2\pi} v(t,x)dxdt = \frac{\sigma_k}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_k}\int\limits_0^{2\pi} v(t,x)\exp(\pm ikx \pm i\sigma_k t)dxdt = 0$$

выделяют одно подходящее решение.

Подстановка суммы (3.3) в краевую задачу (3.1), (3.2) ((1.1), (1.2)) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях ε приводит к серии линейных краевых задач для определения u_1, u_2, u_3, в которых u_t обозначает частную производную функции $u(t,x,s)$ по t. Так для u_1 получаем краевую задачу

$$u_{1t} = A_k u_1, \tag{3.4}$$

$$u_1(t, x+2\pi, s) = u_1(t,x,s). \tag{3.5}$$

Краевая задача (3.4), (3.5) имеет решение

$$u_1(t,x,s) = z\exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}\exp(-i\sigma_k t - ikx),$$

где $z = z(s), \overline{z} = \overline{z}(s)$. При этом функции $z = z(s), \overline{z} = \overline{z}(s), \psi(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (НФ)

$$\psi' = g_0(\psi, z, \overline{z}) + G_0(\psi, z, \overline{z}, \varepsilon), \quad z' = g_1(\psi, z, \overline{z}) + G_1(\psi, z, \overline{z}, \varepsilon), \tag{3.6}$$

где g_0, g_1, G_0, G_1 – достаточно гладкие функции переменных $\psi, z, \overline{z}, \varepsilon$. Здесь и ниже штрихом обозначена производная по s. Кроме того,

$$G_0(\psi, z, \overline{z}, 0) = G_1(\psi, z, \overline{z}, 0) = 0.$$

Краевая задача (3.1), (3.2) инвариантна относительно замен $u \to u + \psi$. Поэтому правые части системы дифференциальных уравнений (3.6) не зависят от ψ. Выпишем главную часть системы (3.6)

$$\psi' = g_0(z, \overline{z}), \quad z' = g_1(z, \overline{z}). \tag{3.7}$$

К системе (3.7) (а также (3.6)) можно добавить третье уравнение, комплексно сопряженное ко второму.

Ниже излагается алгоритм для определения правых частей системы (3.7). Формула (3.3) определяет вид решений, принадлежащих трехмерному инвариантному многообразию (центральному многообразию).

Для функции u_2 получаем неоднородную краевую задачу

$$\psi'(s) + u_{2t} = A_k u_2 + b_1(u_1 - w_1)w_{1x} + b_2 w_{1x}^2, \tag{3.8}$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \tag{3.9}$$

где штрихом обозначена производная по s, а также использовалось следующее равенство для полной производной по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j(t, x, \varepsilon t)) = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial s}\varepsilon.$$

Напомним, что $w_j(t, x, s) = u_j(t, x - (\pi/4), s), j = 1, 2, 3.$

Из условий ее разрешимости в классе периодических функций по переменной t определяется правая часть первого уравнения НФ (3.7). После этого функцию u_2 следует искать в виде

$$u_2(t, x, s) = \xi_k z^2 \exp(2ikx + 2i\sigma_k t) + \overline{\xi}_k \overline{z}^2 \exp(-2ikx - 2i\sigma_k t), \tag{3.10}$$

частное решение краевой задачи (3.8),(3.9). Именно такой ее вид обеспечивает выполнение четвертого свойства при описании функций, принадлежащих W_{σ_k}.

Комплексные постоянные $\xi_k, \overline{\xi}_k$ определяются методом неопределенных коэффициентов после подстановки равенства (3.10) в краевую задачу (3.8), (3.9). Индекс k пробегает значения от 1 до 6 в зависимости от выбора интервала для c (см. лемму 2.2). Так, например,

$$\xi_2 = \frac{1}{1 - 6c + 10c^2}\big[(b_1(1 - 3c) + b_2(1 - 4c)) + i(2b_2c - b_1c - b_2)\big],$$
$$\xi_4 = \frac{1}{1 + 4c^2}\big[(2b_1c - 2b_2) + i(4b_2c - b_1)\big],$$
$$\xi_6 = \frac{3}{90c^2 + 36c + 1}\big[(3b_2(1 + 12c) - b_1(1 + 9c)) + i(b_1c + b_2(1 + 6c))\big].$$

Для остальных ξ_k формулы более громоздки, но легко восстанавливаемые.

Приравнивая коэффициенты уже при $\varepsilon^{3/2}$, получаем краевую задачу для определения u_3

$$\begin{gathered} u_{3t} = A_k u_3 + b_3 w_{1x}^2(u_1 - w_1) + 2b_2 w_{1x} w_{2x} + b_1[(u_1 - w_1)w_{2x} + \\ + (u_2 - w_2)w_{1x}] - (z' \exp(i\sigma_k + ikx) + \overline{z}' \exp(-i\sigma_k - ikx)), \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s). \tag{3.12}$$

Из условий разрешимости краевой задачи (3.11),(3.12) определяем правую часть второго уравнения НФ (3.7).

В нашем случае приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\psi' = q_k|z|^2, \quad z' = \gamma_k z + (d_k + ig_k)z|z|^2. \tag{3.13}$$

Здесь $k = \overline{1,6}$, а коэффициенты $q_k, \gamma_k, d_k, g_k \in R$ и определяются в процессе реализации алгоритма. Все они зависят от номера интервала для выбора c.

Для дальнейшего изучения системы (3.13) положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)). \tag{3.14}$$

Замена (3.14) сводит НФ (3.13) к системе из трех действительных уравнений

$$\psi' = q_k\rho^2, \quad \varphi' = g_k\rho^2, \quad \rho' = \gamma_k\rho + d_k\rho^3. \tag{3.15}$$

Определяющую роль в системе (3.15) играет уравнение для амплитудной переменной ρ. Решение двух первых уравнений (3.15) восстанавливается после рассмотрения уравнения для ρ. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Третье уравнение системы (3.15) имеет нетривиальное СР S_0, которое представимо в виде*

$$\rho(s) = \rho_0 = \sqrt{-\frac{\gamma_k}{d_k}}, \quad k = \overline{1,6},$$

если $\gamma_k d_k < 0$. Оно асимптотически устойчиво, если $d_k < 0(\gamma_k > 0)$. Если $d_k > 0(\gamma_k < 0)$, то СР ρ_0 неустойчиво.

На каждом интервале I_k были найдены величины q_k, γ_k и d_k. Именно знак d_k (ляпуновской величины) играет важную роль в задаче об устойчивости СР $S_0(\rho = \rho_0)$. Знак d_k зависит от нескольких факторов: конечно, от номера k интервала I_k для коэффициента c, от величины $a_{\text{кр}} = a_k$ на каждом выбранном интервале, от коэффициентов b_1, b_2, b_3.

Для коэффициентов γ_k, d_k третьего уравнения НФ (3.15) укажем явные формулы. Так, при $k = 2, 4, 6$ эти формулы достаточно просты.

При $k = 2$ получаем, что

$$\gamma_2 = 4\beta a_2, \quad d_2 = 4\frac{3b_3 + (b_1 + 4b_2)(b_2(2c-1) - b_1 c)}{10c^2 - 6c + 1}.$$

При $k = 4$ оказалось, что

$$\gamma_4 = 16\beta a_4, \quad d_4 = 16\frac{2b_3 + 8b_2^2 + 2(4c-1)b_1 b_2 - 2cb_1^2}{4c^2 + 1}.$$

Наконец, при $k = 6$ получаем, что

$$\gamma_6 = 36\beta a_6, \quad d_6 = 108\frac{b_3 + b_1^2 c + b_1 b_2(1-6c) - 12b_2^2(1+6c)}{90c^2 + 18c + 1}.$$

Если $k = 1, 3, 5$ эти формулы несколько сложнее. Введем вспомогательные параметры, положив

$$\eta_1 = \frac{B_1 Q_1 + B_2 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \eta_2 = \frac{B_2 Q_1 - B_1 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}.$$

Ниже в формулах будут использованы эти обозначения.

При $k = 1$ находим, что $\gamma_1 = a_1\beta$, а

$$d_1 = 2b_1\eta_1 + \sqrt{2}b_1\eta_2 + 2\sqrt{2}b_2(\eta_1 + \eta_2) + b_3(4 - \sqrt{2})/2,$$

где в этом случае

$$B_1 = -b_1(2+\sqrt{2})/2, \quad B_2 = (\sqrt{2}b_1 + 2b_2)/2,$$
$$Q_1 = (3-2\sqrt{2}) + 2c(1-\sqrt{2}), \quad Q_2 = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}c.$$

При $k = 3$ уже $\gamma_3 = 9a_3\beta$, а

$$d_3 = -3b_1(2\eta_1 + \sqrt{2}\eta_2) + 18\sqrt{2}b_2(\eta_2 - \eta_1) + 9b_3(4+\sqrt{2})/2.$$

В этом случае

$$B_1 = 3b_1(2+\sqrt{2})/2, \quad B_2 = -3(\sqrt{2}b_1 + 6b_2)/2,$$
$$Q_1 = (1+\sqrt{2})[(1+\sqrt{2})^2 - 6c], \quad Q_2 = 3\sqrt{2}c + \sqrt{2} + 1.$$

Последний случай возникает, когда $k = 5$. Тогда $\gamma_5 = 25\beta a_5$,

$$d_5 = 10b_1\eta_1 - 5\sqrt{2}b_1\eta_2 - 50\sqrt{2}b_2(\eta_1 + \eta_2) + b_3(100 + 25\sqrt{2})/2.$$

$$B_1 = -5b_1(\sqrt{2}+2)/2, \quad B_2 = -5(\sqrt{2}b_1 - 10b_2)/2,$$
$$Q_1 = 10\sqrt{2}c + 2 + 2\sqrt{2}, \quad Q_2 = 10c + 5\sqrt{2}c - \sqrt{2}.$$

Следует отметить, анализируя по очереди выражения d_k, что они могут принимать любой знак. Случай $k = 6$ наиболее легкий в плане анализа и наглядности. Разберем более детально этот случай. Пусть c достаточно велико, откуда следует, что главную роль играет коэффициент b_3 и поэтому его знак и определяет знак d_6. Наоборот, если b_3 достаточно мал, то знак d_6 определяет второе слагаемое в правой части, числитель которого при всех $c > 1.6$ знакопеременная квадратичная форма. Аналогичные рассуждения можно провести и для d_2, d_4. Формулы для d_1, d_3, d_5 рекуррентные, и поэтому анализ их знака сложнее.

Из леммы 3.1, а также результатов работ [7, 12–17] вытекает утверждение, относящееся к краевой задаче (1.1), (1.2).

Теорема 3.1. *СР S_0 третьего уравнения НФ (3.15) (семейству соответствующих периодических решений $P_2(\varphi_0, \psi_0)$) соответствует двумерное интегральное многообразие, для решений на котором справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered} u(t,x,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon) + v(t,x,\varepsilon) + \psi_0, \quad \psi(t,\varepsilon) = (\delta_k\varepsilon + o(\varepsilon))t, \\ v(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_0[\exp(i(\sigma_k + \varepsilon\omega_k + o(\varepsilon))t + ikx + i\varphi_0) + к.с.] + \\ +\varepsilon\rho_0^2[\eta\exp(2i(\sigma_k + \varepsilon\omega_k + o(\varepsilon))t + 2ikx + 2i\varphi_0) + к.с.] + o(\varepsilon). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь $\varphi_0, \psi_0 \in R, \omega_k = g_k/\rho_0^2, \delta_k = q_k\rho_0^2$, где величина ρ_0 была определена из анализа третьего уравнения системы (3.15).

Решения двупараметрического семейства (3.16) наследуют устойчивость СР S_0 НФ (3.15).

4. Бифуркации пространственно неоднородных решений. Случай коразмерности 2

Напомним, что при $a_{\text{кр}} = a_k = a_{k+1}$ $(k = \overline{1,5})$ в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай, когда спектру линеаризованной краевой

задачи (2.1) принадлежат следующие СЗ, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm k} = \pm i\sigma_k, \quad \lambda_{\pm(k+1)} = \pm i\sigma_{k+1},$$

а остальные СЗ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Выделенным СЗ отвечают СФ

$$e_0(x) = 1, \quad e_{\pm k}(x) = \exp(\pm ikx), \quad e_{\pm(k+1)}(x) = \exp(\pm i(k+1)x).$$

Пусть выбраны c_k, $a_k (a_{k+1} = a_k \text{ при } c = c_k)$. Положим

$$a = a_k(1 - \beta_1\varepsilon), \quad c = c_k + \beta_2\varepsilon,$$

где ε – малый неотрицательный параметр, $\beta_1, \beta_2 \in R$. В результате получим следующую нелинейную краевую задачу:

$$u_t = A_{k,(k+1)}(\varepsilon)u + b_1(u - w)w_x + b_2w_x^2 + b_3w_x^2(u - w), \tag{4.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{4.2}$$

где $A_{k,(k+1)}(\varepsilon) = a_k(1 - \beta_1\varepsilon)u_{xx} - (c_k + \beta_2\varepsilon)w_x + u - w$, $w(t, x) = u(t, x - (\pi/4))$. Указанный ЛДО имеет СЗ

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k(\varepsilon) = i\sigma_k + \varepsilon(\tau_k + i\omega_k), \quad \lambda_{-k}(\varepsilon) = \overline{\lambda}_k(\varepsilon),$$
$$\lambda_{k+1}(\varepsilon) = i\sigma_{k+1} + \varepsilon(\tau_{k+1} + i\omega_{k+1}), \quad \lambda_{-(k+1)}(\varepsilon) = \overline{\lambda}_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\tau_k = a_k k^2\beta_1 - \beta_2 k \sin(\frac{\pi k}{4}), \quad \omega_k = \beta_2 k \cos(\frac{\pi k}{4}),$$
$$\tau_{k+1} = a_{k+1}(k+1)^2\beta_1 - \beta_2(k+1)\sin(\frac{\pi(k+1)}{4}), \quad \omega_{k+1} = \beta_2(k+1)\cos(\frac{\pi(k+1)}{4}).$$

Уместно отметить, что при выбранных вариантах возмущений a_k и c_k величины τ_k и τ_{k+1} могут принимать любое значение. Действительно, рассмотрим систему

$$a_k k^2\beta_1 - k\beta_2 \sin(\frac{\pi k}{4}) = \tau_k,$$
$$a_{k+1}(k+1)^2\beta_1 - (k+1)\beta_2 \sin(\frac{\pi(k+1)}{4}) = \tau_{k+1},$$

которую проинтерпретируем как систему для определения β_1 и β_2. Она имеет решение при любых τ_k, τ_{k+1}, так как определитель этой системы отличен от нуля при всех рассматриваемых значениях k.

При таком варианте выбора коэффициентов (таких СЗ) следует, что краевая задача (1.1), (1.2) имеет пятимерное инвариантное многообразие $M_5(\varepsilon)$. Динамику решений на нем определяет система из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений – НФ.

Решения на данном многообразии следует искать в виде аналогичном (3.3) (см. [7, 16, 17]), как и в предыдущем пункте, т.е. для случая коразмерности 1. Выражения для u_1 в нашем случае следует положить в виде

$$u_1 = z_k \exp(i\sigma_k t + ikx) + \overline{z}_k \exp(-i\sigma_k t - ikx) +$$
$$+ z_{k+1} \exp(i\sigma_{k+1} t + i(k+1)x) + \overline{z}_{k+1} \exp(-i\sigma_{k+1} t - i(k+1)x),$$

где $z_k = z_k(s), z_{k+1} = z_{k+1}(s)$. Как и ранее, соответствующие краевые задачи на следующих шагах будут аналогичны краевым задачам (3.8), (3.9) и (3.11), (3.12).

В результате из условий разрешимости полученных краевых задач в выбранном классе функций приходим к НФ

$$\begin{gathered}\psi' = d_1|z_k|^2 + d_2|z_{k+1}|^2,\\ z_k' = (\tau_k + i\omega_k)z_k - [d_3|z_k|^2 + d_4|z_{k+1}|^2]z_k,\\ z_{k+1}' = (\tau_{k+1} + i\omega_{k+1})z_{k+1} - [d_5|z_k|^2 + d_6|z_{k+1}|^2]z_{k+1}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Следует отметить, что явные формулы для коэффициентов НФ (4.3) достаточно громоздки и поэтому ниже некоторые из них приведены в рекуррентном виде. Ниже везде $k = \overline{1,6}$.

Для действительных коэффициентов d_1, d_2 справедливы формулы

$$d_1 = 2[-b_1 k \sin(\frac{\pi k}{4}) + b_2 k^2], \quad d_2 = 2[-b_1(k+1)\sin(\frac{\pi(k+1)}{4}) + b_2(k+1)^2].$$

Для упрощения записи формул для комплексных коэффициентов d_3, d_4, d_5, d_6 НФ (4.3) введем некоторые обозначения. Пусть

$$\begin{gathered}p_k = \exp(-i\frac{\pi k}{4}), \quad p_{k+1} = \exp(-i\frac{\pi(k+1)}{4}), \quad q_k = Re\, p_k,\\ q_{k+1} = Re\, p_{k+1}, \quad \tau_k = Im\, p_k, \quad \tau_{k+1} = Im\, p_{k+1}.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}d_3 = b_3 k^2(2 - p_k - p_k^2) + 4b_2 k^2 \eta_1 p_k + ib_1\eta_1 k(2p_k^2 - p_k - \overline{p}_k),\\ d_4 = 2b_3((k+1)(1-p_k) + 2p_k k(q_{k+1} - 1)) + 2b_2(k+1)p_k(\eta_4 + (2k+1)\eta_3) +\\ + ib_1((2k+1)(p_k p_{k+1} - p_k)\eta_3 - \eta_4(\overline{p}_{k+1} - 1)p_k +\\ + (p_k - \overline{p}_{k+1})(k+1)\eta_3 + (k+1)(p_{k+1} - p_k)\eta_4),\\ d_5 = 2b_3(k(1 - p_{k+1}) + 2(k+1)p_{k+1}(q_k - 1)) + 2b_2 k p_{k+1}((2k+1)\eta_3 - \overline{\eta}_4) +\\ + b_1 i((2k+1)(p_k p_{k+1} - p_{k+1})\eta_3 + \eta_4(\overline{p}_k - 1)p_{k+1} -\\ - k(p_{k+1} - \overline{p}_k)\eta_3 - \overline{\eta}_4(p_k - p_{k+1})),\\ d_6 = b_3(k+1)^2(2 - p_{k+1} - p_{k+1}^2) + 4b_2(k+1)^2 p_{k+1}^2 \eta_2 +\\ + ib_1(k+1)\eta_2(2p_{k+1}^2 - p_{k+1} - \overline{p}_{k+1}).\end{gathered}$$

Наконец,

$$\begin{gathered}\eta_1 = \frac{b_1 ik(p_k^2 - p_k) - b_2 k^2 p_k^2}{2i\sigma_k + a_k k^2 + c_k ikp_k - (1 - p_k)},\\ \eta_2 = \frac{b_1 i(k+1)(p_{k+1}^2 - p_{k+1}) - b_2(k+1)^2 p_{k+1}^2}{2i\sigma_{k+1} + a_{k+1}(k+1)^2 + c_{k+1}i(k+1)p_{k+1} - (1 - p_{k+1})},\\ \eta_3 = \frac{b_1 i((2k+1)p_k p_{k+1} - (k+1)p_{k+1} - kp_k) - 2b_2 k(k+1)p_k p_{k+1}}{i(\sigma_k + \sigma_{k+1}) + a_k(2k+1)^2 + ic_k(2k+1)p_k p_{k+1} - (1 - p_k p_{k+1})},\\ \eta_4 = \frac{b_1 i((k+1)p_{k+1} - p_k\overline{p}_{k+1} - kp_k) + 2b_2 k(k+1)p_k\overline{p}_{k+1}}{i(\sigma_k - \sigma_{k+1}) + a_k - ic_k p_k\overline{p}_{k+1} - (1 - p_k\overline{p}_{k+1})}.\end{gathered}$$

Для записи последних формул использованы относительно универсальные обозначения. При конкретных k эти формулы могут быть записаны в более простой форме. Следует также отметить, что, например, $p_k p_{k+1} = \sqrt{2}(1+i)/2$ при любом k.

В общем виде анализ даже знаков $Re\, d_3, Re\, d_4, Re\, d_5, Re\, d_6$ затруднен. Численный анализ соответствующих формул показывает, что коэффициенты НФ (4.3) достаточно произвольны по знаку и абсолютной величине. В частности, потому, что зависят от коэффициентов b_1, b_2, b_3. В свою очередь, эти коэффициенты зависят от угла между направляющей пучка ионов и нормалью. Они изменяются в достаточно широких пределах [4]. Тем не менее, подчеркнем, что во многих случаях $b_3 < 0$.

Для анализа НФ (4.3), как и ранее, удобнее перейти к полярным координатам, положив

$$z_k = \rho_k \exp(i\varphi_k), \quad z_{k+1} = \rho_{k+1} \exp(i\varphi_{k+1}), \tag{4.4}$$

и перейдем уже к следующей НФ:

$$\psi' = d_1\rho_k^2 + d_2\rho_{k+1}^2, \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}\rho_k' = \tau_k\rho_k + [Re\, d_3\rho_k^2 + Re\, d_4\rho_{k+1}^2]\rho_k, \\ \rho_{k+1}' = \tau_{k+1}\rho_{k+1} + [Re\, d_5\rho_k^2 + Re\, d_6\rho_{k+1}^2]\rho_{k+1},\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}\varphi_k' = \omega_k + [Im\ d_3\rho_k^2 + Im\ d_4\rho_{k+1}^2], \\ \varphi_{k+1}' = \omega_{k+1} + [Im\ d_5\rho_k^2 + Im\ d_6\rho_{k+1}^2].\end{gathered} \tag{4.7}$$

Центральную роль при исследовании играет замкнутая подсистема дифференциальных уравнений (4.6) для амплитудных переменных ρ_k, ρ_{k+1}. Пусть $\rho_{k,0}, \rho_{k+1,0}$ – координаты ненулевых СР. Возможны три вида таких СР

$$S_1 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} = 0;\ S_2 : \rho_{k,0} = 0, \rho_{k+1,0} > 0;\ S_3 : \rho_{k,0} > 0, \rho_{k+1,0} > 0.$$

Вопрос об их устойчивости, решается с использованием теоремы об устойчивости по первому приближению. В нашем случае данный вопрос сводится к исследованию спектра матрицы Якоби.

Используя результаты работ [7, 12–17], можно утверждать, что справедлива следующая теорема для краевой задачи (4.1), (4.2) (краевой задачи (1.1), (1.2) при соответствующем выборе коэффициентов).

Теорема 4.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому грубому ненулевому СР системы (4.6) (S_1, S_2, S_3) соответствует семейство решений краевой задачи (4.1), (4.2) следующего вида:*

$$u(t, x, \varepsilon) = ([d_1\rho_{k,0}^2 + d_2\rho_{k+1,0}^2]\varepsilon + o(\varepsilon))t + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{gathered}v(t, x, \varepsilon) = [2\rho_{k,0}\cos(\sigma_k + \varepsilon\Theta_k + o(\varepsilon))t + ikx + \gamma_k + 2\rho_{k+1,0}\cos(\sigma_{k+1} + \varepsilon\Theta_{k+1} + o(\varepsilon))t + \\ + i(k+1)x + \gamma_{k+1}]\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}), \gamma_k, \gamma_{k+1}, \psi_0, \Theta_k, \Theta_{k+1} \in R.\end{gathered}$$

Решения (4.8) наследуют устойчивость СР S_1, S_2, S_3.

Отметим, что СР S_1, S_2 соответствуют решения, которые фактически были указаны в разделе 3, то есть периодические решения второго рода. Напомним, что, как это принято, периодическим решением второго рода называют такое решение, производная по t которого будет уже обычной периодической функцией переменного t. Иной вариант решений реализуется, если рассмотреть СР S_3. В этом случае СР S_3 системы (4.6) соответствуют пространственно неоднородные решения, у которых есть две составляющие: линейная функция от t и квазипериодическая функция переменного t. Такие решения принято называть квазипериодическими решениями второго рода.

5. Некоторые комментарии

В работе рассмотрены бифуркационные задачи, возникающие при изучении нелокального уравнения эрозии, дополненного периодическими краевыми условиями. Подчеркнем, что рассматриваемое уравнение входит в класс функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся пространственным аргументом. В этот класс также входит уравнение

$$u_t + u = au_{xx} + K(1 + \gamma \cos u_h),$$

для которого также рассматривалась периодическая краевая задача, то есть

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x).$$

Здесь $a, K > 0, u_h = u(t, x + h)$. Эта краевая задача использовалась в качестве модели для описания динамики светового поля в световых резонаторах (см, например, [15]). Для нее изучалась задача о возбуждении колебаний при различных предположениях (см., например, [15, 18–21]).

Возвратимся к вопросам, которые были изучены в данной работе. В ней показано, что основной причиной возникновения волнового рельефа на поверхности мишени можно считать потерю устойчивости однородными СР. Аналогичный механизм возникновения волнового рельефа был отмечен в модели Бредли–Харпера [7]. Но в отличие от упомянутой модели, при рассмотрении нелокального уравнения эрозии может реализоваться вариант уже "двухмодовых" волновых структур.

Список литературы / References

[1] Рудый А. С., Бачурин В. И., "Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой", *Известия РАН, серия физическая*, **72**:5 (2008), 624–629; English transl.: Rudyi A. S., Bachurin V. I., "Spatially nonlocal model of surface erosion by ion bombardment", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Physics*, **72**:5 (2008), 586–591.

[2] Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В., "Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой", *Микроэлектроника*, **40**:2 (2011), 109–118; English transl.: Rudyi A. S., Kulikov A. N., Metlitskaya A. V., "Simulation of formation of nanostructures during sputtering of the surface by ion bombardment", *Russian Microelectronics*, **40**:2 (2011), 98–107.

[3] Рудый А. С., Куликов А. Н., Куликов Д. А., Метлицкая А. В., "Высокомодовые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии", *Микроэлектроника*, **43**:4 (2014), 282–288; English transl.: Rudyi A. S., Kulikov A. N., Kulikov D. A., Metlitskaya A. V., "High-mode wave reliefs in a spatially nonlocal erosion model", *Russian Microelectronics*, **43**:4 (2014), 277–283.

[4] Sigmund P., "A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment", *J. Mater. Sci*, **8** (1973), 1545–1553.

[5] Bradley R. M., Harper J. M. E., "Theory of ripple topography induced by ion bombardment", *J. Vac. Sci. Technol. A*, **6** (1988), 2390–2395.

[6] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н., "Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Ядерная физика и инжиниринг*, **1**:2 (2010), 151–158; [Kudriashov N. A., Ryabov P. N., StrichanovM. N., "Chislennoe modelirovanie formirovania nanostructur na poverchnosti ploskich podlozhek pri ionnoy bombardirovke", *Yadernaya fizika i inginiring*, **1**:2 (2010), 151–158, (in Russian).]

[7] Куликов А. Н., Куликов Д. А., "Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A. N, Kulikov D. A, "Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 800–814.

[8] Крейн С. Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва, 1967; [Krein S. G., *Lineinye differentsialnye uravnenia v banakhovom prostranstve*, Nauka, Moscow, 1967, (in Russian).]

[9] Соболевский П. Е., "Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве", *Труды Московского математического общества*, **10** (1961), 297–350; [Sobolevskiy P. E., "Ob uravneniach parabolicheskogo tipa v banachovom prostranstve", *Trudy Mosk. matem. ob-va*, **10** (1961), 297–350, (in Russian).]

[10] Куликов А. Н., "О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве", *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1976, 114–129; [Kulikov A. N., "O gladkikh invariantnykh mnogoobraziyach nelineynich operatorov v banachovom prostranstve", *Issledovanie po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, 1976, 114–129, (in Russian).]

[11] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркации рождения цикла и ее приложения*, Мир, Москва, 1980; English transl.: Marsden J. E., McCraken M., *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[12] Колесов А. Ю., Куликов А. Н., *Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений*, Ярославль, 2003; [Kolesov A. Yu., Kulikov A.N., *Invariantnye tori nelineynich evolutsionnych uravneniy*, Yaroslavl, 2003, (in Russian).]

[13] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, Москва, 2004; [Kolesov A. Yu., Rozov N. Ch., *Invariantnye tori nelineynich volnovych uravneniy*, Fizmatlit, Moscow, 2004, (in Russian).]

[14] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, Ярославль, 2006; [Glyzin S.D. Kolesov A.Yu., *Lokalniye metody analiza dinamicheskich sistem*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[15] Мищенко Е.Ф. и др., *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, Москва, 2005; [Mischenko E.F. et al., *Avtovolnovye protsessy v nelineynich sredach c diffuziey*, Fizmatlit, Moscow, 2005, (in Russian).]

[16] Куликов А. Н., Куликов Д. А., "Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера", *Дифференциальные уравнения*, **40**:9 (2010), 1290–1299; English transl.: Kulikov A. N, Kulikov D. A, "Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrodinger eqiation", *Differential equations*, **40**:9 (2010), 1299–1308.

[17] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С., "Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки", *Вестник Удмуртского университета*, **4** (2011), 86–99; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., Rudyi A. S., "Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment", *Vestnik Udmurtskogo universiteta*, **4** (2011), 86–99, (in Russian).]

[18] Кащенко С. А., "Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных оптических системах", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **31**:3 (1991), 467–473; [Kashenko S.A., "Asimptotica prostranstvenno-neodnorodnych structur v kogerentnych opticheskich sistemach", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **31**:3 (1991), 467–473, (in Russian).]

[19] Белан Е. П., "Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом", *Динамические системы*, **156** (2000), 160–167; [Belan E. P., "Vrachayuchiesya volny v parabolicheskoy zadache s preobrazovannym argumentom", *Dinamicheskie sistemy*, **156** (2000), 160–167, (in Russian).]

[20] Разгулин С. А., "Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **33**:1 (1993), 68–80; [Razgulin S. A., "Ob avtokolebaniyach v nelineynich parabolicheskoy zadache s preobrazovannym argumentom", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **33**:1 (1993), 68–80, (in Russian).]

[21] Кащенко И. С., Кащенко С. А., "Быстро осциллирующие пространственно-неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах", *Доклады Академии Наук*, **435**:1 (2010), 14–17; English transl.: Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., "Rapidly oscillating spatially inhomogeneous structures in coherent nonlinear optical systems", *Doklady Mathematics*, **82**:3 (2010), 850–853.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-665-681

Single-Mode and Dual-Mode Nongomogeneous Dissipative Structures in the Nonlocal Model of Erosion

Kovaleva A. M., Kulikov D.A.

Received May 15, 2015

We consider a periodic boundary-value problem for a nonlinear equation with the deviating spatial argument in the case when the deviation is small. This equation is called a spatially nonlocal erosion equation. It describes the formation of undulating surface relief under the influence of ion bombardment and can be interpreted as a development of the well-known Bradley-Harper model. It is shown that the nonhomogeneous surface relief can occur when the stability of the homogeneous states of equilibrium changes. In this boundary value problem the loss of stability can occur at the higher modes and a number of such modes. The mode number depends on many factors. For example, it depends on the angle of incidence. It is also shown that the nonlinear boundary value problem can be included into the class of abstract parabolic equations. Solvability of this problem was studied in the works by P.E. Sobolevsky, and this method assumes to use the analytical theory of semigroups of bounded linear operators. In order to solve the occurring bifurcation problems there were used the investigation methods of dynamical systems with an infinite-dimensional phase space (a space of initial conditions) such as: the method of integral manifolds, the method of Poincare–Dulac normal forms and asymptotic methods of analysis. Both possible in the given situation problems were studied: in codimension one and in codimension two. In particular, asymptotic formulas were obtained for solutions which describe nonhomogeneous undulating surface relief. The question about the stability of these solutions was studied. And the analysis of normal form was given. Also the asymptotic formulas for the nonhomogeneous undulating solutions were obtained. In conclusion some possible interpretations of the obtained results are indicated.

Keywords: nonlocal model of erosion, periodic value boundary problem, stability, bifurcations

For citation: Kovaleva A. M., Kulikov D. A., "Single-Mode and Dual-Mode Nongomogeneous Dissipative Structures in the Nonlocal Model of Erosion", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 665–681.

On the authors:
Kovaleva Anastasia Michailovna, orcid.org/0000-0002-9863-0929, post-graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: nyama55@yandex.ru

Kulikov Dmitri Anatolievich, orcid.org/0000-0002-6307-0941, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation (contract MK-5932.2015.1) and the grant RFFI (contract 14-01-31159 mol_a)

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, №5 (2015), с. 682–710
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 682–710

©Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-682-710

УДК 517.9

Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 4 сентября 2015

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым множителем при старшей производной. Исследуется вопрос об асимптотике всех собственных значений первой краевой задачи (задачи Дирихле) при стремлении этого множителя к нулю. Показано, что определяющую роль играет поведение коэффициентов уравнения лишь в малых окрестностях точек поворота, то есть таких точек, в которых обращается в нуль коэффициент при первой производной. В качестве основного результата служит теорема о предельных значениях всех собственных чисел первой краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 682–710.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Систематическое изучение дифференциальных уравнений с малым множителем при старшей производной началось с работы А.Н. Тихонова [1]. К настоящему времени хорошо изучен вопрос об асимптотике решений начальной задачи Коши для достаточно широкого класса таких уравнений. С основными результатами на эту тему можно ознакомиться в работах [2] и [3]. Одними из первых работ, посвященных качественным вопросам в теории рассматриваемых уравнений, явились статьи А.А. Дородницына [4], а также Е.Ф. Мищенко и Л.С. Понтрягина [5]. Дальнейшее развитие идей этих работ нашло отражение в [6].

В статьях [7–9] изучалась асимптотика по некоторому параметру собственных чисел первой краевой задачи для некоторых классов дифференциальных операторов, порядок которых понижался при нулевом значении этого параметра. При этом предполагалось, что у предельного оператора существуют собственные числа соответствующей первой краевой задачи, причем устанавливается, что именно к ним происходит стремление собственных чисел исходного дифференциального оператора при стремлении параметра к нулю. В настоящей работе вычисляются, с использованием качественных методов, пределы всех собственных значений первой краевой задачи для уравнений, указанных в названии. Существенным образом используются хорошо известные (см., например, [10–13]) результаты о разделении нулей решений уравнений второго порядка и теоремы сравнения осцилляционных свойств решений различных уравнений. Предел, к которому стремится первое собственное значение этой краевой задачи, определен в [9]. Трудности, которые здесь возникают, связаны с тем, что нет предельного оператора и, следовательно, методика работ [7, 8] не применима. Настоящая работа является расширенным вариантом работы автора [10].

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

На некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматривается первая краевая задача для дифференциального уравнения

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x$$

с малым положительным параметром ε. Предполагается, что функция $q(t)$ непрерывна, а $p(t)$– непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и, что является самым важным, функция $p(t)$ имеет конечное число простых нулей $t_1, \dots, t_n$, принадлежащих интервалу (α, β). Хорошо известно (см. например [13]), что поставленная задача имеет счетное количество собственных чисел, которые вещественны и просты. Обозначим их через $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$. Условимся считать, что эти числа занумерованы в порядке убывания. Это всегда можно проделать, поскольку $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$ ограничены в совокупности сверху, и, кроме того, ни одна конечная точка числовой оси не может являться точкой сгущения последовательности рассматриваемых чисел. Каждому $\lambda_j(\varepsilon)$ соответствует решение $x_j(t, \varepsilon)$ дифференциального уравнения

$$\varepsilon\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon)]x = 0.$$

Функция $x_j(t,\varepsilon)$ обращается в нуль в концах отрезка $[\alpha,\beta]$ и имеет ровно $j-1$ нулей на интервале (α,β).

Введем в рассмотрение величины

$$\nu_{ik} = \left[q(t_k) - \frac{|\dot p(t_k)| + \dot p(t_k)}{2}\right] - |\dot p(t_k)|i, \quad (i = 0,1,\dots; k = 1,\dots,n). \tag{1}$$

Расположим числа ν_{ik} в ряд в порядке убывания. Определим затем числа λ_j, которые будем считать равными соответственно j-ым членам этого ряда.

Главным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j \quad (j = 1,2,\dots).$$

Доказательство Теоремы 1 будет построено на основе анализа осцилляционных свойств решений дифференциального уравнения

$$\varepsilon\ddot x + p(t)\dot x + q(t)x = 0. \tag{2}$$

Сначала определим наибольшее количество нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на отрезке $[\alpha,\beta]$ при малых значениях параметра ε, причем сначала рассмотрим самый простой случай.

Лемма 1. *Пусть на интервале (α,β) функция $p(t)$ имеет лишь один нуль в точке t_1. Пусть, далее, для некоторого целого положительного k выполнено неравенство*

$$k - 1 < \frac{\nu_{01}}{|\dot p(t_1)|} < k. \tag{3}$$

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ найдется решение $x_0(t,\varepsilon)$ уравнения (2), имеющее ровно $k+1$ нулей на отрезке $[\alpha,\beta]$. Любое другое решение того же уравнения имеет число нулей меньшее или равное $k+1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t_1 = 0$. С помощью преобразования

$$x = y\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\int_\alpha^t p(\tau)d\tau\right] \tag{4}$$

и последующего

$$t = \sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}s$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\ddot y + \left[\frac{2q(0) - \dot p(0)}{2|\dot p(0)|} - \frac{s^2}{4} + \omega(s,\varepsilon)\right]y = 0. \tag{5}$$

В (5) непрерывная функция $\omega(s,\varepsilon)$ стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно на каждом конечном промежутке изменения s. В результате новой замены

$$y = u\exp\left[-\frac{s^2}{4}\right]$$

придем к уравнению

$$\ddot{u} - s\dot{u} + \left[\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(0)|} + \omega(s,\varepsilon)\right] u = 0. \tag{6}$$

С уравнением (6) тесно связано уравнение Вебера [14]

$$\ddot{u} - s\dot{u} - au = 0,$$

где

$$a = -\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(0)|}. \tag{7}$$

Линейно независимыми решениями последнего уравнения являются функции

$$u_r(s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(a+2)\dots(a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i} \tag{8}$$

и

$$u(s) = s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a+1)\dots(a+2i-1)}{(2i+1)!} s^{2i+1}.$$

Исследуем осцилляционные свойства этих функций. Мы покажем, что функция $u_r(s)$ имеет ровно $k+1$ нулей при нечетном k, фигурирующем в неравенствах (3), а в случае четного k функция $u(s)$ будет иметь ровно $k+1$ нулей.

Сначала установим, что наибольшее количество нулей функций $u_r(s)$ и $u(s)$, с одной стороны, не превосходит числа $k+1$, а с другой стороны, оно не меньше, чем $k-1$. Для этого введем в рассмотрение функции

$$u_i(s) = (-1)^{k-2+i} \exp\left[\frac{s^2}{2}\right] \frac{d^{k-2+i}}{ds^{k-2+i}} \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right], \quad i = 1,2,3.$$

Непосредственно проверяется, что введенные таким образом функции являются решениями дифференциальных уравнений

$$\ddot{u} - s\dot{u} - (k-2+i)u = 0, \quad i = 1,2,3$$

соответственно. Легко показать, рассуждая, например, по индукции, что для каждого целого положительного k функция $u_i(s)$ обращается в ноль ровно $k-2+i$ раз на интервале $(-\infty,\infty)$. Отсюда и из теоремы сравнения (см., например, [11–13]) вытекает, что при условии (3) в случае нечетного k число нулей функции $u_r(s)$ не больше, чем $k+1$, и не меньше, чем $k-1$. При этом количество нулей функции $u(s)$ не превосходит k. Если же k четно, то функция $u(s)$ обращается в нуль не более $k+1$ и не менее $k-1$ раз, а число нулей функции $u_r(s)$ меньше или равно k.

Уточним теперь полученный результат. А именно, докажем, что количество нулей функции $u_r(s)$ в точности равно $k+1$, если k нечетно. В случае четного k столько же нулей имеет на интервале $(-\infty,\infty)$ функция $u(s)$. Разберем только случай, когда в условии (3) k нечетно. В случае четного k в том же условии доказательство проводится аналогично, и поэтому мы его опустим.

Предположим противное. Тогда, очевидно, решение (8), которое является четной функцией, имеет необходимо $k-1$ нулей. Приняв во внимание тот факт, что $u_r(0) = 1$, легко получить равенство

$$\lim_{s\to\infty} u_r(s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } k-1 \text{ не кратно } 4, \\ \infty, & \text{если } \frac{k-1}{4} = p, \quad p = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{9}$$

Если, однако, мы воспользуемся формулой (8), записанной в виде

$$u_r(s) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{a(a+2)\dots(a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a(a+2)\dots(a+2i-2)}{(2i)!} s^{2i},$$

где под последним знаком суммирования все слагаемые положительны, когда $k-1$ не кратно четырем, и отрицательны – в противном случае, то получим равенство

$$\lim_{s\to\infty} u_r(s) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{k-1}{4} \neq p, \quad p = 0, 1, \dots, \\ -\infty, & \text{если} \frac{k-1}{4} = p, \quad p = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Сравнивая последнее равенство с соотношением (9), приходим к противоречию.

Таким образом, мы доказали, что при нечетном k функция $u_r(s)$ обращается в нуль ровно $k+1$ раз на интервале $(-\infty, \infty)$. Ясно, что количество нулей функции $u(s)$ при этом равно k.

Фиксируем так $s_0 > 0$, чтобы на интервале $(-s_0, s_0)$ содержались все нули функций $u_r(s)$ и $u(s)$. Будем, далее, рассматривать только те значения ε, при которых

$$\left[-\left(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} s_0, \left(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} s_0 \right] \subset [\alpha, \beta].$$

Тогда на отрезке $[-s_0, s_0]$ определены коэффициенты уравнения (6), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (1.9) при стремлении ε к нулю. Отсюда следует существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ наибольшее число нулей решений уравнения (6), а значит, и уравнения (2), не меньше, чем $k+1$. Поэтому ясно, что для доказательства леммы необходимо показать следующее: у уравнения (5) не может быть решений с числом нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ большим, чем $k+1$, когда ε достаточно мало.

Введем сначала несколько обозначений. Через $u_1(s, \varepsilon)$ и $u_2(s, \varepsilon)$ обозначим решения дифференциального уравнения (6), начальные условия которых, заданные при $s = 0$, совпадают соответственно с начальными условиями решений $u_r(s)$ и $u_H(s)$ уравнения (1.9). Введем затем в рассмотрение отрезки

$$\Delta_1(\varepsilon) = \left[\alpha \left(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, s_1(\varepsilon) \right] \quad \text{и} \quad \Delta_2(\varepsilon) = \left[s_2(\varepsilon), \beta \left(\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Здесь через $s_i(\varepsilon) \in [-s_0, s_0]$ $(i = 1, 2)$ обозначены числа, являющиеся соответственно левым крайним и правым крайним нулем функции $u_1(s, \varepsilon)$ при четном k, фигурирующем в (3), и функции $u_2(s, \varepsilon)$ – при нечетном. Отметим, что при малых ε нули у функций $u_1(s, \varepsilon)$ и $u_2(s, \varepsilon)$ существуют, и, более того, количество нулей у каждой из рассматриваемых функций на отрезке $[-s_0, s_0]$ равно соответственно числу нулей функций $u_r(s)$ и $u_H(s)$. Это следует из равномерной сходимости $u_1(s, \varepsilon)$ к $u_r(s)$, а

$u_2(s,\varepsilon)$ к $u_H(s)$ на каждом конечном промежутке при стремлении ε к нулю. Отсюда же вытекает справедливость предельных равенств

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} s_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} s_2(\varepsilon) = s_1, \tag{10}$$

где $s_1 > 0$ является правым крайним нулем функции $u_r(s)$, если k четно, и функции $u_H(s)$, если k нечетно.

Покажем, что решения дифференциального уравнения (5) не осциллируют при достаточно малых ε на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$. Отсюда и из теоремы о разделении нулей (см., например, [11–13]) будет следовать, что решения рассматриваемого уравнения имеют не более $k+1$ нулей на отрезке $[\alpha,\beta]$ при тех же значениях ε. Как и в [9], воспользуемся для этого вариантом критерия неосцилляции Валле–Пуссена [15].

Установим существование функции $z_0(s,\varepsilon)$, обладающей следующими двумя свойствами.

Во-первых, она непрерывна на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда $k \geq 2$, и непрерывна лишь на полуинтервалах $[\alpha(\varepsilon|\dot p(0)|^{-1})^{-\frac12}, s_1(\varepsilon))$ и $(s_2(\varepsilon), \beta(\varepsilon|\dot p(0)|^{-1})^{-\frac12}]$ при $k=1$, но в этом случае выполнены предельные равенства

$$\lim_{s\to s_1(\varepsilon)-0} z_0(s,\varepsilon) = \infty$$

и соответственно

$$\lim_{s\to s_2(\varepsilon)+0} z_0(s,\varepsilon) = -\infty.$$

Очевидно, что при $k=1$ имеют место соотношения

$$s_1(\varepsilon) \equiv s_2(\varepsilon) \equiv 0, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),$$

где ε_0 достаточно мало.

Во-вторых, функция $z_0(s,\varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$D^* z_0(s,\varepsilon) \geq z_0^2(s,\varepsilon) + \frac{2q(s,\varepsilon) - \dot p(s,\varepsilon)}{2|\dot p(0)|} - \frac{p^2(s,\varepsilon)}{4\varepsilon|\dot p(0)|}. \tag{11}$$

В (11) положено

$$\begin{aligned} q(s,\varepsilon) &= q(\sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}s),\\ p(s,\varepsilon) &= p(\sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}s),\\ \dot p(s,\varepsilon) &= \dot p(\sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}s), \end{aligned}$$

а $D^* z_0(s,\varepsilon)$ – правое верхнее производное число функции $z_0(s,\varepsilon)$.

Сначала введем одну вспомогательную функцию, которая потребуется нам при построении функции $z_0(s,\varepsilon)$.

Положим

$$u(b,s) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2)\ldots(b+2i-2)}{(2i)!} s^{2i}, & k \text{ четно},\\ s + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(b+1)\ldots(b+2i-1)}{(2i+1)!} s^{2i+1}, & k \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{12}$$

В (12) параметр b удовлетворяет неравенствам

$$-k < b < -k + \delta_0, \tag{13}$$

где положительная постоянная $\delta_0 < 1$, вообще говоря, достаточно мала. Ниже будет указано, насколько малой ее следует выбрать. Заметим, что функция (12) является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{u} - s\dot{u} - bu = 0.$$

Тем самым, при условии (13) она имеет ровно k нулей на интервале $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $s(b)$ правый крайний нуль функции $u(b, s)$. Отметим, что

$$s(b) \le s_1,$$

если только выполнено неравенство

$$\delta_0 \le k + a.$$

Этот факт следует из определения чисел $s(b)$ и s_1, а также из теоремы сравнения (см., например, [11–13]). Далее, так как левее точки $-s(b)$ и правее точки $s(b)$ функция (12) не меняет знака, то для значений s, принадлежащих интервалам $(-\infty, -s(b))$ и $(s(b), \infty)$, определена непрерывная нечетная функция

$$v(b, s) = \frac{s}{2} - \frac{\dot{u}(b, s)}{u(b, s)}, \tag{14}$$

которая, очевидно, является решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{v} = v^2 + \frac{1}{2} - b - \frac{s^2}{4}. \tag{15}$$

Ниже будет установлено существование такого $\delta_1 > 0$, что при

$$-k < b \le -k + \delta_1$$

функция $v(b, s)$ будет обращаться в нуль в некоторой точке $\overline{s}(b) \in (s(b), \infty)$, причем непрерывная функция $\overline{s}(b)$ параметра b будет удовлетворять предельному равенству

$$\lim_{b \to -k+0} \overline{s}(b) = \infty. \tag{16}$$

Если δ_0 в (13) определить так, чтобы имело место неравенство

$$\delta_0 \le \min(\delta_1, k + a),$$

то построить функцию $z_0(s, \varepsilon)$ можно без труда.

Действительно, пусть выполняется (16). Функцию $z_0(s, \varepsilon)$ начнем строить следующим образом. Предварительно введем несколько обозначений. Выберем такое положительное σ_0, чтобы отрезок $[-\sigma_0, \sigma_0]$ принадлежал интервалу (α, β) и чтобы

$$m_0 = \min |\dot{p}(t)| > 0, \quad -\sigma_0 \le t \le \sigma_0.$$

Затем фиксируем некоторое положительное число l_0 так, чтобы имело место неравенство

$$l_0 > \max[4q(t) - 2\dot{p}(t)], \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Далее, положим

$$r_0 = m_0^{-1}\sqrt{l_0|\dot{p}(0)|}.$$

Из предельного равенства (10) вытекает существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняются соотношения ($k \geq 2$)

$$s(b) < s_1(\varepsilon) \leq s_2,$$

$$-s(b) < s_2(\varepsilon) \geq -s_2,$$

где $s_2 > 0$ не зависит от ε. Отметим, что при $k = 1$

$$s(b) = s_i(\varepsilon) \equiv 0, \quad i = 1, 2.$$

Используя (16), можно сделать вывод о существовании такого b, удовлетворяющего условию (13), и такого $r > \max(r_0, s_2)$, что $\overline{s}(b) = r \in (s_1(\varepsilon), \infty)$. Функцию $z_0(s, \varepsilon)$ будем считать теперь равной $v(b, s)$ при $|s| \leq r$ и $s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$, а для остальных значений s из $\Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$ определим ее равной тождественно нулю.

Покажем, что построенная так функция $z_0(s, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (11).

При $|s| \leq r$ ($s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$) неравенство (11) будет иметь место, если

$$a - b \geq \max \omega(s, \varepsilon),$$

т.е. при достаточно малых значениях ε. При $s \in \Delta_1(\varepsilon) \bigcup \Delta_2(\varepsilon)$ и

$$r \leq s \leq \sigma_0\sqrt{\varepsilon^{-1}|\dot{p}(0)|}$$

неравенство (11) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$|p(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}s| \geq \sqrt{l_0\varepsilon},$$

которое, используя формулу Лагранжа, запишем в виде

$$|\dot{p}(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\theta s)\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}s| \geq \sqrt{l_0\varepsilon},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Последнее неравенство является следствием другого неравенства

$$m_0 r \geq \sqrt{l_0|\dot{p}(0)|^{-1}},$$

которое верно в силу выбора чисел r_0 и r. При остальных значениях s, принадлежащих отрезкам $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, дифференциальное неравенство будет выполнено, если

$$\varepsilon l_0 \leq \min p^2(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad t\overline{\in}(-\sigma_0, \sigma_0),$$

т.е. при достаточно малых ε.

Таким образом, нам осталось обосновать лишь предельное равенство (16). Соответствующее доказательство разобьем на четыре этапа, причем ограничимся случаем четного k, так как при k нечетном рассуждения аналогичны.

2. Обоснование предельного свойства функции $\overline{s}(b)$

1. Докажем сначала один общий факт, касающийся свойств решений дифференциального уравнения (15). Именно, покажем, что непрерывная на некотором интервале функция, являющаяся решением уравнения (15), не может иметь на этом интервале более двух нулей с учетом их кратностей. Поскольку в дальнейшем мы будем работать только с решением $v(b,s)$, то применительно к нему и обоснуем это утверждение.

Предположим противное, т.е. будем считать, что существует такое значение параметра b, удовлетворяющее условию (13), при котором непрерывная на некотором интервале функция $v(b,s)$ обращается в нуль не менее, чем в трех точках этого интервала. Пусть для определенности первые три нуля, о которых идет речь, находятся в точках

$$s^1 \le s^2 \le s^3. \tag{17}$$

Непосредственно из уравнения (15) видно, что кратность любого нуля, не совпадающего с началом координат, не может превышать двух, так как для второй производной функции $v(b,s)$ выполняется равенство

$$\ddot{v}(b,s^i) = -\frac{1}{2}s^i, \quad i = 1,2,3. \tag{18}$$

Из (18) следует, что в неравенствах (17) хотя бы в одном месте стоит знак строгого неравенства.

Обозначим через $s_j(b)$ $(j = 1,\dots,\frac{k}{2})$ все положительные нули функции $u(b,s)$, которые будем считать занумерованными в порядке возрастания. Равенство (14) определяет функцию $v(b,s)$ для неотрицательных значений s не только на интервале $(s(b),\infty)$, но и на интервалах $(s_j(b), s_{j+1}(b))$ $(j = 1,\dots,\frac{k}{2}-1)$ и полуинтервале $[0, s_1(b))$. Достаточно доказать сформулированное выше утверждение для этих интервалов. Обоснование того же факта для остальных интервалов, на которых функция $v(b,s)$ непрерывна, будет следовать из нечетности рассматриваемой функции.

Из определения чисел $s_j(b)$ и из формулы (14) вытекают предельные равенства

$$\lim_{s\to s_j(b)-0} v(b,s) = \infty, \tag{19}$$

$$\lim_{s\to s_j(b)+0} v(b,s) = -\infty. \tag{20}$$

Равенство (20) позволяет нам без потери общности считать, что выполняется неравенство

$$\dot{v}(b,s^1) \ge 1.$$

Если же $s^1 \in [0, s_1(b))$, то ясно, что $s^1 = 0$, причем s^1 является простым нулем функции $v(b,s)$. Используя эти замечания и соотношение (18), убеждаемся в справедливости неравенства

$$s^2 < s^3. \tag{21}$$

На основании формулы (15) и, вновь учитывая (18) и (20), заключаем теперь, что

$$\frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^1)^2 \ge 0,$$

$$\frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^2)^2 \le 0,$$
$$\frac{1}{2} - b - \frac{1}{4}(s^3)^2 \ge 0.$$

Однако, в силу (21), последние два неравенства одновременно выполняться не могут. Мы пришли к противоречию. Тем самым показано, что на промежутках, на которых $v(b,s)$ непрерывна, не может существовать у нее более двух нулей с учетом их кратностей. Заметим, что полученный вывод справедлив и в случае, когда $b = -k$.

В заключение этого этапа отметим, что в силу предельного равенства (19) на интервалах $(s_j(b), s_{j+1}(b))$ $(j = 1, \dots, \frac{k}{2} - 1)$ у функции $v(b,s)$ находится лишь один простой нуль. На полуинтервале $[0, s_1(b))$ эта функция единственный раз обращается в нуль в точке $s = 0$, причем этот нуль также простой.

2. Здесь будут изучены некоторые специальные свойства функции $v(b,s)$ при значении параметра b, равном $-k$.

Как было показано выше, четная функция $u(-k,s)$ обращается в нуль в k точках интервала $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $s_j(-k)$ $(j = 1, \dots, \frac{k}{2})$ положительные нули этой функции, причем будем считать, что нумерация происходит в порядке возрастания. Формула (14) определяет непрерывную функцию $v(-k,s)$ на промежутках $[0, s_1(-k))$, $(s_1(-k), s_2(-k))$, $\dots$, $(s_{\frac{k}{2}-1}(-k), s_{\frac{k}{2}}(-k))$, $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$. Основным содержанием этого этапа является доказательство того факта, что функция $v(-k,s)$ обращается в нуль в некоторой точке $\underline{s}(-k)$, принадлежащей интервалу $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$, причем выполнено неравенство

$$\dot{v}(-k, \underline{s}(-k)) > 0. \tag{22}$$

В дальнейшем нам будет удобно работать с формулой

$$u(b,s)v(b,s) = s\left[\frac{1}{2} - b + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!}\left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1}\right)s^{2i}\right], \tag{23}$$

которая при $b = -k$ принимает более простой вид

$$u(-k,s)v(-k,s) = s\left[\frac{1}{2} + k + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{-k\dots(-k+2i-2)}{(2i)!}\left(\frac{1+k}{4i+2}\right)s^{2i}\right]. \tag{24}$$

Заметим теперь, что все нули многочлена степени $k+1$, стоящего в правой части формулы (24), совпадают с нулями функции $v(-k,s)$, причем других нулей у последней функции нет. Поскольку, как отмечалось выше, на каждом из промежутков $[0, s_1(-k))$, $[s_j(-k), s_{j+1}(-k))$ $(j = 1, \dots, \frac{k}{2} - 1)$ функция $v(-k,s)$ имеет ровно один простой нуль, то для доказательства существования нуля на интервале $(s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$ необходимо показать следующее: многочлен (24) имеет точно $\frac{k}{2}$ положительных нулей. Очевидно, что больше, чем $\frac{k}{2}$, их быть не может. Предположим противное, т.е. будем считать, что количество положительных нулей этого многочлена меньше, чем $\frac{k}{2}$. Тогда число их в точности равно $\frac{k}{2} - 1$. В точке $s = 0$ многочлен равен нулю, а его производная при этом положительна. Из сказанного следует предельное равенство

$$\lim_{s\to\infty} u(-k,s)v(-k,s) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} \ne p, \quad (p = 1, 2, \dots), \\ -\infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} = p, \quad (p = 1, 2, \dots). \end{cases} \tag{25}$$

С другой стороны, если воспользоваться формулой (24), то получим вместо равенства (25) не совпадающее с ним равенство

$$\lim_{s\to\infty} u(-k,s)v(-k,s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} \neq p, \quad (p=1,2,\dots), \\ \infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} = p, \quad (p=1,2,\dots). \end{cases}$$

Тем самым получено противоречие. Неравенство (22) для нуля $\underline{s}(-k) \in (s_{\frac{k}{2}}(-k), \infty)$ функции $v(-k,s)$, существование которого мы доказали, выполняется очевидным образом.

3. Покажем здесь, используя предыдущий результат, что существует такое $\delta_1 \in (0,1)$, при котором для всех $b \in (-k, -k+\delta_1)$ функция $v(b,s)$ обращается в нуль в некоторой точке $\underline{s}(b) \in (s(b), \infty)$. Покажем также, что при этом выполняется неравенство

$$\dot{v}(b, \underline{s}(b)) > 0. \tag{26}$$

Введя новый параметр

$$\delta = k + b,$$

перепишем формулу (23) в более удобном для нас виде

$$\begin{aligned} u(b,s)v(b,s) = \quad & s\left[\frac{1}{2} + k + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{-k(-k+2)\dots(-k+2i-2)}{(2i)!}\left(\frac{1}{2} - \frac{2i-k}{2i+1}\right) s^{2i} + f(s,\delta)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

где непрерывная функция $f(s,\delta)$ стремится к нулю при стремлении δ к нулю равномерно на каждом конечном промежутке изменения s. Фиксируем затем такое $s_0 > 0$, чтобы $\underline{s}(-k) \in (0, s_0)$. На отрезке $[0, s_0]$ правая часть формулы (27) равномерно сходится к (24). Отсюда следует, что при малых δ у функции $v(b,s)$ существует нуль $\underline{s}(b) \in (s(b), \infty)$, причем в силу (22) имеет место неравенство (26).

Отметим, что для непрерывной функции $\underline{s}(b)$ параметра $b \in (-k, -k+\delta_1)$ выполняется неравенство

$$\underline{s}(b) < \sqrt{2+4k}.$$

Этот вывод можно сделать на основании (15) и с помощью неравенства (26).

4. Покажем теперь, что при достаточной близости параметра b к числу $-k$ у функции $v(b,s)$ существует второй нуль $\overline{s}(b)$, удовлетворяющий предельному равенству (16).

При решении поставленной задачи мы вновь воспользуемся представлением (23), которое перепишем в несколько ином виде

$$\begin{aligned} u(b,s)v(b,s) = \quad & s\left[\frac{1}{2} - b + \sum_{i=1}^{k} \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!}\left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1}\right) s^{2i} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b(b+2)\dots(b+2i-2)}{(2i)!}\left(\frac{1}{2} - \frac{2i+b}{2i+1}\right) s^{2i}\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Для значений b из интервала $(-k, -k+\delta_1)$ все слагаемые, объединенные под последним знаком суммирования в формуле (28), положительны, если k не кратно

четырем, и отрицательны– в противном случае. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\lim_{s\to\infty} u(b,s)v(b,s) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} \neq p, \quad p = 1,2,\ldots, \\ -\infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} = p, \quad p = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{29}$$

Из определения числа $\underline{s}(b)$ и из неравенства (26) вытекает, что функция $v(b,s)$ положительна в некоторой окрестности справа от точки $\underline{s}(b)$. Отсюда, из предельных равенств

$$\lim_{s\to\infty} u(b,s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} \neq p, \quad p = 1,2,\ldots, \\ \infty, & \text{если} \quad \frac{k}{4} = p, \quad p = 1,2,\ldots \end{cases}$$

и (29) следует, что функция $v(b,s)$ отрицательна при достаточно больших значениях s. Из этого вытекает существование у этой функции второго нуля $\overline{s}(b)$.

Равенство (16) доказывается теперь без труда. В самом деле, предположим противное: пусть существует такая последовательность $b_m \to -k+0$, что выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty} \overline{s}(b_m) = \overline{s}_0, \quad \overline{s}_0 \in (\underline{s}(-k), \infty).$$

Фиксируем тогда такое $\overline{s}_1 > 0$, чтобы

$$[\overline{s}_0 - \overline{s}_1, \overline{s}_0 + \overline{s}_1] \subset (\underline{s}(-k), \infty).$$

На отрезке $[\overline{s}_0 - \overline{s}_1, \overline{s}_0 + \overline{s}_1]$ правая часть (28) равномерно сходится к правой части (24) при стремлении b_m к числу $-k$. Следовательно, существует такое $\overline{\delta} > 0$, при котором для всех $b \in (-k, -k+\overline{\delta})$ функция $v(b,s)$ положительна на рассматриваемом отрезке. Тем самым мы пришли к противоречию. Предельное равенство (16) доказано.

3. Вспомогательное утверждение

1. Приведенное в этом параграфе утверждение, для обоснования которого мы будем использовать уже полученные результаты, будет играть основную роль при доказательстве теоремы 1.

Пусть функция $p(t)$ обращается в нуль в точках $t_1, \ldots, t_n$ интервала (α, β). Фиксируем такое $t_0 > 0$, чтобы принадлежащие интервалу (α, β) отрезки $[t_i - t_0, t_i + t_0]$ $(i = 1, \ldots, n)$ не пересекались между собой. Эти отрезки нам удобно обозначить через $\Delta_i(t_0)$ соответственно.

Предположим, что

$$-h_i = \frac{\nu_{0i}}{|\dot{p}(t_i)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \ldots; i = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Отметим, что в силу леммы 1 наименьшее число нулей, которое могут иметь решения дифференциального уравнения (2) на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$, не зависит от ε, если только ε достаточно мало. Наименьшее возможное число нулей на $\Delta_i(t_0)$ мы будем обозначать ниже через k_i. Очевидно, что наибольшее количество нулей у решений уравнения (2) на том же отрезке будет равно $k_i + 1$.

Лемма 2. *Пусть выполнены неравенства* (30). *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при каждом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *существует решение* $x^*(t, \varepsilon)$ *уравнения* (2), *имеющее ровно* k_0 *нулей на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *где*

$$k_0 = 1 + \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Любое другое решение при этом обращается в нуль не более k_0 *раз.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует решение уравнения (2), которое имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ не менее k_0 нулей при малых ε. Для этого выберем такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$ существовало решение, имеющее $k_i + 1$ нулей соответственно. Ясно, что тогда любое решение имеет не менее k_i нулей на каждом из рассматриваемых отрезков. Таким образом, если зафиксировать такое решение, которое имело бы $k_1 + 1$ нулей на отрезке $\Delta_1(t_0)$, то на каждом из остальных отрезков $\Delta_i(t_0)$ это же решение обращается в нуль не менее, чем k_i раз. Начальные условия такого решения, заданные в момент времени t_1, можно взять не зависящими от ε. Отсюда следует, что наибольшее количество нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на отрезке $[\alpha, \beta]$, не меньше k_0 для достаточно малых ε.

Доказательство леммы будет завершено, если мы покажем, что существует решение уравнения (2), имеющее при малых ε не более $k_0 - 1$ нулей. Чтобы показать это, нам будет удобнее работать с дифференциальным уравнением

$$\varepsilon\ddot{x} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon}\right] x = 0, \tag{31}$$

в которое преобразуется уравнение (2) с помощью замены (4) и переобозначения $y = x$.

Без ограничения общности можно считать, что нули функции $p(t)$ занумерованы в порядке возрастания. Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + \left[\frac{2q_0(t) - \widetilde{p}_0(t)}{2} - \frac{p_0^2(t)}{4\varepsilon}\right] x = 0. \tag{32}$$

Здесь положено

$$p_0(t) = \begin{cases} a_0 > 0, & \text{если} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \text{и} \quad t \overline{\in} \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ a_i(t - t_i), & \text{если} \quad t \in \Delta_i(t_0), \end{cases} \tag{33}$$

$$\widetilde{p}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \text{и} \quad t \overline{\in} \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ \dot{p}(t), & \text{если} \quad t \in \Delta_i(t_0), \end{cases} \tag{34}$$

$$q_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \text{и} \quad t \overline{\in} \bigcup_i \Delta_i(t_0), \\ b_i, & \text{если} \quad t \in \Delta_i(t_0). \end{cases} \tag{35}$$

В (33) – (35) индекс i принимает значения от 1 до n, а числа a_i $(i = 0, \ldots, n)$ и b_i $(i = 1, \ldots, n)$ считаем выбранными таким образом, чтобы имели место неравенства

$$n_i - 1 < \nu_i = \frac{2b_i - a_i - |a_i|}{2|a_i|} < n_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{36}$$

где n_i – целые числа. Докажем сначала лемму для дифференциального уравнения (32). Отметим, что это уравнение подобрано так, чтобы его можно было проинтегрировать в явном виде.

На заключительном этапе доказательства леммы будет показано, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполняется неравенство

$$\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \leq \frac{2q_0(t) - \widetilde{p}_0(t)}{2} - \frac{p_0^2(t)}{4\varepsilon} \tag{37}$$

при $t \in [\alpha, \beta]$. При этом можно так определить числа a_i и b_i в формулах (33) – (35), чтобы числа ν_i были заключены между теми же целыми числами, что и $\nu_{0i}|\dot{p}(t_i)|^{-1}$. При таком определении чисел ν_i $(i = 1, \ldots, n)$ максимальное возможное количество нулей, которое могут иметь при малых ε решения уравнения (32), не превзойдет числа k_0. Отсюда и из неравенства (37) будет следовать, что у решений уравнения (31) не может существовать при тех же ε нулей больше, чем k_0. Последнее вытекает из теоремы сравнения (см., например, [11–13]).

Итак, основную роль при доказательстве леммы играет обоснование соответствующего утверждения для дифференциального уравнения (32). Приступим к изучению свойств решений этого уравнения.

2. Свойства решений уравнения (32). Первый этап.

Введем в рассмотрение функции, используя которые докажем на следующих этапах нужное утверждение.

На отрезке $\Delta_i(t_0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ определим функции

$$x_{i1}(t, \varepsilon) = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\nu_i(-\nu_i + 2)\ldots(-\nu_i + 2j - 2)|a_i|^j}{(2j)!\varepsilon^j}(t - t_i)^{2j}\right] \exp\left[-\frac{|a_i|}{4\varepsilon}(t - t_i)^2\right]$$

и

$$x_{i2}(t, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|a_i|}} \exp\left[-\frac{|a_i|}{4\varepsilon}(t - t_i)^2\right] \frac{\sqrt{|a_i|}}{\sqrt{\varepsilon}}(t - t_i) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\nu_i+1)\ldots(-\nu_i+2j-2)|a_i|^{\frac{2j+1}{2}}}{(2j+1)\varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}}(t - t_i)^{2j+1}.$$

Далее положим

$$x_i(t, \varepsilon) = \begin{cases} x_{i1}(t, \varepsilon), & \text{если } n_i \geq 2 \text{ и } n_i \text{ четно}, \\ x_{i2}(t, \varepsilon), & \text{если } n_i \leq 0 \text{ или } n_i \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{38}$$

Числа n_i, входящие в (38), те же, что и в (36). Каждая из функций $x_i(t, \varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения (32) на соответствующем промежутке. Как следует из доказательства леммы 1, функция $x_i(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $\Delta_i(t_0)$ ровно k_i раз при малых значениях ε. При этом количество нулей любого другого решения уравнения (32) на том же отрезке не меньше, чем k_i.

Рассмотрим отдельно функцию $x_1(t, \varepsilon)$, определенную на отрезке $\Delta_1(t_0)$. Эта функция будет играть особую роль в дальнейших рассуждениях. Нам будет удобно считать, что $x_1(t, \varepsilon)$ определена на всем отрезке $[\alpha, \beta]$. На значениях $t \notin \Delta_1(t_0)$ определим эту функцию так, чтобы она была решением уравнения (32). Обозначим полученную функцию через $x_0(t, \varepsilon)$. Для нас будет важно знать, как ведет себя

эта функция при значениях $t \notin \Delta_1(t_0)$. Поэтому нам будет удобно вводить новые обозначения этой функции, рассматриваемой на некоторых специальных отрезках.

Рассмотрим отрезки $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$ и $\Delta_2(t_0)$. На этих отрезках функция $x_0(t, \varepsilon)$ определяет соответственно две функции $x_{01}(t, \varepsilon)$ и $x_{02}(t, \varepsilon)$. Как оказывается, первую из этих функций можно выписать в явном виде, а вторую выразить через $x_{21}(t, \varepsilon)$ и $x_{22}(t, \varepsilon)$.

Имеем

$$x_{01}(t_1 + t_0, \varepsilon) = x_1(t_1 + t_0, \varepsilon), \quad \dot{x}_{01}(t_1 + t_0, \varepsilon) = \dot{x}_1(t_1 + t_0, \varepsilon).$$

Используя формулы, при помощи которых мы ввели $p_0(t)$, $\widetilde{p}_0(t)$ и $q_0(t)$, получим, что

$$x_{01}(t^0, \varepsilon) = \frac{1}{2} x_1(t_1 + t_0, \varepsilon) \left(\exp\left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right] + \exp\left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right]\right) + \\ + \frac{\varepsilon}{a_0} \dot{x}(t_1 + t_0, \varepsilon)\left(\exp\left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right] - \exp\left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right]\right), \quad (39)$$

$$\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon) = \frac{1}{2} \dot{x}(t_1 + t_0, \varepsilon) \left(\exp\left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right] + \exp\left[\frac{-a_0}{2\varepsilon(t_2 - t_1 - 2t_0)}\right]\right) + \\ + \frac{a_0}{4\varepsilon} x_1(t_1 - t_0, \varepsilon)\left(\exp\left[\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right] - \exp\left[-\frac{a_0}{2\varepsilon}(t_2 - t_1 - 2t_0)\right]\right), \quad (40)$$

где положено $t^0 = t_2 - t_0$. Отметим, что

$$x_{21}(t, \varepsilon)\dot{x}_{22}(t, \varepsilon) - \dot{x}_{21}(t, \varepsilon)x_{22}(t, \varepsilon) \equiv 1, \quad t \in \Delta_2(t_0). \quad (41)$$

Поскольку

$$x_{02}(t^0, \varepsilon) = x_{01}(t^0, \varepsilon), \quad \dot{x}_{02}(t^0, \varepsilon) = \dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon),$$

то из (41) получаем, что имеет место представление

$$x_{02}(t^0, \varepsilon) = \left[x_{01}(t^0, \varepsilon)\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon) - \dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)x_{22}(t^0, \varepsilon)\right] x_{21}(t, \varepsilon) + \\ + \left[\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)x_{21}(t^0, \varepsilon) - x_{01}(t^0, \varepsilon)\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)\right] x_{22}(t, \varepsilon). \quad (42)$$

Ниже нам потребуется еще функция

$$x^0(t, \varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)}\right] \frac{x_{21}(t, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0, \varepsilon)}{x_{21}(t^0, \varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0, \varepsilon)}{x_{01}(t^0, \varepsilon)}\right] \frac{x_{22}(t, \varepsilon)}{x_{22}(t^0, \varepsilon)}. \quad (43)$$

Используя эту функцию, формулу (42) можно записать в виде

$$x_{02}(t, \varepsilon) = x_{01}(t^0, \varepsilon)x_{21}(t, \varepsilon)x_{22}(t, \varepsilon)x^0(t, \varepsilon),$$

из которого становится ясно, что наличие $k_1 + k_2$ нулей у функции $x_0(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1 - t_0, t_2 + t_0]$ будет доказано, если мы покажем, что она не меняет знака на $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$, а функция $x^0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно k_2 раз на отрезке $[t_2 - t_0, t_2 + t_0]$.

3. Свойства решений уравнения (32). Второй этап.

На этом этапе будет доказано одно вспомогательное неравенство, при помощи которого мы ниже установим существование ровно k_2 нулей у функции $x^0(t,\varepsilon)$ на $[t_2-t_0, t_2+t_0]$.

Покажем, что существует такое $\varepsilon_0>0$, при котором для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ выполняется неравенство

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}-\max\left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)},\frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}\right]>0. \tag{44}$$

Прежде всего обоснуем соотношение

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\geq\frac{c_0}{\varepsilon}, \tag{45}$$

где положительная постоянная c_0 не зависит от ε, когда ε мало. Для этого воспользуемся равенствами (39) и (40). Полагая

$$z(t,\varepsilon)=\frac{\dot{x}_1(t_1+t_0,\varepsilon)}{x_1(t_1+t_0,\varepsilon)},$$

левую часть неравенства (45) запишем в виде

$$\frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}=\frac{a_0}{2\varepsilon}\left[\frac{\left(\frac{2\varepsilon}{a_0}z(t_0,\varepsilon)+1\right)\exp\left[\frac{a_0}{\varepsilon}(t_2-t_1)\right]+\left(\frac{2\varepsilon}{a_0}z(t_0,\varepsilon)-1\right)}{\left(\frac{2\varepsilon}{a_0}z(t_0,\varepsilon)+1\right)\exp\left[\frac{a_0}{\varepsilon}(t_2-t_1)\right]+\left(1-\frac{2\varepsilon}{a_0}z(t_0,\varepsilon)\right)}\right].$$

Отсюда вытекает, что для обоснования неравенства (45) достаточно показать, что при малых ε имеет место неравенство

$$\frac{2\varepsilon}{a_0}z(t_0,\varepsilon)+1\geq c>0,$$

в котором постоянная c не зависит от ε. Мы покажем, что $z(t_0,\varepsilon)$ положительна при достаточно малых ε. Тем самым можно будет положить $c=1$. Учитывая (38), получим, что

$$z(t,\varepsilon)=\frac{\dot{u}(t,\varepsilon)}{u(t,\varepsilon)}-\frac{(t-t_1)|a_1|}{2\varepsilon}.$$

Здесь положено

$$u_0(t,\varepsilon)=\begin{cases}u_1(t,\varepsilon), & \text{если}\quad x_1(t,\varepsilon)\equiv x_{11}(t,\varepsilon),\\ u_2(t,\varepsilon), & \text{если}\quad x_1(t,\varepsilon)\equiv x_{12}(t,\varepsilon),\end{cases}$$

где, в свою очередь, приняты следующие обозначения:

$$u_1(t-t_1,\varepsilon)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{-\nu_1(-\nu_1+2)\dots(-\nu_1+2j-2)|a_1|^j}{(2j)!\varepsilon^j}(t-t_1)^{2j},$$

$$u_2(t-t_1,\varepsilon)=\frac{\sqrt{|a_1|}}{\sqrt{\varepsilon}}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-\nu_1+1)\dots(-\nu_1+2j-1)|a_1|^{\frac{2j+1}{2}}}{(2j+1)!\varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}}(t-t_1)^{2j+1}.$$

Воспользуемся теперь одним результатом, полученным при доказательстве леммы 1. Там нами была построена функция $v(b,s)$, которая определялась равенством (14), и было получено такое утверждение: при достаточной близости параметра b к числу $-k$ (k – целое неотрицательное) существует такое $s_0 > 0$, что при всех $s > s_0$ функция $v(b,s)$ отрицательна, а при $s < -s_0$ положительна. Заметим теперь, сравнивая формулу (14) с формулой, положенной в основу определения $z(t,\varepsilon)$, что

$$z(t_0,\varepsilon) = -v_0(-\nu_1, \frac{\sqrt{|a_1|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0),$$

где функция $v_0(b,s)$ обладает перечисленными выше для функции $v(b,s)$ свойствами. При этом, конечно, предполагается, что ν_1 достаточно близко слева к целому неотрицательному числу. Тем самым показано, что при малых ε функция $z(t_0,\varepsilon)$ положительна.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что числа ν_i $(i = 1,\dots,n)$ достаточно близки к целым неотрицательным числам, не превосходя последних.

Для следующих рассуждений нам удобно будет использовать формулу

$$\frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)} = \frac{1}{x_{21}(t^0,\varepsilon)x_{22}(t^0,\varepsilon)}, \tag{46}$$

вытекающую из тождества (41). Отсюда и из определения функций $x_{21}(t,\varepsilon)$ и $x_{22}(t,\varepsilon)$ следует равенство

$$\max\left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}, \frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}\right] = \begin{cases} \frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}, & n_2 \text{ четно или } n_2 \le 0, \\ \frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}, & n_2 \text{ нечетно и } n_2 > 0. \end{cases} \tag{47}$$

Обозначим левую часть последнего равенства через $u(t^0,\varepsilon)$. Для завершения доказательства неравенства (44) достаточно установить, что при малых ε функция $u(t^0,\varepsilon)$ отрицательна. На основании (47) в этом нетрудно убедиться, если заметить, что

$$u(t^0,\varepsilon) = -v_1(-\nu_2, \frac{\sqrt{|a_2|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0),$$

где $v_1(b,s)$– некоторая функция, по отношению к которой справедливы выводы, полученные для ранее изучавшейся функции $v(b,s)$. Поскольку, как мы уже упоминали на этом этапе, $v(b,s)$ положительна при $s < -s_0$ (s_0 – некоторое фиксированное число), то, очевидно, $v_1(-\nu_2, -\frac{\sqrt{|a_2|}}{\sqrt{\varepsilon}}t_0) > 0$, когда ε достаточно мало. Таким образом, неравенство (44) доказано.

4. Свойства решений уравнения (32). Третий этап.

Здесь мы покажем, что функция $x_0(t,\varepsilon)$ обращается в нуль ровно k_1 раз на отрезке $[\alpha, t_2 - t_0]$, когда ε достаточно мало. Этот результат будет следовать из того, что функция $x_0(t,\varepsilon)$ не обращается в нуль на отрезках $[\alpha, t_1 - t_0]$ и $[t_1 + t_2, t_2 - t_0]$, а также из того, что она имеет k_1 нулей на промежутке $\Delta_1(t_0)$. Для обоснования сформулированного утверждения воспользуемся той частью доказательства леммы 1, в которой показывается, что решения уравнения (2) не осциллируют на определенных выше отрезках $\Delta_1(t_0)$ и $\Delta_2(t_0)$. Это же доказательство целиком, без изменений,

переносится на рассматриваемый здесь случай, только роль отрезков $\Delta_1(t_0)$ и $\Delta_2(t_0)$ будут теперь играть соответственно отрезки

$$\Delta_1^*(\varepsilon) = \left[\alpha\left(\varepsilon|\dot{p}(t_1)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(t_1 - \widetilde{t}(\varepsilon)\right)\left(\varepsilon|\dot{p}(t_1)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{48}$$

$$\Delta_1^*(\varepsilon) = \left[\left(t_1 + \widetilde{t}(\varepsilon)\right)\left(\varepsilon|\dot{p}(t_1)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, (t_2 - t_0)\left(\varepsilon|\dot{p}(t_1)|^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

где через $t_1 - \widetilde{t}$ обозначен крайний левый нуль функции $x_0(t,\varepsilon)$ на отрезке $\Delta_1(t^0)$, а через $t_1 + \widetilde{t}$ – соответственно крайний правый нуль этой функции. Таким образом, убеждаемся в том, что $x_0(t,\varepsilon)$ не имеет нулей на отрезках $[\alpha, t_1 + t_0]$ и $[t_1 + t_0, t_2 - t_0]$, если ε достаточно мало.

5. Свойства решений уравнения (32). Четвертый этап.

Этот и последующий этапы будут посвящены обоснованию того факта, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение $x^0(t,\varepsilon)$ дифференциального уравнения (32) на отрезке $\Delta_2(t^0)$ имеет ровно k_2 нулей.

Здесь будет разобран случай, когда n_2, входящее в одно из неравенств (36), меньше или равно нулю. Отметим, что при этом функция $x_{21}(t,\varepsilon)$ ($x_{21}(t,\varepsilon) \equiv x_2(t,\varepsilon)$) положительна на отрезке $\Delta_2(t^0)$, а функция $x_{22}(t,\varepsilon)$ один раз обращается в нуль в точке t_2 при всех положительных ε. Как следует из определения $x_{22}(t,\varepsilon)$, производная этой функции в точке t_2 положительна. Производная же функции $x_{21}(t,\varepsilon)$ в точке t_2 равна нулю. Эти простые замечания будут использованы в дальнейшем при выводе нужных неравенств.

Для доказательства сформулированного выше утверждения достаточно показать, что в точках t^0 и t_2 функция $x^0(t,\varepsilon)$ имеет один и тот же знак, причем выполняется неравенство

$$x^0(t_2,\varepsilon)\dot{x}^0(t_2,\varepsilon) > 0. \tag{49}$$

Действительно, из сказанного следует, что на отрезке $[t^0, t_2]$ у рассматриваемой функции одного нуля быть не может, а наличие большего числа нулей исключается, благодаря теореме о разделении нулей решения уравнения (32) (см., например, [11–13]). На промежутке $[t_2, t_2 + t_0]$ функция $x^0(t,\varepsilon)$ в нуль обратиться не может в силу того, что имеет место представление

$$x^0(t,\varepsilon) = x^0(t_2,\varepsilon)x_{21}(t,\varepsilon) + x^0(t_2,\varepsilon)x_{22}(t,\varepsilon),$$

в котором оба слагаемые, стоящие в правой части, имеют один и тот же знак на этом отрезке.

Проведем обоснование отмеченных неравенств. Соотношение

$$x^0(t^0,\varepsilon)x^0(t_2,\varepsilon) > 0$$

следует из формулы

$$x^0(t^0,\varepsilon)x^0(t_2,\varepsilon) = \left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}\right]\left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\right]\frac{x_{21}(t_2,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)},$$

которая имеет место на основании (43). При этом мы учитываем, что выполняется неравенство (44) и равенство (46), в котором правая часть отрицательна при малых ε. Неравенство (49), в свою очередь, следует из представления

$$x^0(t_2,\varepsilon)\dot{x}^0(t_2,\varepsilon) = -\left[\frac{\dot{x}_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\right]\left[\frac{\dot{x}_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)} - \frac{\dot{x}_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\right]\frac{1}{x_{21}(t^0,\varepsilon)x_{22}(t^0,\varepsilon)},$$

вытекающего из (43), и упоминающихся свойств входящих туда функций. Таким образом, в случае, когда $n_2 \le 0$, мы доказали, что на отрезке $[\alpha, t_2 + t_0]$ функция $x_0(t,\varepsilon)$ имеет ровно $k_1 + k_2$ нулей.

На этом же этапе установим еще один факт. Обозначим через $x_2^*(t,\varepsilon)$ решение дифференциального уравнения (32), совпадающее на отрезке $\Delta_2(t_0)$ с функцией $x_{21}(t,\varepsilon)$. Предположим, что это решение первый раз на отрезке $[t_2+t_0, \beta]$ обращается в нуль в некоторой точке $t^*(\varepsilon)$. Тогда выполняется неравенство

$$t_1(\varepsilon) \ge t^*(\varepsilon), \tag{50}$$

где через $t_1(\varepsilon)$ обозначен наименьший нуль, если таковой вообще существует, функции $x_0(t,\varepsilon)$ на отрезке $[t_2 - t_0, \beta]$. Если же на рассматриваемом отрезке функция $x_2^*(t,\varepsilon)$ в нуль не обращается, тогда и функция $x_0(t,\varepsilon)$ сохраняет знак на том же отрезке.

Для обоснования этого факта введем в рассмотрение функции

$$z_0(t,\varepsilon) = -\frac{\dot{x}_0(t,\varepsilon)}{x_0(t,\varepsilon)}, \quad (t \in [t_2 - t_0, \beta])$$

и соответственно

$$z^*(t,\varepsilon) = -\frac{\dot{x}_2^*(t,\varepsilon)}{x_2^*(t,\varepsilon)}, \quad (t \in [t_2 - t_0, \beta]).$$

Напомним, что везде на этом этапе предполагается выполненным неравенство $n_2 \le 0$. Заметим, далее, что обе функции $z_0(t,\varepsilon)$ и $z^*(t,\varepsilon)$ являются решениями на отрезке $[t_2 - t_0, \beta]$ дифференциального уравнения Риккати

$$\varepsilon \dot{z} = \varepsilon z^2 + \frac{2q_0(t) - \widetilde{p}_0(t)}{2} - \frac{\widetilde{p}_0(t)}{4\varepsilon}. \tag{51}$$

Из неравенства (49) вытекает соотношение

$$z_0(t_2,\varepsilon) < 0,$$

а из определения функций $x_2^*(t,\varepsilon)$ и $z^*(t,\varepsilon)$ следует, что в точке t_2 последняя функция обращается в нуль. Отсюда и в силу теоремы о монотонной зависимости от начальных условий решений уравнения (51) (см., например, [11–13]) делаем следующий вывод:

$$z_0(t,\varepsilon) < z^*(t,\varepsilon)$$

при $t \in [t_2 - t_0, t^*(\varepsilon)]$ или при $t \in [t_2 - t_0, \beta]$, если $x_2^*(t,\varepsilon)$ не обращается в нуль. Из последнего неравенства следует обоснование соотношения (50).

6. Свойства решений уравнения (32). Пятый этап.

Покажем, что при малых ε функция $x_0(t,\varepsilon)$ ровно k_2 раз обращается в нуль на отрезке $\Delta_2(t_0)$. На этом этапе мы рассматриваем только случай, когда соответствующее из неравенств (36) выполняется для положительного n_2.

Обозначим через $t_{21}(\varepsilon)$ и $t_{22}(\varepsilon)$ крайние левые нули функций $x_{21}(t,\varepsilon)$ и $x_{22}(t,\varepsilon)$ на промежутке $\Delta_2(t_0)$. Для доказательства сформулированного утверждения можно ограничиться лишь обоснованием неравенства

$$t_1(\varepsilon) \ge \max[t_{21}(\varepsilon), t_{22}(\varepsilon)]. \tag{52}$$

Отметим, что все функции параметра ε, входящие в (52), при положительном n_2 заведомо существуют, если только ε достаточно мало. Существование еще ровно k_2-1 нулей у функции $x_0(t,\varepsilon)$ на рассматриваемом отрезке будет гарантировано тем, что одна из функций $x_{21}(t,\varepsilon)$ или $x_{22}(t,\varepsilon)$ имеет k_2+1 нулей, а другая – k_2, а также теоремой о разделении нулей решений уравнения (32) (см., например, [11–13]).

Обоснование неравенства (52) будет завершено, если мы покажем, что в точках t^0, $t_{21}(\varepsilon)$ и $t_{22}(\varepsilon)$ функция $x^0(t,\varepsilon)$ имеет один и тот же знак. Выпишем значения этой функции в точках:

$$x^0(t^0,\varepsilon)=\left[\frac{\dot x_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}-\frac{\dot x_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}\right]=\frac{1}{x_{21}(t^0,\varepsilon)x_{22}(t^0,\varepsilon)},$$

$$x^0(t_{21}(\varepsilon),\varepsilon)=-\left[\frac{\dot x_{21}(t^0,\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}-\frac{\dot x_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\right]\frac{x_{22}(t_{21}(\varepsilon),\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}$$

и наконец

$$x^0(t_{22}(\varepsilon),\varepsilon)=\left[\frac{\dot x_{22}(t^0,\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}-\frac{\dot x_{01}(t^0,\varepsilon)}{x_{01}(t^0,\varepsilon)}\right]\frac{x_{21}(t_{22}(\varepsilon),\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}.$$

Отсюда доказательство того факта, что знак левых частей последних трех равенств совпадает, завершается ссылкой на обоснованное выше неравенство (44) и соотношения

$$x_{21}(t^0,\varepsilon)x_{22}(t^0,\varepsilon)\begin{cases}>0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно},\\ <0, & \text{если } n_2 \text{ четно},\end{cases}$$

$$\frac{x_{22}(t_{21}(\varepsilon),\varepsilon)}{x_{22}(t^0,\varepsilon)}\begin{cases}>0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно},\\ <0, & \text{если } n_2 \text{ четно},\end{cases}$$

$$\frac{x_{21}(t_{22}(\varepsilon),\varepsilon)}{x_{21}(t^0,\varepsilon)}\begin{cases}<0, & \text{если } n_2 \text{ нечетно},\\ >0, & \text{если } n_2 \text{ четно},\end{cases}$$

которые выполняются для малых ε.

Суммируя сказанное на последних трех этапах, приходим к выводу, что при достаточно малых ε функция $x_0(t,\varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $[\alpha, t_2+t_0]$ ровно k_1+k_2 раз.

7. Свойства решений уравнения (32). Шестой этап.

Завершим доказательство леммы для дифференциального уравнения (32).

Обозначим через $x_i^*(t,\varepsilon)$ $(i=1,\dots,n)$ решение уравнения (32), которое совпадает соответственно с функциями $x_i(t,\varepsilon)$ на отрезке $\Delta_i(t_0)$.

Как мы уже показали, функция $x_1^*(t,\varepsilon)$ $(x_1^*(t,\varepsilon)\equiv x_0(t,\varepsilon))$ на отрезке $[\alpha,t_2+t_0]$ имеет при малых ε ровно k_1+k_2 нулей. При этом выполняется неравенство (50), если $n_2\le 0$, и имеет место (52) в противном случае. Последнее обстоятельство сыграет основную роль в дальнейших рассуждениях.

Так же, как и при обосновании соответствующих свойств функции $x_1^*(t,\varepsilon)$, можно доказать существование такого $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon)$ функция $x_2^*(t,\varepsilon)$ имеет ровно k_2+k_3 нулей на отрезке $[t_2-t_0,t_3+t_0]$. В этом случае будут справедливы неравенства

$$t_2(\varepsilon)\ge\max(t_{31}(\varepsilon),t_{32}(\varepsilon)),\quad \text{если}\quad n_3>0,$$

$$t_2(\varepsilon)\ge t_3^*(\varepsilon),\quad \text{если}\quad n_3\le 0.$$

Здесь через $t_2(\varepsilon)$, $t_{31}(\varepsilon)$ и $t_{32}(\varepsilon)$ обозначены крайние левые нули функций $x_2^*(t,\varepsilon)$, $x_{31}(t,\varepsilon)$, $x_{32}(t,\varepsilon)$ на отрезке $[t_3-t_0, t_3+t_0]$, а точка $t_3^*(\varepsilon)$ такова, что в ней функция $x_3^*(t,\varepsilon)$ обращается в нуль первый раз на отрезке $[t_3-t_0,\beta]$ в случае, когда $n_3 \le 0$. Если же в последнем случае $x_3^*(t,\varepsilon)$ не меняет знак на промежутке $[t_3-t_0,\beta]$, то на этом отрезке нет нулей и у функции $x_2^*(t,\varepsilon)$. Поскольку нули всех решений разделены, то из (50) и (52) следует, что функция $x_1^*(t,\varepsilon)$ имеет при достаточно малых ε ровно $k_1+k_2+k_3$ нулей на отрезке $[\alpha, t_3+t_0]$.

Рассуждая дальше аналогично, придем к тому, что функция $x_1^*(t,\varepsilon)$ имеет ровно k_0-1 нулей на отрезке $[\alpha,\beta]$, когда ε достаточно мало. Отсюда вытекает, что наибольшее число нулей, которое могут иметь решения рассматриваемого уравнения, не превосходит k_0. Тем самым доказательство леммы для дифференциального уравнения (32) полностью завершено.

8. Обоснование неравенства (37).

Последнее, что нам осталось установить для обоснования леммы в общем случае, является неравенство (37).

Фиксируем такое $t_0>0$, чтобы на отрезках $\Delta_i(t_0)$ $(i=1,\dots,n)$ выполнялось неравенство

$$\max_{t\in\Delta_i(t_0)}\left[\frac{2q(t)-\dot p(t)}{2}-\frac{p^2(t)}{4\varepsilon}\right]\le\frac{2[q(t_i)+g_i]-[\dot p(t_i)+d_i]}{2}-\frac{[\dot p(t_i)+d_i]^2(t-t_i)}{4\varepsilon}. \tag{53}$$

В (53) числа g_i и d_i $(i=1,\dots,n)$ выбраны так, что имеют место неравенства

$$\frac{|d_i|}{2}<\frac{d_i}{|d_i|}\dot p(t_i) \tag{54}$$

и

$$2g_i-d_i>0. \tag{55}$$

Ясно, что для каждых d_i и g_i $(i=1,\dots,n)$, обладающих отмеченными в (54) и (55) свойствами, можно указать такое число $t_0>0$, не зависящее от ε, чтобы выполнялось неравенство (53).

Положим затем

$$a_i=\dot p(t_i)+d_i,\quad i=1,\dots,n,$$
$$b_i=q(t_i)+g_i,\quad i=1,\dots,n.$$

Тем самым определены числа ν_i $(i=1,\dots,n)$. Отметим, наконец, что за счет подходящего выбора чисел d_i и g_i можно сделать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\nu_i-1<\frac{\nu_{01}}{|\dot p(t_i)|}<\nu_i<n_i,$$

когда целые числа n_i положительны и

$$\frac{\nu_{0i}}{|\dot p(t_i)|}<\nu_i<0$$

при неположительных n_i. При этом можно добиваться какой угодно близости ν_i к числу, занимающему крайнее правое место в соответствующем из последних двух неравенств. Это замечание важно, поскольку на примере уравнения (32) лемма доказана лишь в предположении, что ν_i достаточно близки к целым неотрицательным числам.

Нам осталось определить в (33) – (35) только число a_0. Введем его следующим образом:

$$a_0 = \min |p(t)| - d_0, \quad (t \in [\alpha, \beta], \quad t \overline{\in} \bigcup_i \Delta_i(t_0)),$$

где положительное число d_0 выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 > 0.$$

Нетрудно показать, что при достаточно малых ε неравенство (37) имеет место и для всех $t \in [\alpha, \beta]$, $t \overline{\in} \bigcup_i \Delta_i(t_0)$. Тем самым неравенство (37) доказано. Отсюда следует завершение обоснования леммы в общем случае.

4. Обоснование теоремы 1

Покажем сначала, что для каждого j ($j = 1, 2, \dots$) собственное число $\lambda_j(\varepsilon)$ ограничено при стремлении ε к нулю. Предположим противное, т.е. будем считать, что существует такой номер j и такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, на которой выполняется одно из следующих равенств:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = \infty \tag{56}$$

или

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = -\infty. \tag{57}$$

Пусть, например, имеет место (56). Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon_m)]x = 0. \tag{58}$$

С помощью замены (4) это уравнение преобразуется в уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - 2\lambda_j(\varepsilon_m) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon_m}\right] y = 0. \tag{59}$$

Из последнего утверждения видно, что при всех m, для которых

$$\lambda_j(\varepsilon_m) > \max_{t\in[\alpha,\beta]} \left[q(t) - \frac{\dot{p}(t)}{2}\right],$$

решения (59) не осциллируют на отрезке $[\alpha, \beta]$. Но в то же время, как следует из определения $\lambda_j(\varepsilon)$, у уравнения (59) должно существовать решение

$$y_j(t, \varepsilon_m) = x_j(t, \varepsilon_m) \exp\left[\frac{1}{2\varepsilon_m} \int_\alpha^t p(\tau) d\tau\right],$$

имеющее на рассматриваемом отрезке не менее двух нулей. Таким образом, мы пришли к противоречию. Отсюда вытекает, что предельное равенство (56) не имеет места.

Предположим затем, что выполняется равенство (57). Из доказательства предыдущей леммы следует, что при этом справедливо следующее утверждение: для любого целого $k > 2$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon_m \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (59), имеющее не менее k нулей. Тем самым показано, что число нулей, которое могут иметь решения этого уравнения на отрезке $[\alpha, \beta]$, возрастает до бесконечности при стремлении ε к нулю. Собственная функция $x_j(t, \varepsilon)$, а значит, и $y_j(t, \varepsilon)$, имеет при всех положительных ε ровно $j + 1$ нулей на $[\alpha, \beta]$. Отсюда приходим к противоречию. Следовательно, равенство (57) тоже не имеет места.

Завершение доказательства теоремы 1 проведем, вновь рассуждая от противного. Предположим, что существует такой номер j и такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, для которой справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_j(\varepsilon_m) = \lambda_j + \delta,$$

причем $\delta \neq 0$. Рассмотрим отдельно случаи, когда

$$\delta > 0 \tag{60}$$

и когда

$$\delta < 0. \tag{61}$$

Сначала разберем случай (60). Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \left(\lambda_j + \frac{\delta}{2}\right)\right] x = 0. \tag{62}$$

Из определения числа λ_j и из утверждений леммы 2 следует, что при малых ε_m наибольшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (62) на отрезке $[\alpha, \beta]$, не превосходит j. Очевидно, такой же вывод справедлив и для решений дифференциального уравнения (58), когда ε_m достаточно мало. Однако, собственная функция $x_j(t, \varepsilon)$, как мы уже отмечали, имеет на том же отрезке точно $j + 1$ нулей. Получено противоречие. Тем самым показано, что неравенство (60) выполняться не может.

Предположим тогда, что выполняется соотношение (61). В этом случае дифференциальное уравнение (62) имеет решение, которое обращается в нуль на интервале (α, β) не менее $j + 1$ раз, если ε_m достаточно мало. То же можно сказать и об уравнении (58). Тем не менее, функция $x_j(t, \varepsilon)$ только в $j - 1$ точках интервала (α, β) принимает значение, равное нулю. Доказательство того факта, что неравенство (61) не имеет места, получим, если вновь воспользуемся теоремой о разделении нулей решений уравнения (58). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

5. Обобщение результата

В этом пункте мы сформулируем сначала несколько более общее утверждение, обоснование которого будет следовать из доказательства леммы 2 и теоремы 1.

Как и ранее, обозначим через $t_1, \ldots, t_n$ все нули функции $p(t)$, принадлежащие интервалу (α, β). Основное отличие настоящего пункта от разобранного выше случая состоит в том, что здесь мы допускаем существование у этой функции нулей в одном или обоих концах отрезка $[\alpha, \beta]$.

Предположим, что $p(\alpha) = 0$. Величины ν_i^α $(i = 0, 1, \dots)$ введем по следующему правилу:

$$\nu_i^\alpha = \left[q(\alpha) - \frac{|\dot{p}(\alpha)| + \dot{p}(\alpha)}{2} \right] - |\dot{p}(\alpha)|(1 + 2i).$$

В случае, когда $p(\beta) = 0$, положим

$$\nu_i^\beta = \left[q(\beta) - \frac{|\dot{p}(\beta)| + \dot{p}(\beta)}{2} \right] - |\dot{p}(\beta)|(1 + 2i).$$

Наконец, числа ν_{ik} $(i = 0, 1, \dots;\ k = 1, \dots, n)$ определим, как и ранее, формулами (1). Затем все числа вида ν_i^α, ν_i^β, если они определены, а также величины ν_{ik} $(i = 0, 1, \dots;\ k = 1, \dots, n)$ расположим в ряд в порядке убывания. Через λ_j $(j = 1, 2, \dots)$ обозначим соответственно j-ый член этого ряда. Тогда имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Выше мы всегда предполагали, что все нули функции $p(t)$ простые. Пределы собственных значений рассматриваемой краевой задачи можно вычислить и тогда, когда у функции $p(t)$ есть кратные нули. Покажем, как это можно сделать. Предположим, что функция $p(t)$ имеет лишь конечное число $t_1, \dots, t_n$ простых нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ и, кроме того, эта функция обращается в нуль вместе со своей производной на некотором множестве точек $M \subset [\alpha, \beta]$.

Положим

$$\nu_0 = \max q(t), \quad t \in M.$$

Будем затем рассматривать только те из чисел ν_{ik} $(i = 0, 1, \dots;\ k = 1, \dots, n)$, для которых выполнено неравенство

$$\nu_0 < \nu_{ik}.$$

Отметим, что при $t_k \in (\alpha, \beta)$ соответствующие ν_{ik} $(i = 0, 1, \dots)$ определяются формулой (1), а в случае, когда t_k совпадает с одним из концов отрезка $[\alpha, \beta]$, считаем, что для каждого номера $i = 0, 1, \dots$

$$\nu_{ik} = \begin{cases} \nu_i^\alpha, & \text{если} \quad t_k = \alpha, \\ \nu_i^\beta, & \text{если} \quad t_k = \beta. \end{cases}$$

Расположим теперь такие числа ν_{ik} в ряд в порядке убывания. Очевидно, число членов этого ряда конечно. Пусть оно равно N. Обозначим через λ_j $(j = 1, \dots, N)$ соответственно j–ый член полученного ряда.

Теорема 2. *Имеют место следующие предельные равенства:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_j(\varepsilon) = \nu_0, \quad j = N + 1, N + 2, \dots.$$

Сначала докажем ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2). Пусть функция $p(t)$ обращается в нуль только в точках некоторого множества $M_0 \subset [\alpha, \beta]$, причем все нули кратные. Тогда имеют место следующие утверждения, которые будут играть основную роль при доказательстве теоремы 2.

Лемма 3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (2) не осциллируют на отрезке $[\alpha, \beta]$, если*

$$\nu_0 = \max q(t) < 0, \quad t \in M_0.$$

Лемма 4. *Пусть $\nu_0 > 0$. Тогда для любого натурального k существует такое $\varepsilon_k > 0$, при котором для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$ найдется решение уравнения (2), имеющее не менее k нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Доказательство. Сначала докажем лемму 3. Ясно, что достаточно доказать неосцилляцию решений уравнения (31), получающегося из (2) с помощью замены (4). Фиксируем такое замкнутое множество $M_1 \subset [\alpha, \beta]$, чтобы выполнялось неравенство

$$\max \left[q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) \right] < 0, \quad t \in M_1, \tag{63}$$

причем $M_1 \supset M_0$ выберем так, чтобы каждая точка множества M_0, исключая, может быть, лишь точки α и β, являлась внутренней точкой M_1. Отметим, что этого всегда можно достигнуть, поскольку $q(t) \leq \nu_0 < 0$ и $\dot{p}(t) = 0$ при $t \in M_0$. Лемма 3 будет доказана, если мы покажем, что функция $[q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon}p^2(t)]$ отрицательна, когда ε мало. Для этого достаточно установить, что наряду с (63) имеет место неравенство

$$\max \left[4\varepsilon(q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t)) - p^2(t) \right] < 0, \quad t \in [\alpha, \beta], t \overline{\in} M_1.$$

Последнее неравенство выполняется при достаточно малых ε очевидным образом. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть для некоторой точки $t_0 \in M_0$ имеем

$$q(t_0) = \nu_0 > 0.$$

Без потери общности можно считать, что $t_0 = 0$. В уравнении (31) произведем замену времени

$$t = \sqrt{\varepsilon}\tau.$$

Тогда это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} + [\nu_0 + \omega(\tau, \varepsilon)]x = 0, \tag{64}$$

где непрерывная функция $\omega(\tau, \varepsilon)$ стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно по τ из каждого конечного промежутка. Рассмотрим более простое уравнение

$$\ddot{u} + \nu_0 u = 0. \tag{65}$$

Одним из решений последнего уравнения является функция $\cos(\sqrt{\nu_0}\tau)$. Для каждого номера k ($k = 1, 2, \dots$) можно указать такой отрезок $[-\tau_k, \tau_k]$, на котором функция $\cos(\sqrt{\nu_0}\tau)$ имела не менее k нулей. Если один из концов отрезка $[\alpha, \beta]$ совпадает с точкой $t_0 = 0$, то вместо отрезка $[-\tau_k, \tau_k]$ следует выбрать отрезок $[0, 2\tau_k]$, либо $[-2\tau_k, 0]$. Далее будем рассматривать только те значения параметра ε, для которых

$$[\alpha, \beta] \supset [-\sqrt{\varepsilon}\tau_k, \sqrt{\varepsilon}\tau_k]$$

$$(\text{или} \quad [\alpha,\beta] \supset [0, 2\sqrt{\varepsilon}\tau_k]$$
$$\text{или} \quad [\alpha,\beta] \supset [-2\sqrt{\varepsilon}\tau_k, 0]).$$

Тогда на последнем отрезке определены коэффициенты уравнения (64), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (65) при $\varepsilon \to 0$. Поэтому у (64), а значит, и у уравнения (2), при малых ε существует решение, имеющее не менее k нулей на рассматриваемом отрезке. Таким образом, лемма 4 доказана.

Нам потребуется еще одно промежуточное утверждение, относящееся к уравнению (2). Пусть, как и ранее, $t_1, \ldots, t_n$ – все те нули функции $p(t)$, в которых $\dot{p}(t)$ отлична от нуля. Пусть выполняются неравенства

$$\nu_0 < 0, \tag{66}$$

$$\frac{\nu_{0i}}{|\dot{p}(t_i)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{67}$$

Обозначим через Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ отрезки, принадлежащие $[\alpha, \beta]$, с центром соответственно в точках t_i $(i = 1, \ldots, n)$. Будем считать эти отрезки выбранными так, что в каждом из них находится лишь один нуль функции $p(t)$. Из леммы 1 тогда следует, что наименьшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (2) на Δ_i, не зависит от ε, когда ε достаточно мало. Обозначим такое число, как и ранее, через k_i.

Лемма 5. *Пусть выполняются неравенства (66) и (67). Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (2), имеющее на $[\alpha, \beta]$ ровно k_0 нулей, где*

$$k_0 = 1 + \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

При этом любое другое решение того же уравнения обращается в нуль не более k_0 раз.

Доказательство этой леммы, а также завершение обоснования теоремы 2, проводятся аналогично доказательству соответственно леммы 2 и рассуждениям пункта 8 раздела 3, поэтому мы их здесь не приводим.

6. Заключение

Сформулируем кратко основные выводы. Найдены предельные значения всех собственных чисел первой краевой задачи. Эти значения принципиальным образом отличаются от тех, которые имеют место в уравнении без точек поворота. Как оказалось, существенное значение для нахождения асимптотики собственных чисел имеет поведение функций $p(t)$ и $q(t)$ только в достаточно малых окрестностях точек поворота.

Список литературы / References

[1] Тихонов А. Н., "Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных", *Мат. сборник*, **31**:3 (1952), 575–586; [Tikhonov A. N., "Sistemy differentsial'nykh uravneniy, soderzhashchikh malye parametry pri proizvodnykh", *Mat. sbornik*, **31**:3 (1952), 575–586, (in Russian).]

[2] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., "Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений", Сер. Математика. Мат. анал., ВИНИТИ, М., 1969, 5–73; English transl.: Butuzov V. F., Vasil'eva A. B., Fedoryuk M. V., "Asymptotic Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", *8*, 1970, 1–82.

[3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., "Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений", 1973; [Vasil'eva A.B., Butuzov V. F., "Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy", 1973, (in Russian).]

[4] Дородницын А. А., "Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля", *ПММ*, **11** (1947), 313–328; [Dorodnitsyn A. A., "Asimptoticheskoe reshenie uravneniya Van-der-Polya", *PMM*, **11** (1947), 313–328, (in Russian).]

[5] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., "Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным", *ДАН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891; [Mishchenko E. F., Pontryagin L. S., "Periodicheskie resheniya sistem differentsial'nykh uravneniy, blizkie k razryvnym", *DAN SSSR*, **102**:5 (1955), 889–891, (in Russian).]

[6] Коул Дж., *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, М., 1970; English transl.: Cole J., *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.

[7] Вишик М. И., Люстерник Л. А., "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122; [Vishik M. I., Lyusternik L. A., "Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom", *UMN*, **12**:5 (1957), 3–122, (in Russian).]

[8] Вишик М. И., Люстерник Л. А., "Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I", *УМН*, **15**:3 (1960), 3–80; English transl.: Vishik M. I., Lusternik L. A., "The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations. I", *Russian Mathematical Surveys*, **15**:3 (1960), 1–73.

[9] Колесов Ю. С., Чаплыгин В. Ф., "О неосцилляции решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка", *ДАН СССР*, **199**:6 (1971), 1240–1242; [Kolesov Yu. S., Chaplygin V. F., "O neostsillyatsii resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poryadka", *DAN SSSR*, **199**:6 (1971), 1240–1242, (in Russian).]

[10] Кащенко С. А., "Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S.A., "Predel'nye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s tochkami povorota", *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]

[11] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, London, 1955.

[12] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]

[13] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[14] Камке Е., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1965; [Kamke E., *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam*, Nauka, M., 1965, (in Russian).]

[15] Ch. J. de la Vallie-Poussin, "Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n", *J. Math. Pure et Appl.*, **8**:1 (1929), 125–144.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-682-710

Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points

Kaschenko S. A.

Received September 4, 2015

We consider a linear differential equation of second order with a small factor at the highest derivative. We study the problem of the asymptotic behavior of the eigenvalues of the first boundary value problem (task Dirichlet) in situation when the turning points (points where the coefficient at the first derivative equals to zero) exist. It is shown that only the behavior of coefficients of the equation in a small neighborhood of the turning points is essential. The main result is a theorem on the limit values of the eigenvalues of the first boundary value problem.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

For citation: Kaschenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Pertubed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710.

On the authors:

Kaschenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 711–722
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 711–722

© Голубенец В. О., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-711-722

УДК 517.9

Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции

Голубенец В. О.

получена 15 мая 2015

В работе рассматривается уравнение первого порядка с запаздыванием, зависящим от искомой функции, с нелинейной правой частью. Для этого уравнения предполагаются выполненными условия существования и единственности решения начальной задачи. Ставится задача исследования поведения решений рассматриваемого уравнения в малой окрестности его нулевого положения равновесия. Изучение локальной динамики проводится в зависимости от вещественных параметров — коэффициентов тейлоровского разложения правой части. Параметр, являющийся коэффициентом при линейном члене, имеет два критических значения, определяющих область устойчивости нулевого положения равновесия. Чтобы исследовать изменение локальной динамики уравнения при переходе данного параметра через критические значения, вводится малый параметр и применяется асимптотический метод нормальных форм. Показывается, что для первого случая в уравнении имеет место бифуркация обмена устойчивостью, а для второго случая — суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа (при выполнении достаточного условия). Для каждого из устойчивых режимов получены их асимптотические разложения по соответствующим малым параметрам. Затем в качестве примера рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции. Для этого уравнения бифуркационный параметр имеет единственное критическое значение. С помощью метода нормальных форм устанавливается простое достаточное условие возникновения суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа в уравнении при переходе параметра через критическое значение.

Ключевые слова: динамические системы, уравнения с запаздыванием, непостоянное запаздывание, локальная динамика, устойчивость, бифуркация обмена устойчивостью, бифуркация Андронова – Хопфа, логистическое уравнение

Для цитирования: Голубенец В. О., "Анализ локальных бифуркаций для уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 711–722.

Об авторах:

Голубенец Вячеслав Олегович, orcid.org/0000-0002-6996-3943, магистрант,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: golubenets2010@yandex.ru

Введение

Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции:

$$\dot{u} + u = F\left(u(t - T(u))\right), \quad u \in R. \tag{1}$$

Функция F достаточно гладкая в окрестности точки $u = 0$, T — аналитическая в окрестности этой же точки, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Уравнение такого вида возникает в ряде приложений (см., например, [1–6]).

Разработано много методов исследования динамики уравнений, в которых запаздывание является постоянной величиной. Но в прикладных задачах нередко возникают уравнения с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции. В ряде работ установлено, что для анализа динамики и свойств таких уравнений во многих случаях применимы методы теории уравнений с постоянным запаздыванием (см., например, [7–10]). Вопросы существования и устойчивости решений рассматривались, например, в [5, 11–13]. Локальная динамика уравнения (1) при условии большого запаздывания изучена в [14].

Априори предполагаем, что для решений уравнения (1) выполняется $|u(t)| \leqslant M$ $\forall t \geqslant 0$ для некоторого положительного M. Тогда для непрерывной функции $T(u)$ можно гарантировать ее ограниченность: $T(u) \leqslant T_1$, $T_1 > 0$. Положим $X = [-T_1, 0]$ и дополним (1) начальным условием:

$$u = \psi(t) \in C(X), \quad |\psi| \leqslant M.$$

Таким образом, пространство $C_M(X)$ функций, непрерывных на X, абсолютная величина которых ограничена константой M, будет фазовым пространством уравнения (1).

Поставим задачу исследовать поведение решений (1) в малой окрестности нулевого положения равновесия этого уравнения. Т.к. u предполагается малым, функции $F(u)$ и $T(u)$ удобно разложить по формуле Тейлора:

$$F(u) = au + f_2u^2 + f_3u^3 + o\left(u^3\right), \tag{2}$$

$$T(u) = T_0 - \alpha u - \beta u^2 + o\left(u^2\right), \quad T_0 > 0. \tag{3}$$

Условие $T_0 > 0$ выполняется в силу требования положительности $T(u)$ во всей области определения.

Структура работы такова. В пункте 1 приведен линейный анализ уравнения (1), а в пунктах 2 и 3 изучается локальная динамика этого уравнения в зависимости от входящих в него параметров. В пункте 4 в качестве примера рассмотрено логистическое уравнение с непостоянным запаздыванием (уравнение Хатчинсона) и найдено условие реализации бифуркации Андронова – Хопфа. Подробно динамика уравнения Хатчинсона с запаздыванием, не зависящим от искомой функции, изучена в работе [15]. В качестве метода исследования динамики во всех случаях применяется метод нормальных форм.

1. Линейный анализ

Для исследования динамики уравнения (1) построим линеаризованное на нулевом состоянии равновесия уравнение

$$\dot{u} + u = au(t - T_0). \tag{4}$$

Это уравнение с постоянным запаздыванием. Хорошо известно (см., например, [16]), что его характеристический квазиполином $\lambda+1 = ae^{-\lambda T_0}$ имеет чисто мнимые корни $\lambda = 0$ при $a = 1$ и $\lambda = \pm i\omega_0$ при $a = a_0$, где ω_0 – наименьший положительный корень уравнения $\omega_0 = -tg(\omega_0 T_0)$ и $a_0 = -\sqrt{1+\omega_0^2}$. При $a > 1$ и при $a < a_0$ у него существуют корни с положительной вещественной частью, а при $a_0 < a < 1$ все корни расположены слева от мнимой оси. Таким образом, уравнение (4) экспоненциально устойчиво при $a \in (a_0, 1)$ и экспоненциально неустойчиво при $a < a_0$ или $a > 1$. Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Нулевое решение уравнения* (1) *асимптотически устойчиво при* $a \in (a_0, 1)$ *и неустойчиво при* $a < a_0$ *или* $a > 1$.

Таким образом, значения $a = a_0$ и $a = 1$ являются точками бифуркации нулевого состояния равновесия уравнения (1). Изучим, как происходит потеря устойчивости при переходе параметра a через эти значения.

2. Бифуркация обмена устойчивостью

Изучим сначала случай, когда $a = 1+\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Воспользуемся методом нормальных форм (см., например, [17–19]) и сделаем в уравнении (1) асимптотическую замену

$$u(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{5}$$

где $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$\dot{u} = \varepsilon^2 z'(\tau) + o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$u\left(t - T_0\right) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2\left(x_2(\tau) - T_0 z'(\tau)\right) + o(\varepsilon^2).$$

Учитывая малость u, запишем уравнение (1) в ином виде. Для этого, воспользовавшись равенством (3), формально напишем тейлоровское разложение для $u(t-T(u))$:

$$u(t - T(u)) = u(t - T_0) + \dot{u}(t - T_0)\left(\alpha u + \beta u^2\right) + \frac{\ddot{u}(t - T_0)}{2}\left(\alpha u + \beta u^2\right)^2 + \dots$$

и подставим это разложение в (1):

$$\begin{aligned}\dot{u} + u = (1+\varepsilon)u(t - T_0) + (1+\varepsilon)\dot{u}(t - T_0)\left(\alpha u + \beta u^2\right) + \\ + \frac{(1+\varepsilon)}{2}\ddot{u}(t - T_0)\left(\alpha u + \beta u^2\right)^2 + \\ + f_2\left[u^2(t - T_0) + 2\alpha\dot{u}(t - T_0)uu(t - T_0)\right] + f_3 u^3(t - T_0) + \dots\end{aligned} \tag{6}$$

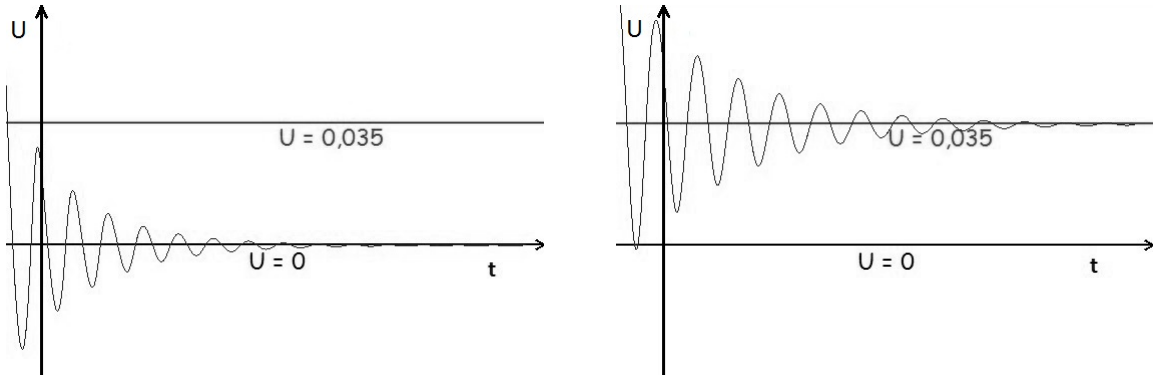


Рис. 1. Графики решений уравнения (1) при $a = 0.93$ (слева) и $a = 1.07$ (справа)
Fig. 1. Graphs of solutions of equation (1) at $a = 0.93$ (left) and at $a = 1.07$ (right)

Порядок слагаемых в правой части (6), содержащих производную функции u, будет выше ε^2. После подстановки (5) в (6) получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^2 z' + \varepsilon z + \varepsilon^2 x_2 + \ldots = \varepsilon z - \varepsilon^2 T_0 z' + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^2 z + f_2 \varepsilon^2 z^2 + \ldots$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. При ε получаем тождество, а при ε^2 имеем

$$(1 + T_0) z' = z + f_2 z^2. \tag{7}$$

Получившееся уравнение (7) является нормальной формой для (1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к 1.

Теорема 2. *Уравнение* (7) *имеет неустойчивое состояние равновесия* $z_0 = 0$ *и устойчивое при всех* $f_2 \neq 0$ *состояние равновесия* $z_1 = -1/f_2$, *которому соответствует асимптотически устойчивое при всех* $T_0 > 0$, α, β, $f_2 \neq 0$, f_3 *состояние равновесия* u_1 *уравнения* (1) *со следующей асимптотикой:*

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{f_2} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Таким образом, в уравнении (1) при $a = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) происходит следующая бифуркация: если $\varepsilon < 0$, то нулевое состояние равновесия этого уравнения (локально) асимптотически устойчиво; если $\varepsilon > 0$, то нулевое состояние равновесия неустойчиво, но состояние равновесия u_1 становится (локально) асимптотически устойчивым при всех $T_0 > 0$, α, β, $f_2 \neq 0$, f_3. Рис. 1 иллюстрирует эту ситуацию.

3. Бифуркация Андронова – Хопфа

3.1. Построение нормальной формы

Здесь изучим изменение поведения решений уравнения (1) в окрестности нуля при переходе a через a_0. Положим в (1) $a = a_0(1 + \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$.

Согласно идеологии метода нормальных форм сделаем в (1) асимптотическую замену

$$u = \sqrt{\varepsilon}\left(e^{i\omega_0 t} z(\tau) + e^{-i\omega_0 t}\bar{z}(\tau)\right) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{8}$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $u_i(t,\tau)$ $(i = 2,3)$ — периодические по t функции с периодом $2\pi/\omega_0$.

После подстановки получится равенство, в левой и правой частях которго стоят ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Начнем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях.

При $\sqrt{\varepsilon}$ будет тождество, а при ε получим линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным запаздыванием относительно функции u_2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - a_0 u_2(t - T_0, \tau) = |z|^2 \left[2f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha\right] + \\ + e^{2i\omega_0 t} z^2 \left[e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha\right] + e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 \left[e^{2i\omega_0 T_0} f_2 - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha\right]. \quad (9)$$

В правой части этого уравнения нет резонансных слагаемых, поэтому его решение ищем в виде $u_2 = d_1 e^{2i\omega_0 t} z^2 + \bar{d}_1 e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 + d_2 |z|^2$. Подставляя это в (9), определяем d_1, d_2:

$$d_1 = \frac{e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha}{1 + 2i\omega_0 - a_0 e^{-2i\omega_0 T_0}}, \quad d_2 = \frac{2f_2 - 2\omega_0^2 \alpha}{1 - a_0}. \quad (10)$$

При $\varepsilon^{3/2}$ опять получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным запаздыванием относительно функции u_3:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 - a_0 u_3(t - T_0, \tau) = e^{3i\omega_0 t} z^3 k + e^{-3i\omega_0 t} \bar{z}^3 \bar{k} + \\ + e^{i\omega_0 t} \left(-r z' + \mu z + \nu z |z|^2\right) + e^{-i\omega_0 t} \left(-\bar{r} \bar{z}' + \bar{\mu} \bar{z} + \bar{\nu} \bar{z} |z|^2\right), \quad (11)$$

где

$$r = 1 + T_0 + i\omega_0 T_0, \quad \mu = 1 + i\omega_0, \quad (12)$$

$$\nu = \omega_0 \left[-3\omega_0 \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2}\right) + i\left(\beta - \frac{\omega_0^2 \alpha^2}{2}\right)\right] + 3f_3 \frac{1 + i\omega_0}{a_0} + \\ + \frac{d_1}{a_0} \left[2f_2 - 4\omega_0^2 \alpha - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 \left(2f_2 + 2\left(1 - \omega_0^2\right)\alpha - a_0 \alpha\right)\right] + \\ + \frac{d_2}{a_0} \left[2f_2 - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 \left(2f_2 + a_0 \alpha\right)\right] - 2\omega_0 f_2 \alpha \frac{2\omega_0 - i\left(1 - \omega_0^2\right)}{a_0^2},$$

а числа d_1 и d_2 определены формулами (10). Точное значение константы k нам не важно. Уравнение (11) содержит в правой части резонансные слагаемые, т.к. характеристическое уравнение для уравнения (4) при $a = a_0$ имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$. Из условия разрешимости уравнения (11) в классе ограниченных функций получаем нормальную форму для уравнения (1)

$$r z' = \mu z + \nu z |z|^2. \quad (13)$$

3.2. Анализ нормальной формы

Переходя в (13) к полярным координатам с помощью замены $z(\tau) = \rho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}$ $(\rho(\tau) > 0)$ и вводя обозначения

$$\eta = Re\,\frac{\mu}{r}, \quad \xi = Im\,\frac{\mu}{r}, \quad d = Re\,\frac{\nu}{r}, \quad c = Im\,\frac{\nu}{r},$$

получим:

$$\begin{cases} \dot\rho = \eta\rho + d\rho^3 \\ \dot\varphi = \xi + c\rho^2. \end{cases} \tag{14}$$

В случае $\eta > 0$, $d < 0$ у первого уравнения все решения $\rho(\tau)$ стремятся к состоянию равновесия $\rho_0 = (-\eta/d)^{1/2}$, т.е. все решения $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ притягиваются к циклу радиуса ρ_0; а при $\eta > 0$, $d > 0$ все решения (кроме нулевого) монотонно стремятся к бесконечности. Формула (8) связывает периодическое решение системы (14) с периодическим решением уравнения (1) для поставленной задачи. Таким образом, для исследования локальной динамики уравнения (1) необходимо определить знаки вещественных чисел η и d.

Имеем $\eta = (1 + T_0 + \omega_0^2 T_0)|r|^{-2} > 0$ в силу равенств (12) и неравенства $T_0 > 0$, поэтому осталось лишь определить знак d.

После выполнения стандартных действий получим для d следующее выражение:

$$d = \frac{V(a_0)}{a_0^2(a_0-1)(5a_0+4)|r|^2}. \tag{15}$$

Здесь $V(a_0)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} V(a_0) = \frac{\alpha^2}{2} a_0^2 \left(a_0^2-1\right)\left[p_1(a_0) + T_0 p_2(a_0)\right] - 2f_2^2[p_3(a_0) + T_0 p_4(a_0)] + \\ + f_2 \alpha a_0 \left(a_0^2-1\right)\left[p_5(a_0) + T_0 p_6(a_0)\right] + 3f_3 a_0 (a_0-1)(5a_0+4)(1+T_0 a_0^2) - \\ - \beta a_0^2 \left(a_0^2-1\right)(a_0-1)(5a_0+4)(3+2T_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_1(a_0) &= 10a_0^3 + a_0^2 - 33a_0 - 20, & p_2(a_0) &= -5a_0^4 + 15a_0^3 + 10a_0^2 - 38a_0 - 24, \\ p_3(a_0) &= 2a_0^3 + 13a_0^2 + 4a_0 - 4, & p_4(a_0) &= a_0^2\left(11a_0^2 + 6a_0 - 2\right), \\ p_5(a_0) &= 11a_0^2 + 12a_0 + 4, & p_6(a_0) &= 2a_0^2(4a_0+5). \end{aligned}$$

Так как знаменатель в правой части (15) положителен, то знак d определяется знаком $V(a_0)$.

То есть, если параметры $T_0 > 0$, α, β, f_2, f_3 таковы, что $V(a_0) < 0$, то в системе (14) у первого уравнения все решения $\rho(\tau)$ стремятся к состоянию равновесия ρ_0. Если $V(a_0) > 0$, то все решения этого уравнения монотонно стремятся к бесконечности.

3.3. Вывод

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1) $a = a_0(1+\varepsilon)$. Пусть при этом параметры $T_0 > 0$, α, β, f_2, f_3 таковы, что $V(a_0) < 0$. Тогда при $\varepsilon < 0$ нулевое положение равновесия уравнения (1) устойчиво; при $0 < \varepsilon \ll 1$ оно неустойчиво, а единственным устойчивым режимом в его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности является периодическое решение со следующей асимптотикой:*

$$u = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon}\cos\left(\left(\omega_0 + o(1)\right)t\right) + o\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Отметим, что если $V(a_0) > 0$, то задача исследования динамики уравнения (1) становится нелокальной: в окрестности нулевого состояния равновесия нет устойчивых режимов. Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 в уравнении (1) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Эта ситуация изображена на Рис. 2. В левой части изображен график решения уравнения (1) в случае, когда $\varepsilon < 0$; как видно, нулевое состояние равновесия устойчиво. Правая часть демонстрирует случай, когда $\varepsilon > 0$; видно, что траектория, изображенная на этом рисунке, приближается к периодической траектории.

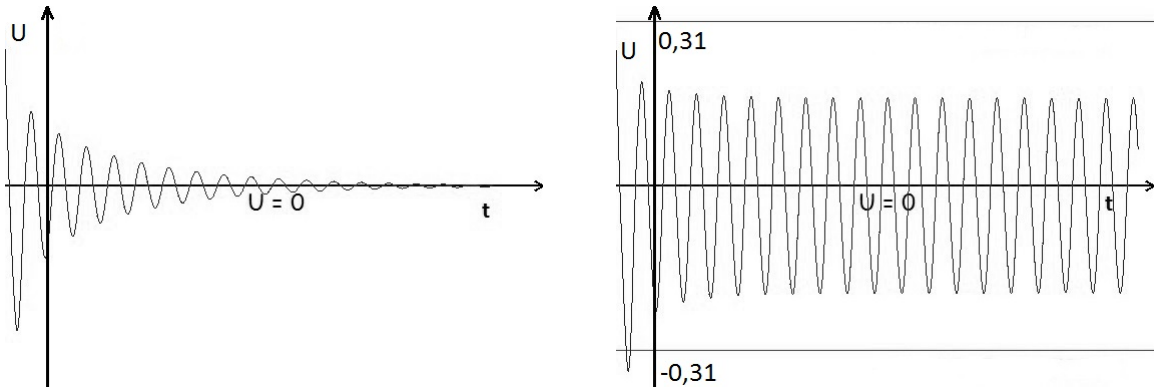


Рис. 2. Графики решений уравнения (1) при $\varepsilon = -0.1$ (слева) и $\varepsilon = 0.1$ (справа)
Fig. 2. Graphs of solutions of equation (1) at $\varepsilon = 0.93$ (left) and at $\varepsilon = 1.07$ (right)

4. Локальная динамика логистического уравнения с переменным запаздыванием

Уравнение Хатчинсона

$$\dot{N} = \lambda N\left(1 - N\left(t - T\right)\right)$$

принадлежит к числу фундаментальных уравнений математической экологии (см., например, [20]). Здесь мы рассмотрим это уравнение в случае, когда запаздывание зависит от искомой функции:

$$\dot{N} = \lambda N\left[1 - N\left(t - T(N(t))\right)\right], \tag{16}$$

$\lambda > 0$ – параметр. Предположим ограниченность решения $N(t)$ при $t \geqslant 0$ некоторой константой $M > 0$, положительность и ограниченность сверху константой $T_1 > 0$ во всей области определения аналитической функции $T(N)$. Также без ограничения общности предположим, что $T(1) = 1$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику (16) в малой окрестности $N = 1$.

Для этого рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\dot{N} = -\lambda N(t-1).$$

Про его характеристическое уравнение $\mu = -\lambda e^{-\mu}$ известно, что при $\lambda < \pi/2$ все корни этого уравнения лежат слева от мнимой оси, при $\lambda > \pi/2$ существует корень с

положительной вещественной частью, а при $\lambda = \pi/2$ характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Это означает, что при $\lambda \in (0, \pi/2)$ решение $N = 1$ асимптотически устойчиво, при $\lambda > \pi/2$ оно неустойчиво, а при $\lambda = \pi/2$ реализуется критический случай. Также известно, что это стационарное решение теряет устойчивость в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Делая в (16) замену $N(t) = 1+u(t)$ с $u(t)$ близкой к нулю и раскладывая $T(1+u)$ по формуле Тейлора

$$T(1+u) = 1 - \alpha u - \beta u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\dot{u} = -\lambda(1+u)u\left(t - 1 + \alpha u + \beta u^2 + \ldots\right). \tag{17}$$

Положим $\lambda = \pi/2 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Аналогично пункту 3 используем метод нормальных форм, делая в (17) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon}\left(z(\tau)e^{i\pi t/2} + \bar{z}(\tau)e^{-i\pi t/2}\right) + \varepsilon u_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau) + o\left(\varepsilon^{3/2}\right),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а функции $u_i(t,\tau)$ $(i = 2, 3)$ 4–периодические по t. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$, при $\varepsilon^{3/2}$ из условия выбора функции $u_3(t,\tau)$ ограниченной получаем, что нормальная форма уравнения (16) задается уравнением

$$rz' = \mu z + \nu z|z|^2, \tag{18}$$

где

$$r = 1 + i\frac{\pi}{2}, \quad \mu = i,$$

$$\nu = \frac{9\alpha^2\pi^3(2-i)}{80} - \frac{8\alpha\pi^2(1+2i)}{40} - \frac{30\beta\pi^2}{40} + \frac{(1-3i)\pi}{10}.$$

Сохраняя обозначения пункта 3.2, сделаем в (18) замену $z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}$ и получим систему вида (14), где $\eta = Re(\mu/r) = 2\pi(4+\pi^2)^{-1} > 0$, а первая ляпуновская величина

$$d = Re\left(\frac{\nu}{r}\right) = \frac{\pi}{40\,(4+\pi^2)}\left[9\pi^2(4-\pi)\alpha^2 - 32\pi(1+\pi)\alpha - 120\beta\pi - 24\pi + 16\right].$$

Выполнение условия $d < 0$ говорит о том, что в уравнении (16) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Неравенство $d < 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} \beta_0 < \beta, \\ \alpha_-(\beta) < \alpha < \alpha_+(\beta). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь

$$\beta_0 = \frac{1}{135\pi(4-\pi)}\left[9(\pi-4)(3\pi-2) - 32(1+\pi)^2\right],$$

$$\alpha_\pm(\beta) = \frac{16(1+\pi) \pm 2\sqrt{2D(\beta)}}{9\pi(4-\pi)},$$

$$D(\beta) = 32(1+\pi)^2 + 135\beta\pi(4-\pi) + 9(4-\pi)(3\pi-2).$$

Приближенные значения для $\beta_0, \alpha_\pm$ таковы:

$$\beta_0 \approx -1.67,$$
$$\alpha_\pm \approx 2.7 \pm 0.1\sqrt{364\beta + 606}.$$

На Рис. 3 изображена область (19).

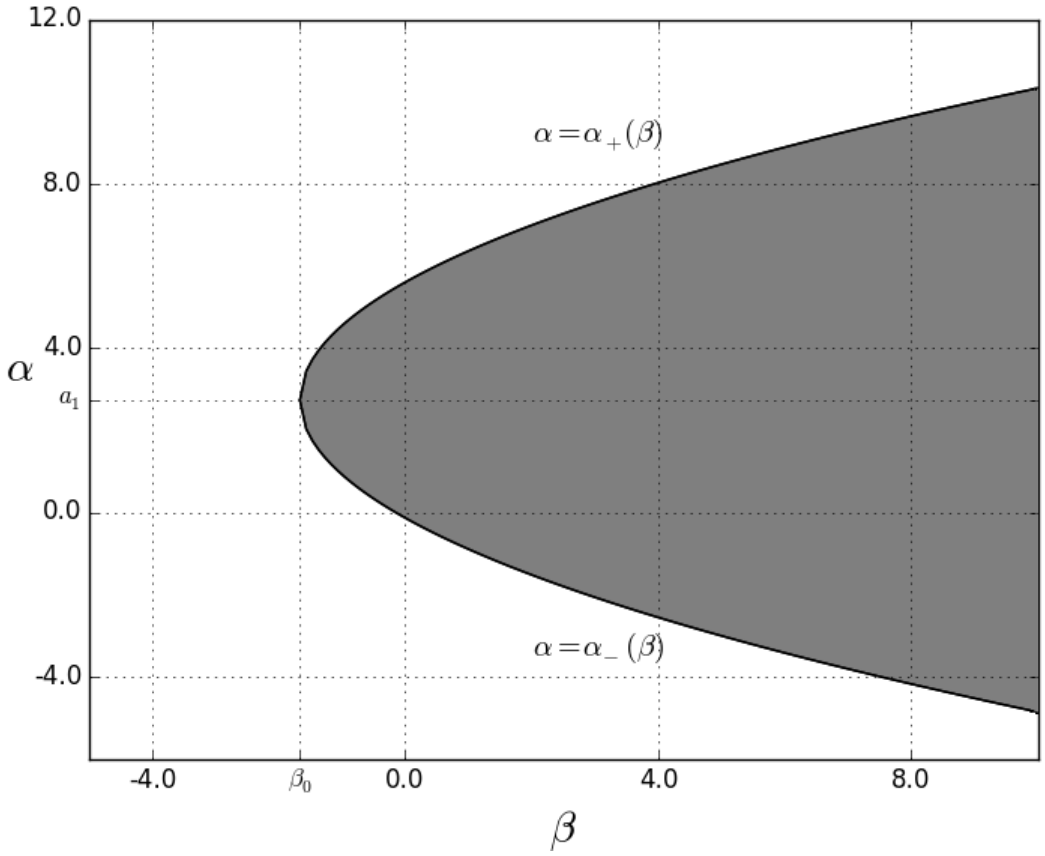


Рис. 3. Область значений параметров α, β, при которых происходит бифуркация
Fig. 3. Domain of values of parameters α, β, at which bifurcation occurs

Заключение

В работе для уравнения (1) были изучены способы потери устойчивости нулевым положением равновесия при переходе параметра a через значения 1 и a_0. А именно: в первом случае установлено возникновение бифуркации обмена устойчивостью, а во втором случае найдено достаточное условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. В обоих случаях получены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркации. Полученные результаты применены к исследованию локальной динамики уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием.

Автор выражает благодарность Кащенко И.С. за постановку задачи, содержательные обсуждения и важные замечания.

Список литературы / References

[1] Валентайн Р. С., "Экономичность, устойчивость и работоспособность ЖРД", *Вопросы ракетной техники*, **1**:217 (1973); [Valentayn R. S., "Ekonomichnost, ustoychivost i rabotosposobnost ZhRD", *Voprosy raketnoy tekhniki*, **1**:217 (1973), (in Russian).]

[2] Sabersky R. H., "Effect of wave propagation in feed lines on low frequency rocket instability", *Jet Propulsion*, **24**:172 (1964).

[3] Crocco L., Harrje D. T., Reardon F. H., "Transverse combustio instability in liquid propellant rocket motors", *ARS Journal*, **32**:3 (1962).

[4] Reardon F. H., Crocco L., Harrje D. T., "Velocity effects in transverse mode liquid propellant rocket combustion instability", *AIAA Journal*, **2**:9 (1964).

[5] Колесов Ю. С., Швитра Д. И., "Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя", *Литовский математический сборник*, **15**:4 (1975); [Kolesov Yu. S., Shvitra D. I., "Matematicheskoe modelirovanie protsessa goreniya v kamere zhidkostnogo raketnogo dvigatelya", *Litovskiy matematicheskiy sbornik*, **15**:4 (1975), (in Russian).]

[6] Zager M. G., Schlosser P. M., Tran H. T., "A delayed nonlinear PBPK model for genistein dosimetry in rats", *Bulletin of Mathematical Biology*, **69** (2007), 93–117.

[7] Hu Q., Wu J., "Global Hopf bifurcation for differential equations with state-dependent delay", *Journal of Differential Equations*, **248**:12 (2010), 2801–2840.

[8] Brokate M., Colonius F., "Linearizing equations with state-dependent delays", *Appl. Math. Optim.*, **21** (1990), 45–52.

[9] Cooke K. L., Huang W. Z., "On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:5 (1996), 1417–1426.

[10] Hartung F., Turi J., "On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations", *J. Differential Equations*, **135** (1997), 192–237.

[11] Driver R. D., "Existence theory for a delay-differential system", *Contrib. Different. Equat.*, **1**:3 (1963).

[12] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971; English transl.: Elsgolts L. E., Norkin S. B., *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, 1973.

[13] Halanay A., Yorke J., "Some new results and problems in the theory of differential-delay equations", *SIAM Rev.*, **13**:1 (1971).

[14] Кащенко И. С., Кащенко С. А., "Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием, зависящим от искомой функции", *Доклады академии наук*, **464**:5 (2015), 521–524; English transl.: Kashchenko I. S., Kashchenko S. A., "Local Dynamics of an Equation with a Large State Dependent Delay", *Doklady Mathematics*, **92**:2 (2015), 1–4.

[15] Кащенко С. А., "Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона", *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 32; English transl.: Kashchenko S. A., "Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation", *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 470–494.

[16] Кащенко Д. С., Кащенко И. С., *Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие*, Ярославль, 2006; [Kashchenko D. S., Kashchenko I. S., *Dinamika uravneniy pervogo poryadka s zapazdyvaniem: uchebnoe posobie*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]

[17] Брюно А. Д., *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979; English transl.: Bryuno A. D., *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer, 1989.

[18] Marsden Dzh., Mak-Kraken M., *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*, Mir, M., 1980.

[19] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[20] Yang Kuang, *Delay Differential Equations*, With Applications in Population Dynamics, Academic Press, 1993.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-711-722

Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation

Golubenets V. O.

Received May 15, 2015

In this paper, a first-order equation with state-dependent delay and with a nonlinear right-hand side is considered. Conditions of existence and uniqueness of the solution of initial value problem are supposed to be executed. The task is to study the behavior of solutions of the considered equation in a small neighborhood of its zero equilibrium. Local dynamics depends on real parameters which are coefficients of equation right-hand side decomposition in a Taylor series. The parameter which is a coefficient at the linear part of this decomposition has two critical values which determine a stability domain of zero equilibrium. We introduce a small positive parameter and use the asymtotic method of normal forms in order to investigate local dynamics modifications of the equation near each two critical values. We show that the stability exchange bifurcation occurs in the considered equation near the first of these critical values, and the supercritical Andronov – Hopf bifurcation occurs near the second of them (if the sufficient condition is executed). Asymptotic decompositions according to correspondent small parameters are obtained for each stable solution. Next, a logistic equation with state-dependent delay is considered as an example. The bifurcation parameter of this equation has one critical value. A simple sufficient condition of Andronov – Hopf bifurcation occurence in the considered equation near a critical value is obtained as a result of applying the method of normal forms.

Keywords: dynamical systems, equations with delay, state-dependent delay, local dynamics, stability, stability exchange bifurcation, Andronov – Hopf bifurcation, logistic equation

For citation: Golubenets V. O., "Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 711–722.

On the authors:

Golubenets Vyacheslav Olegovich, orcid.org/0000-0002-6996-3943, undergraduate student,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: golubenets2010@yandex.ru

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 22, № 5 (2015), с. 723–730
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 22, No 5 (2015), pp. 723–730

©Тимофеев Е.А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-723-730

УДК 519.17

Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега

Тимофеев Е.А.

получена 10 июля 2015

Напомним определение сингулярной функции Лебега. Пусть в результате бросания несимметричной монеты с вероятностью p выпадает решка, а с вероятностью $q = 1 - p$ – орел. Пусть бинарное разложение $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ задается бросанием монеты бесконечно много раз, т.е. $c_k = 1$, если результат k-го бросания – решка, и $c_k = 0$, если – орел. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ:

$$L(t) = Prob\{\xi < t\}.$$

Хорошо известно, что $L(t)$ строго возрастает и ее производная равна нулю почти всюду ($p \neq q$).

Моменты сингулярной функции Лебега определяются как

$$M_n = \mathsf{E}\xi^n.$$

Основной результат работы – следующая оценка:

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Ключевые слова: моменты, само-подобие, функция Лебега, сингулярная функция, преобразование Меллина, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 723–730.

Об авторах:
Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Напомним определение сингулярной функции Лебега. Пусть в результате бросания несимметричной монеты с вероятностью p выпадает решка, а с вероятностью $q = 1 - p$ – орел. Пусть бинарное разложение $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ задается бросанием монеты бесконечно много раз, т.е. $c_k = 1$, если результат k-го бросания – решка, и $c_k = 0$, если – орел. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ:

$$L(t) = Prob\{\xi < t\}.$$

Хорошо известно, что $L(t)$ строго возрастает и ее производная равна нулю почти всюду $(p \neq q)$.

Эта функция была введена Ломницким и Уламом [2] в 1934 г. Де Рам [4] показал, что $L(t)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$L(t) = \begin{cases} qL(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ q + pL(2t-1), & 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $p + q = 1$. Салем [3] описал геометрическое построение подобных функций. Поэтому функция $L(t)$ также называется сингулярной функцией де Рама, сингулярной функцией Салема, сверткой Бернулли и само-подобной функцией. Примеры этих функций показаны на рис. 1. Изучению различных свойств сингулярных

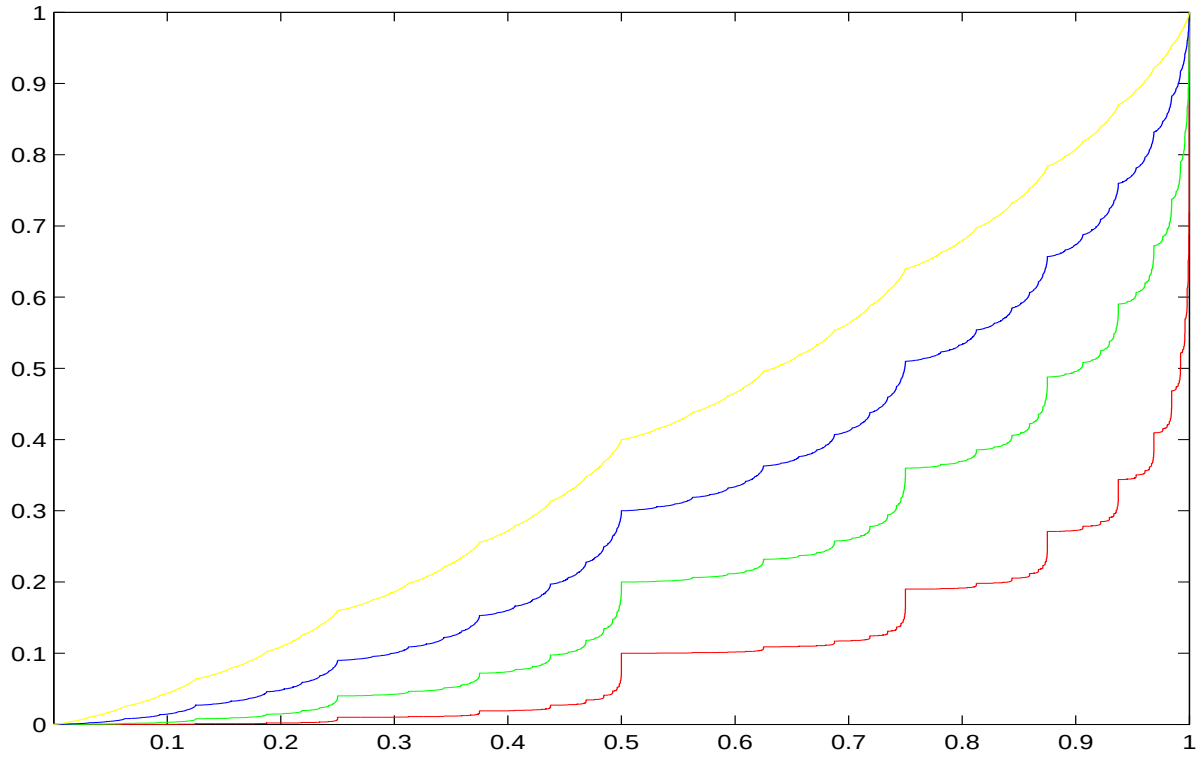


Рис. 1. Lebesgue's singular functions for $q = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$

распределений на отрезке $[0, 1]$ в последнее время посвящено большое число работ. Полученные результаты находят применение в теории чисел, теории динамических систем.

Нахождение моментов сингулярных распределений является довольно трудной задачей, и в настоящее время асимптотики моментов найдены только для функции Минковского.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2}$$

Основной результат настоящей работы

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Доказательство. Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Величины M_n удовлетворяют рекуррентному уравнению*

$$M_n = q2^{-n} M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Подставив (1) в (2), получим

$$\begin{aligned} M_n = q \int_0^{1/2} t^n dL(2t) + p \int_{1/2}^1 t^n dL(2t-1) = \\ = q2^{-n} \int_0^1 t^n dL(t) + p2^{-n} \int_0^1 (t+1)^n dL(t) = \\ = q2^{-n} \int_0^1 t^n dL(t) + p2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dL(t) = \\ = q2^{-n} M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k. \end{aligned}$$

□

Введем величины N_n как решение рекуррентного уравнения

$$N_n = q2^{-n} + p2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N_k, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$M_n \le N_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Проведем индукцию по n.

При $n = 0$ имеем $M_0 = N_0 = 1$.

Предположим, что неравенство справедливо для всех $k < n$.

Из (3) имеем

$$(1-2^{-n})M_n = p2^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}M_k \le p2^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}N_k.$$

Подставляя (4), получим

$$(1-2^{-n})M_n \le -q2^{-n} + (1-p2^{-n})N_n = -q2^{-n}(1-N_n) + (1-2^{-n})N_n \le (1-2^{-n})N_n.$$

Последнее неравенство следует из неравенства $N_n \le 1$, которое аналогично доказывается индукцией по n. □

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$M_n \ge pN_n, \quad \forall n > 0.$$

Доказательство. Проведем индукцию по n.

При $n = 1$ имеем $M_1 = p, N_1 = \dfrac{1}{2-p}$, $M_1 = p \ge \dfrac{p}{2-p}$.

Предположим, что неравенство справедливо для всех $0 < k < n$.

Из (3) и предположения индукции имеем

$$(1-2^{-n})M_n = p2^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}M_k + p2^{-n} \ge p^2 2^{-n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}N_k + p2^{-n}.$$

Подставляя (4), получим

$$\begin{aligned}(1-2^{-n})M_n \ge \\ \ge p\left(N_n - p2^{-n}N_n - 2^{-n}\right) + p2^{-n} = \\ = p(1-p2^{-n})N_n \ge \\ \ge p(1-2^{-n})N_n.\end{aligned}$$

□

Введем функцию $N(x)$, положив

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-N_n)\frac{x^n}{n!}e^{-x}. \tag{5}$$

Лемма 4.

$$N(x) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{q\Gamma(z_k)}{p^2\ln 2}x^{-z_k} + O(x^{-\alpha}), \quad \forall\alpha > 0, \tag{6}$$

где

$$z_k = -\frac{\ln p}{\ln 2} + \frac{2\pi ik}{\ln 2}. \tag{7}$$

Доказательство. Подставляя (4) в (5), получим

$$N(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} N_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} =$$

$$= 1 - q\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\frac{x^n}{n!}e^{-x} - p\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\frac{x^n}{n!}e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N_k =$$

$$= 1 - qe^{-\frac{x}{2}} - p\sum_{k=0}^{\infty} N_k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n}\frac{x^n}{(n-k)!}e^{-x} =$$

$$= q - qe^{-\frac{x}{2}} + p\sum_{k=0}^{\infty}(1-N_k)2^{-k}\frac{x^k}{k!}e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= q - qe^{-\frac{x}{2}} + pN\left(\frac{x}{2}\right).$$

Решая это рекуррентное уравнение, получим

$$N(x) = q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}\left(1 - e^{-\frac{x}{2^k}}\right). \tag{8}$$

Полученный ряд является гармонической суммой. Для нахождения гармонических сумм обычно применяется преобразование Меллина.

$$\tilde{N}(z) = \int_0^{\infty} N(x)x^{z-1}dx. \tag{9}$$

Вычисляя интегралы через гамма-функцию, получим, что в полосе $-1 < \Re z < 0$

$$\tilde{N}(z) = -q\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}2^{kz}\Gamma(z) = -\frac{q\Gamma(z)2^z}{1-p2^z}. \tag{10}$$

Функцию $\tilde{N}(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость, в которой она будет иметь простые полюса:

1) в точках $z = -n$, от функции $\Gamma(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) в точках $z = z_k$, от функции $\frac{1}{1-p2^z}$, где z_k заданы в (7).

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{N}(z)x^{-z}\,dz, \tag{11}$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $N(x)$ по формуле (11) применим теорему о вычетах.

Вычеты функции $\tilde{N}(z)$:

1) -1, в точке $z = 0$;

2) $\frac{q\Gamma(z_k)2^z}{p^2\ln 2}$ в точках $z = z_k$.

Рассмотрим в комплексной области прямоугольник

$$R(\beta,\alpha) = \{z : -\sigma \le \Re z \le \alpha;\ |\Im z| \le \frac{\pi i(2\beta+1)}{\ln 2}\},$$

где $\alpha > -\frac{\ln p}{\ln 2}$, β – челое число.

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial R(\beta,\alpha)} -\frac{q\Gamma(z)2^z}{1-p2^z}\,dz = \sum_{z_m\in R(\beta,\alpha)} Res\left(-\frac{q\Gamma(z)2^z}{1-p2^z},\ z_m\right). \tag{12}$$

Здесь интеграл по контуру берется в направлении против часовой стрелки.

Интегралы по верхней и нижней границе прямоугольника оцениваются как $O(e^{-\beta})$, поскольку гамма-функция убывает по мнимой оси экспоненциально быстро [6, 8.328.1],

$$|\Gamma(x+iy)| \le Ce^{-\pi|y|/2}|y|^{-x+1/2}.$$

Интеграл по вертикальному отрезку $\Re z = \alpha$ равен $O(x^{-\alpha})$. Полное доказательство этих утверждений проводится аналогично доказательству в [7]

Подставляя вычеты в (12), $\beta \to \infty$ получим (6). □

Перейдем к доказательству теоремы.

Из (6) имеем

$$1 - N(x) = \phi(x)x^{-\log_2 p} + O(x^{-\alpha}),$$

где

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q\Gamma(z_k)}{p^2\ln 2}x^{-\frac{2\pi ik}{\ln 2}}$$

является периодической, следовательно, ограниченной функцией от x.

Поскольку величина $1 - N(x)$ получена усреднением величин N_n (пуассонизацией), то $N_n \approx N(n)$ (см. [1, 5]).

Применяя леммы 2, 3, получим оценку теоремы. □

Список литературы / References

[1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.

[2] Lomnicki Z., Ulam S. E., "Sur la theorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilites. I. Variables independantes", *Fundamenta Mathematicae*, **23**:1 (1934), 237–278.

[3] Salem R., "On some singular monotonic functions which are strictly increasing,", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:3 (1943), 427–439.

[4] De Rham G., "On Some Curves Defined by Functional Equations", *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar (Ed.), Addison-Wesley, 1993, 285–298.

[5] Szpankowski W.,, *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[6] Gradstein I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.

[7] Timofeev E. A., "Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures", *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.

DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-723-730

Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function

Timofeev E. A.

Received July 10, 2015

Recall Lebesgue's singular function. Imagine flipping a biased coin with probability p of heads and probability $q = 1 - p$ of tails. Let the binary expansion of $\xi \in [0, 1]$: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}$ be determined by flipping the coin infinitely many times, that is, $c_k = 1$ if the k-th toss is heads and $c_k = 0$ if it is tails. We define Lebesgue's singular function $L(t)$ as the distribution function of the random variable ξ:

$$L(t) = Prob\{\xi < t\}.$$

It is well-known that $L(t)$ is strictly increasing and its derivative is zero almost everywhere ($p \neq q$). The moments of Lebesque' singular function are defined as

$$M_n = \mathsf{E}\xi^n.$$

The main result of this paper is the following:

$$M_n = O(n^{\log_2 p}).$$

Keywords: moments, self-similar, Lebesgue's function, singular, Mellin transform, asymptotic

For citation: Timofeev E. A., "Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 723–730.

On the authors:
Timofeev Evgeniy Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com