

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 23 № 1(61) 2016

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Главный редактор

В.А. Соколов,

доктор физико-математических наук, профессор, Россия

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **В.С. Афраймович**, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия; **В.Н. Белых**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Кушнарченко**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАО, Россия; **Н. Сидорова**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **М.Б. Трахтенброт**, д-р комп. наук, Израиль; **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Х. Файт**, д-р наук, проф., Австрия; **Ф. Шнеблен**, проф., Франция

Ответственный секретарь **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №1. 2016

Асимптотика моментов функции Такаги <i>Тимофеев Е. А.</i>	5
Продолжение решения на границе разрыва как решение задачи усредненной оптимизации <i>Цирлин А. М.</i>	12
A Special Role of Boolean Quadratic Polytopes among Other Combinatorial Polytopes <i>Maksimenko A. N.</i>	23
Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота <i>Кащенко С. А.</i>	41
Асимптотические разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота <i>Кащенко С. А.</i>	61
Erratum to: Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II <i>Нестеров П. Н.</i>	86

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ №ФС77-49724 от 11.05.2012 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Каталоге российской прессы "Почта России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 17.02.2016. Дата выхода в свет 29.02.2016. Формат 60x84¹/₈. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 10,0. Объем 88 с. Тираж 50 экз. Свободная цена. Заказ 002/016. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150000 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 23 No 1(61) 2016

Founded in 1999
6 issues per year

Editor-in-Chief

V. A. Sokolov,

Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

Editorial Board

S.M. Abramov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **H. Veith**, Prof., Dr. Sci., Austria

Responsible Secretary **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2016

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 1. 2016

Asymptotic Formula for the Moments of Takagi Function <i>Timofeev E. A.</i>	5
Solution Continuation on a Discontinuity Set <i>Tsirlin A. M.</i>	12
A Special Role of Boolean Quadratic Polytopes among Other Combinatorial Polytopes <i>Maksimenko A. N.</i>	23
Asymptotic Expansions of Eigenvalues of the First Boundary Problem for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points <i>Kashchenko S. A.</i>	41
Asymptotic Expansions of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Problems for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points <i>Kashchenko S. A.</i>	61
Erratum to: Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II (in Russian) <i>Nesterov P. N.</i>	86

©Тимофеев Е.А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-5-11

УДК 519.17

Асимптотика моментов функции Такаги

Тимофеев Е.А.

получена 20 декабря 2015

Аннотация. Функция Такаги является простым примером непрерывной нигде не дифференцируемой функции и определяется как

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} \rho(2^n x),$$

где

$$\rho(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|.$$

Моменты функции Такаги задаются как

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x) dx.$$

Основной результат работы – следующая оценка:

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \ln 2} \phi(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99}),$$

где функция

$$\phi(x) = \sum_{k \neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}$$

является периодической от $\log_2 x$, а через $\Gamma(x)$ и $\zeta(x)$ обозначаются гамма и дзета-функции.

Ключевые слова: моменты, само-подобие, функция Такаги, сингулярная функция, преобразование Меллина, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Асимптотика моментов функции Такаги", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:1** (2016), 5–11.

Об авторах:

Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507,
доктор. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической информатики,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Функция Такаги определяется на единичном отрезке следующим образом:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(2^n x)}{2^n}, \quad (1)$$

где $\rho(x)$ задается как $\rho(x) = \min_{n \in \mathbf{Z}} |x - n|$, т.е. $\rho(x)$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. График функции $T(x)$ показан на рис. 1.

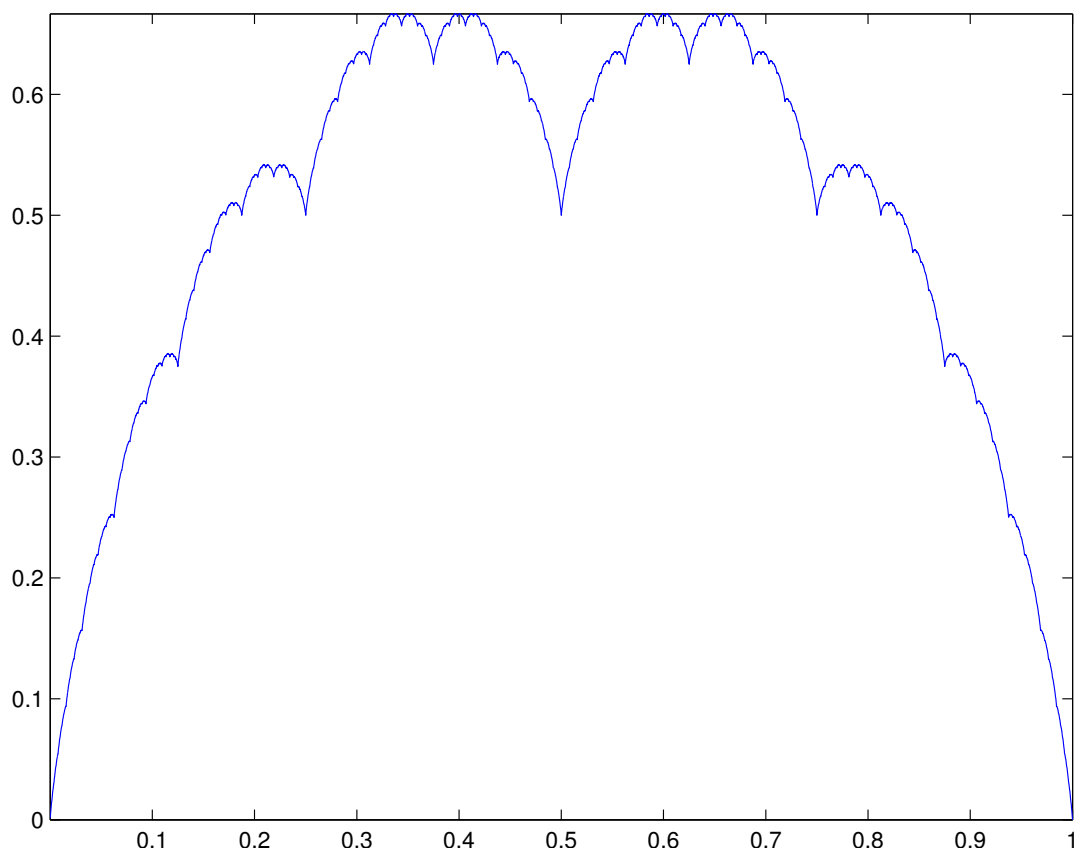


Рис. 1. График функции Такаги
 Fig. 1. Graph of the Takagi function

Функция Такаги появляется в различных областях математики (см. обзоры [3, 4]). Изучению свойств функции Такаги посвящены сотни работ. В [4, 6] найдено рекуррентное уравнение для моментов этой функции. В настоящей работе находятся асимптотики моментов этой функции.

Моментами функции $T(x)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x) dx. \quad (2)$$

Де Рам [5] показал, что $T(x)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2x) + x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \frac{1}{2}T(2x - 1) + 1 - x, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Рекуррентное уравнение для моментов M_n функции, которая удовлетворяет (3), имеет следующий вид (см. [4, 6]):

$$M_0 = \frac{1}{2}, \quad M_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2(2^{n+1}-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} M_k. \quad (4)$$

Основной результат настоящей работы

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \ln 2} \phi(n) + \mathcal{O}(n^{-3}),$$

где функция

$$\phi(x) = \sum_{k \neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}$$

является периодической от $\log_2 x$, а через $\Gamma(x)$ и $\zeta(x)$ обозначаются гамма и дзета-функции.

Отметим, что приближение

$$M_n \approx \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2}$$

справедливо для достаточно больших n , поскольку коэффициенты периодической функции $\phi(x)$ очень малы

$$\frac{2}{\ln 2} \phi(n) \approx -1.6453 * 10^{-6} \cos(2\pi \log_2 n) - 1.9520 * 10^{-6} \sin(2\pi \log_2 n),$$

а следующие слагаемые (при $k = 2$) имеют значение порядка 10^{-12} . Моменты M_n и их приближение показаны на рис. 2.

Доказательство. Приведем доказательство теоремы, которое основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Рекуррентное уравнение (4) перепишем в следующем виде:

$$M_n = 2^{-n-2} M_n + 2^{-n-2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k + \frac{1 - 2^{-n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Введем функцию $M(x)$, положив

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}. \quad (6)$$

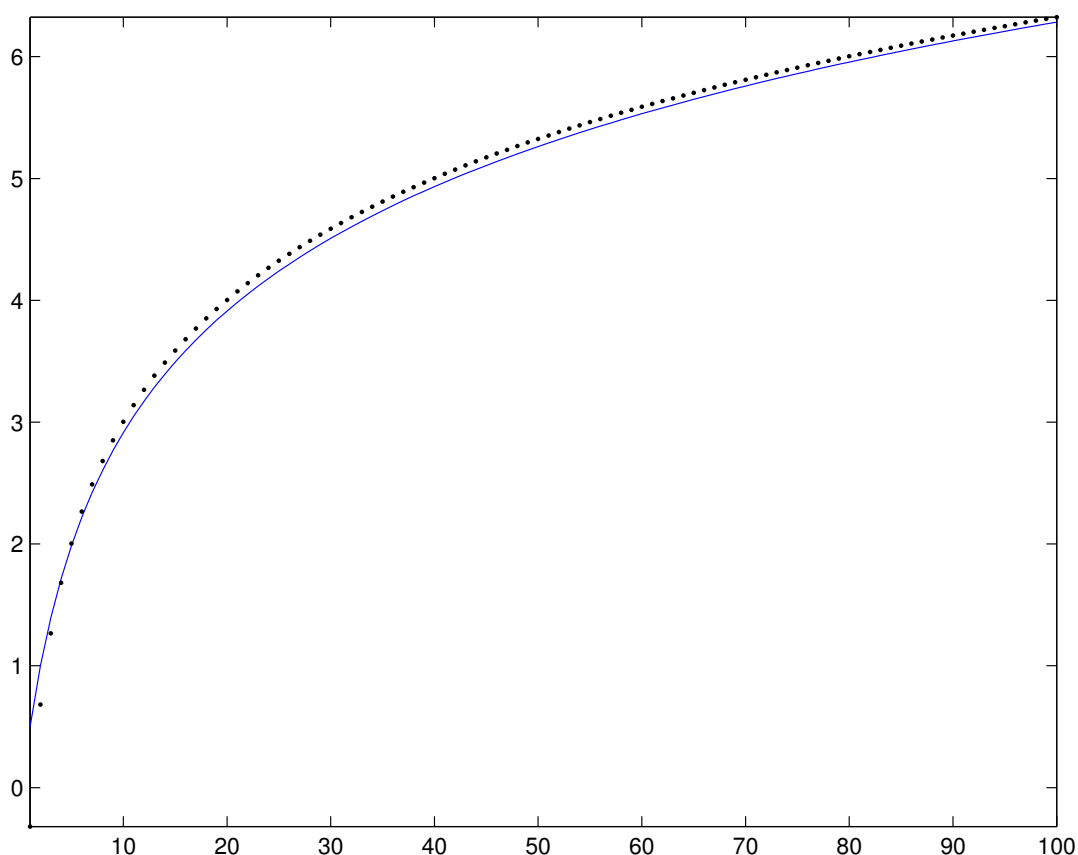


Рис. 2. График величин $n^2 M_n$ и приближения, умноженного на n^2 (точки)
 Fig. 2. The graphs of $n^2 M_n$ and its approximation multiplied by n^2 (dotted)

Подставляя (5) в (6), получим

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \frac{1 - 2^{-n-1}}{(n+1)(n+2)} = \\
 &= \frac{1}{4} M\left(\frac{x}{2}\right) e^{-x/2} + \frac{1}{4} M\left(\frac{x}{2}\right) + x^{-2} e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1 - 2^{-n+1}) = \\
 &= \frac{1}{4} (1 + e^{-x/2}) M\left(\frac{x}{2}\right) + x^{-2} (1 - e^{-x/2})^2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Введем вспомогательную функцию $G(x)$, положив

$$G(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}} M(x). \quad (8)$$

Подставив в (7), получим

$$G(x) = G\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{th}\left(\frac{x}{4}\right). \quad (9)$$

Для нахождения функции $G(x)$ применим преобразование Меллина

$$\tilde{G}(z) = \int_0^\infty G(x)x^{z-1}dx, \quad (10)$$

в результате получим

$$\tilde{G}(z) = 2^z \tilde{G}(z) + \int_0^\infty x^{z-1} \operatorname{th}\left(\frac{x}{4}\right) dx.$$

Последний интеграл вычисляется через гамма-функцию и дзета-функцию [7, 1.6.3]. Поэтому в полосе $-1 < \Re z < 0$ имеем

$$\tilde{G}(z) = \frac{(4 - 2^{z+1})\Gamma(z)\zeta(z)}{1 - 2^z}. \quad (11)$$

Функцию $\tilde{G}(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость, в которой она будет иметь полюса:

- 1) простые — в точках $z = -n$, от функции $\Gamma(z)$, $n = 1, 2, \dots$;
- 2) простые — в точках $z = z_k$, от функции $\frac{1}{1-2^z}$, где

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0; \quad (12)$$

- 3) двойной — в точке $z = 0$.

Отметим, что дзета-функция имеет простой полюс в точке $z = 1$, но функция $\tilde{G}(z)$ определена при $z = 1$.

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{G}(z)x^{-z} dz, \quad (13)$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $G(x)$ по формуле (13) применим теорему о вычетах.

Найдем вычеты функции $\tilde{G}(z)x^{-z}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0\right) &= \\ &= -\frac{(x^{-z}(4 - 2^{z+1})\Gamma(z+1)\zeta(z))'_{z=0}}{\ln 2} + \zeta(0) = \\ &= \frac{2\zeta(0)\ln x + 2\zeta(0)\ln 2 - 2\zeta(0)\Gamma'(1) - 2\zeta'(0)}{\ln 2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ [9, 9.535.2], $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$ [9, 9.542.4], получим

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0\right) = -\frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln \pi}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k\right) = -\frac{2x^{z_k}\Gamma(z_k)\zeta(z_k)}{\ln 2}.$$

Применяя теорему 4 и следствие 1 из работы [2], получим асимптотику $G(x)$ при $x \rightarrow \infty$ в следующем виде:

$$G(x) = \frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln \pi}{\ln 2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k) \zeta(z_k) x^{-z_k} + \mathcal{O}(x^{-\gamma}), \quad (14)$$

для любого $\gamma > 0$.

Возьмем $\gamma = 2$.

Из (14) и (8) получаем асимптотику функции $M(x)$

$$M(x) = \frac{\ln x - \Gamma'(1) - \ln \pi}{x^2 \ln 2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^2 \ln 2} \sum_{k \neq 0} \Gamma(z_k) \zeta(z_k) x^{-z_k} + \mathcal{O}(x^{-4}).$$

Поскольку величина $M(x)$ получена усреднением величин M_n (пуассонизацией) и функция $M(x)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению (7), то для нахождения величин M_n можно применить теорему 10.5 из [8]. Условия этой теоремы состоят в нахождении числа β , для которого верны следующие пять неравенств для достаточно больших по модулю чисел $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} 2^{-\beta} + \frac{1}{4} |e^{-z/2}| &\leq 1 - \eta; \\ |z^{-2}(1 - e^{-z/2})| &\leq B\eta z^\beta; \end{aligned}$$

в конусе $S_\theta = \{z : |\Im z| \leq \theta \Re z\}$, где $0 < \eta < 1$, $0 < \theta < \pi/2$, $B > 0$ – некоторые константы;

и неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} e^{x/2} &\leq \frac{1}{3} e^{\alpha|z|/2}, \\ \frac{1}{4} |e^{-z/2}| e^{x/2} &\leq \frac{1}{3} e^{\alpha|z|/2}, \\ |z^{-2}(1 - e^{-z/2})| e^x &\leq \frac{1}{3} e^{\alpha|z|}, \end{aligned}$$

вне конуса S_θ , где $\alpha < 1$ – некоторая константа.

Нетрудно видеть, что эти неравенства выполняются при любом $\beta > -2$. Следовательно, теорема 10.5 из [8] применима и выполняется оценка

$$M_n = M(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99})$$

при $\beta = -1.99$. □

Список литературы / References

- [1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Flajolet P., Gourdon X., Dumas P., “Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums”, *Theoretical Computer Science*, **144**:1–2 (1995), 3–58.
- [3] Jeffrey C. Lagarias, “The Takagi function and its properties”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B34** (2012), 153–189.
- [4] Pieter C. Allaart, Kiko Kawamura, “The Takagi Function: a Survey”, *Real Anal. Exchange*, **37**:1 (2011), 1–54.
- [5] De Rham G., “On Some Curves Defined by Functional Equations”, *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 285–298.
- [6] Kairies H.-H., Darsow W. F., Frank M. J., “Functional equations for a function of van der Waerden type”, *Rad. Mat.*, **4**:2 (1988), 361–374.
- [7] Oberhettinger F., *Tables of Mellin Transforms*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [8] Szpankowski W., *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [9] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.

Timofeev E. A., "Asymptotic Formula for the Moments of Takagi Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 5–11.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-5-11

Abstract. Takagi function is a simple example of a continuous but nowhere differentiable function. It is defined by

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \rho(2^k x),$$

where

$$\rho(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|.$$

The moments of Takagi function are defined as

$$M_n = \int_0^1 x^n T(x) dx.$$

The main result of this paper is the following:

$$M_n = \frac{\ln n - \Gamma'(1) - \ln \pi}{n^2 \ln 2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2 \ln 2} \phi(n) + \mathcal{O}(n^{-2.99}),$$

where

$$\phi(x) = \sum_{k \neq 0} \Gamma\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\ln 2}\right) x^{-\frac{2\pi i k}{\ln 2}}.$$

Keywords: moments, self-similar, Takagi function, singular, Mellin transform, asymptotic

On the authors:

Timofeev Evgeniy Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com

©Цирлин А. М., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-12-22

УДК 62-50

Продолжение решения на границе разрыва как решение задачи усредненной оптимизации

Цирлин А. М.

получена 15 мая 2015

Аннотация. Движение объекта, характеризующегося обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с разрывными правыми частями вдоль поверхности разрыва, называют скользящим режимом. Требуется найти связь правой части уравнения скольжения с характеристиками системы (продолжить решение системы на поверхности разрыва). В статье предложено продолжение, базирующееся на решении задачи усредненной оптимизации. Показано, что для известных примеров решение задачи усредненной оптимизации приводит к результатам, совпадающим с методом А.Ф. Филиппова, и позволяет расширить эти методы на широкий класс многомерных задач. Изложены условия оптимальности усредненной задачи нелинейного программирования и примеры их использования для случаев обычного и вырожденного решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, скользящие режимы, усредненная оптимизация

Для цитирования: Цирлин А. М., "Продолжение решения на границе разрыва как решение задачи усредненной оптимизации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 12–22.

Об авторах: Цирлин Анатолий Михайлович, orcid.org/0000-0002-3637-6160, д-р техн. наук, профессор,

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

ул. Петра Первого, 4а, с. Веськово, Переславский р-он Ярославская обл. 152020 Россия, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Введение

Скользящие режимы в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), являются предметом многочисленных и многолетних исследований (см. [1]–[10]). Краткий обзор их проблематики содержится в статье В.И. Уткина [11].

Общие геометрические представления. Для динамических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in R^n$$

условия существования и единственности решения для некоторых x, t могут быть не выполнены. В частности потому, что правая часть дифференциального уравнения для этих значений аргумента может принимать не одно, а несколько значений. Эти значения вектора f называют *возможными скоростями*. Их число K в общем

случае может быть любым, а тогда, когда в функцию f входит управление, число возможных скоростей может быть бесконечным. Согласно представлениям, развитым в [12], [13], скорость движения такой системы в направлении γ представляет собой вектор, принадлежащий выпуклой оболочке CoF , направление которого совпадает с γ , где F – множество возможных скоростей в точке x, t . Если $K \leq n$, то выпуклая оболочка F представляет собой плоскость или прямую и пересечение ее с вектором γ в неособом случае единственно, что однозначно определяет вектор скорости системы в выбранном направлении. Если $K > n$, то CoF имеет внутренние точки и скорость системы в направлении γ не единственна. Существуют пределы, в которых она может изменяться.

Применительно к задаче доопределения скорости системы вдоль поверхности скольжения возникают три вопроса:

- Как выбрать направление γ ?
- Как найти скорость скольжения в том случае, когда она единственна?
- Как найти предельное значение скорости скольжения в том случае, когда она не единственна?

Целью дальнейшего изложения является ответ на эти вопросы.

Постановка задачи. Задача ставится таким образом:

Рассматривается система

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x, f \in R^n, \quad u \in R^k. \quad (1)$$

Управление u и непрерывная по u функция f испытывают разрыв на поверхностях $x \in S$, характеризующихся условиями

$$s_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n - 1, \quad (2)$$

так что

$$\begin{aligned} f(x, t, u) &= f_+^i(x, t, u), \quad \text{если } s_i > 0, \\ f(x, t, u) &= f_-^i(x, t, u), \quad \text{если } s_i < 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции f_+^i, f_-^i дифференцируемы по x, t . Решение уравнений (1) для любой из них существует и единственно, причем

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{j+}(x, t, u) + \frac{\partial s_i}{\partial t} < 0, \\ \frac{ds_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{j-}(x, t, u) + \frac{\partial s_i}{\partial t} > 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия притяжения к поверхности переключения (4) выполнены для всех $t > 0$ и $x \in S$. В силу условий (4) система, оказавшись на поверхности переключения, движется вдоль этой поверхности в режиме переключения управления с большой частотой (скользящий режим). Задачей, которую ставили перед собой многочисленные исследователи [12]–[18], было выяснение того, какому уравнению подчинено движение системы вдоль поверхности (2):

$$\dot{x} = f_{sm}(x, t), \quad x(0) \in S. \quad (5)$$

Уравнение (5) называют уравнением скольжения.

В работе А.Ф. Филиппова [12] предложено находить $f_{sm}(x, t)$ для каждого значения x, t как элемент выпуклой оболочки, натянутой на векторы $f_+(x, t)$ и $f_-(x, t)$ и удовлетворяющий условиям скольжения вдоль поверхности разрыва:

$$\frac{ds_i}{dt} = f_{si}(x, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_{sm}^j(x, t) + \frac{\partial s_i}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

В статье [11] дано уточнение метода А.Ф. Филиппова и показано, что задачи, вызывавшие сомнения в его справедливости, могут быть решены методом Филиппова с учетом предложенного уточнения. Отметим, что А.Ф. Филипповым рассмотрен только случай, когда вектор скоростей принимает два значения, а поверхность скольжения одномерна, и высказано предположение, что подобный подход можно распространить на многомерные задачи.

Ниже высказана гипотеза, что уравнение скольжения может быть получено как уравнение движения усредненной системы с использованием методов усредненной оптимизации. Это позволяет с использованием стандартных алгоритмов рассмотреть самые разнообразные постановки задач для многомерных систем с разрывными правыми частями.

1. Множество скоростей системы в окрестности поверхности скольжения. Усредненная система

Поверхности $s_i(x) = 0$ разбивают фазовое пространство системы (1) на 2^m подпространств x_r , $r = 1, \dots, 2^m$, в каждом из которых может быть свое сочетание знаков s_i , а значит, в каждом из которых может быть свой вектор скоростей $f(x, u, t)$.

Обозначим множество этих векторов через $F(x, u, t)$. В силу (4) множество подпространств x_r и множество скоростей F можно разделить на два подмножества так, что каждому вектору скорости $f_+(x, t, u)$ в одном из подпространств x_r соответствует вектор $f_-(x, t, u)$, для которого знаки функций $s_i(x)$ противоположны.

Общее число векторов скоростей системы для фиксированных значений t и $x \in S$ может быть и меньше, чем 2^m . Важно лишь, чтобы в каждом подпространстве x_r были выполнены условия притяжения (4).

Усредненная система

Сопоставим системе (1) усредненную систему уравнений

$$\dot{x} = \overline{f(x, u, t)}^u, \quad x(0) \in S. \quad (7)$$

Здесь

$$\overline{f(x, u, t)}^u = \int_{V_u} f(x, u, t) P(u, x, t) du \quad (8)$$

среднее значение вектора скорости изменения x на множестве возможных управлений $V_u(x, t)$. При этом выбор меры $P(u, x, t)$ ограничен условиями равенства нулю среднего значения скорости изменения каждой из функций $s_i(x, t)$ в силу уравнений (1):

$$\overline{f_{s_i}(x, u, t)}^u = \int_{V_u} f_{s_i}(x, u, t) P(u, x, t) du = 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Здесь

$$f_{s_i}(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} f_j(x, u, t) + \frac{\partial s_i(x, t)}{\partial t}. \quad (10)$$

Кроме условий (9), функция $P(u, x, t)$ удовлетворяет требованиям:

$$\int_{V_u} P(u, x, t) du = 1, \quad P(u, x, t) \geq 0 \quad \forall u \in V_u. \quad (11)$$

Любая мера $P^0(u, x, t)$, определенная на множестве $V_u(x, t)$ и удовлетворяющая условиям (9), (11), будучи подставлена в уравнения (6), порождает функцию

$$f_{sm}^0(x, t) = \int_{V_u} f(x, u, t) P^0(u, x, t) du, \quad (12)$$

которую назовем скоростью скольжения. Система в скользящем режиме характеризуется уравнениями

$$\dot{x}_s^0 = f_{sm}^0(x, t), \quad x_s(0) \in S. \quad (13)$$

Далее покажем, что предложенное доопределение совпадает с доопределением А.Ф. Филиппова для рассмотренных им случаев движения вдоль линии переключения на двумерной фазовой плоскости. Чтобы выяснить, как найти меру $P^0(u, x, t)$, в каком случае она, а значит, и f_{sm}^0 единственны и в каком случае таких допустимых мер несколько, остановимся на способах решения усредненных задач оптимизации [19].

2. Решение задач усредненной оптимизации

Напомним, как находят решение $P^*(u)$ усредненной задачи нелинейного программирования:

$$\overline{f_0(u)} \longrightarrow \max \overline{f_i(u)} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad u \in V_u. \quad (14)$$

Оптимальное решение этой задачи сосредоточено в дискретных точках

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^m \mu_\nu \delta(u - u^\nu), \quad (15)$$

где δ — функция Дирака, u^ν — называют базовыми значениями вектора u .

Базовые значения управления u , размерность которого может быть любой, определяют из решения минимаксной задачи:

$$L(\lambda, u) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(u) \longrightarrow \min_{\lambda} \max_{u \in V_u}. \quad (16)$$

Множители λ_i не равны нулю одновременно. На оптимальном решении значения функции Лагранжа $L(\lambda^*, u^\nu)$ одинаковы для всех ν . Подчеркнем, что для существования множителей Лагранжа не требуется гладкости функций $f_i(u)$. Достаточно,

чтобы они были непрерывны и ограничены. Множество V_u может состоять и из отдельных изолированных точек.

Весовые множители $\mu_\nu \geq 0$ в (15) находят из условий

$$\sum_{\nu=0}^m \mu_\nu f_i(u^\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=0}^m \mu_\nu = 1, \quad i = 1, m. \quad (17)$$

В ряде задач число базовых значений u заведомо меньше, чем $(m+1)$. В частности, если множество V_u может быть разбито на $r < (m+1)$ подмножеств так, чтобы для каждого из них задача (16) имела единственное решение u^ν , то ν меняется от 1 до r (см. [20]).

Таким образом, решение усредненной задачи состоит из двух этапов. На первом из них находят базовые значения $u = u^\nu$ из решения минимаксной задачи (16), на втором этапе для фиксированных u^ν находят весовые коэффициенты μ_ν по условиям (17).

Подчеркнем, что число базовых значений u не связано с размерностью этого вектора, а зависит только от числа усредненных условий m в задаче (14). Если в задаче (14) вместо требования максимума фигурирует требование минимума, то в (16) $\max$ и $\min$ меняются местами.

Вырожденный случай. Как и в задаче нелинейного программирования, в усредненной задаче (14) наряду с регулярными могут быть и вырожденные решения. Для вырожденных решений множитель λ_0 в функции Лагранжа равен нулю. Это соответствует случаю, когда система ограничений полностью определяет решение, а следовательно, целевая функция на него не влияет. Такая ситуация имеет место, когда множество $V_u(x, t)$ состоит из дискретных значений вектора u и число этих значений равно $m+1$. В этом случае задача (4) вырождена, в функции Лагранжа $L(\lambda, u)$ множитель $\lambda_0 = 0$, базовые значения известны, а их веса μ_ν определяют из системы линейных уравнений (17), если соответствующая этой системе матрица имеет полный ранг.

Когда число допустимых значений $u \in V_u$ меньше, чем $m+1$, то уравнения (17) в общем случае решения не имеют, а значит, не имеет решения и усредненная задача. Если число допустимых значений $u \in V_u$ больше $(m+1)$, то базовые значения u^ν находят из числа допустимых по условиям (16) с учетом вида целевой функции.

Покажем, к чему приводит доопределение скорости скольжения в форме (12) на некоторых известных примерах.

3. Некоторые примеры [11]

Пример 1. Линейная система второго порядка с релейным управлением.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= u, \\ u &= -u_0 \operatorname{sign}(s), & s &= cx_1 + x_2, \\ u_0, c &> 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для этой системы выполнены условия притяжения (4) к линии скольжения $s(x_1, x_2) = 0$, $m = 1$. Множество V_u состоит из двух $(m+1)$ элементов, так что эти векторы и

являются базовыми. Уравнение скольжения

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = f_{2sm}(x) = u_0 \left[\mu \operatorname{sign}(cx_1 + x_2) + \right. \\ \left. + (1 - \mu)(-\operatorname{sign}(cx_1 + x_2)) \right] = -u_0(2\mu - 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Весовой множитель μ определен условием

$$\dot{s} = cx_2 + f_{2sm}(x_1, x_2) = 0,$$

откуда

$$\mu = 0,5 \left(\frac{cx_2}{u_0} + 1 \right).$$

Уравнение скольжения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Пример 2. Наличие малого внешнего воздействия.

$$\dot{x} = Ax + Bu_1 + du_2,$$

$$u_1 = -M_1 \operatorname{sign}(s); \quad u_2 = -M_2 \operatorname{sign}(s).$$

$$s(x) = cx = 0.$$

«Управление» u_2 реализовано с использованием реле с гистерезисом и $M_2 \ll M_1$. Благодаря малости M_2 и гистерезису управление u_2 постоянно по знаку и его знак зависит от начальных условий. В любом случае, как и в примере 1, базовые значения вектора скоростей определены управлением u_1 и таких базовых значений u_1^ν два. От знака u_2 , которое правильнее было бы назвать малым по величине внешним фактором, зависят только весовые множители μ_1 и $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Причем, при стремлении величины M_2 к нулю, к нулю стремятся и различие этих множителей для $u_2 = M_2$ и $u_2 = -M_2$.

В [14] предложен для определения $f_{sm}(x, t)$ метод эквивалентного управления, согласно которому $f_{sm}(x, t) = f(x, t, u_{eq})$. Эквивалентное управление для каждого $t, x \in S$ определяют из условий

$$f_{si}(x, t, u_{eq}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (21)$$

В [11] приведен пример, который показывает, что функции $f_{sm}(x, t)$, найденные методом Филиппова и методом эквивалентного управления, различны. Это естественно, ведь эквивалентное управление предполагает подбор такого управления, при котором движение реализуется вдоль поверхности переключения, а метод Филиппова — усреднение зависящих от u скоростей. Скорости движения системы для найденного эквивалентного управления могут быть и не определены. Результаты совпадают, если векторы скорости определены для $u = u_{eq}$ и правые части уравнений движения линейно зависят от u . Между тем в примере, приведенном в [11], одна из скоростей зависит от u^3 .

4. Многомерный случай

Доопределение скорости скольжения в усредненной интерпретации нетрудно распространить на случай $x \in R^n$, $s \in R^m$, $m < n$. Множество $V_u(x, t)$ включает конечное либо бесконечное число значений вектора u , из которых можно выбрать $K \leq 2^m$ значений, обеспечивающих выполнение условий притяжения (4).

Остановимся на определении скорости в скользящем режиме движения системы f_{sm} для разных соотношений между n , m и K .

Пусть $K = (m + 1)$. В этом случае усредненная задача вырождена, первый этап ее решения о выборе базовых значений векторов скоростей $f^\nu(x, t) = f(x, t, u^\nu)$ отпадает и нужно найти только весовые коэффициенты μ_j по условиям

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i(x, t)}{\partial x_j} f_j(x, t, u^\nu) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right] \mu_\nu &= 0, \\ \sum_{\nu=0}^m \mu_\nu(x, t) &= 1, \quad \mu_\nu(x, t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

Вектор скорости скольжения

$$f_{sm}(x, t) = \sum_{\nu=0}^m \mu_\nu(x, t) f^\nu(x, t). \quad (23)$$

Число векторов скоростей K может быть меньше $(m + 1)$. Например, этих векторов может быть два $f^+(x, t)$ и $f^-(x, t)$, а поверхностей скольжения $s_i(x) = 0$ больше единицы. В этом случае переключение между векторами f^+ и f^- определяется знаком лишь одной из функций $s_1(x, t)$, а условия притяжения к другим поверхностям скольжения обеспечены динамическими свойствами системы. Поверхность $s_1(x, t) = 0$ естественно назвать поверхностью переключения. n -мерный вектор скорости системы

$$f_{sm}(x, t) = \mu_0(x, t) f^+(x, t) + \mu_1(x, t) f^-(x, t), \quad (24)$$

где μ_0 и μ_1 определяют из условий (22) для $i = 1$ и при суммировании по ν от нуля до единицы.

В том случае, когда множество допустимых скоростей, обеспечивающих выполнение условий притяжения (4), для всех или для некоторых значений $x \in s$, t содержит $K > m + 1$ элементов, скорость скольжения $f_{sm}(x, t)$ для этих x, t не определена однозначно и набор базовых векторов $f^\nu(x, t) \quad \nu = 1, \dots, (m + 1)$ нужно найти из решения усредненной задачи нелинейного программирования на множестве скоростей. Например, может быть поставлена задача определения максимума скорости скольжения в направлении выбранного вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, нормированного так, что

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1:$$

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \overline{f_j(x, t, u)}^u \longrightarrow \max, \quad (25)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} \overline{f_j(x, t, u)}^u + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (26)$$

Здесь усреднение по u производится на множестве скоростей, соответствующих допустимым значениям управления. Так как движение происходит вдоль пересечения поверхностей переключения, вектор γ должен отвечать требованиям:

$$\left(\gamma^T, \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Множество допустимых скоростей может удовлетворять условиям типа

$$f(x, t, u) = \begin{cases} f_+(x, t, u) & \text{при } s(x, t) > 0 \\ f_-(x, t, u) & \text{при } s(x, t) < 0. \end{cases}$$

В этом случае скорость движения системы в скользящем режиме определяется после нахождения базовых значений управления $u^\nu(x, t)$ и соответствующих им векторов скоростей $f^\nu(x, t) = f(x, t, u^\nu)$ из решения усредненной задачи нелинейного программирования. Число этих базовых значений не превосходит $m + 1$.

Решению задачи (25), (26) соответствует минимум по λ максимума по u функции Лагранжа

$$L = \sum_{j=1}^n \gamma_j f_j(x, t, u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_j(x, t, u) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right) \longrightarrow \min_{\lambda} \max_u. \quad (27)$$

В этой задаче значение λ_0 не равно нулю, а значит, его можно считать равным единице. На оптимальном решении для базовых значений вектора скоростей $f^\nu = f(x, t, u^\nu)$ выражение

$$L^* = \sum_{j=1}^n \gamma_j f_j(x, t, u^\nu) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_j} f_j(x, t, u^\nu) + \frac{\partial s_i}{\partial t} \right), \quad (28)$$

максимально, а значит, одинаково для всех значений $\nu = 0, \dots, m$. Ясно, что базовые скорости f^ν , являющиеся решением усредненной задачи (25), (26), различны для различных направлений γ .

В заключение подчеркнем, что размерность вектора управлений прямо не связана с определением $f_{sm}(x, t)$, так как усреднение производится по скоростям, а не по управлениям. Выбор управлений должен обеспечить лишь выполнение условий притяжения к пересечению поверхностей скольжения $s_i(x) = 0$.

Пример. Система третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 & u_1 = -\text{sign}(x_1) \\ \dot{x}_2 = u_2 & u_2 = -\text{sign}(x_2) \\ \dot{x}_3 = u_1 u_2. \end{cases} \quad (29)$$

В данном случае $m = 2$ ($s_1 = x_1, s_2 = x_2$), а число векторов скоростей $K = 4$:

$$\begin{aligned} f^1 &= (1; 1; 1); & f^2 &= (1; -1; -1); \\ f^3 &= (-1; 1; -1); & f^4 &= (-1; -1; 1). \end{aligned}$$

определена неоднозначно.

Найдем максимальную проекцию f_{sm} на ось x_3 .

Усредненная задача (25), (26) примет форму

$$\overline{\sum_{K=1}^4 f_3^K(x, t)} = \overline{(u_1, u_2)}^K,$$

при условиях

$$\overline{u_1}^K = 0, \quad \overline{u_2}^K = 0.$$

Задача выбора трех базовых значений вектора скоростей из четырех сводится к минимуму по λ от максимума по

$$\begin{aligned} L = f_3^1 + f_3^2 + f_3^3 = f_3^4 + \lambda_1(f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4) + \\ \lambda_2(f_2^1 + f_2^2 + f_2^3 + f_2^4) \longrightarrow \min_{\lambda} \max_K. \end{aligned} \quad (30)$$

Для $K = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} L^1 &= 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ L^2 &= -1 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ L^3 &= -1 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ L^4 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Выберем λ_1 и λ_2 по условию равенства $L^* = L^2 = L^4$

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Из первого равенства

$$2 + 2\lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -1.$$

Из второго равенства

$$2\lambda_1 = 1 - \lambda_1 + 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1.$$

Значение $L^* = 1$. Аналогично по условию

$$L^1 = L^3 = L^4,$$

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2,$$

получим

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad L^* = 1.$$

По условию $L^2 = L^3 = L^4$ имеем

$$-1 + \lambda_1 - \lambda_2 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad L^* = -1.$$

Таким образом, из 4-х векторов f^K базовыми являются f^1, f^2 и f^4 или f^1, f^3, f^4 .
Максимум скорости скольжения вдоль x_3

$$f_{sm} = \mu_1 f_3^1 + \mu_2 f_3^2 + \mu_4 f_3^4 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_4. \quad (31)$$

При этом

$$\mu_1 f_1^1 + \mu_2 f_1^2 + \mu_4 f_1^4 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0$$

$$\mu_1 f_2^1 + \mu_2 f_2^2 + \mu_3 f_2^4 = +\mu_1 - \mu_2 - \mu_4 = 0$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 = 1.$$

Откуда $\mu_1 = \mu_4 = 0,5$, $\mu_2 = 0$. После подстановки весовых множителей в (31) получим

$$f_{sm}^{\max} = 1.$$

Аналогично для минимальной скорости вдоль оси x_3 имеем базовые вектора f^2, f^3, f^4 , соответствующие им веса $\mu_2 = \mu_3 = 0,5, \mu_4 = 0$, а $f_{sm}^{\min} = -1$, что полностью совпадает с результатом рассмотрения этого примера в [11].

5. Заключение

Переход к усредненной системе уравнений и доопределение скорости скольжения как средней скорости движения системы, полученной при условии, что средняя скорость изменения всех функций $s_i(x)$, определяющих поверхности переключения, равна нулю, позволяет с использованием чисто формальных процедур усредненной оптимизации выяснить, в каких случаях скорость скольжения может быть найдена однозначно, когда и как могут быть найдены ее предельные значения. Решение задачи не зависит от того, является ли разрывность правых частей уравнения следствием разрыва управления или изменения вида зависимости $f(x, u, t)$ при изменении знака s . Метод эквивалентного управления справедлив только для систем, у которых правые части уравнений движения аффинны по управлению.

Список литературы / References

- [1] Bernardo M. di, Kowalczyk P., Nordmark A., “Sliding bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry friction oscillators”, *Int. J. Bif. Chaos*, 2003, № 10, 2935–2948.
- [2] Edwards C., Spurgeon S. K., *Sliding Mode Control*, Taylor and Francis, 1998.
- [3] Haek O., “Discontinuous differential equations”, *J. Differential Equations*, 1979, № 2, 149–170.
- [4] Jeffrey M. R., “Dynamics at a switching intersection hierarchy, isonomy, and multiple-sliding”, *Physica D*, 2014, № 1, 34–45.
- [5] Jeffrey M. R., “Dynamimics at a switching intersection: hierarchy, isonomy, and multiple-sliding”, *SIADS*, 2014, № 3, 1082–1105.
- [6] Piltz S. H., Porter M. A., Maini P. K., “Prey switching with a linear preference trade-off”, *SIAM J. Appl. Math.*, 2014, № 2, 658–682.
- [7] Sotomayor J., Teixeira M. A., “Regularization of diskontinuos vector fields”, *Proceedings of the International Conference on Differential Equations (Lisboa)*, 1996, 207–223.
- [8] Teixeira M. A., Silva P. R. da, “Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems”, *Physica D*, 2012, № 22, 1948–1955.
- [9] Kuznetsiv Yu. A., Rinaldi S., Gragani A., “One-parametr bifurcations in planar Filippov systems”, *Int. J. Bif. Chaos*, 2003, № 13, 2157–2188.

- [10] Varius A., "Special issue on dynamics and bifurcations of nonsmooth systems", *Physica*, 2012, № 22, 1825–2082.
- [11] Уткин В. И., "Короткий комментарий к методу А.Ф. Филиппова продолжения решения на границе разрыва", *AuT*, 2015, № 5, 165–174; Utkin V. I., "Brief Comments for the Continuation Method by A.F. Filippov for Solution Continuation on a Discontinuity Set", *Autom. Remote Control*, 2015, № 5, 933–942.
- [12] Филиппов А. Ф., "Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью", *Мат. сборник*, 1960, 99–128; [Filippov A. F., "Differentsialnye uravneniya s razryvnoy pravoy chastyu", *Mat. sbornik*, 1960, 99–128, (in Russian).]
- [13] Filippov A. F., *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1988, (Russian, 1985).
- [14] Уткин В. И., *Скольльзящие режимы в задачах оптимизации и управления*, Наука, М., 1981; [Utkin V. I., *Skolzashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya*, Nauka, M., 1981, (in Russian).]
- [15] Utkin V. I., "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Tras. Automat. Contr.*, 1977, № 22.
- [16] Utkin V. I., *Sliding modes in control and optimization*, Springer–Verlag, 1992.
- [17] Неймарк Ю. И., "О скольльзящем режиме релейных систем автоматического регулирования", *AuT*, 1957, № 1; [Neymark J. I., "O skolzashchem regime releynix sistem avtomatisheskogo regulirovaniya", *Avtomatika i telemekhanika*, 1957, № 1, (in Russian).]
- [18] Цыпкин Я. З., *Теория систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, М., 1955; [Zipkin J. Z., *Teoriya sistem avtomatisheskogo regulirovaniya*, Gostexizdat, M., 1955, (in Russian).]
- [19] Цирлин А. М., *Методы усредненной оптимизации и их приложения*, Физматлит, М., 1977; [Tsirlin A. M., *Metody usrednennoy optimizatsii i ikh prilozheniya*, Fizmatlit, M., 1977, (in Russian).]
- [20] Розоноэр Л. И., Цирлин А. М., "Оптимальное управление термодинамическими системами", *AuT*, 1983, № 1–3; Rozonoer L. I., Tsirlin A. M., "Optimal control of thermodynamic systems", *Autom. Remote Control*, 1983, № 1–3.

Tsirlin A. M., "Solution Continuation on a Discontinuity Set", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 12–22.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-12-22

Abstract. The movement of an object characterized by ordinary differential equations (ODE) with discontinuous right-hand sides along the surface of a gap is called a sliding mode. It is required to find the connection of the right-slip characteristics of the system (the system to continue the solution on the surface of the gap). The article prompted a sequel based on the solution of the averaged optimization. It is shown that for the known examples of methods for solving optimization averaged lead to results coinciding with the method of A.F. Filippov and allow to extend these techniques to a wide class of multidimensional problems. Optimality conditions set forth averaged nonlinear programming and examples of their use in the case of ordinary and degenerate solutions.

Keywords: differential equations with discontinuous velocity, sliding modes, averaged optimization

On the authors:

Tsirlin Anatoly Michailovich, orcid.org/0000-0002-3637-6160, Prof,

Program Systems Institute of RAS

Petra 1 str., 4a, Veskovo Jaroslavskoy, 152020, Russia, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

©Maksimenko A. N., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-23-40

UDC 519.854.33

A Special Role of Boolean Quadratic Polytopes among Other Combinatorial Polytopes

Maksimenko A. N.

Received November 15, 2015

Abstract. We consider several families of combinatorial polytopes associated with the following NP-complete problems: maximum cut, Boolean quadratic programming, quadratic linear ordering, quadratic assignment, set partition, set packing, stable set, 3-assignment. For comparing two families of polytopes we use the following method. We say that a family P is affinely reduced to a family Q if for every polytope $p \in P$ there exists $q \in Q$ such that p is affinely equivalent to q or to a face of q , where $\dim q = O((\dim p)^k)$ for some constant k . Under this comparison the above-mentioned families are splitted into two equivalence classes. We show also that these two classes are simpler (in the above sense) than the families of polytopes of the following problems: set covering, traveling salesman, 0-1 knapsack problem, 3-satisfiability, cubic subgraph, partial ordering. In particular, Boolean quadratic polytopes appear as faces of polytopes in every mentioned families.

Article is published in the author's wording.

Keywords: NP-hard problems, affine reduction, faces of polytopes

For citation: Maksimenko A. N., “A Special Role of Boolean Quadratic Polytopes among Other Combinatorial Polytopes”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 23–40.

On the authors:

Maksimenko Aleksandr Nikolaevich, orcid.org/0000-0002-0887-1500, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

Acknowledgments:

Supported by the project No. 477 of P.G. Demidov Yaroslavl State University within State Assignment for Research.

Introduction

In 1954, Dantzig, Fulkerson, and Johnson [8] solved a 49-city traveling salesman problem via considering a polytope of this problem. This idea turned out quite fruitful. Since then, there were published hundreds of papers about properties of various combinatorial polytopes. In particular, a lot of attention was paid to properties of graphs (1-skeletons) of polytopes (such as criterion of adjacency, diameter, clique number) and complexities of extended formulations.

In this paper we compare combinatorial characteristics of complexity for several families of such polytopes. It is natural to consider the following method for comparing of polytopes. If a polytope p is affinely equivalent to a (not necessary proper) face of

a polytope q , then p can not be more complicated than q in any reasonable sense. Below this fact is denoted by $p \leq_A q$. If we can compare two polytopes in this sense, then we can compare their characteristics of complexity. For example, if $p \leq_A q$ then the graph of p is a subgraph of q , moreover, the face lattice of p is embedded into the face lattice of q .

We note that in recent times the most widespread is a little bit different method for comparing polytopes. This is related with the notion of an extended formulation of a polytope (see for example [7] and [17]). A polytope q is called an *extension* (or an *extended formulation*) of a polytope p if there exists an affine map π with $\pi(q) = p$. The *extension complexity* of a polytope p is the size (i.e. number of facets) of its smallest extension. We will denote by $p \leq_E q$ the fact that a (not necessary proper) face of a polytope q is an extension of p . It is clear, that

$$p \leq_A q \Rightarrow p \leq_E q.$$

For example, it is well known that if p is a convex polytope with n vertices and Δ_n is a simplex with n vertices, then

$$p \leq_E \Delta_n. \quad (1)$$

As a rule, the number of vertices of a combinatorial polytope p is exponential in the dimension $\dim p$. Hence, Δ_n in (1) has exponential dimension and the comparison (1) becomes useless in practical sense. So, it is natural to restrict the dimension of q in $p \leq_E q$ by some polynomial of $\dim p$. More precisely, let P and Q are sets of polytopes, we will write $P \propto_E Q$ if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that for every polytope $p \in P$ there is $q \in Q$ with $p \leq_E q$ and $\dim q = O((\dim p)^k)$. For example, Yannakakis [32] showed that the matching polytopes and the vertex packing polytopes are not more complicated (in the sense of $\propto_E$) than the traveling salesman polytopes. In [20] it was shown that polytopes of any linear combinatorial optimization problem¹ (among them are cut polytopes, 0-1 knapsack polytopes, 3-satisfiability polytopes and many other combinatorial polytopes) are not more complicated than the traveling salesman polytopes. One year later in [22] it was shown that polytopes of any linear combinatorial optimization problem are not more complicated than the cut polytopes and the 0-1 knapsack polytopes. In general, it seems that this statement is true for the family of polytopes of any known NP-hard problem. (The results of this paper are another confirmation.) That is, families of polytopes of NP-hard problems are not distinguishable while comparing by $\leq_E$. On the one hand, this is convenient for obtaining the results of a general nature. For example, since the extension complexity of cut polytopes is superpolynomial [13], then the same is true for (almost) all other families of combinatorial polytopes. On the other hand, it is well known that these families are significantly different from each other. For example, any two vertices of the cut polytope constitute an edge (1-face) of this polytope (i.e. the graph of this polytope is complete) [27]. Whereas the checking of nonadjacency of vertices of traveling salesman polytopes is NP-complete [28]. So, it is useful to have a more sensitive method of comparing, like the mentioned above $\leq_A$.

¹We are talking about the problem of the following form. Assume that in a given set E , each element $e \in E$ has some weight $c(e) \in R$, and $f : 2^E \rightarrow \{0, 1\}$ is a polynomially (with respect to $|E|$) computable rule. Let $S = \{s \subseteq E \mid f(s) = 1\}$ be the set of all feasible solutions of the problem. We seek for a subset $s \in S$ with the maximal (minimal) summary weight of elements.

With replacing $\leq_E$ by $\leq_A$ in the definition of α_E we will get the definition of *affine reduction* α_A . Below we will consider only 0/1-polytopes². So, we would like to start with the following example. It has been shown by Billera and Sarangarajan [3] that every 0/1-polytope $p \subset \mathbb{R}^d$ with k vertices is affinely equivalent to a face of the asymmetric traveling salesman polytope:

$$p \leq_A \text{ATSP}_n \quad \text{for } n \geq (4(2^d - k) + 1)d.$$

Note, that n is exponential in d . Hence, this does not imply the affine reduction of 0/1-polytopes to asymmetric traveling salesman polytopes. Moreover, the family of 0/1-polytopes can not be affinely reduced to the family $\{\text{ATSP}_n\}$ for the following reason (see [3, p. 12]). There are at least $2^{2^{d-2}}$ combinatorially non-equivalent d -dimensional 0/1-polytopes for $d \geq 6$ [34, Proposition 8]. On the other hand, if f is the total number of faces of ATSP_n , then

$$f \leq n^2(n!)^{n^2} \leq n^{n^3+2} = 2^{(n^3+2)\log_2 n}.$$

Therefore, if every d -dimensional 0/1-polytope is a face of ATSP_n , then n is superpolynomial in d .

In [21, 24] it was shown that so-called double covering polytopes are affinely reduced to knapsack polytopes, set covering polytopes, cubic subgraph polytopes, 3-SAT polytopes, partial order polytopes, and traveling salesman polytopes. The linear optimization on double covering polytopes is NP-hard and the problem of checking nonadjacency on these polytopes is NP-complete [25]. Consequently, the same is true for the mentioned families.

In this paper we show, that (in the sense of relation α_A) Boolean quadratic polytopes (and cut polytopes), quadratic linear ordering polytopes, and quadratic assignment polytopes lie in one equivalence class. Set partition polytopes, set packing polytopes, stable set polytopes, and 3-assignment polytopes lie in another (more complicated) equivalence class and they are simpler (w.r.t. α_A) than double covering polytopes. Thus, the family of Boolean quadratic polytopes is more pure example of a family of polytopes associated with NP-hard problems. They do not have extra details like NP-completeness of adjacency relation and the like. Naturally, the following question arises. Whether this family is “the purest” one? More precisely, is there some family of polytopes P associated with NP-hard problem such that $P \alpha_A \text{BQP}$, but $\text{BQP} \not\alpha_A P$? The answer to this question was provided in [23]. One can construct infinitely many families of Boolean p -power polytopes (Boolean quadratic polytopes is called Boolean 2-power polytopes) such that each $(p+1)$ -family is more pure than p -family for $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

The rest of the paper is organized as follows. Section 1 provides a definition of affine reducibility and its properties. As an example we show that Boolean quadratic polytopes (BQP) are affinely reduced to stable set polytopes (SSP), but SSP can not be affinely reduced to BQP. In section 2 it is shown that SSP are equivalent (in the sense of affine reduction) to set packing polytopes and set partition polytopes. In section 3 we consider double covering polytopes (DCP) and prove that $\text{SSP} \alpha_A \text{DCP}$, but $\text{DCP} \not\alpha_A \text{SSP}$. In section 4 it is shown that SSP are equivalent to 3-assignment polytopes. In section 5 we consider quadratic linear ordering polytopes and quadratic assignment polytopes and show that they are equivalent to BQP.

²0/1-polytope is the convex hull of a subset of the vertices of the cube $[0, 1]^d$.

1. Affine reducibility and Boolean quadratic polytopes

Let's consider the following partial order on the set of all convex polytopes.

Definition 1. The fact that a polytope p is affinely equivalent to a polytope q or to a face of q will be denoted by $p \leq_A q$. If p is affinely equivalent to q itself, we will use designation $p =_A q$.

This relation is useful for estimation of combinatorial characteristics of polytopes. For example, if $p \leq_A q$ then the number of i -faces of p is not greater than the number of i -faces of q for $0 \leq i \leq \dim p$. It is clear also that the number of facets of p is not greater than the number of facets of q . Furthermore, the graph (1-skeleton) of p is a subgraph of the graph of q . Hence we can compare clique numbers of these graphs and the like. In the case $p \leq_A q$ we can also compare the extension complexities of these polytopes [13]. The same is true for the rectangle covering bound [13].

On the other hand, this relation is useless, for example, for estimating diameters of graphs of polytopes. But the diameter of graph can hardly be seen as a characteristic of complexity. It is not greater than 2 for TSP polytopes [26] and it is equal to 1 for Boolean quadratic polytopes [27]. This does not correspond to the real complexity of these problems.

It turns out that this relation allows to form up the currently known families of combinatorial polytopes in hierarchical order. At the very bottom of this hierarchy there are Boolean quadratic polytopes and cut polytopes.

Boolean quadratic polytope is the convex hull of the set

$$\text{BQP}_n = \left\{ x = (x_{ij}) \in \{0, 1\}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj}, 1 \leq i \leq j \leq n \right\}. \quad (2)$$

It should be noted that the notation BQP_n is commonly used for the convex hull, but for the sake of brevity we do not make distinctions between polytopes themselves and the sets of its vertices. The same remark applies to all other polytopes discussed below.

This polytope is also known as a correlation polytope [10]. Moreover, BQP_n is directly related by so-called covariant mapping with cut polytope, usually denoted by CUT_n [9]. Using the notation of definition 1 this relationship may be written as

$$\text{BQP}_n =_A \text{CUT}_{n+1}.$$

Let us note that BQP_n is a face of BQP_{n+1} defined by $x_{n+1,n+1} = 0$.

Property 2. $\text{BQP}_n \leq_A \text{BQP}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Note also that such relations are normal for families of combinatorial polytopes.

In order to illustrate the basic ideas of this paper, we consider another family of polytopes, which is closely related with BQP_n .

Throughout the paper, we assume that

$$[k] := \{1, 2, \dots, k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Let $G = (V, E)$ is undirected graph with the set of vertices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ and the set of edges E . To each vertex v_i , $i \in [k]$, we associate the component y_i of the vector $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. The *stable set polytope* of a graph G is the convex hull of the set

$$\text{SSP}_k = \{y \in \{0, 1\}^k \mid y_i + y_j \leq 1 \text{ for every edge } \{v_i, v_j\} \in E\}. \quad (3)$$

This polytope also known as a *vertex packing polytope*. Furthermore, by affine mapping $z_i = 1 - y_i$, $i \in [k]$, it is related to the *vertex covering polytope* of a graph G :

$$\text{VCP}_k = \{z \in \{0, 1\}^k \mid z_i + z_j \geq 1 \text{ for } \{v_i, v_j\} \in E\}.$$

I.e., $\text{SSP}_k =_A \text{VCP}_k$.

Let us note that BQP_n is uniquely determined for a fixed n , whereas the notation SSP_k hides a set of k -dimensional polytopes. For example, if a graph G has no edges, then SSP_k is a cube. If G is a complete graph, then SSP_k is a simplex. Hereinafter the SSP_k will be associated with “the most complicated” polytope in this set. More precisely, for a polytope p and for fixed k inequality

$$p \leq_A \text{SSP}_k,$$

means that there exists $q \in \text{SSP}_k$ such that $p \leq_A q$.

Generalizing this agreement, we obtain

Definition 3. Let P and Q are sets of polytopes. Then the record

$$P \leq_A Q$$

indicates that for every $p \in P$ there exists $q \in Q$ such that $p \leq_A q$.

This agreement allows us to deduce an analogue of the property 2 for SSP_k .

Property 4. $\text{SSP}_k \leq_A \text{SSP}_{k+1}$.

Furthermore, using this notation BQP_n and SSP_k can be compared.

Theorem 5. $\text{BQP}_n \leq_A \text{SSP}_k$ for $k = n(n+1)$.

(A similar result is given in [13], but they used relation $\leq_E$ and $k = 2n^2$.)

Proof. The equality $x_{ij} = x_{ii}x_{jj}$ in (2) is equivalent to inequalities

$$\begin{aligned} x_{ii} - x_{ij} &\geq 0, \\ x_{jj} - x_{ij} &\geq 0, \\ x_{ii} + x_{jj} - x_{ij} &\leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

subject to $x_{ij} \in \{0, 1\}$. It remains to transform each of them in an inequality of the form $y_l + y_m \leq 1$ from (3). For this we introduce $n(n+1)$ new variables:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= x_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ t_{ij} &= x_{ii} - x_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ u_i &= x_{ii}, & 1 \leq i \leq n, \\ \bar{u}_i &= 1 - x_{ii}, & 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (5)$$

Then the restrictions (4) are equivalent to

$$\begin{aligned} s_{ij} + \bar{u}_j &\leq 1, \\ t_{ij} + u_j &\leq 1, \\ u_i + \bar{u}_i &= 1, \\ s_{ij} + t_{ij} + \bar{u}_i &= 1, \end{aligned}$$

subject to integrality of all variables. Obviously, the last two equalities (more precisely, $n(n+1)/2$ equalities) define some face of a polytope SSP_k , where $k = n(n+1)$, defined by the system of $n(2n-1)$ inequalities

$$\begin{aligned} s_{ij} + \bar{u}_j &\leq 1, \\ t_{ij} + u_j &\leq 1, \\ u_i + \bar{u}_i &\leq 1, \\ s_{ij} + \bar{u}_i &\leq 1, \\ t_{ij} + \bar{u}_i &\leq 1. \end{aligned}$$

Moreover, the equalities (5) connect this face with the polytope BQP_n by nondegenerate affine mapping. $\square$

Remark 6. For $k \geq 2$ relation $\text{SSP}_k \leq_A \text{BQP}_n$ is not satisfied for any n . Since BQP_n is a 2-neighborly polytope [27].

Relying on definitions 1 and 3, we can introduce an analogue of Cook–Karp–Levin polynomial reducibility [14] for families of polytopes (as it was done in [21]).

Definition 7. A family of polytopes P is *affinely reduced* to a family Q if there exists $r \in \mathbb{N}$ such that for every polytope $p \in P$ there is $q \in Q$ with $p \leq_A q$ and $\dim q = O((\dim p)^r)$. Designation: $P \propto_A Q$.

In such terminology the theorem 5 and the remark 6 take the following form:

$$\text{BQP} \propto_A \text{SSP}, \quad \text{SSP} \not\propto_A \text{BQP},$$

where $\text{BQP} = \{\text{BQP}_n\}$, $\text{SSP} = \{\text{SSP}_k\}$.

We list some obvious properties of this kind of reduction.

Theorem 8. Let $P \propto_A Q$. Suppose that there are polytopes in P with some of the following properties:

- 1) superpolynomial (in the dimension of a polytope) number of vertices and facets,
- 2) superpolynomial clique number of the graph of a polytope,
- 3) NP-completeness of nonadjacency relation,
- 4) superpolynomial extension complexity,
- 5) superpolynomial rectangle covering bound.

Then there are polytopes in Q with the same properties.

2. Set packing and set partition polytopes

Let $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ be a finite set and $S = \{S_1, \dots, S_d\} \subseteq 2^G$ be a set of subsets of G . Consider a subset $T \subseteq S$. If every $g_i \in G$ belongs to no more (no less) than one of elements of T then T is called a *packing (covering) of the set G* . Covering, which is both the packing, called a *partition of the set G* .

Let $A = (a_{ij})$ be $n \times d$ matrix of incidences of elements of G and elements of S :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{for } g_i \in S_j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For every subset $T \subseteq S$ we consider its characteristic vector $x = (x_j) \in \mathbb{R}^d$:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{if } S_j \in T, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Denote the set of all such characteristic vectors by $\text{PACK}_d = \text{PACK}(S)$. It is evident that

$$\text{PACK}_d = \{x \in \{0, 1\}^d \mid Ax \leq \mathbf{1}\},$$

where $\mathbf{1}$ is the n -dimensional all 1 vector. The convex hull of PACK_d is called the *set packing polytope*.

Partition polytopes are defined similarly. The set of vertices PART_d of the *set partition polytope* satisfies the equality

$$Ax = \mathbf{1}. \tag{6}$$

It is clear that a set partition polytope is a face of a set packing polytope:

$$\text{PART}_d \leq_A \text{PACK}_d. \tag{7}$$

Note that a stable set polytope is a special case of a set packing polytope:

$$\text{SSP}_k \leq_A \text{PACK}_d \quad \text{for } d = k.$$

It is not difficult to prove that the families $\text{SSP} = \{\text{SSP}_k\}$, $\text{PACK} = \{\text{PACK}_d\}$ and $\text{PART} = \{\text{PART}_d\}$ are equivalent in terms of affine reducibility.

Theorem 9. $\text{SSP} \propto_A \text{PART} \propto_A \text{PACK} \propto_A \text{SSP}$.

Proof. Show that PACK_d is a special case of SSP_k for $k = d$. It is sufficient to note that inequality

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 1$$

is equivalent to the set of inequalities

$$x_i + x_j \leq 1, \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

provided $x_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq k$.

The reduction $\text{PART} \propto_A \text{PACK}$ is evident (see (7)).

Now we show that $\text{SSP} \propto_A \text{PART}$. Consider auxiliary variables $u_{ij} = 1 - y_i - y_j$, $u_{ij} \in \{0, 1\}$. Then the inequalities $y_i + y_j \leq 1$ in (3) can be replaced by equalities

$$y_i + y_j + u_{ij} = 1.$$

Consequently,

$$\text{SSP}_k \leq_A \text{PART}_d \quad \text{for } d = k + |E| \leq k(k+1)/2.$$

Here E is the set of edges in (3). □

3. Double covering polytopes

The name “double covering polytopes” was used in [21] for a family of polytopes considered in [25].

Definition 10. The *double covering polytope* is the convex hull of the set

$$\text{DCP}_d = \{x \in \{0, 1\}^d \mid Bx = \mathbf{2}\},$$

where $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ is a 0-1 matrix, $\mathbf{2}$ is the m -dimensional all 2 vector, and each row of B contains exactly four 1's.

Previously in [21, 24], there have been found the following relations for several families of combinatorial polytopes with the property of NP-completeness of nonadjacency relation.

Theorem 11 ([21, 24]). *The family of double covering polytopes is affinely reduced to families of polytopes associated with the following problems: travelling salesman, knapsack, set covering, 3-satisfiability, cubic subgraph, partial ordering.*

Now we prove that stable set polytopes are simpler than double covering polytopes.

Theorem 12. $\text{SSP}_k \leq_A \text{DCP}_d$ for $d = k + |E| + 1$, where $|E|$ is the number of edges (inequalities) in the equation (3).

Proof. Let us look at the equation (3). For every edge $\{v_i, v_j\} \in E$ we consider auxiliary variable $u_{ij} = 1 - y_i - y_j$, $u_{ij} \in \{0, 1\}$. Thus every inequality $y_i + y_j \leq 1$ in (3) can be replaced by equality

$$y_i + y_j + u_{ij} = 1. \tag{8}$$

Let u_0 be yet another auxiliary variable and let $u_0 = 1$. Hence the equality (8) is equivalent to

$$y_i + y_j + u_{ij} + u_0 = 2.$$

According to the definition 10, a system of such equalities together with the requirement of integer variables defines the vertices of a double covering polytope DCP_d for $d = k + |E| + 1$. The constraint $u_0 = 1$ defines a face of this polytope. Moreover, this face is affinely equivalent to the given SSP_k . □

We now show that the affine reducibility in the opposite direction is not possible. Note that the NP-completeness of adjacency relation is inherited by affine reduction (theorem 8). The family of double covering polytopes has this property [25], whereas for a stable set polytope the checking of adjacency is polynomial [6]. Hence, if $P \neq NP$ then DCP can not be affinely reduced to SSP. It turns out that the latter is true even without the assumption $P \neq NP$.

Theorem 13. *For the double covering polytope*

$$P = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\}$$

the relation $P \leq \text{SSP}_k$ does not hold for any SSP_k .

Proof. The polytope P has 6 vertices

$$\begin{aligned} x^1 &= (1, 1, 0, 0), \\ x^2 &= (0, 0, 1, 1), \\ x^3 &= (1, 0, 1, 0), \\ x^4 &= (0, 1, 0, 1), \\ x^5 &= (1, 0, 0, 1), \\ x^6 &= (0, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

They are splitted into three pairs with the following property

$$x^1 + x^2 = x^3 + x^4 = x^5 + x^6. \quad (9)$$

Assume that P is affine equivalent to some face $\text{conv}\{y^1, \dots, y^6\}$ of SSP_k . It is clear that the vertices $y^1, y^2, \dots, y^6$ inherit the property (9):

$$y^1 + y^2 = y^3 + y^4 = y^5 + y^6. \quad (10)$$

We now show that there are two more vertices y^7 and y^8 of SSP_k with

$$y^7 + y^8 = y^1 + y^2. \quad (11)$$

This means that the intersection of $\text{conv}\{y^7, y^8\}$ and $\text{conv}\{y^1, \dots, y^6\}$ is not empty. Hence $\text{conv}\{y^1, \dots, y^6\}$ is not a face of SSP_k .

For the vertices $y^1 = (y_1^1, \dots, y_k^1)$ and $y^2 = (y_1^2, \dots, y_k^2)$ we consider the set

$$I = \{i \in [k] \mid y_i^1 = y_i^2\}.$$

Note that every vertex of SSP_k is a 0-1 vector. Thus, by (10) and (11),

$$y_i^8 = y_i^7 = \dots = y_i^2 = y_i^1 \quad \text{for } i \in I. \quad (12)$$

Therefore, we shall consider only those coordinates which values are different for every pair of vertices:

$$J = \{j \in [k] \mid y_j^1 + y_j^2 = 1\} = [k] \setminus I.$$

Consider the six sets

$$\begin{aligned} U &= \{j \in J \mid y_j^1 = 1\}, & \bar{U} &= \{j \in J \mid y_j^2 = 1\} = J \setminus U, \\ V &= \{j \in J \mid y_j^3 = 1\}, & \bar{V} &= \{j \in J \mid y_j^4 = 1\} = J \setminus V, \\ W &= \{j \in J \mid y_j^5 = 1\}, & \bar{W} &= \{j \in J \mid y_j^6 = 1\} = J \setminus W. \end{aligned}$$

All six sets are distinct, otherwise there would be identical vertices among $y^1, y^2, \dots, y^6$. Under this condition, the two sets

$$\begin{aligned} S &= (U \cap V \cap W) \cup (U \cap \bar{V} \cap \bar{W}) \cup (\bar{U} \cap V \cap \bar{W}) \cup (\bar{U} \cap \bar{V} \cap W), \\ \bar{S} &= (\bar{U} \cap V \cap W) \cup (\bar{U} \cap \bar{V} \cap \bar{W}) \cup (U \cap V \cap \bar{W}) \cup (U \cap \bar{V} \cap W) = J \setminus S \end{aligned}$$

differ from each of the above six.

Now we can define the points y^7 and y^8 :

$$\begin{aligned} y_i^7 &= y_i^8 = y_i^1, & i &\in I, \\ y_i^7 &= 1 - y_i^8 = 1, & i &\in S, \\ y_i^7 &= 1 - y_i^8 = 0, & i &\in \bar{S}. \end{aligned}$$

This 0-1 points differ from $y^1, y^2, \dots, y^6$ and equality (11) is satisfied for them. It remains to prove that y^7 and y^8 belong to the SSP_k . That is if $y_i + y_j \leq 1$ holds for $y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6$ then it holds for y^7 and y^8 also.

By equation (12), this condition is satisfied for $i, j \in I$. This is true for $i \in I$ and $j \in J$ also, since

$$\max(y_i^1 + y_j^1, y_i^2 + y_j^2) = y_i^1 + 1 = y_i^7 + 1 = \max(y_i^7 + y_j^7, y_i^8 + y_j^8).$$

It remains to check the condition for $i, j \in J$. If $i \in S$ and $j \in \bar{S}$ then $y_i^7 + y_j^7 = y_i^8 + y_j^8 = 1$ and the condition is fulfilled.

Consider the case $i, j \in S$. If $i, j \in U$ then $y_i^1 = y_j^1 = 1$. Hence $y_i + y_j \leq 1$ is violated by y^1 for $i, j \in U$. The same is true if i and j both belong to one of the sets $\bar{U}, V, \bar{V}, W, \bar{W}$. But for any i and j in S the latter is true. For example, if $i \in U \cap V \cap W$ and $j \in \bar{U} \cap \bar{V} \cap W$ then $i, j \in W$ and so on. Hence for any $i, j \in S$ the inequality $y_i + y_j \leq 1$ is violated for at least one of the vertices $y^1, \dots, y^6$.

The same is true for the case $i, j \in \bar{S}$ by symmetry. □

4. Three index assignment polytopes

Consider a ground set S , $|S| = m$. Coordinates of a vector $x \in \mathbb{R}^{S \times S \times S}$ we denote by $x(s, t, u)$, where $s, t, u \in S$. Three index assignment (or 3-dimensional matching) problem can be formulated as the following 0-1 programming problem:

$$\sum_{s \in S} \sum_{t \in S} \sum_{u \in S} c(s, t, u) \cdot x(s, t, u) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{t \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall u \in S, \quad (13)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{u \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall t \in S, \quad (14)$$

$$\sum_{t \in S} \sum_{u \in S} x(s, t, u) = 1 \quad \forall s \in S, \quad (15)$$

$$x(s, t, u) \in \{0, 1\} \quad \forall s, t, u \in S, \quad (16)$$

where $c(s, t, u) \in \mathbb{R}$ is an input vector. By $3AP_m$ denote the set of all vectors $x \in \mathbb{R}^{S \times S \times S}$ satisfying restrictions (13)–(16). The convex hull of $3AP_m$ is called the (*axial*) *three index assignment polytope*.

The first results about this polytope can be found in [11] and [2]. A more recent survey can be found in [29]. In the Russian-language papers there are given the lower bound for the clique number of the graph of $3AP_m$ [4] and various properties of noninteger vertices of relaxations of this polytope (see for example [19]).

It is obvious that $3AP_m$ is a special case of $PART_d$:

$$3AP_m \leq_A PART_d \quad \text{for } d = m^3. \quad (17)$$

That is the family of three index assignment polytopes is affinely reduced to set partition polytopes: $3AP \propto_A PART$.

Using a standard reduction [14] from 3SAT to 3-dimensional matching, Avis and Tiwary [1] showed that 3SAT polytope is a projection of a face of a three index assignment polytope. That is $3SAT \propto_E 3AP$ in the sense of relation $\leq_E$. However, from inequality (17), theorem 9, theorem 13 and $DCP \propto_A 3SAT$ [21] it follows that the reduction $3SAT \propto_A 3AP$ is impossible.

Now we show, that $SSP \propto_A 3AP$. Therefore, $3AP$ lies in one equivalence class (in the sense of $\propto_A$) with SSP , $PART$, and $PACK$.

For the graph $G(V, E)$ in the equation (3) we denote by

$$W = \{v \in V \mid v \notin e \text{ for every } e \in E\},$$

the set of isolated vertices.

Theorem 14. $SSP_k \leq 3AP_m$ for $m = 3|E| + 2|W|$.

Proof. The ground set S for the $3AP_m$ will consist of three types of elements:

1. v and $\bar{v}$ for every isolated vertex $v \in W$.
2. e for every edge $e \in E$.
3. (e, v) for every $e \in E$ and $v \in e$.

Now we construct the set of triples $Q \subset S \times S \times S$ such that the face

$$F = \{x \in \text{conv}(3AP_m) \mid x(q) = 0 \quad \forall q \notin Q\}$$

of $\text{conv}(3AP_m)$ is affinely equivalent to the $\text{conv}(SSP_k)$.

For every $v \in W$ the set Q contains four triples: (v, v, v) , $(\bar{v}, \bar{v}, \bar{v})$, $(v, v, \bar{v})$, $(\bar{v}, \bar{v}, v)$. There are no other triples containing v or $\bar{v}$. Hence, if $x \in F$ then for every $v \in W$ we have only two cases:

$$x(v, v, v) = x(\bar{v}, \bar{v}, \bar{v}) = 1 \quad \text{or} \quad x(v, v, \bar{v}) = x(\bar{v}, \bar{v}, v) = 1.$$

Now we consider elements e and (e, v) of the set S , where $e \in E$ and $v \in e$. For every nonisolated vertex $v \in V \setminus W$ consider the set of incident edges $E(v) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$, where $p = d_G(v)$ is the degree of v . The set of triples Q contains:

1. (e, e, e) for every $e \in E$.
2. $((e, v), (e, v), (e, v))$ for every $e \in E$ and $v \in e$.
3. $(e, e, (e, v))$ for every $e \in E$ and $v \in e$.
4. $((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q})$ for every nonisolated v and for every $e_{i_q} \in E(v)$, where addition $q + 1$ means to be $1 + q \pmod p$.

We list some properties of the vertices of the face F .

Note that for every $(e, v) \in S$ the set Q contains exactly two triples with (e, v) in the third entry: $((e, v), (e, v), (e, v))$ and $(e, e, (e, v))$. Hence, the equation (13) for $u = (e, v)$ is converted into

$$x((e, v), (e, v), (e, v)) + x(e, e, (e, v)) = 1.$$

That is, $x((e, v), (e, v), (e, v))$ is linearly expressed in $x(e, e, (e, v))$.

Note also that for every $e \in S$ the set Q contains exactly three triples with e in the first entry: (e, e, e) , $(e, e, (e, v_1))$, and $(e, e, (e, v_2))$, where $e = \{v_1, v_2\}$. Hence, the equation (15) for $s = e$ is converted into

$$x(e, e, e) + x(e, e, (e, v_1)) + x(e, e, (e, v_2)) = 1.$$

That is $x(e, e, e) = 1 - x(e, e, (e, v_1)) - x(e, e, (e, v_2))$ and

$$x(e, e, (e, v_1)) + x(e, e, (e, v_2)) \leq 1. \quad (18)$$

Reasoning by analogy, we obtain the following equation

$$x((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)) + x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1$$

for every nonisolated v and for every $e_{i_q} \in E(v)$, where addition $q + 1$ is performed modulo $p = d_G(v)$. Hence,

$$x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1 - x((e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v), (e_{i_q}, v)) = x(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)).$$

Moreover, since

$$x((e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v), (e_{i_{q+1}}, v)) + x((e_{i_q}, v), (e_{i_{q+1}}, v), e_{i_q}) = 1,$$

then

$$x(e_{i_{q+1}}, e_{i_{q+1}}, (e_{i_{q+1}}, v)) = x(e_{i_q}, e_{i_q}, (e_{i_q}, v)).$$

That is $x(e, e, (e, v)) = x(e', e', (e', v))$ for any two edges e and e' , $v \in e$, $v \in e'$.

It is not difficult to see that for the vertices of the face F all variables $x(s, t, u)$ are expressed linearly in terms of $x(e, e, (e, v))$ and an inequality (18) is an inequality $y_i + y_j \leq 1$ in (3). $\square$

Remark 15. The obtained results can be easily generalized to the case of p index assignment problem ($p > 3$). By analogy, the vertices $p\text{-AP}_m$ of an p index assignment polytope are 0-1 vectors $x \in \mathbb{R}^{m^p}$. The coordinates $x_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ($i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, p\}$) satisfy the following equalities:

$$\begin{aligned} \sum_{i_2, i_3, \dots, i_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_1 \in \{1, \dots, p\}, \\ \sum_{i_1, i_3, i_4, \dots, i_p} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_2 \in \{1, \dots, p\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}} x_{i_1 i_2 \dots i_p} &= 1 \quad \forall i_p \in \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

It is evident that

$$p\text{-AP}_m \leq \text{PART}_d, \quad \text{where } d = m^p.$$

On the other hand, the equalities

$$x_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0 \quad \forall i_p \neq i_{p-1}$$

determine a face of $p\text{-AP}_m$ and this face is affinely equivalent to $(p-1)\text{-AP}_m$. Therefore, by theorem 14

$$\text{SSP}_k \leq p\text{-AP}_m \quad \text{for } m = 2k(k-1).$$

5. Quadratic linear ordering polytopes and quadratic assignment polytopes

We begin by describing the linear ordering problem in terms of graph theory.

Let $D = (V, A)$ be a digraph, where $V = \{1, 2, \dots, m\}$ is a vertex set. We assume that D is complete. That is $(i, j) \in A$ and $(j, i) \in A$ for any $i, j \in V, i \neq j$. An acyclic tournament³ in digraph D is called a *linear ordering*.

Consider a characteristic vector $y \in \mathbb{R}^{m(m-1)/2}$ for a linear ordering L in D . The coordinates $y_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$, of y are

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } (i, j) \in L, \\ 0 & \text{for } (j, i) \in L. \end{cases}$$

Denote by LOP_m the set of characteristic vectors of all linear orderings in D . The convex hull of LOP_m is called the *linear ordering polytope*. LOP_m can also be defined as the set of integer solutions $y \in \{0, 1\}^{m(m-1)/2}$ of the 3-dicycle inequalities (see for example [15]):

$$0 \leq y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} \leq 1, \quad i < j < k. \quad (19)$$

In [5] the quadratic linear ordering polytope is defined as follows. Let

$$I = \{(i, j, k, l) \mid i < j, k < l, \text{ and } (i, j) \prec (k, l)\},$$

³Each pair of vertices in a tournament is connected by exactly one arc.

where $(i, j) \prec (k, l)$ means that either $i < k$ or $i = k$ and $j < l$. For every pair of distinct variables y_{ij} and y_{kl} there is introduced a new variable

$$z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}, \quad (i, j, k, l) \in I. \quad (20)$$

Denote by QLOP_m the set of all vectors $z \in \{0, 1\}^d$, $d = \binom{m}{2} (\binom{m}{2} + 1) / 2$, with coordinates y_{ij} and z_{ijkl} satisfying conditions (19) and (20). The convex hull of QLOP_m is called the *quadratic linear ordering polytope*.

Theorem 16 ([5]). $\text{QLOP}_m \leq_A \text{BQP}_n$ for $n = \binom{m}{2}$.

Buchheim, Wiegele, and Zheng [5] exploit this result within a branch-and-cut algorithm for solving the quadratic linear ordering problem.

We show that an affine reduction in the opposite direction is also possible.

Theorem 17. $\text{BQP}_n \leq_A \text{QLOP}_m$ for $m = 2n$.

Proof. The idea of the proof is simple. LOP_m contains an n -dimensional cube as a proper face. In the transformation LOP_m to QLOP_m this cube turns into a Boolean quadratic polytope.

Note that equalities $y_{ij} = 0$ and $y_{ij} = 1$ defines supporting hyperplanes for LOP_m and for QLOP_m . Let

$$J = \{(2i - 1, 2i) \mid i \in [n]\}.$$

We set

$$y_{ij} = 0 \quad \text{for all } (i, j) \notin J, \quad 1 \leq i < j \leq m. \quad (21)$$

Only variables y_{ij} are unfixed where i is odd and $j = i + 1$. Let us check 3-dicycle inequalities (19). Suppose $i < j < k$, we have two cases:

1. If $(i, j) \notin J$ then $y_{ij} = y_{ik} = 0$. Thus the inequality (19) is transformed into $0 \leq y_{jk} \leq 1$.
2. If $(i, j) \in J$ then i is odd, $j = i + 1$ is even, and $k > i + 1$. Hence, the inequality (19) is equivalent to $0 \leq y_{ij} \leq 1$.

Therefore, n variables y_{ii+1} , where i is odd, may take the values 0 or 1 independently of each other. Consequently, hyperplanes (21) define a face of LOP_m and this face is an n -dimensional cube.

Look at the variables z_{ijkl} , $(i, j, k, l) \in I$. If $(i, j) \notin J$ or $(k, l) \notin J$, then $z_{ijkl} = 0$. In the case $(i, j) \in J$ and $(k, l) \in J$ we have $z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}$, and besides y_{ij} and y_{kl} are free variables.

Thus there is the following nondegenerate affine map between the face of QLOP_m and BQP_n :

$$\begin{aligned} x_{ii} &= y_{2i-1, 2i}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ x_{ij} &= z_{2i-1, 2i, 2j-1, 2j} = y_{2i-1, 2i} \cdot y_{2j-1, 2j}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

□

The story for quadratic assignment polytopes is repeated almost exactly.

The set of vertices $2AP_m$ of the *assignment polytope* (or *Birkhoff polytope*) consists of vectors $y \in \{0, 1\}^{m \times m}$ satisfying the conditions

$$\sum_j y_{ij} = 1, \quad \forall i \in [m], \quad (22)$$

$$\sum_i y_{ij} = 1, \quad \forall j \in [m]. \quad (23)$$

Define new variable z_{ijkl} like (20):

$$z_{ijkl} = y_{ij}y_{kl}, \quad \text{where } (i, j) \prec (k, l). \quad (24)$$

Denote by QAP_m the set of all vectors $z \in \{0, 1\}^d$, $d = m^2 + \binom{m^2}{2}$, with coordinates y_{ij} and z_{ijkl} satisfying conditions (22), (23), and (24). The convex hull of QAP_m is called the *quadratic assignment polytope*. It is also useful to consider the *quadratic semi-assignment polytope* [31]. In the definition of its vertex set $QSAP_m$ the condition (23) is omitted.

Theorem 18 ([30, 16, 31]). $QAP_m \leq_A QSAP_m \leq_A BQP_n$ for $n = m^2$.

This connection is used in [16] for obtaining valid inequalities for QAP_m . In particular, QAP_m is a 2-neighborly polytope (every two vertices constitute an edge of it), since BQP_n is 2-neighborly. In [16] it is also shown that the linear ordering polytope LOP_m and the traveling salesman polytope TSP_m are projections of QAP_m :

$$LOP_m \leq_E QAP_m, \quad TSP_m \leq_E QAP_m.$$

Note that the affine reductions $LOP \propto_A QAP$ and $TSP \propto_A QAP$ are impossible, since LOP_m is not 2-neighborly for $m \geq 3$ [33] and TSP_m is not 2-neighborly for $m \geq 6$ [26].

Theorem 19. $BQP_n \leq_A QAP_m$ for $m = 2n$.

Proof. By analogy with the proof of theorem 17 it is sufficient to show that the Birkhoff polytope $2AP_m$ has an n -dimensional cube as a face. Let

$$J = \{(i, i) \mid i \in [m]\} \cup \{(2i - 1, 2i) \mid i \in [n]\} \cup \{(2i, 2i - 1) \mid i \in [n]\}.$$

Then the equalities

$$y_{ij} = 0 \quad \text{for every } (i, j) \notin J$$

define the required face. □

6. Resume

Boolean quadratic polytopes, cut polytopes, quadratic linear ordering polytopes, and quadratic assignment polytopes are in one class of equivalence within the framework of affine reducibility. A bit more complicated class contains stable set polytopes, set packing polytopes, set partitioning polytopes, and n -index assignment polytopes for $n \geq 3$.

An even more complicated are double covering polytopes, 3-satisfiability polytopes, set covering polytopes, knapsack polytopes, cubic subgraph polytopes, partial ordering polytopes, traveling salesman polytopes. The problem of partitioning of these families into equivalence classes is not solved completely. Nevertheless, Fiorini [12] proved that k -satisfiability polytopes and m -satisfiability polytopes are in different classes for $k \neq m$. Moreover, all of them are simpler than traveling salesman polytopes. From the other hand, the families of so-called Boolean p -power polytopes also are in different classes for distinct values of p [23]. Besides, Boolean p -power polytopes are simpler than Boolean quadratic polytopes (in the sense of affine reduction).

However, if in the definition of affine reducibility (definition 7) we replace the relation $\leq_A$ by relation $\leq_E$ (recall that we write $p \leq_E q$ if a face of a polytope q is an extension of p) then all the mentioned families of polytopes fall into one class of equivalence, since the polytope P of any linear combinatorial optimization problem⁴ is an affine image of a face of BQP_n , where n is polynomial in the dimension of P [22].

Thus the affine reduction is a more delicate instrument (versus extending) for comparing the families of combinatorial polytopes. The most complicated (more precisely, the richest in its properties) is a family of traveling salesman polytopes. Families of Boolean p -power polytopes are more simple than any other of the above. More precisely they contain the minimum number of superfluous details (with respect to other families associated with NP-hard problems). Moreover, apparently, combinatorial and geometric properties determining NP-hardness reach the highest concentration precisely in Boolean p -power polytopes.

Proceed to a more precise formulation. Using the above results, it is easy to derive the following relations.

1. $BQP_n \leq_A SSP_k \leq_A PACK_k$ for $k = n(n+1)$.
2. $BQP_n \leq_A PART_k$ for $k = 2n^2$.
3. $BQP_n \leq_A DCP_k$ for $k = 2n^2 + 1$.
4. $BQP_n \leq_A 3AP_k \leq_A p-AP_k$ for $k = 6n^2 + 3n$ and $p \geq 3$.
5. $BQP_n \leq_A QLOP_k$ for $k = 2n$.
6. $BQP_n \leq_A QAP_k$ for $k = 2n$.

That is any characteristic of complexity of BQP_n is inherited by the above families of polytopes. For example, in 2012 Fiorini et al. [13] proved that the extension complexity of BQP_n is exponential in n . Later, the lower bound was improved to 1.5^n by Kaibel and Weltge [18]. Hence, the extension complexity of $QLOP_k$ and QAP_k is also exponential in k . The extension complexity of SSP_k , $PART_k$, DCP_k , and $3AP_k$ is $2^{\Omega(n^{1/2})}$. The same conclusions can be done for the clique numbers of graphs of the polytopes, since the clique number for BQP_n is 2^n .

⁴See footnote on the page 24

References

- [1] D. Avis and H. R. Tiwary, “On the Extension Complexity of Combinatorial Polytopes”, *Automata, Languages, and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, **7965**, Springer, 2013, 57–68.
- [2] E. Balas and M. J. Saltzman, “Facets of the three-index assignment polytope”, *Discrete Applied Mathematics*, **23**:3 (1989), 201–229.
- [3] L. J. Billera, A. Sarangarajan, “All 0-1 polytopes are travelling salesman polytopes”, *Combinatorica*, **16**:2 (1996), 175–188.
- [4] V. A. Bondarenko, A. N. Maksimenko, *Geometricheskie konstruksii i slozhnost v kombinatornoy optimizatsii*, LKI, Moscow, 2008, 184 pp.
- [5] C. Buchheim, A. Wiegele, and L. Zheng, “Exact Algorithms for the Quadratic Linear Ordering Problem”, *INFORMS J. on Computing*, **22**:1 (2010), 168–177.
- [6] V. Chvatal, “On certain polytopes associated with graphs”, *J. Combin. Theory, Ser. B*, **18** (1975), 138–154.
- [7] M. Conforti, G. Cornuéjols, and G. Zambelli, “Extended formulations in combinatorial optimization”, *A Quarterly Journal of Operations Research*, **8**:1 (2010), 1–48.
- [8] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, and S. M. Johnson, “Solution of a large-scale traveling salesman problem”, *Operation Research*, **2**:4 (1954), 393–410.
- [9] C. De Simone, “The cut polytope and the Boolean quadric polytope”, *Discrete Math*, **79** (1990), 71–75.
- [10] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Springer, 1997, 588 pp.
- [11] R. Euler, “Odd cycles and a class of facets of the axial 3-index assignment polytope”, *Applicationes Mathematicae (Zastosowania Matematyki)*, **19** (1987), 375–386.
- [12] S. Fiorini, “A combinatorial study of partial order polytopes”, *Eur. J. Comb.*, **24**:2 (2003), 149–159.
- [13] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary, R. de Wolf, “Linear vs. Semidefinite Extended Formulations: Exponential Separation and Strong Lower Bounds”, *Proceedings of the Forty-fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’12, ACM, New York, 2012, 95–106.
- [14] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, 1979, 340 pp.
- [15] M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt, “Facets of the linear ordering polytope”, *Math. Program.*, **33** (1985), 43–60.
- [16] V. Kaibel, *Polyhedral combinatorics of the quadratic assignment problem*, Ph.D. Thesis, Universität zu Köln, 1997, 281 pp.
- [17] V. Kaibel, *Extended Formulations in Combinatorial Optimization*, Optima, **85**, 2011, 2–7.
- [18] V. Kaibel, S. Weltge, “A Short Proof that the Extension Complexity of the Correlation Polytope Grows Exponentially”, *Discrete & Computational Geometry*, **53**:2 (2015), 396–401.
- [19] V. M. Kravtsov, “A characterization of the types of maximal noninteger vertices of a polyhedron in the three-index axial assignment problem”, *Russian Mathematics*, **50**:12 (2006), 63–66.
- [20] A. N. Maksimenko, “Mnogogranniki zadachi o vypolnivosti yavlyayutsya granyami mnogogrannika zadachi kommivoyazhera”, *Diskretn. analiz i issled. oper.*, **18**:3 (2011), 76–83.
- [21] A. N. Maksimenko, “On affine reducibility of combinatorial polytopes”, *Doklady Mathematics*, **85**:2 (2012), 283–285.
- [22] A. N. Maksimenko, “An analog of the Cook theorem for polytopes”, *Russian Mathematics*, **56**:8 (2012), 28–34.
- [23] A. N. Maksimenko, “k-Neighborly Faces of the Boolean Quadric Polytopes”, *Journal of Mathematical Sciences*, **203**:6 (2014), 816–822.

- [24] A. N. Maksimenko, "The Common Face of some 0/1-Polytopes with NP-Complete Non-adjacency Relation", *Journal of Mathematical Sciences*, **203**:6 (2014), 823–832.
- [25] T. Matsui, "NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes", *Lecture Notes in Operations Research*, **1**, 1995, 249–258.
- [26] M. W. Padberg and M. R. Rao, "The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two", *Math. Program.*, **7** (1974), 32–45.
- [27] M. W. Padberg, "The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives", *Math. Program.*, **45** (1989), 139–172.
- [28] C. H. Papadimitriou, "The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete", *Math. Program.*, **14**:1 (1978), 312–324.
- [29] L. Qi and D. Sun, "Polyhedral Methods for Solving Three Index Assignment Problems", *Nonlinear Assignment Problems*, Combinatorial Optimization, **7**, eds. P. M. Pardalos and L. S. Pitsoulis, Springer, 2000, 91–107.
- [30] M. P. Rijal, *Scheduling, design and assignment problems with quadratic costs*, Ph.D. Thesis, New York University, 1995, 281 pp.
- [31] H. Saito, T. Fujie, T. Matsui, Sh. Matuura, "A study of the quadratic semi-assignment polytope", *Discrete Optimization*, **6**:1 (2009), 37–50.
- [32] M. Yannakakis, "Expressing combinatorial optimization problems by linear programs", *J. Comput. Syst. Sci.*, **43**:3 (1991), 441–466.
- [33] H. P. Young, "On permutations and permutation polytopes", *Mathematical Programming Study*, **8** (1978), 128–140.
- [34] G. M. Ziegler, "Lectures on 0/1-Polytopes", *Polytopes — Combinatorics and Computation*, DMV Seminar, **29**, eds. G. Kalai and G. M. Ziegler, Birkhäuser Basel, 2000, 1–41.

Максименко А. Н., "Особое место булевых квадратичных многогранников среди других комбинаторных многогранников", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 23–40.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-23-40

Аннотация. Рассматриваются несколько семейств комбинаторных многогранников, ассоциированных со следующими NP-полными задачами: максимальный разрез, булево квадратичное программирование, квадратичная задача линейного упорядочения, квадратичные назначения, разбиение и упаковка множества, независимое множество, 3-назначения. Для сравнения двух семейств многогранников используется следующий способ. Будем говорить, что семейство P аффинно сводится к семейству Q , если для каждого многогранника $p \in P$ найдется $q \in Q$ такой, что p аффинно эквивалентен q или некоторой грани q , где $\dim q = O((\dim p)^k)$ для некоторой константы k . При таком способе сравнения упомянутые выше семейства разбиваются на два класса эквивалентности. Показано также, что эти два класса проще (в указанном смысле), чем семейства многогранников следующих задач: покрытие множества, коммивояжер, 0/1 рюкзак, 3-выполнимость, кубический подграф, частичное упорядочение. В частности, булевы квадратичные многогранники оказываются гранями многогранников каждого из упомянутых семейств.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: NP-трудные задачи, аффинная сводимость, грани многогранников

Для цитирования: Максименко А. Н., «Особое место булевых квадратичных многогранников среди других комбинаторных многогранников», *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 23–40.

Об авторах:

Максименко Александр Николаевич, orcid.org/0000-0002-0887-1500, канд. физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке проекта № 477 базовой части гос. задания на НИР ЯрГУ

©Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-41-60

УДК 517.9

Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 15 декабря 2015

Аннотация. Для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка исследована зависимость от малого параметра при старшей производной собственных значений первой краевой задачи. Основное предположение состоит в том, что коэффициент при первой производной уравнения является знаком переменной. Это приводит к появлению так называемых точек поворота. В этом случае удалось построить асимптотические разложения по малому параметру всех собственных значений рассматриваемой краевой задачи. Оказалось, что эти разложения определяются поведением коэффициентов только в окрестности точек поворота.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:1** (2016), 41–60.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

1. Постановка задачи и формулировка результата

На отрезке $[\alpha, \beta]$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \quad (1.1)$$

с малым положительным параметром ε . Будем считать, что коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ дифференцируемы бесконечное число раз. Основное же предположение состоит

в том, что функция $p(t)$ имеет n простых нулей в точках $t_1, \dots, t_n$, принадлежащих интервалу (α, β) . Для уравнения (1.1) на отрезке $[\alpha, \beta]$ ставится первая краевая задача. Напомним, что эта задача имеет счетное число простых вещественных собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$), которые можно считать занумерованными в порядке убывания. Ранее было установлено [1], что при стремлении ε к нулю существуют пределы собственных чисел $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$), и были вычислены соответствующие предельные значения для каждого собственного числа. В настоящей статье будет показано, что функции $\lambda_j(\varepsilon)$ переменного ε бесконечно дифференцируемы в точке $\varepsilon = +0$. Кроме этого, будет дан алгоритм вычисления значений производных этих функций. Отметим, что соответствующие построения опираются на хорошо известные классические результаты теории сингулярно возмущенных уравнений [2]–[7] и специальные методы исследования уравнений второго порядка, связанные с построением "пробных" функций. Особо важны результаты из работ автора [1], [8]–[10].

Введем в рассмотрение числа

$$\nu_{ik} = q(t_k) - \frac{|\dot{p}(t_k)| + \dot{p}(t_k)}{2} - |\dot{p}(t_k)|i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Расположим их в порядке убывания. Через λ_j обозначим j -ый коэффициент полученного ряда. В [10] было показано, что имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Теорема 1. *Имеют место асимптотические представления*

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j + \varepsilon \lambda_j^1 + \varepsilon^2 \lambda_j^2 + \dots, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

В (1.4) λ_j^r ($j = 1, 2, \dots; \quad r = 1, 2, \dots$) – некоторые числа, алгоритм вычисления которых приводится ниже.

Предположим, что для некоторых номеров j_0 и m_1 выполняются соотношения

$$h_1 = \lambda_{j_0} = \dots = \lambda_{j_0+m_1-1}, \quad (1.5)$$

$$\lambda_{j_0-1} > h_1 > \lambda_{j_0+m_1}, \quad (1.6)$$

где положено $\lambda_0 = \infty$. Очевидно, что целое положительное число m_1 не может превзойти числа n . Из определения чисел λ_j и из (1.5) следуют равенства

$$h_1 = \nu_{i_1 k_1} = \dots = \nu_{i_{m_1} k_{m_1}}.$$

Прежде всего введем в рассмотрение функции

$$\varphi(t, \varepsilon) = \frac{1}{|\dot{p}(t_{k_r})|} \left[q(t + t_{k_r}) - h_1 - \frac{1}{2} \dot{p}(t + t_{k_r}) - \frac{\dot{p}(t + t_{k_r})}{4\varepsilon |\dot{p}(t_{k_r})|} \right], \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.7)$$

Из свойств функций $p(t)$ и $q(t)$ следует, что в окрестности каждой из точек t_{k_r} ($r = 1, \dots, m_1$) справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^r(\varepsilon) t^i, \quad (1.8)$$

где коэффициенты $a_i^r(\varepsilon)$ легко вычисляются по значениям в точке $t = 0$ соответствующих производных функций $q(t + t_{k_r})$ и $p(t + t_{k_r})$. Отметим, что имеют место равенства

$$a_0^r = \frac{1}{2} + i_r, \quad r = 1, \dots, m_1, \quad (1.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon a_2^r(\varepsilon) = -\frac{1}{4}, \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.10)$$

Основную роль при реализации алгоритма вычисления коэффициентов ряда (1.4) играют функции

$$f_r(\tau, \varepsilon) = \dot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon) \varphi_r[\psi_r(\tau, \varepsilon), \varepsilon] + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\ddot{\psi}_r(\tau, \varepsilon)}{\dot{\psi}_r(\tau, \varepsilon)} \right) - \frac{\varepsilon \ddot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon)}{4 \dot{\psi}_r^2(\tau, \varepsilon)}, \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.11)$$

Поясним значение величин, входящих в (1.11). Через $\psi_r(\tau, \varepsilon)$ обозначен формальный ряд

$$\psi_r(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^r(\varepsilon) \tau^i, \quad (1.12)$$

где коэффициенты $c_i^r(\varepsilon)$, в свою очередь, также являются формальными рядами вида

$$c_i^r(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j c_{ij}^r. \quad (1.13)$$

Ниже будет изложено правило, с помощью которого определяются коэффициенты последнего ряда. Функция $\varphi_r[\psi_r(\tau, \varepsilon), \varepsilon]$ получается путем формальной подстановки (1.12) вместо переменной t в представлении (1.8).

Определим сначала несколько коэффициентов из (1.13). А именно, будем считать, что

$$c_{10}^r = 1, \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.14)$$

Равенства (1.14) дают нам возможность представить функции (1.11) в виде формального ряда по степеням переменной τ . Тем самым, приняв во внимание (1.9), (1.10) и (1.14), имеем

$$f_r(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{2} + i_r - \frac{\tau^2}{4\varepsilon} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i^r(\varepsilon) \tau^i. \quad (1.15)$$

Коэффициенты рядов (1.13) будем искать методом неопределенных коэффициентов, исходя из тождеств

$$d_i^r(\varepsilon) \equiv 0, \quad i = 2, 3, \dots; r = 1, \dots, m_1. \quad (1.16)$$

Как будет показано ниже, отсюда числа c_{ij}^r однозначно определяются.

Приступим, наконец, непосредственно к определению коэффициентов рядов (1.4). Предварительно введем еще одно обозначение. Положим

$$g_r(\varepsilon) = d_0^r(\varepsilon) + \varepsilon (d_1^r(\varepsilon))^2, \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.17)$$

Из свойств функций, входящих в определение $g_r(\varepsilon)$, следует, что справедливо представление

$$g_r(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i^r, \quad r = 1, \dots, m_1. \quad (1.18)$$

Отметим, что ряд (1.18), как и все предыдущие ряды, является формальным.

После этого описание алгоритма завершается без труда. Сначала покажем, как определить числа λ_{j+i}^1 ($i = 0, \dots, m_1 - 1$). Расположим числа g_1^r ($r = 1, \dots, m_1$) в ряд в порядке убывания. Через $\lambda_{j_0+i}^1$ ($i = 0, \dots, m_1 - 1$) обозначим соответственно $(i+1)$ -ый член полученного ряда.

Для определения остальных коэффициентов рядов (1.4) поступаем следующим образом. Предположим, что наряду с (1.5) и (1.6) выполняются соотношения

$$h_i = \lambda_{j_0+r_i}^i = \dots = \lambda_{j_0+m_i-1}^i, \quad i = 1, \dots, i_0, \quad (1.19)$$

$$\lambda_{j_0+r_{i_0}-1}^{i_0} > h_{i_0} > \lambda_{j_0+m_{i_0}}^{i_0}. \quad (1.20)$$

Отметим, что имеют место неравенства

$$r_{i-1} \leq r_i \leq m_i \leq m_{i-1}.$$

На заключительной стадии поступаем, как и ранее. Расположим в ряд в порядке убывания числа $g_{j_0+r_{i_0}+i}^{i_0}$ ($i = 0, \dots, m_1 - 1$). Положим затем $\lambda_{j_0+r_{i_0}+i}^{i_0}$ равным соответственно $(i+1)$ -му коэффициенту этого ряда. Таким образом, описание алгоритма завершено.

Выпишем в качестве примера значения чисел λ_j^1 и λ_j^2 ($j = 1, 2, \dots$).

Основную трудность представляет здесь вычисление коэффициентов ряда (1.18). Приведем здесь значения первых двух членов этого ряда. Предварительно введем для краткости записи несколько обозначений. Поскольку вычисления носят независимый характер, то индекс r в (1.18), (1.12) и (1.13) мы в некоторых случаях будем опускать. Положим, далее,

$$b_i = \frac{1}{|\dot{p}(t_{i_r})|} \left[q^{(i)}(t_{i_r}) - \frac{1}{2} p^{(i+1)}(t_{i_r}) \right], \quad i = 1, 2, \dots,$$

а через a_i обозначим значение i -ой производной функции

$$\frac{p^2(t + t_{i_r})}{(t - t_{i_r})^2 |\dot{p}(t_{i_r})|^2}$$

в точке $t = t_{i_r}$.

Для чисел $d_0^r(\varepsilon)$ и $d_1^r(\varepsilon)$, фигурирующих в (1.17), имеют место формулы (в которых опущен индекс r)

$$d_0(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2} + i_r \right) c_1^2(\varepsilon) + 3\varepsilon \frac{c_1(\varepsilon)c_3(\varepsilon) - c_2^2(\varepsilon)}{c_1^2(\varepsilon)} - \left(\frac{1}{2} + i_r \right),$$

$$\begin{aligned} d_1(\varepsilon) = & b_1 c_1^3(\varepsilon) + 2c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon) + 4i_r c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon) + \\ & + \frac{12\varepsilon}{c_1^3(\varepsilon)} (c_1^2(\varepsilon)c_4(\varepsilon) - 2c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon)c_3(\varepsilon) + c_2^3(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Таким образом, первые два коэффициента ряда (1.18) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1 + 2i_r)c_{11} + b_1 + (2 + 4i_r)c_{20} + 3c_{30} - 3c_{20}^2, \\ g_2 &= (1 + 2i_r)c_{12} + \left(\frac{1}{2} + i_r\right)c_{11}^2 - 3c_{11}c_{30} + 3c_{31} - 6c_{20}c_{21} + \\ &\quad + c_{20}c_{11} + 6b_1c_{11} + 4c_{11}c_{20} + 4c_{21} + 8i_rc_{11}c_{20} + 8i_rc_{21} + \\ &\quad + 24c_{40} - 48c_{20}c_{30} + 24c_{20}^3. \end{aligned}$$

Производя соответствующие вычисления, получим такие значения интересующих нас величин:

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{a_2}{3}, \quad c_{30} = \frac{1}{12} [a_2^2 - 3a_3], \\ c_{40} &= \frac{a_2}{10} \left[\frac{4}{3}a_2 + \frac{7}{2}a_3 - \frac{59}{18}a_2^2 \right], \\ c_{50} &= -\frac{1}{12} [22c_{30}^2 + 26a_2^2c_{20}^2 + a_3 + 20a_3c_{30} + 18a_2a_3c_{20} + \\ &\quad 42c_{20}c_{40} + 50a_2c_{20}^3 + 88a_2c_{20}c_{30} + 40a_3c_{20}^2 + 10a_4c_{20} + \\ &\quad 4c_{20}^4 + 22a_2c_{40} + 10a_2^2c_{30} + 2a_2a_4 + 2a_5 + 46c_{20}^2c_{30}], \\ c_{11} &= \frac{4}{3} [2c_{20}^2 + 4i_rc_{20}^2 + 6i_rc_{30} + 5b_1c_{20} + b_2], \\ c_{21} &= \frac{2}{3} [6c_{20}c_{30} + 4c_{40} + 12i_rc_{20}c_{30} + 8i_rc_{40} + 7b_1c_{30} + \\ &\quad 8b_1c_{20}^2 + 6b_2c_{20} + b_3 - \frac{5}{2}a_2c_{11} - \frac{9}{2}c_{11}c_{20}], \\ c_{31} &= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{2}c_{30}^2 + 8c_{20}c_{40} + 5c_{50} + 9i_rc_{30}^2 + 16i_rc_{20}c_{40} + \right. \\ &\quad 10i_rc_{50} + 9b_1c_{40} + 13b^2c_{20}^2 + 8b_2c_{30} + 7b_3c_{20} + \\ &\quad 22b_1c_{20}c_{30} + b_4 + 4b_1c_{20}^3 - \frac{13}{2}c_{11}c_{20} - \frac{13}{2}c_{21} - \\ &\quad \left. \frac{7}{2}a_2c_{21} - 14a_2c_{11}c_{20} - \frac{3}{2}a_2^2c_{11} - 3a_3c_{11} - 6c_{11}c_{30} \right], \\ c_{12} &= \frac{4}{3} [4c_{20}c_{21} + 4i_rc_{20}c_{21} + 3c_{11}c_{30} + 3c_{31} + 6i_rc_{11}c_{30} + \\ &\quad 6i_rc_{31} + 5b_1c_{21} + 10b_1c_{11}c_{20} + 4b_2c_{11} - \frac{3}{4}c_{11}^2 + 30c_{50} - \\ &\quad 60c_{20}c_{40} - 36c_{30}^2 + 102c_{20}^2c_{30} - 36c_{20}^4]. \end{aligned}$$

2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе мы докажем промежуточные утверждения, которые будут играть основную роль при доказательстве теоремы 1. Сначала введем необходимые обозначения. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (2.1)$$

В статье [10] было подсчитано наибольшее число нулей, которое могут иметь решения этого уравнения на отрезке $[\alpha, \beta]$, когда ε достаточно мало, и выполнены неравенства

$$\frac{\nu_{0k}}{|\dot{p}(t_k)|} \neq j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Покажем, как можно определить такое число нулей, когда для некоторых номеров k ($1 \leq k \leq n$) неравенство (2.2) не имеет места.

Рассмотрим сначала частный случай. Предположим, что функция $p(t)$ лишь один раз на $[\alpha, \beta]$ обращается в нуль в точке $t_1 \in (\alpha, \beta)$. По правилу, изложенному в первом разделе настоящей работы, вычислим числа g_i^1 ($i = 1, 2, \dots, r$), фигурирующие в (1.18). Пусть имеют место соотношения

$$\frac{\nu_{01}}{|\dot{p}(t_1)|} = p, \quad p - \text{целое неотрицательное}, \quad (2.3)$$

$$g_i^1 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (2.4)$$

$$g_r^1 \neq 0. \quad (2.5)$$

Лемма 1. При условиях (2.3), (2.4) и (2.5) существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такое решение $x_0(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1), что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ функция $x_0(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ ровно $p+1$ раз, если

$$g_r^1 < 0, \quad (2.6)$$

и имеет ровно $p_1 + 2$ нулей, если

$$g_r^1 > 0. \quad (2.7)$$

При этом число нулей любого другого решения не превосходит числа нулей функции $x_0(t, \varepsilon)$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $\alpha < 0 < \beta$ и $t_1 = 0$. В уравнении (2.1) произведем замену

$$x = y \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon|\dot{p}(0)|} \int_{\alpha}^t p(s) ds \right). \quad (2.8)$$

В результате получим уравнение

$$\varepsilon \ddot{y} + \varphi_1(t, \varepsilon)y = 0, \quad (2.9)$$

где $\varphi_1(t, \varepsilon)$ определяется формулой (1.7). В первую очередь нас будет интересовать поведение решений (2.9) в некоторой достаточно малой окрестности нуля. По аналогии с рассуждениями, приведенными в статье [10], казалось бы естественным вместо рассмотрения свойств решений уравнения (2.9) перейти к изучению „близкого“ к (2.9) и в то же время более простого уравнения

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\sum_{i=1}^l a_i(\varepsilon) t^i \right] y = 0, \quad (2.10)$$

в котором, по мере надобности, следовало бы распорядиться выбором номера $l > 0$. Однако, в отличие от случая, рассматриваемого в [10], исследование поведения решений уравнения (2.10) здесь затруднено тем, что мы не знаем явного вида общего решения такого уравнения. Чтобы устранить эту трудность, сначала произведем в уравнении (2.9) замену времени

$$t = \psi_1(\tau, \varepsilon), \quad (2.11)$$

где функция $\psi_1(\tau, \varepsilon)$ определяется формулами (1.12) и (1.13). Вопрос о сходимости рядов, фигурирующих в определении $\psi_1(\tau, \varepsilon)$, нас интересовать не будет, поскольку в конечном итоге нам понадобятся лишь их частичные суммы. После того, как мы по некоторому правилу определим коэффициенты $c_i(\varepsilon)$ в (2.11), выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы замена времени была обратимой на $\Delta(t_0) = [-t_0, t_0]$. Итак, после преобразования (2.11) получим уравнение

$$\varepsilon \ddot{y} - \varepsilon \frac{\ddot{\psi}_1(\tau, \varepsilon)}{\dot{\psi}_1(\tau, \varepsilon)} \dot{y} + \dot{\psi}_1^2(\tau, \varepsilon) \varphi_1(\psi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon) y = 0. \quad (2.12)$$

В результате следующей замены

$$y = \sqrt{\dot{\psi}_1(\tau, \varepsilon)} z \quad (2.13)$$

от уравнения (2.12) перейдем к уравнению

$$\varepsilon \ddot{z} + f_1(\tau, \varepsilon) z = 0, \quad (2.14)$$

где $f_1(\tau, \varepsilon)$ определяется формулой (1.11). Из свойств функций, фигурирующих в определении $f_1(\tau, \varepsilon)$, а также из (1.9), (1.14) и (1.15) следует, что уравнение (2.14) можно записать в виде

$$\varepsilon \ddot{z} + \left[\frac{1}{2} + p - \frac{\tau^2}{4\varepsilon} + \sum_{i=0}^{l(r)} d_i(\varepsilon) \tau^i + \omega(\tau, \varepsilon) \right] z = 0. \quad (2.15)$$

В (2.15) положено

$$\omega(\tau, \varepsilon) = f_1(\tau, \varepsilon) - \frac{1}{2} - p + \frac{\tau^2}{4\varepsilon} - \sum_{i=0}^{l(r)} d_i(\varepsilon) \tau^i, \quad (2.16)$$

а номер $l(r)$ следует определить как наименьший из тех, для которых

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{(-2r-\delta)} \omega(\tau, \varepsilon) = 0, \quad \delta \in (0, 1). \quad (2.17)$$

Важную роль в приводимых ниже рассуждениях будет играть тот факт, что для коэффициентов $d_i(\varepsilon)$ ($i = 2, \dots, l(r)$) справедливо следующее представление:

$$d_i(\varepsilon) = \frac{\gamma_i}{\varepsilon} c_{i-1}(\varepsilon) + \frac{a_i}{\varepsilon} + \omega(\varepsilon, c_1(\varepsilon), \dots, c_{l_i}(\varepsilon)). \quad (2.18)$$

Отметим, что при выводе (2.18) было учтено первое из равенств (1.14). Поясним значения величин, входящих в (2.18). Прежде всего отметим, что ни одно γ_i не обращается в нуль. Числа a_i ($i = 3, \dots, l(r)$) не зависят явно от ε и являются алгебраическими функциями $c_1(\varepsilon), \dots, c_{i-2}(\varepsilon)$ ($a_2 = 0$), а $\omega_i(\varepsilon, c_1(\varepsilon), \dots, c_{l_i}(\varepsilon))$ содержат все входящие туда параметры только как сомножители. Формулу (2.18) нетрудно доказать, рассуждая по индукции.

Положим затем в (1.12) и (1.13)

$$c_i^1(\varepsilon) = 0, \quad i = l(r) + 1, l(r) + 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$c_{ij}^1 = 0, \quad i = l(r) + 1, l(r) + 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

Представление (2.18) и равенства (2.19) и (2.20) дают возможность применить теорему о неявной функции для определения коэффициентов $c_i(\varepsilon)$ ($i = 1, \dots, l(r)$) из уравнений

$$\varepsilon d_i(\varepsilon) = 0, \quad i = 2, \dots, l(r). \quad (2.21)$$

Ясно, что величины $c_i(\varepsilon)$ можно искать в виде (1.13) по методу неопределенных коэффициентов. Нам потребуется лишь знание первых r и $r-1$ коэффициентов $d_0(\varepsilon)$ и $d_1(\varepsilon)$ соответственно. Будем считать, что эти коэффициенты нами определены. Остальные члены рядов (1.13) положим равными нулю.

Итак, функция $\psi_1(\tau, \varepsilon)$ определена. Теперь нужно выбрать число $t_0 > 0$, чтобы на отрезке $\Delta(t_0)$ замена (2.11) была обратимой. Будем пока изучать решения (2.1) лишь на этом отрезке.

В уравнении (2.15) произведем замену времени

$$\tau = \sqrt{\varepsilon} \xi, \quad (2.22)$$

в результате которой это уравнение запишется так:

$$\ddot{z} + \left[\frac{1}{2} + p - \frac{\xi^2}{4} + d_0(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon) \xi + \varepsilon^r \omega_0(\xi, \varepsilon) \right] z = 0, \quad (2.23)$$

где непрерывная функция $\omega_0(\xi, \varepsilon)$ такова, что она стремится к нулю при стремлении ε к нулю равномерно относительно ξ , удовлетворяющих неравенству

$$|\xi| \leq c |\ln \varepsilon|, \quad (2.24)$$

в котором c – произвольное положительное число.

Приведем уравнение (2.23) к более удобному для нас виду. Для этого воспользуемся преобразованием

$$z = u \exp \left(-\frac{\xi^2}{4} + \sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon) \xi \right). \quad (2.25)$$

В результате получим уравнение

$$\ddot{u} - s\dot{u} + [\varepsilon(d_1(\varepsilon))^2 + d_0(\varepsilon) + p + \varepsilon^2 \omega_1(s, \varepsilon)] u = 0, \quad (2.26)$$

в котором

$$s = \xi - 2\sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon), \\ \omega_1(s, \varepsilon) = \omega_0(s + 2\sqrt{\varepsilon} d_1(\varepsilon), \varepsilon).$$

Из определения чисел g_i^1 ($i = 0, \dots, r$), а также из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что

$$g^1(\varepsilon) = \varepsilon^r g_r^1 + O(\varepsilon^{r+\delta}), \quad \delta \in (0, 1). \quad (2.27)$$

Используя последнее равенство, рассмотрим наряду с (2.26) более простое уравнение

$$\ddot{u} - s\dot{u} - b(\varepsilon)u = 0, \quad (2.28)$$

где положено для краткости

$$b(\varepsilon) = -p + b_1(\varepsilon), \quad b_1(\varepsilon) = -\varepsilon^r g_r^1.$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.28) являются функции

$$u_r(s, \varepsilon) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b(\varepsilon)(2 + b(\varepsilon)) \dots (2j - 2 + b(\varepsilon))}{(2j)!} s^{2j}, \quad (2.29)$$

$$u_H(s, \varepsilon) = s + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b(\varepsilon) + 1) \dots (b(\varepsilon) + 2j - 1)}{(2j + 1)!} s^{2j+1}. \quad (2.30)$$

Предположим сначала, что выполнено неравенство (2.7). Покажем, что в этом случае у уравнения (2.26) существует решение, имеющее на рассматриваемом промежутке изменения s не менее $p + 2$ нулей, когда ε достаточно мало.

Как ясно из результатов, представленных в [10], одна из функций (2.29) или (2.30) обращается в нуль на всей числовой прямой ровно $p + 2$ раз, а другая $p + 1$ раз. Отметим, что в случае четного p функция $u_r(s, \varepsilon)$ будет иметь $p + 2$ нулей, а при нечетном p решение $u_H(s, \varepsilon)$ будет обращаться в нуль $p + 2$ раз. Обозначим через $s_0(\varepsilon)$ наибольший из всех нулей функций (2.29) и (2.30). Предположим, что справедлива оценка

$$s_0(\varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon|, \quad (2.31)$$

где положительная постоянная c не зависит от ε , когда ε достаточно мало. Будем, далее, рассматривать только те значения ε , при которых

$$\left[-c\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|, c\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon| \right] \subset \Delta_\tau(t_0),$$

где

$$\Delta_\tau(t_0) = [\psi_1^{-1}(-t_0, \varepsilon), \psi_1^{-1}(t_0, \varepsilon)].$$

Тогда на отрезке $[-c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln \varepsilon|, c\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\ln \varepsilon|]$ определены коэффициенты уравнения (2.26), которые на нем равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (2.28) при стремлении ε к нулю. Тем самым мы показали, что при малых ε у уравнения (2.26) найдется решение, имеющее не менее $p + 2$ нулей. Очевидно, что такой же вывод справедлив и для уравнения (2.1). Как ясно из [10], большего числа, чем $p + 2$, их быть не может. Таким образом, при условии (2.7) лемма будет полностью доказана, если мы обоснуем оценку (2.31).

Разберем случай, когда p чётно. Соответствующее утверждение для нечётного p доказывается аналогично, поэтому мы его приводить не будем.

При чётном p число $s_0(\varepsilon)$ является наибольшим нулем функции $u_r(s, \varepsilon)$. Нам удобно эту функцию представить следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r(s, \varepsilon) = & D(s, \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \left[\frac{s^{p+2}}{(p+2)!} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2+b_1(\varepsilon)) \dots (2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!} s^{p+2i} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В (2.32) положено

$$\begin{aligned} D(s, \varepsilon) = & 1 + \sum_{i=1}^{\frac{p}{2}} \frac{b(\varepsilon)(2+b(\varepsilon)) \dots (2i-2+b(\varepsilon))}{(2i)!} s^{2i}, \\ c(\varepsilon) = & \frac{b(\varepsilon)(b(\varepsilon)+2) \dots (b(\varepsilon)+p-2)}{p!}. \end{aligned}$$

Оценим затем функцию $u_r(s, \varepsilon)$ сверху и снизу через более простые функции. В качестве таких функций возьмем функции, имеющие следующий вид:

$$u(s, \varepsilon, b) = D_b(s, \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \exp(bs^2),$$

где $D_b(s, \varepsilon)$ есть многочлен степени p , аналитически зависящий от ε . Покажем, как можно определить такие числа b_1 и b_2 , что выполняются соотношения

$$u(s, \varepsilon, b_1) \leq u_r(s, \varepsilon) \leq u(s, \varepsilon, b_2), \quad s \in [0, \infty). \quad (2.33)$$

Исходя из (2.32), существование таких b_1 и b_2 будет доказано, если удастся для некоторых значений $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ установить неравенства

$$\frac{s^{p+2}}{(p+2)!} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2+b_1(\varepsilon)) \dots (2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!} s^{p+2i} \leq \exp(\bar{b}_2, s^2) \quad (2.34)$$

и

$$\frac{s^{p+2}}{(p+2)!} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2+b_1(\varepsilon)) \dots (2i-2+b_1(\varepsilon))}{(p+2i)!} s^{p+2i} \geq \exp(\bar{b}_1, s^2) - \sum_{i=2}^{\frac{p}{2}} \frac{(\bar{b}_1)^i s^{2i}}{i!}. \quad (2.35)$$

Неравенство (2.34) будет выполнено, например, при $\bar{b}_2 = 1$ и малых ε , поскольку оно является следствием более грубого неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(2i)!!}{(p+2i)!} - \frac{1}{i!} \right) s^{2i+p} \leq 0,$$

которое легко установить, применив метод математической индукции. В (2.35) можно положить $\bar{b}_1 = \frac{1}{(p+2i)!}$, поскольку, заменив $b_1(\varepsilon)$ на 1, будем иметь оценку

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(p+2i)!} s^{2i+p} \geq \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{1}{i![(p+2)!]^i} s^{2i}.$$

Таким образом, (2.33) будет иметь место, если b_1 и b_2 определить так:

$$b_1 = \begin{cases} \bar{b}_1, & \text{если } c(\varepsilon) < 0, \\ \bar{b}_2, & \text{если } c(\varepsilon) > 0, \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{cases} \bar{b}_2, & \text{если } c(\varepsilon) < 0, \\ \bar{b}_1, & \text{если } c(\varepsilon) > 0, \end{cases}$$

а через $D_{b_1}(s, \varepsilon)$ и $D_{b_2}(s, \varepsilon)$ обозначить многочлены

$$D_{b_j}(s, \varepsilon) = D(s, \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \sum_{i=0}^{p/2} \frac{b_j^i}{i!} s^{2i}, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что все функции, фигурирующие в неравенствах (2.33), при стремлении s к бесконечности одновременно стремятся либо к ∞ , либо к $-\infty$. На основании этого и из (2.33) следует, что значение $s_0(\varepsilon)$ не превосходит числа $\bar{s}_0(\varepsilon)$, являющегося наибольшим из всех нулей функций $u(s, \varepsilon, b_1)$ и $u(s, \varepsilon, b_2)$. Покажем, что для некоторого $c > 0$ имеет место неравенство

$$\bar{s}_0(\varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon|, \quad (2.36)$$

из которого, очевидно, будет следовать оценка (2.31). В точке $\bar{s}_0(\varepsilon)$ имеем

$$D_{b_j}(\bar{s}_0(\varepsilon), \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \exp(b_j(\bar{s}_0(\varepsilon))^2) = 0,$$

где либо $j = 1$, либо $j = 2$. Отсюда вытекает новое равенство

$$(\bar{s}_0(\varepsilon))^2 = \frac{1}{b_j} \ln |D_{b_j}(\bar{s}_0(\varepsilon), \varepsilon)| - \ln |b_1(\varepsilon)| - \ln |c(\varepsilon)|.$$

Оценка (2.31) непосредственно следует из последнего равенства. Итак, лемма 1 при условии (2.7) доказана.

Пусть имеет место неравенство (2.6). Доказательство соответствующего утверждения проведем в три этапа.

Первый этап. На этом этапе мы обоснуем два неравенства, носящие вспомогательный характер. Введем сначала в рассмотрение функцию

$$u(s, \varepsilon, g) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{b}(\varepsilon)(2+\bar{b}(\varepsilon)) \dots (2i-2+\bar{b}(\varepsilon))}{(2i)!} s^{2i}, & \text{если } p \text{ четно,} \\ s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\bar{b}(\varepsilon)+1) \dots (\bar{b}(\varepsilon)+2i-1)}{(2i+1)!} s^{2i+1}, & \text{если } p \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (2.37)$$

где положено

$$-\bar{b}(\varepsilon) = p + \varepsilon^r g. \quad (2.38)$$

Параметр g , фигурирующий в (2.38), таков, что $g \in (g_r^1, 0)$. Обозначим через $s(g, \varepsilon)$ наибольший нуль (если таковые вообще существуют) функции $u(s, \varepsilon, g)$. Покажем, что имеет место неравенство

$$s(g, \varepsilon) \leq c, \quad (2.39)$$

в котором c не зависит от ε . Отметим, что функция $u(s, \varepsilon, g)$ является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{u} - s\dot{u} - \bar{b}(\varepsilon)u = 0. \quad (2.40)$$

Отсюда следует, что функция

$$v(s, \varepsilon, g) = \frac{s}{2} - \frac{\dot{u}(s, \varepsilon, g)}{u(s, \varepsilon, g)} \quad (2.41)$$

есть решение уравнения Риккати

$$\dot{v} = v^2 + \frac{1}{2} - b(\varepsilon) - \frac{s^2}{4}. \quad (2.42)$$

Функция (2.41) изучалась в [10]. Используя полученные там результаты, легко показать, что непрерывная на интервале $(s(g, \varepsilon), \infty)$ функция $v(s, \varepsilon, g)$ обращается в нуль в двух точках $\underline{s}(g, \varepsilon)$ и $\bar{s}(g, \varepsilon)$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{s}(g, \varepsilon) = \infty. \quad (2.43)$$

Неравенство (2.39) будет установлено, если мы покажем, что для некоторого $c > 0$

$$\underline{s}(g, \varepsilon) \leq c.$$

Последнее неравенство вытекает непосредственно из (2.42) и того, что

$$\dot{v}(\underline{s}(g, \varepsilon), \varepsilon, g) > 0.$$

Установим, далее, справедливость оценки

$$\bar{s}(g, \varepsilon) \leq c_0 |\ln \varepsilon|. \quad (2.44)$$

Доказательство (2.44) проведем в предположении, что p четно. При нечетном p доказательство проводится аналогично, поэтому мы его опустим.

Прежде всего отметим формулу

$$sw(s, \varepsilon) \equiv v(s, \varepsilon, g)u(s, \varepsilon, g) = s \left[\frac{1}{2} - b(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{b}(\varepsilon)(2 + \bar{b}(\varepsilon)) \dots (\bar{b}(\varepsilon) + 2i - 2)}{(2i)!} \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{b}(\varepsilon) - 1}{2i + 1} \right) \right]. \quad (2.45)$$

Очевидно, что все нули функции $v(s, \varepsilon, g)$, кроме $s = 0$, и только они являются в то же время нулями функции $w(s, \varepsilon)$. Нам будет удобно работать с последней функцией. При доказательстве нужной оценки для наибольшего нуля функции $w(s, \varepsilon)$ поступаем так же, как и при доказательстве неравенства (2.31). Укажем такие положительные значения b_1 и b_2 , чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} D_1(s, \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \exp(b_1 s^2) &\leq w(s, \varepsilon) \leq \\ D_2(s, \varepsilon) + b_1(\varepsilon)c(\varepsilon) \exp(b_2 s^2), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $D_i(s, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) – некоторые многочлены, аналитически зависящие от ε , явный вид которых нас не интересует. В (2.46) коэффициент $c(\varepsilon)$ таков, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = c^0 \neq 0.$$

Неравенства (2.46) будут доказаны, если найдутся такие положительные $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, при которых

$$\sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{\bar{b}_1^i}{i!} s^{2i} \leq \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{(2i-p+\bar{b}(\varepsilon)) \dots (2-p+\bar{b}(\varepsilon))}{(2i)!} \left(\frac{\bar{b}(\varepsilon)-1}{2i+1} + \frac{1}{2} \right) s^{2i} \quad (2.47)$$

и

$$\bar{w}(s, \varepsilon) \leq \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{(\bar{b}_2)^i}{i!} s^{2i}, \quad (2.48)$$

где через $\bar{w}(s, \varepsilon)$ обозначена правая часть неравенства (2.47). Соотношение (2.47) будет иметь место, например, при $\bar{b}_1 = (24(p+2)!)^{-1}$, поскольку,

$$\bar{w}(s, \varepsilon) \geq \frac{1}{3} \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{(2i-p-1)!!}{(2i)!} s^{2i} \geq \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{1}{i!(24(p+2)!)^i} s^{2i}.$$

Неравенство (2.48) легко проверить для $\bar{b}_2 = 1$, если воспользоваться соотношением

$$\bar{w}(s, \varepsilon) \leq \sum_{i=\frac{p}{2}+1}^{\infty} \frac{(2i-2)!!}{(2i)!} s^{2i}.$$

Для завершения доказательства оценки (2.44) следует воспользоваться рассуждениями, уже проводившимися ранее при обосновании неравенства (2.31).

Второй этап. Введем в рассмотрение отрезки

$$\Delta(t_0, \varepsilon) = \left[(-t_0 + \tau_1(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, (t_0 + \tau_2(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Функции $\tau_i(\varepsilon)$ ($i = 1, 2$) параметра ε , фигурирующие в определении $\Delta(t_0, \varepsilon)$, являются соответственно решениями уравнений

$$\psi(-t_0 + \tau_1(\varepsilon), \varepsilon) = -t_0, \quad \psi(t_0 + \tau_2(\varepsilon), \varepsilon) = t_0.$$

В силу определения функции $\psi(\tau, \varepsilon)$ эти уравнения однозначно разрешимы, если t_0 и ε достаточно малы. Численные значения $\tau_1(\varepsilon)$ и $\tau_2(\varepsilon)$ нас не будут интересовать. Отметим только, что $\tau_i(\varepsilon)$ гладко зависит от ε и, выполняются равенства

$$\lim_{\varepsilon, t_0 \rightarrow 0} \frac{\tau_i(\varepsilon)}{t_0} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.49)$$

Целью настоящего этапа является обоснование того факта, что при малых ε у уравнения (2.26) найдется решение, имеющее на отрезке $\Delta(t_0, \varepsilon)$ ровно p нулей.

Обозначим через $u(s, \varepsilon)$ решение уравнения (2.26), начальные условия которого при $s = 0$ совпадают с начальными условиями функции $u(s, \varepsilon, g)$, определенной равенством (2.37) при $g = g_r^1$. Из результатов статьи [10] следует, что $u(s, \varepsilon, g_r^1)$ обращается в нуль ровно p раз. Отметим, что функция $u(s, \varepsilon)$ сходится к $u(s, \varepsilon, g_r^1)$ при стремлении ε к нулю равномерно на каждом конечном промежутке и, далее, выполняется оценка (2.39). Отсюда следует, что при малых ε функция $u(s, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно p раз на отрезке $[-c, c]$. Обозначим самый левый нуль $u(s, \varepsilon)$ на этом отрезке, если таковые существуют, через $\underline{s}(\varepsilon)$, а самый правый – через $\bar{s}(\varepsilon)$. Введем, наконец, в рассмотрение отрезки

$$\Delta_1(\varepsilon) = \left[(-t_0 + \tau_1(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \underline{s}(\varepsilon) \right],$$

$$\Delta_2(\varepsilon) = \left[\bar{s}(\varepsilon), (t_0 + \tau_2(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Если $p = 0$, то положим

$$\Delta_1(\varepsilon) = \Delta_2(\varepsilon) = \Delta(t_0, \varepsilon).$$

Последующие рассуждения будут посвящены обоснованию того факта, что решения уравнения (2.26) не осциллируют на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда ε достаточно мало. Очевидно, тем самым будет доказано, что функция $u(s, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно p раз на $\Delta(t_0, \varepsilon)$ при малых ε . Для доказательства неосцилляции воспользуемся вариантом критерия Валле–Пуассена [7]. Построим такую функцию $z_0(s, \varepsilon)$, которая обладала бы следующими свойствами.

Во-первых, она непрерывна на отрезках $\Delta_1(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$, когда $p \neq 1$, и непрерывна лишь на полуинтервалах

$$\left[(-t_0 + \tau_1(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \underline{s}(\varepsilon) \right), \left(\bar{s}(\varepsilon), (t_0 + \tau_2(\varepsilon) + 2\sqrt{\varepsilon}d_1(\varepsilon)) \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right],$$

когда $p = 1$, причем в последнем случае будут иметь место предельные равенства

$$\lim_{s \rightarrow \underline{s}(\varepsilon) - 0} z_0(s, \varepsilon) = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow \bar{s}(\varepsilon) - 0} z_0(s, \varepsilon) = -\infty. \quad (2.50)$$

Отметим сразу же, что при $p = 1$ выполняются равенства

$$\underline{s}(\varepsilon) \equiv \bar{s}(\varepsilon) \equiv 0.$$

Во-вторых, для значений, принадлежащих $\Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$, будет выполняться дифференциальное неравенство

$$D^* z_0(s, \varepsilon) \geq z_0^2(s, \varepsilon) + \frac{1}{2} - b(\varepsilon) - \frac{s^2}{4} + \bar{w}(s, \varepsilon), \quad (2.51)$$

где $\bar{w}(s, \varepsilon) = w_1(s, \varepsilon) + g(\varepsilon) - \varepsilon^r g_r^1$, а через $D^* z_0(s, \varepsilon)$ обозначено правое верхнее производное число функции $z_0(s, \varepsilon)$.

Функцию $z_0(s, \varepsilon)$ определим следующим образом:

$$z_0(s, \varepsilon) = \begin{cases} v(s, \varepsilon, g), & \text{при } |s| \leq \bar{s}(g, \varepsilon), \quad s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon), \\ 0, & \text{при } |s| > \bar{s}(g, \varepsilon), \quad s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon), \end{cases} \quad (2.52)$$

где $v(s, \varepsilon, g)$ и $\bar{s}(g, \varepsilon)$ определены по правилу, изложенному на предыдущем этапе. Покажем, что функция (2.52) удовлетворяет дифференциальному неравенству (2.51), когда ε достаточно мало. Остальные требования, наложенные на $z_0(s, \varepsilon)$, выполняются очевидным образом.

При $s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$ и $|s| \leq \bar{s}(g, \varepsilon)$ неравенство (2.51) будет выполнено, если

$$g - g_r^1 \geq \max \bar{w}(s, \varepsilon), \quad |s| \leq \bar{s}(g, \varepsilon).$$

Справедливость этого неравенства вытекает из определения $\bar{w}(s, \varepsilon)$ и g , а также из соотношений (2.24), (2.27) и (2.44). Прежде чем обосновывать (2.51) для $s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$ и $|s| > \bar{s}(g, \varepsilon)$, введем несколько обозначений. Будем считать, что

$$\min |\dot{\psi}_1(\tau, \varepsilon)| \geq c_0 > 0 \quad (2.53)$$

для всех рассматриваемых значений τ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 достаточно мало. Этого всегда можно добиться за счет уменьшения t_0 . Далее, положим

$$l_0 \geq \frac{1}{c_0} \max_{\tau} [4f_1(\tau, \varepsilon) - \frac{\dot{\psi}_1^2(\tau, \varepsilon) p^2(\psi_1(\tau, \varepsilon))}{\varepsilon}].$$

В последнем неравенстве функция $f_1(\tau, \varepsilon)$ определяется формулой (1.15).

Таким образом, неравенство (2.51) для указанных значений s будет выполнено, если

$$|p(\psi_0(s, \varepsilon))| > \sqrt{l_0 \varepsilon}, \quad (2.54)$$

где через $\psi_0(s, \varepsilon)$ обозначена функция $\psi_0(s, \varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon}s + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon)$. Из свойств функции $p(t)$ вытекает, что неравенство (2.54) эквивалентно неравенству

$$|\psi_0(s, \varepsilon) + O(\psi_0(s, \varepsilon))| > \sqrt{l_0 \varepsilon},$$

справедливость которого следует из определения $\psi_0(s, \varepsilon)$ и из предельного равенства (2.43). Тем самым справедливость дифференциального неравенства (2.51) для всех рассматриваемых s доказана.

Мы показали, что при малых ε уравнение (2.26) имеет решение, количество нулей которого на отрезке $\Delta(t_0, \varepsilon)$ равно p . Отсюда можно сделать вывод, что существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $t_0 > 0$ и такое решение $y_0(t, \varepsilon)$ уравнения (2.9), что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ функция $y_0(t, \varepsilon)$ имеет на отрезке $[-t_0, t_0]$ ровно p нулей. Используя результаты [10], приходим к выводу, что при этом найдется решение (2.9), число нулей которого на этом же отрезке равно $p + 1$.

Третий этап. На этом этапе будет завершено обоснование леммы 1. Сначала введем в рассмотрение функцию

$$u_0(s, \varepsilon) = \begin{cases} \exp \left(\int_{-\bar{s}(g, \varepsilon)}^s z_0(\sigma, \varepsilon) d\sigma \right), & s \in \Delta_1(\varepsilon), \\ \exp \left(\int_s^{\bar{s}(g, \varepsilon)} z_0(\sigma, \varepsilon) d\sigma \right), & s \in \Delta_2(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.55)$$

На основании (2.51) делаем вывод, что эта функция при $s \in \Delta_1(\varepsilon) \cup \Delta_2(\varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\ddot{u}_0(s, \varepsilon) - s\dot{u}_0(s, \varepsilon) + f_1(\sqrt{\varepsilon}s + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon)u_0(s, \varepsilon) \leq 0.$$

Выполним затем в последнем выражении замены, обратные к (2.25), (2.22) и (2.13). В результате вместо $u_0(s, \varepsilon)$ мы получим некоторую функцию $y_0(t, \varepsilon)$, которая будет обладать следующими свойствами. Во-первых, при малых ε и при всех

$$t \in [-t_0, \underline{t}(\varepsilon)] \cup [\bar{t}(\varepsilon), t_0],$$

где положено

$$\underline{t}(\varepsilon) = \psi_1(-\sqrt{\varepsilon}\bar{s}(\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon)$$

и соответственно

$$\bar{t}(\varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon}\bar{s}(\varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon),$$

выполняется дифференциальное неравенство

$$\varepsilon \ddot{y}_0 + \varphi_1(t, \varepsilon)y_0(t, \varepsilon) \leq 0. \quad (2.56)$$

Во-вторых, как ясно из (2.52), (2.55) и (2.13), имеет место тождество

$$y_0(t, \varepsilon) \equiv \sqrt{\dot{\psi}(\psi^{-1}(t, \varepsilon), \varepsilon)}, \quad t \in [-t_0, \underline{t}(g, \varepsilon)] \cup [\bar{t}(g, \varepsilon), t_0].$$

В последней формуле через $\underline{t}(g, \varepsilon)$ и $\bar{t}(g, \varepsilon)$ обозначены величины

$$\underline{t}(g, \varepsilon) = \psi_1(-\sqrt{\varepsilon}\bar{s}(g, \varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$\bar{t}(g, \varepsilon) = \psi_1(\sqrt{\varepsilon}\bar{s}(g, \varepsilon) + 2\varepsilon d_1(\varepsilon), \varepsilon).$$

Доказательство леммы будет полностью закончено, если мы покажем, что функцию $y_0(t, \varepsilon)$ можно так продолжить на весь промежуток $[\alpha, -t_0] \cup [t_0, \beta]$, чтобы $y_0(t, \varepsilon)$ оставалась положительной, и сохранялось бы дифференциальное неравенство (2.56). При этом, может быть, придется уменьшить несколько t_0 и ε_0 .

Прежде всего отметим, что имеют место предельные равенства

$$\lim_{\substack{t_0 \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y_0(\pm t, \varepsilon) = 1, \quad \lim_{\substack{t_0 \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \dot{y}_0(\pm t, \varepsilon) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \ddot{y}_0(\pm t, \varepsilon) = 0. \quad (2.57)$$

Далее, положим

$$y_0(t, \varepsilon) = \begin{cases} y_0(t, \varepsilon), & t \in [-t_0, \underline{t}(\varepsilon)] \cup [\bar{t}(\varepsilon), t_0], \\ \ddot{y}_0(-t_0, \varepsilon)(t + t_0)^2 + \dot{y}_0(-t_0, \varepsilon)(t + t_0) + y_0(-t_0, \varepsilon), & t \in [\alpha, -t_0], \\ \ddot{y}_0(t_0, \varepsilon)(t - t_0)^2 + \dot{y}_0(t_0, \varepsilon)(t - t_0) + y_0(t_0, \varepsilon), & t \in [t_0, \beta]. \end{cases} \quad (2.58)$$

Равенства (2.57) обеспечивают положительность функции $y_0(t, \varepsilon)$ на промежутках $[\alpha, -t_0]$ и $[t_0, \beta]$, когда $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и ε_0 и t_0 достаточно малы. Остается проверить лишь (2.56), когда t принадлежит этим отрезкам. На промежутке $[\alpha, -t_0]$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{y}_0(t_0, \varepsilon) + \varphi_1(t, \varepsilon) y_0(t_0, \varepsilon) = \\ = 2\varepsilon \ddot{y}_0(-t_0, \varepsilon) + \frac{1}{|\dot{p}(0)|} \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon|\dot{p}(0)|} \right] y_0(t_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда доказательство того факта, что правая часть последнего равенства отрицательна, когда t_0 и ε_0 малы, завершается ссылкой на (2.57) и (2.58). Аналогично обосновывается неравенство (2.56) для $t \in [t_0, \beta]$. Таким образом, лемма доказана.

Сделаем одно замечание. Можно показать, что в общем случае ряды (1.8) и (1.18) не являются сходящимися даже при условии аналитичности коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$.

Сформулируем еще одно утверждение, относящееся к дифференциальному уравнению (2.1). Мы рассмотрим общий случай, когда функция $p(t)$ имеет нули в точках $t_1, \dots, t_n$ интервала (α, β) .

Обозначим через $\Delta_k \subset [\alpha, \beta]$ ($k = 1, \dots, n$) непересекающиеся отрезки $[t_k - t_0, t_k + t_0]$. Наибольшее число нулей (2.1) на каждом из Δ_k , положим равным соответственно $p_k(\varepsilon)$. Предположим, что для каждого рассматриваемого k выполняется либо соотношение (2.2), либо найдется в выражении (1.18) хотя бы один ненулевой коэффициент. Тогда, как следует из [10] и из леммы 1, $p_k(\varepsilon)$ ($k = 1, \dots, n$) не зависит от ε , если ε достаточно мало.

Лемма 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ найдется решение уравнения (2.1), которое обращается в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ ровно p_0 раз, где*

$$p_0 = -n + 1 + \sum_{k=1}^n p_k \quad (p_k = p_k(\varepsilon) = \text{const}).$$

При этом количество нулей любого другого решения (2.1) не превосходит p_0 .

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения в [10], поэтому мы его приводить не будем.

3. Обоснование теоремы 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - \lambda_j(\varepsilon)]x = 0. \quad (3.1)$$

Через $x_j(t, \varepsilon)$ будем обозначать собственную функцию первой краевой задачи, соответствующую собственному числу $\lambda_j(\varepsilon)$. Отметим, что эта функция обращается

в нуль в обоих концах отрезка $[\alpha, \beta]$ и, кроме этого, имеет ровно $j - 1$ нулей внутри рассматриваемого отрезка.

Доказательство теоремы 1 будет завершено, если мы установим, что для любого натурального l справедливо соотношение

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{i=0}^l \varepsilon^i \lambda_j^i + O(\varepsilon^l), \quad (3.2)$$

в котором положено $\lambda_j^0 = \lambda_j$. Обоснование отмеченного факта проведем, рассуждая от противного. Предположим, что для некоторых номеров j и l равенство (3.2) не имеет места. Тогда существует такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что справедливо соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l} \lambda_j(\varepsilon_m) - \sum_{i=0}^l \varepsilon^i \lambda_j^i = \delta, \quad (3.3)$$

где $\delta \neq 0$. При этом мы допускаем, что δ может принимать значения, равные либо ∞ , либо $-\infty$. Разберем отдельно два возможных случая. Первый из них реализуется, когда

$$\delta > 0, \quad (3.4)$$

а второй – когда

$$\delta < 0. \quad (3.5)$$

Предположим сначала, что выполняется неравенство (3.4). Тогда в силу ранее доказанной леммы все решения последнего уравнения могут обращаться в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ не более j раз. Тем не менее, как мы уже отмечали, функция $x_j(t, \varepsilon)$, являющаяся решением того же уравнения, имеет ровно $j+1$ нулей. Получено противоречие. Таким образом, неравенство (3.4) не может иметь места.

Далее, предположим, что справедливо неравенство (3.5). В этом случае у дифференциального уравнения (3.1) при достаточно малых ε существует решение, имеющее не менее $j+1$ нулей на интервале (α, β) . Это следует из лемм 1 и 2. Однако функция $x_j(t, \varepsilon)$ обращается в нуль на том же интервале точно $j-1$ раз. Воспользовавшись здесь теоремой о разделении нулей решений уравнения (3.1), получим противоречие. Тем самым показано, что неравенство (3.5) выполняться не может. Представление (3.2) доказано.

Выше мы всегда предполагали, что функция $p(t)$ не имеет нулей в концах отрезка $[\alpha, \beta]$. Опираясь на результаты [10] и применяя те же, что и выше, рассуждения, можно установить справедливость теоремы и без этого предположения. Отметим только, что при условии $p(\alpha) = 0$ роль чисел (1.2) играют величины

$$\nu_i^\alpha = \left[\frac{2q(\alpha) - \dot{p}(\alpha) - |\dot{p}(\alpha)|}{2} \right] - |\dot{p}(\alpha)|(1 + 2i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Аналогично дело обстоит и в случае, когда $p(\beta) = 0$.

В заключение отметим, что развитая методика без труда распространяется на более общий класс уравнений

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t, \varepsilon) \dot{x} + [q(t, \varepsilon) - \lambda r(t, \varepsilon)]x = 0,$$

в котором все коэффициенты аналитичны по ε равномерно относительно $t \in [\alpha, \beta]$.

Список литературы / References

- [1] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poriyadka s periodicheskimi koeffitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]
- [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]
- [3] Дородницын А. А., "Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля", *ПММ*, **11** (1947), 313–328; [Dorodnitsyn A. A., "Asimptoticheskoe reshenie uravneniya Van-der-Polya", *PMM*, **11** (1947), 313–328, (in Russian).]
- [4] Коул Дж., *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, М., 1970; English transl.: Cole J., *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.
- [5] Вишик М. И., Люстерник Л. А., "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122; [Vishik M. I., Lyusternik L. A., "Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom", *UMN*, **12**:5 (1957), 3–122, (in Russian).]
- [6] Колесов Ю. С., Чаплыгин В. Ф., "О неосцилляции решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка", *ДАН СССР*, **199**:6 (1971), 1240–1242; [Kolesov Yu. S., Chaplygin V. F., "O neostsillyatsii resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poriyadka", *DAN SSSR*, **199**:6 (1971), 1240–1242, (in Russian).]
- [7] Ch. J. de la Vallie-Poussin, "Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n ", *J. Math. Pure et Appl.*, **8**:1 (1929), 125–144.
- [8] Кащенко С. А., "Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S. A., "Predelnye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poriyadka s tochkami povorota", *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]
- [9] Кащенко С. А., "Асимптотика собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота", *Вестник Ярославского университета*, **13**, Ярославль, 1975, 20–83; [Kashchenko S. A., "Asimptotika sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i neperiodicheskoy krayevykh zadach dlya singulyarno vozmushchennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poriyadka s tochkami povorota", *Vestnik Yaroslavskogo universiteta*, **13**, Yaroslavl, 1975, 20–83, (in Russian).]
- [10] Кащенко С. А., "Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 682–710; [Kashchenko S. A., "Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Perturbed Second-order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710, (in Russian).]

Kashchenko S. A., "Asymptotic Expansions of Eigenvalues of the First Boundary Problem for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 41–60.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-41-60

Abstract. For singularly perturbed second order equations the dependence of eigenvalues of the first boundary problem on a small parameter at the highest derivative is studied. The main assumption is that the coefficient at the first derivative in the equation is the sign of the variable. This leads to the emerging of so-called turning points. Asymptotic expansions on the small parameter are obtained for all eigenvalues of the considered boundary problem. It turns out that the expansions are defined by the behavior of coefficients in a neighborhood of turning points only.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

On the authors:

Kashchenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

©Кащенко С. А., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-61-85

УДК 517.9

Асимптотические разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота

Кащенко С. А.

получена 20 декабря 2015

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение всех собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения второго порядка с малым множителем при старшей производной. Основное предположение состоит в том, что коэффициент при первой производной является знаком переменной, то есть имеются точки поворота. Разработан алгоритм вычисления всех коэффициентов асимптотических рядов для каждого из рассматриваемых собственных значений. Как оказалось, значения всех этих коэффициентов определяются по значениям коэффициентов исходного уравнения только в окрестности точек поворота. Получена асимптотика длин ляпуновских зон устойчивости и неустойчивости. В частности, решена задача об устойчивости решений уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

Для цитирования: Кащенко С. А., "Асимптотические разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 61–85.

Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское ш., 31, 115409, г. Москва, Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Введение

Настоящая работа опирается на теорию зон устойчивости А.М. Ляпунова [1] – [3]. В работах [4], [5] изучена асимптотика собственных значений первой краевой задачи для уравнений, указанных в названии. В настоящей статье изучается поведение собственных значений периодической и антипериодической краевых задач. Устанавливаются асимптотические представления, и дается алгоритм вычисления коэффициентов этих представлений для всех собственных значений данных краевых задач. При этом широко используются результаты статей [4], [5]. На основании полученных утверждений исследуется вопрос об устойчивости решений.

Структура статьи такова. Она состоит из 10 разделов. В разделах 1–4 исследуется асимптотика собственных значений и вопрос об устойчивости для самосопряженных уравнений из указанного в названии класса, а в разделах 5–10 – для несамопряженных. Отметим, что некоторые результаты, касающиеся вопроса об устойчивости решений, были изложены в [6].

1. Постановка задачи и формулировка результатов в самосопряженном случае

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \quad (1.1)$$

с малым положительным параметром ε и T - периодическими коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$. Для того, чтобы каждый раз не оговаривать гладкость этих функций, будем считать их бесконечно дифференцируемыми. Основное же предположение состоит в том, что функция $p(t)$ имеет нули на отрезке $[0, T]$.

Для уравнения (1.1) ставятся на отрезке $[\alpha, \alpha + T]$ первая, периодическая и антипериодическая краевые задачи. Требование самосопряженности операторов, порожденных последними двумя краевыми задачами, заключается в том, что справедливо равенство

$$M[p(t)] = 0. \quad (1.2)$$

Как известно, каждая из поставленных задач имеет счетное число вещественных собственных значений, которые можно считать занумерованными в порядке убывания. Собственные значения первой краевой задачи обозначим через $\mu_i(\varepsilon, \alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$), а собственные значения периодической и антипериодической задач, которые, очевидно, не зависят от α , обозначим соответственно через $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$). При этом можно так произвести нумерацию в случае кратных собственных значений, чтобы все $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) были непрерывными функциями параметра ε . Собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda_j^+(\varepsilon)$, обозначим через $x_j^+(t, \varepsilon)$, а через $x_j^-(t, \varepsilon)$ будем обозначать собственную функцию, отвечающую $\lambda_j^-(\varepsilon)$. Как отмечалось в [3] (глава 1), функция $x_1^+(t, \varepsilon)$ положительна, а функции $x_{2j}^+(t, \varepsilon)$ и $x_{2j+1}^+(t, \varepsilon)$ имеют ровно $2j$ нулей на некотором отрезке длины периода. Собственные функции $x_{2j-1}^-(t, \varepsilon)$ и $x_{2j}^-(t, \varepsilon)$ обращаются в нуль ровно $2j - 1$ раз каждая на отрезке $[\alpha, \alpha + T]$, если $x_{2j-1}^-(\alpha, \varepsilon) \neq 0$ и $x_{2j}^-(\alpha, \varepsilon) \neq 0$.

Предположим сначала, что функция $p(t)$ имеет лишь конечное число простых нулей на отрезке длины периода. Как показано в [4], при таком предположении для каждого номера $j = 1, 2, \dots$ имеет место асимптотическое представление

$$\mu_j(\varepsilon, \alpha) = \mu_j^0(\alpha) + \varepsilon \mu_j^1(\alpha) + \varepsilon^2 \mu_j^2(\alpha) + \dots \quad (1.3)$$

В [5] приведен алгоритм вычисления коэффициентов рядов (1.3). Здесь отметим только, что эти коэффициенты вычисляются лишь по значениям функций $p(t)$, $q(t)$ и их производных в точках поворота, т.е. там, где функция $p(t)$ обращается в нуль. Напомним еще один полезный факт из [5]. Функция $\mu_j^i(\alpha)$ параметра α , которая, очевидно, периодична с периодом T , может принимать лишь два различных значения, причем при всех таких α , для которых $p(\alpha) \neq 0$, значение $\mu_j^i(\alpha)$ одно и то же. Нам удобно зафиксировать одно из таких чисел, которое не совпадает с нулем функции $p(t)$. Ниже мы будем обозначать его через α_0 .

Теорема 1. *Имеют место асимптотические представления*

$$\lambda_j^+(\varepsilon) = \mu_j^0(\alpha_0) + \varepsilon \mu_j^1(\alpha_0) + \dots, \quad (1.4)$$

$$\lambda_j^-(\varepsilon) = \mu_j^0(\alpha_0) + \varepsilon \mu_j^1(\alpha_0) + \dots, \quad (1.5)$$

где $j = 1, 2, \dots$

Обратим внимание, что асимптотические ряды для $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ совпадают для одинаковых номеров j ($j = 1, 2, \dots$). Отсюда, в частности, следует, что эти ряды расходятся.

Сформулируем критерий устойчивости решений уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (1.6)$$

в котором функция $p(t)$ такая же, как и в условиях предыдущей теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что коэффициенты ни одного из рядов (1.4) и (1.5) не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (1.6) неустойчивы.*

Перейдем к случаю, когда у функции $p(t)$ существуют кратные нули, а число простых нулей конечно. В этом случае к числу

$$\nu_0 = \max q(t), \quad t \in \{\alpha : p(\alpha) = \dot{p}(\alpha) = 0\}$$

стремятся все собственные значения $\mu_j(\varepsilon, \alpha)$ первых краевых задач, для всех j больших N , при стремлении ε к нулю. При этом для $\mu_i(\varepsilon, \alpha)$ ($0 \leq i \leq N$) имеет место представление (1.3).

Теорема 3. *Для N первых чисел $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ имеет место теорема 1. Для остальных собственных значений справедливы равенства*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j^+(\varepsilon) = \nu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j^-(\varepsilon) = \nu_0. \quad (1.7)$$

Теперь сформулируем следующий критерий устойчивости.

Теорема 4. Пусть $\nu_0 < 0$ и коэффициенты ни одного из асимптотических рядов (1.4) и (1.5) для N первых чисел $\lambda_j^+(\varepsilon)$ и $\lambda_j^-(\varepsilon)$ не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (1.6) неустойчивы.

При условии $\nu_0 > 0$ существуют две такие последовательности $\varepsilon_m^1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_m^2 \rightarrow 0$, что при каждом ε_m^1 ($m = 1, 2, \dots$) решения уравнения (1.6) устойчивы, а при каждом ε_m^2 ($m = 1, 2, \dots$) – неустойчивы.

2. Обоснование теоремы 1 для собственных значений $\lambda_1^+(\varepsilon)$ и $\lambda_1^-(\varepsilon)$

Сначала докажем теорему 1 для собственного значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует такой номер l_0 и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, на которой выполняется предельное равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l_0} \left[\lambda_1^+(\varepsilon_m) - \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0) \right] = \delta_0, \quad (2.1)$$

где $\delta_0 \neq 0$. Из [3] (лемма 1.4.6 главы 1) и из способа нумерации собственных значений вытекает неравенство

$$\lambda_1^+(\varepsilon) > \mu_1(\varepsilon, \alpha_0) \quad (\varepsilon > 0).$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что

$$\delta_0 > 0. \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что при достаточно малых ε_m верно неравенство

$$\lambda_1^+(\varepsilon_m) > \varepsilon_m^{l_0} \delta_0 + \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0), \quad (2.3)$$

в котором $\delta^0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta_0, & \text{если } \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$

Отметим, далее, один общий факт. При условии

$$\lambda < \lambda_1^+(\varepsilon)$$

(ε как-то фиксировано) решения уравнения (1.1) осциллируют. Отсюда и из (2.3) вытекает существование такого отрезка $[0, \delta(\varepsilon_m)]$, на котором решения уравнения

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t) \dot{x} + \left[q(t) - \varepsilon_m^{l_0} \delta_0 - \sum_{i=0}^{l_0} \varepsilon_m^i \mu_1^i(\alpha_0) \right] x = 0 \quad (2.4)$$

осциллируют. Затем мы вновь воспользуемся результатами из [4] и [5], где показано, что условие (2.2) влечет за собой неосцилляцию на всей оси решений последнего уравнения при всех достаточно малых ε_m . Тем самым получено противоречие. Соотношение (1.4) для значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$ доказано.

Для того, чтобы установить равенство (1.5) для номера $j = 1$, воспользуемся утверждением, приведенным в [3] (лемма 1.4.6), на основании которого

$$\lambda_1^+(\varepsilon) > \lambda_1^-(\varepsilon) \geq \mu_1(\varepsilon, \alpha_0) \quad (\varepsilon > 0).$$

Отсюда и из уже доказанного в этом разделе утверждения получаем равенство

$$\lambda_1^-(\varepsilon) = \mu_1^0(\alpha_0) + \varepsilon \mu_1^1(\alpha_0) + \dots,$$

т.е. соотношение (1.5) справедливо при $j = 1$.

3. Вспомогательное утверждение

В этом разделе мы установим утверждение, которое будет играть основную роль при доказательстве теоремы 1. Точнее, будет изучено поведение некоторых собственных значений первых краевых задач в одном частном случае.

Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t, \varepsilon)x = \lambda x, \quad (3.1)$$

в котором функция $p(t)$ такая же, как и в уравнении (1.1) при условиях теоремы 1, а функция $q(t, \varepsilon)$, которая периодична и сколь угодно гладка по t , представима в виде асимптотического ряда по степеням параметра ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Собственные значения первых краевых задач для этого уравнения на отрезках $[\alpha, \alpha + T]$ обозначим через $\bar{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$). Как и везде выше, считаем, что нумерация этих собственных значений произведена в порядке их убывания. Как ясно из результатов, полученных в [3] – [5], для каждого $\bar{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ имеет место представление, аналогичное по виду (1.3). Первое предположение состоит в том, что ни один из рядов вида (1.3), соответствующий $\bar{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$, не имеет только нулевых коэффициентов. Рассмотрим, далее, лишь те собственные значения $\bar{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$, для которых первый неисчезающий член в представлении (1.3) для $\bar{\mu}_j(\varepsilon, \alpha)$ положителен. Понятно, что таких собственных значений может быть лишь конечное число. Мы будем предполагать, что это число не равно нулю. Через j_0 обозначим наибольший из номеров рассматриваемых собственных значений. Последнее предположение заключается в том, что асимптотические представления в нуле для каждого α из отрезка $[0, T]$ собственных значений $\bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha)$ совпадают.

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, условимся о терминологии. Будем писать

$$\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\infty),$$

если для каждого $l \geq 0$ выполняется соотношение

$$\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^l).$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha_0) - \min_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha) = o(\varepsilon^\infty). \quad (3.2)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.1) при нулевом значении параметра λ , т.е. такое уравнение:

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t, \varepsilon)x = 0. \quad (3.3)$$

Главную роль при обосновании нужного нам утверждения будет играть один факт, полученный в работах [4], [5]. Сформулируем его. Предварительно введем еще несколько обозначений. Через $t_1, \dots, t_n$ обозначим все нули функции $p(t)$ на отрезке $[0, T]$. Обозначим затем через Δ_i отрезок $[t_i - t_0, t_i + t_0]$, в котором число $t_0 > 0$ выберем настолько малым, чтобы в каждом из этих отрезков лежал лишь один нуль функции $p(t)$. Теперь мы легко сможем указать наибольшее и наименьшее число нулей, которое могут иметь решения уравнения (3.3) на отрезке Δ_i ($i = 1, \dots, n$) при малых ε . Наименьшее возможное число нулей на каждом из отрезков Δ_i , которое не зависит от ε , когда ε достаточно мало, мы будем обозначать соответственно через k_i . Наибольшее возможное количество нулей на том же отрезке равно $k_i + 1$.

Из условия совпадения асимптотических рядов $\bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha)$ для каждого α из отрезка $[0, T]$ и из того, что $j_0 \geq 1$, следуют два вывода. Во-первых, среди чисел k_i ($1 \leq i \leq n$) найдется хотя бы одно положительное. Во-вторых, все положительные k_i четны. Для определенности будем считать, что $k_1 > 0$. Тогда решение $x^0(t, \varepsilon)$ уравнения (3.3) с начальными условиями

$$x^0(t_1, \varepsilon) = 0, \quad \dot{x}^0(t_1, \varepsilon) \neq 0$$

обращается в нуль при всех малых ε ровно j_0 раз на полуинтервале $[t_1, t_1 + T)$, причем

$$j_0 = 1 + \sum_{i=1}^n k_i.$$

В то же время решение $x_0(t, \varepsilon)$ уравнения (3.3) с начальными условиями

$$x_0(t_1, \varepsilon) \neq 0, \quad \dot{x}_0(t_1, \varepsilon) = 0$$

имеет ровно k_1 нулей на отрезке Δ_1 . Обозначим через $t(\varepsilon)$ наименьший на отрезке Δ_1 нуль этой функции. Важный для дальнейшего результат заключается в следующем. Функция $x_0(t, \varepsilon)$ имеет на отрезке $[t(\varepsilon), t(\varepsilon) + T]$ ровно $j_0 + 1$ нулей при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 достаточно мало.

Выведем одно следствие из сказанного. Пусть функция $\psi_k(\tau, \varepsilon)$ равна расстоянию от точки τ , в которой некоторое решение уравнения (3.3) обращается в нуль, до следующего $(k - 1)$ -го нуля того же решения. Тогда имеют место неравенства

$$\psi_{j_0}(t_1, \varepsilon) > T, \quad \psi_{j_0}(t(\varepsilon), \varepsilon) < T.$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству равенства (3.2). Рассуждать будем от противного. Пусть существует такое целое $l_0 \geq 0$ и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l_0} \left[\bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m, \alpha_0) - \min_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon_m, \alpha) \right] = \delta_0, \quad (3.4)$$

где $\delta_0 \neq 0$. Отсюда, учитывая очевидное неравенство

$$\max_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha) < \min_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \alpha),$$

получаем, что

$$\delta_0 < 0.$$

Таким образом, при всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\min_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon_m, \alpha) > \bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m, \alpha_0) - \varepsilon_m^{l_0} \frac{\delta^0}{2}, \quad (3.5)$$

в котором $\delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если } \delta_0 > -\infty, \\ -1, & \text{если } \delta_0 = -\infty. \end{cases}$

Далее, введем в рассмотрение уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t, \varepsilon_m) - \bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_m, \alpha_0) - \varepsilon_m^{l_0} \frac{\delta^0}{2} \right] x = 0. \quad (3.6)$$

Первое, что мы отметим, это неравенство

$$\max_{\tau \in [0, T]} \bar{\psi}_{j_0}(\tau, \varepsilon_m) < T, \quad (3.7)$$

которое выполняется при всех достаточно малых ε_m . Здесь функция $\bar{\psi}_{j_0}(\tau, \varepsilon)$ имеет тот же смысл, что и $\psi_{j_0}(\tau, \varepsilon)$, но с тем единственным отличием, что строится она по решениям уравнения (3.6). В справедливости неравенства (3.7) нетрудно убедиться. Действительно, из условия

$$\bar{\psi}_{j_0}(\tau_{m_k}, \varepsilon_{m_k}) \geq T,$$

где $\varepsilon_{m_k} \rightarrow 0$, вытекает, что имеет место неравенство

$$\min_{\alpha \in [0, T]} \bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon_{m_k}, \alpha) \leq \bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon_{m_k}, \alpha_0) - \varepsilon_{m_k}^{l_0} \frac{\delta^0}{2}.$$

Последнее соотношение противоречит неравенству (3.5).

Вторым важным моментом в доказательстве равенства (3.2) является тот факт, что для уравнения (3.6) выполнены все условия, при которых рассматривалось уравнение (3.3). Здесь имеется в виду, что для уравнения (3.6) числа $\bar{k}_i$ ($i = 1, \dots, n$), определяемые аналогично числам k_i ($i = 1, \dots, n$) для уравнения (3.3), совпадают при всех достаточно малых ε с k_i соответственно. Правило вычисления этих чисел изложено в [4] и [5]. Применяя его к уравнению (3.6), мы убеждаемся в справедливости равенств

$$k_i = \bar{k}_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.8)$$

Добавим несколько слов в пояснение к сказанному. Из условия $\delta^0 < 0$ вытекает, что все $\bar{k}_i$ ($i = 1, \dots, n$) не зависят от ε , если ε мало, причем это свойство сохраняется при любых возмущениях коэффициента, стоящего при x в уравнении (3.6), функциями $\varphi(t, \varepsilon)$, имеющими более высокий, чем l_0 , порядок по ε . Как следует из [4] и [5], числа $\bar{k}_i$, обладающие перечисленными свойствами, могут меняться, грубо говоря, при переходе через собственное значение первой краевой задачи на отрезке $[\alpha, \alpha + T]$. В рассматриваемом же случае такого перехода не происходит, т.е. выполняются равенства (3.8).

Фиксируем решение $\bar{x}_0(t, \varepsilon_m)$ уравнения (3.6) с начальными условиями

$$\bar{x}_0(t_1, \varepsilon_m) \neq 0, \quad \dot{\bar{x}}_0(t_1, \varepsilon_m) = 0.$$

Тогда, как и ранее,

$$\bar{\psi}_{j_0}(\bar{t}(\varepsilon_m), \varepsilon_m) > T, \quad (3.9)$$

где ε_m достаточно мало. В последнем неравенстве через $\bar{t}(\varepsilon_m)$ обозначен наименьший на отрезке Δ_1 нуль функции $\bar{x}_0(t, \varepsilon_m)$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что неравенство (3.9) противоречит неравенству (3.7).

Отметим, что можно установить еще такое соотношение:

$$\bar{\mu}_{j_0}(\varepsilon, \bar{t}(\varepsilon)) - \bar{\mu}_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha_0) = O(\varepsilon^\infty).$$

4. Завершение доказательств приведенных теорем

Сначала докажем теорему 1. Для этого, прежде всего, все номера j ($j = 1, 2, \dots$) разобьем на два класса. К первому из них отнесем все те номера j , для каждого из которых соответствующее собственное значение $\mu_j(\varepsilon, \alpha)$ первой краевой задачи при некотором фиксированном $\alpha_j \in [0, T]$ имеет асимптотическое представление (1.3), не совпадающее с асимптотическим представлением для $\mu_j(\varepsilon, \alpha_0)$. Остальные номера j включим во второй класс. Формулы (1.4) и (1.5) докажем отдельно для собственных значений с номерами из разных классов.

Пусть некоторый номер j_0 принадлежит первому классу. Для доказательства теоремы 1 в этом случае нам понадобится еще один факт из статей [4], [5]. Там показано, что из условия несовпадения рядов для $\mu_{j_0}(\varepsilon, \alpha_{j_0})$ и $\mu_{j_0}(\varepsilon, \alpha_0)$ вытекает, что соответствующие ряды одни и те же для собственных значений $\mu_{j_0}(\varepsilon, \alpha_{j_0})$ и $\mu_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha_0)$, т.е.

$$\mu_{j_0}(\varepsilon, \alpha_{j_0}) - \mu_{j_0+1}(\varepsilon, \alpha_0) = O(\varepsilon^\infty). \quad (4.1)$$

Теперь остается лишь воспользоваться утверждением [3] (лемма 1.4.6), на основании которого доказательство равенств (1.4), (1.5) для собственных значений $\lambda_{j_0+1}^+(\varepsilon)$ и $\lambda_{j_0+1}^-(\varepsilon)$ следует из соотношения (4.1).

Пусть, далее, некоторый номер j_0 принадлежит второму классу. Тогда в справедливости равенств (1.4) и (1.5) для значений $\lambda_{j_0+1}^+(\varepsilon)$ и $\lambda_{j_0+1}^-(\varepsilon)$ убеждаемся, используя утверждения леммы 1 и леммы 1.4.6 из [3]. Таким образом, обоснование теоремы 1 закончено.

Теорема 2 является непосредственным следствием предыдущей теоремы. Действительно, для этого достаточно заметить (см. главу 1 [3]), что решения уравнения (1.1) устойчивы тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\begin{aligned} \text{либо} \quad & \lambda = \lambda_{2j}^+(\varepsilon) = \lambda_{2j+1}^+(\varepsilon) \quad (\lambda = \lambda_{2j-1}^-(\varepsilon) = \lambda_{2j}^-(\varepsilon)), \\ \text{либо} \quad & \lambda_{2j-1}^+(\varepsilon) < \lambda < \lambda_{2j-1}^-(\varepsilon) \quad (\lambda_{2j}^-(\varepsilon) < \lambda < \lambda_{2j}^+(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Кроме этого, из теоремы 1 и из результатов статьи [4] следует и первое утверждение теоремы 3, а с ним и теорема 4.

Второе утверждение теоремы 3 доказывается тоже без труда. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться утверждением [3] (лемма 1.4.6) и предельными равенствами

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_j(\varepsilon, \alpha) = \nu_0, \quad (4.2)$$

справедливыми для всех, начиная с некоторого, номеров j . Однако может так случиться, что первое утверждение теоремы 3 не определяет асимптотику собственного значения $\lambda_1^+(\varepsilon)$. Равенств (4.2) для всех $j = 1, 2, \dots$ тогда тоже недостаточно для изучения поведения этого собственного значения. Можно лишь утверждать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^+(\varepsilon) \geq \nu_0.$$

Покажем, что на самом деле $\lambda_1^+(\varepsilon)$ удовлетворяет равенству (1.7).

В предположении противного существует такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^+(\varepsilon_m) = \nu_0 + \delta_0,$$

где $\delta_0 > 0$. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \nu_0 - \frac{\delta^0}{2} \right] x = 0, \quad (4.3)$$

где $\delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если } \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$ Тогда, с одной стороны, из условия

$$\lambda_1^+(\varepsilon_m) > \nu_0 + \frac{\delta^0}{2},$$

справедливого, когда m достаточно велико, следует осцилляция решений уравнения (4.3). С другой стороны, как следует из [4], неравенство $\delta^0 > 0$ позволяет нам сделать вывод о неосцилляции на всей оси решений этого уравнения. Итак, теорема 3 полностью доказана.

5. Постановка задачи и основные результаты в несамосопряженном случае

Как и в предыдущем разделе, рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = \lambda x \quad (5.1)$$

с T -периодическими коэффициентами. Дифференциальные свойства функций $p(t)$ и $q(t)$ те же, что и выше. Однако, в отличие от предыдущих разделов, здесь будет разобран случай, когда равенство (1.2) не имеет места. Поскольку в дальнейшем мы будем интересоваться свойствами устойчивости, то будем предполагать, что

$$M[p(t)] > 0. \quad (5.2)$$

Для уравнения (5.1) ставятся периодическая и антипериодическая краевые задачи. Известно (см., например, [8]), что каждая из этих задач имеет при любом

$\varepsilon > 0$ счетное число собственных значений, которые можно занумеровать в порядке убывания их вещественных частей. При условии (5.2) нельзя гарантировать вещественность собственных значений. Более того, число комплексных собственных значений не может быть конечно, а число вещественных – обязательно конечно. Важной особенностью вещественных собственных значений является то, что они, вообще говоря, не являются непрерывными функциями коэффициентов уравнения (5.1), а значит, – и параметра ε . Это легко показать, используя [3] (теорема 1.5.2 главы 1). Отметим еще, что комплексные собственные значения, в отличие от вещественных, непрерывно зависят от ε . В настоящем разделе мы построим асимптотику при малых ε вещественных собственных значений.

Рассмотрим, наряду с уравнением (5.1), новое дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \right] y = \lambda y, \quad (5.3)$$

которое получается из (5.1) с помощью преобразования

$$x = y \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t p(\tau) d\tau \right). \quad (5.4)$$

Для уравнения (5.3) тоже ставятся периодическая и антипериодическая краевые задачи. Соответствующие дифференциальные операторы – самосопряженные. Поэтому у них существует счетное число вещественных собственных значений, которые мы обозначим соответственно через $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$). Нумерацию естественно проводить в порядке убывания собственных значений. При этом всегда можно нумеровать так, чтобы все функции $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ параметра ε были непрерывны.

Важный для нас вывод заключается в том, что для значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) справедливы, в зависимости от свойств функции $p(t)$, теоремы 1 и 4. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить следующее: доказательство отмеченных теорем проводилось на основе анализа осцилляционных свойств решений уравнения (1.1). Уравнение же (1.1) с помощью замены (5.4), не влияющей на нули его решений, преобразуется в уравнение (5.3). Поэтому к последнему применимы выводы теорем 1 и 4. Этот факт будет играть большую роль при изучении собственных значений краевых задач для уравнения (5.1) при условии (5.2).

Сделаем, наконец, последнее замечание. Как мы уже отмечали, в [7] установлено, что собственное значение с наибольшей вещественной частью из всех рассматриваемых собственных значений для обеих краевых задач (5.1) всегда вещественное и простое. Очевидно, оно непрерывно зависит от ε . Мы будем обозначать его через $h_1(\varepsilon)$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда мы знаем асимптотические представления всех $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$).

Теорема 5. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$h_1(\varepsilon) - \nu_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty). \quad (5.5)$$

Теорема 6. Пусть для некоторого номера j асимптотические ряды для $\nu_{2j}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j+1}^+(\varepsilon)$ или $\nu_{2j-1}^-(\varepsilon)$ и $\nu_{2j}^-(\varepsilon)$ не совпадают. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют два таких вещественных собственных значения периодической и антипериодической краевой задачи $h_{j1}(\varepsilon)$ и $h_{j1+1}(\varepsilon)$, которые непрерывно зависят от ε для указанных значений ε и для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \nu_{2j+1}^+(\varepsilon) < h_{j1+1}(\varepsilon) < h_{j1}(\varepsilon) < \nu_{2j}^+(\varepsilon) \\ (\nu_{2j}^-(\varepsilon) < h_{j1+1}(\varepsilon) < h_{j1}(\varepsilon) < \nu_{2j-1}^-(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$h_{j1}(\varepsilon) - \nu_{2j}^+(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty) \quad (h_{j1}(\varepsilon) - \nu_{2j-1}^-(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty)), \quad (5.7)$$

$$h_{j1+1}(\varepsilon) - \nu_{2j+1}^+(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty) \quad (h_{j1+1}(\varepsilon) - \nu_{2j}^-(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty)). \quad (5.8)$$

Отметим, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 такое, как в предыдущей теореме, в интервале $(h_{j1+1}(\varepsilon), h_{j1}(\varepsilon))$ не лежит ни одно другое вещественное собственное значение рассматриваемых краевых задач для уравнения (5.1).

Рассмотрим, далее, уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (5.9)$$

Теорема 7. Пусть коэффициенты ни одного из асимптотических рядов для $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (5.9) неустойчивы.

Предположим затем, что выполняются условия теоремы 3.

Теорема 8. Имеет место утверждение теоремы 5.

Условимся, далее, обозначать через $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ только те собственные значения, о которых говорится в первой части теоремы 3. Отметим, что их конечное число.

Теорема 9. Пусть для некоторого номера j асимптотические ряды для $\nu_{2j}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j+1}^+(\varepsilon)$ или $\nu_{2j-1}^-(\varepsilon)$ и $\nu_{2j}^-(\varepsilon)$ не совпадают. Тогда имеет место утверждение теоремы 6. Если вещественное собственное значение $h_j(\varepsilon)$ одной из рассматриваемых краевых задач для уравнения (5.1) определено при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и не стремится при стремлении ε к нулю ни к одному из собственных значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$, тогда необходимо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_j(\varepsilon) = \nu_0, \quad (5.10)$$

где

$$\nu_0 = \max q(t), \quad t \in \{\alpha : p(\alpha) = \dot{p}(\alpha) = 0\}. \quad (5.11)$$

Сформулируем теперь критерий устойчивости решений уравнения (5.9).

Теорема 10. Пусть $\nu_0 < 0$, и коэффициенты ни одного из асимптотических рядов для $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ не состоят из одних нулей. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения (5.9) неустойчивы.

Подводя итог сказанному, отметим, что налицо тесная связь между поведением собственных значений для самосопряженного и несамопряженного уравнений

(5.1) и (5.3). Эта взаимосвязь обеспечена суммарным влиянием малого параметра и точек поворота. При условии положительности функции $p(t)$ (или отрицательности), т.е. при отсутствии точек поворота, подобной связи нет. В этом случае имеет место соотношение [9]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_1(\varepsilon) = M^{-1} [p^{-1}(t)] M [q(t)p^{-1}(t)].$$

Можно показать, что все собственные значения периодической и антипериодической краевых задач для уравнения (5.3) неограниченно убывают при стремлении ε к нулю. В случае уравнения (5.1) все вещественные, кроме $h_1(\varepsilon)$, собственные значения тех же краевых задач либо с уменьшением ε пропадают, либо неограниченно убывают.

6. Несамосопряженный случай: вспомогательное утверждение

Задача исследования поведения вещественных собственных значений периодической и антипериодической краевых задач тесно связана с задачей об устойчивости решений уравнения (5.1) при различных значениях параметра λ . Эта связь, в частности, устанавливается в [3] (§1.6). В свою очередь, задача определения неустойчивости, как следует из [3] (теорема 1.5.2 глава 1), эквивалентна задаче на построение некоторых „пробных“ функций. В настоящем разделе будут построены „пробные“ функции для самосопряженного уравнения вида (5.3), используя которые мы сконструируем „пробные“ функции и для уравнения (5.1).

Предположим, что выполнены условия теорем 5 и 6. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} \right] y = 0. \quad (6.1)$$

Основное предположение этого раздела заключается в допущении, что решения последнего уравнения неустойчивы при малых ε , причем коэффициенты ни одного из асимптотических представлений для собственных значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots$) для уравнения (5.3) не состоят из одних нулей.

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, введем ряд обозначений. Ниже через $\varphi_0(t, \varepsilon)$ будем обозначать некоторую периодическую неотрицательную и не равную тождественно нулю функцию, явный вид которой нас не будет интересовать. Введем в рассмотрение затем дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_0(t, \varepsilon) \right] y = 0, \quad (6.2)$$

относительно которого будем предполагать, что оно принадлежит при всех достаточно малых ε той же зоне неустойчивости, что и уравнение (6.1). Наконец, через $y_0(t, \varepsilon)$ обозначим функцию, обладающую следующими тремя свойствами. Во-первых, $y_0(t, \varepsilon)$ либо периодическая, либо антипериодическая. Во-вторых, эта функция является решением уравнения (6.2). В-третьих, $|y_0(t, \varepsilon)|$ может быть отличен от единицы лишь на некоторых интервалах с центрами в точках $t_1, \dots, t_n$ ($p(t_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$), длина которых стремится к нулю при стремлении ε к нулю.

Лемма 2. В предположениях настоящего раздела существует такая функция $\varphi_0(t, \varepsilon)$, что уравнение (6.2) имеет решение $y_0(t, \varepsilon)$ с перечисленными выше свойствами.

Доказательство. Сразу отметим, что существование функций $\varphi_0(t, \varepsilon)$ и $y_0(t, \varepsilon)$, вторая из которых обладает всеми, кроме последнего, свойствами, непосредственно вытекает, например, из утверждений [3] (теорема 1.5.2). Возможность осуществления и третьего свойства для функции $y_0(t, \varepsilon)$ будет являться следствием наличия малого параметра.

Предположим для простоты, что первый член каждого из асимптотических разложений для всех $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ отличен от нуля. В случае, когда это не имеет места, доказательство проводится аналогично. Поэтому ниже этот случай рассматриваться не будет.

Упрощающее ограничение, сформулированное выше, позволяет заключить, что

$$\nu_i = \left[q(t_i) - \frac{1}{2}(\dot{p}(t) + |\dot{p}(t)|) \right] |\dot{p}(t)|^{-1} \neq j \quad (j = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, n). \quad (6.3)$$

Обозначим через N_i ($i = 1, \dots, n$) наименьшее неотрицательное целое число, превосходящее ν_i . Важное место в доказательстве леммы будут играть некоторые построения из [4]. Напомним, что там были введены функции ($i = 1, \dots, n$)

$$u_i(t, b_i, \varepsilon) = \begin{cases} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_i(b_i+2)\dots(b_i+2j-2)|\dot{p}(t_i)|^j}{\varepsilon^j(2j)!} (t - t_i)^{2j} \right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{|\dot{p}(t_i)|}{\varepsilon}(t - t_i)^2\right), \text{ если } N_i \text{ четно,} \\ \left\{ \frac{|\dot{p}(t_i)|^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(t - t_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(b_i+1)\dots(b_i+2j-1)|\dot{p}(t_i)|^{\frac{2j+1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{2j+1}{2}}(2j+1)!} (t - t_i)^{2j+1} \right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{|\dot{p}(t_i)|}{\varepsilon}(t - t_i)^2\right), \text{ если } N_i \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где b_i лежит в пределах

$$-N_i < b_i < -\nu_i.$$

Было показано, что каждая из функций $u_i(t, b_i, \varepsilon)$ обращается в нуль ровно N_i раз на интервале $(-\infty, \infty)$. Крайний правый нуль, если таковые вообще имеются, этой функции мы обозначим через $t_i(b_i, \varepsilon)$. Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} t_i(b_i, \varepsilon) = t_i.$$

Далее, по каждой из функций $u_i(t, b_i, \varepsilon)$ конструировалась новая нечетная функция

$$v_i(t, b_i, \varepsilon) = \frac{|\dot{p}(t_i)|^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(t - t_i) - \frac{\dot{u}_i(t, b_i, \varepsilon)}{u_i(t, b_i, \varepsilon)},$$

которая обращается в нуль в некоторой точке $\bar{t}_i(b_i, \varepsilon)$, когда $\delta_i = N_i + b_i$ достаточно мало, причем

$$\bar{t}_i(b_i, \varepsilon) > t_i(b_i, \varepsilon).$$

Наконец, в [4] вводились функции $z_i(t, \varepsilon)$, каждая из которых тождественно равна $v_i(t, b_i, \varepsilon)$ при всех $t \in [-\bar{t}_i(b_i, \varepsilon), \bar{t}_i(b_i, \varepsilon)]$, а при остальных значениях $t \in \Delta_i(t_0) =$

$[t_i - t_0, t_i + t_0]$ ($t_0 > 0$, $t_j \in \Delta_i(t_0)$, если $i \neq j$) они тождественно равны нулю. Основным свойством этих функций является то, что при малых δ_i и ε они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$D^* z_i(t, \varepsilon) = z_i^2(t, \varepsilon) + \frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2\varepsilon} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_i(t, \varepsilon), \quad (6.4)$$

где $\varphi_i(t, \varepsilon) \geq 0$, а $D^* z_i(t, \varepsilon)$ – правое верхнее производное число функции $z_i(t, \varepsilon)$. Используя свойства функций $z_i(t, \varepsilon)$, а также связь между решениями уравнения Риккати (6.4) и линейным дифференциальным уравнением второго порядка, заключаем, что функция

$$y_i(t, \varepsilon) = \exp \left(- \int_{t_i - t_0}^t z_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right)$$

обладает следующими свойствами. Во-первых, она имеет ровно N_i нулей при всех малых ε . Во-вторых, она отлична от единицы лишь на интервале с центром в t_i , длина которого стремится к нулю при стремлении ε к нулю. Наконец, в-третьих, она является решением (на соответствующем отрезке) уравнения

$$\varepsilon D^* \dot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_i(t, \varepsilon) \right] y = 0.$$

С помощью таких функций $y_i(t, \varepsilon)$ легко строится функция $y_0(t, \varepsilon)$, о которой говорится в формулировке леммы.

Пусть $t_2, \dots, t_n$ лежат в интервале $(t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T)$. Понятно, что это не ограничивает общности. Положим

$$\bar{y}_0(t, \varepsilon) = \begin{cases} y_i(t, \varepsilon), & \text{если } t \in \Delta_i(t_0) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \pm 1, & \text{если } t \in [t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T], \quad t \notin \bigcup_{i=1}^n \Delta_i(t_0), \end{cases}$$

где знак $+$ или $-$ берется так, чтобы $\bar{y}_0(t, \varepsilon)$ была непрерывной функцией. Легко видеть, что $\bar{y}_0(t, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon D^* \dot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \bar{\varphi}_0(t, \varepsilon) \right] y = 0,$$

в котором

$$\bar{\varphi}_0(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_i(t, \varepsilon), & \text{если } t \in \Delta_i(t_0) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} - \frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2}, & \text{если } t \in [t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T] \setminus \bigcup_{i=1}^n \Delta_i(t_0). \end{cases}$$

Далее, отметим, что функция $\dot{\bar{y}}_0(t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1 - t_0, t_1 - t_0 + T]$ за исключением конечного числа точек, где существуют односторонние производные. Поэтому существует такая функция $y_0(t, \varepsilon)$, количество нулей которой на каждом из отрезков $\Delta_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$) совпадает с числом нулей функции $\bar{y}_0(t, \varepsilon)$ и которая может быть отлична по модулю от единицы лишь на $\Delta_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$). Наконец, $y_0(t, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{p}(t)}{2} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon} + \varphi_0(t, \varepsilon) \right] y = 0,$$

причем $\varphi_0(t, \varepsilon) \geq 0$. Остальные свойства функции $y_0(t, \varepsilon)$, о которых говорится в лемме, выполняются очевидным образом. Лемма доказана.

7. Обоснование теоремы 5

Предположим, что равенство (5.5) не имеет места, т.е. на некоторой последовательности $\varepsilon_m \rightarrow 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l_0} [h_1(\varepsilon_m) - \nu_1^+(\varepsilon_m)] = \delta_0, \quad (7.1)$$

где $\delta_0 \neq 0$, а $l_0 \geq 0$ – целое. Из того простого факта, что при $\lambda = \nu_1^+(\varepsilon)$ решения уравнения (5.1) экспоненциально устойчивы, следует неравенство

$$h_1(\varepsilon_m) > \nu_1^+(\varepsilon_m),$$

а значит, в (7.1)

$$\delta_0 > 0. \quad (7.2)$$

Если мы докажем существование таких периодических функций $\varphi_0(t, \varepsilon_m) \not\equiv 0$ и $x_0(t, \varepsilon_m) > 0$, для которых выполняется равенство

$$\varepsilon_m \ddot{x}_0(t, \varepsilon_m) + p(t) \dot{x}_0(t, \varepsilon_m) + [q(t) - h_1(\varepsilon_m) + \varphi_0(t, \varepsilon_m)] x_0(t, \varepsilon_m) = 0, \quad (7.3)$$

то тем самым получим противоречие с тем, что $h_1(\varepsilon_m)$ является собственным значением периодической краевой задачи. Здесь мы вновь используем результаты [3].

Приступим к построению функций $x_0(t, \varepsilon_m)$ и $\varphi_0(t, \varepsilon_m)$. Введем в рассмотрение новое самосопряженное уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{x} + \tilde{p}(t) \dot{x} + q(t)x = \lambda x, \quad (7.4)$$

в котором непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{p}(t)$ обладает следующими свойствами. Во-первых, она совпадает с функцией $p(t)$ там, где

$$p(t) \leq \alpha,$$

причем $\alpha > 0$, вообще говоря, достаточно мало. Насколько малым оно должно быть, будет видно из дальнейшего. Во-вторых, все нули $\tilde{p}(t)$ совпадают соответственно с нулями функции $p(t)$. Наконец, в-третьих, выполняются соотношения

$$M[\tilde{p}(t)] = 0, \quad \tilde{p}(t) \leq p(t) \quad (t \in [0, T]). \quad (7.5)$$

Отметим, что для всех собственных значений $\nu_j^+(\varepsilon)$ и $\nu_j^-(\varepsilon)$ асимптотические в нуле представления вычислялись лишь по значениям функций $p(t)$, $q(t)$ и их производных в тех точках, где $p(t) = 0$. Поэтому из свойств функции $\tilde{p}(t)$ вытекает, что первое собственное значение $\tilde{\nu}_1^+(\varepsilon)$ периодической краевой задачи для уравнения (7.4) удовлетворяет равенству

$$\tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \nu_1^+(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty). \quad (7.6)$$

Рассмотрим затем уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + \tilde{p}(t)\dot{x} + \left[q(t) - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} \right] x = 0, \quad (7.7)$$

$$\text{где } \delta^0 = \begin{cases} \delta_0, & \text{если } \delta_0 < \infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$$

С помощью замены $x = y \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t p(\tau) d\tau \right)$ это уравнение преобразуется к виду

$$\varepsilon \ddot{y} + \left[\frac{2q(t) - \dot{\tilde{p}}(t)}{2} - \frac{\tilde{p}^2(t)}{4\varepsilon} - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} \right] y = 0. \quad (7.8)$$

Нетрудно видеть, что к уравнению (7.8) применима лемма 2, т.е. существуют такие периодические функции $\tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon) \geq 0$ ($\not\equiv 0$) и $y_0(t, \varepsilon) > 0$, для которых справедливо дифференциальное равенство

$$\varepsilon \ddot{y}_0(t, \varepsilon) + \left[\frac{2q(t) - \dot{\tilde{p}}(t)}{2} - \frac{\tilde{p}^2(t)}{4\varepsilon} - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon) \right] y_0(t, \varepsilon) = 0. \quad (7.9)$$

При этом функция $|y_0(t, \varepsilon)|$ может быть отлична от единицы лишь на некоторых интервалах, стягивающихся в точки $t_1, \dots, t_n$ при уменьшении ε до нуля. Фиксируем, далее, такое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы $|y_0(t, \varepsilon)| \equiv 1$ для всех тех значений $t \in [0, T]$, для которых

$$\tilde{p}(t) < p(t).$$

Существование такого ε_0 не вызывает сомнений. В дальнейшем будем рассматривать только те значения ε , которые лежат в интервале $(0, \varepsilon_0)$.

Для периодической (в силу первого из условий (7.5)) функции

$$\tilde{x}_0(t, \varepsilon) = y_0(t, \varepsilon) \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \tilde{p}(\tau) d\tau \right),$$

очевидно, выполняется соотношение

$$\varepsilon \ddot{\tilde{x}}_0(t, \varepsilon) + \tilde{p}(t, \varepsilon) \dot{\tilde{x}}_0(t, \varepsilon) + \left[q(t) - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon) \right] \tilde{x}_0(t, \varepsilon) = 0.$$

Это равенство можно переписать и так:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\tilde{x}}_0(t, \varepsilon) + p(t) \dot{\tilde{x}}_0(t, \varepsilon) + \left[q(t) - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon^{l_0} + \tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + (\tilde{p}(t) - p(t)) \left(\frac{\dot{y}_0(t, \varepsilon)}{y_0(t, \varepsilon)} - \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{p}(t) \right) \right] \tilde{x}_0(t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Из свойств функций $\tilde{p}(t)$ и $y_0(t, \varepsilon)$ следует, что последний коэффициент, стоящий в квадратных скобках равенства (7.10), неотрицателен. После этого построение описанных функций $\varphi_0(t, \varepsilon_m)$ и $x_0(t, \varepsilon_m)$ завершается без труда. Действительно, фиксируем m_0 так, чтобы при всех $m > m_0$ выполнялось условие

$$h_1(\varepsilon_m) - \nu_1^+(\varepsilon_m) \geq \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0}.$$

Тогда, очевидно,

$$-\nu_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0} + \varphi^0(t, \varepsilon_m) \geq -h_1(\varepsilon), \quad m > m_0, \quad (7.11)$$

причем тождественное равенство в последней формуле исключено. Здесь положено

$$\varphi^0(t, \varepsilon_m) = \tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon_m) + [\tilde{p}(t) - p(t)] \left[\frac{\dot{y}_0(t, \varepsilon)}{y_0(t, \varepsilon)} - \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{p}(t) \right]$$

или, учитывая свойства функции $y_0(t, \varepsilon)$,

$$\varphi^0(t, \varepsilon_m) = \tilde{\varphi}_0(t, \varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{p}(t) [\tilde{p}(t) - p(t)].$$

Используя равенство (7.6), замечаем, что в формуле (7.11) вместо $\nu_1^+(\varepsilon)$ можно писать $\tilde{\nu}_1^+(\varepsilon)$. При этом, может быть, придется несколько увеличить m_0 . Положим, наконец,

$$\varphi_0(t, \varepsilon_m) = h_1(\varepsilon) - \tilde{\nu}_1^+(\varepsilon) - \frac{\delta^0}{2}\varepsilon_m^{l_0} + \varphi^0(t, \varepsilon_m).$$

Тогда уравнение (7.10) принимает вид (7.3), где $x_0(t, \varepsilon_m) \equiv \tilde{x}_0(t, \varepsilon_m)$. При этом функция $\varphi_0(t, \varepsilon_m) \not\equiv 0$ неотрицательна на основании неравенства (7.11), а положительность функции $x_0(t, \varepsilon_m)$ вытекает из аналогичного свойства функции $y_0(t, \varepsilon_m)$. Таким образом, обоснование соотношения (5.5) завершено.

8. Обоснование соотношений (5.8)

В этом и следующем разделах мы будем предполагать, что при всех достаточно малых ε существуют собственные значения $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам (5.6). Доказательство же существования таких собственных значений будет проведено несколько позже.

В настоящем разделе будут использованы рассуждения, подобные тем, которые применялись для обоснования равенства (5.5).

Итак, предположим, что для некоторого номера j_0 асимптотические в нуле ряды для $\nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ не совпадают. Сразу отметим, что подобный случай для собственных значений $\nu_{2j_0-1}^-(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0}^-(\varepsilon)$ разбирается аналогично, и поэтому мы его опустим. Доказательство соотношения (5.8) проведем, как мы уже неоднократно делали, рассуждая от противного. На этом пути получим равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l_0} [h_{j_1+1}(\varepsilon_m) - \nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon_m)] = \delta_0. \quad (8.1)$$

Здесь $\varepsilon_m \rightarrow 0$, а $\delta_0 \neq 0$. Из неравенств (5.6) получаем, что $\delta_0 > 0$. Если мы покажем, что для всех достаточно больших m имеют место соотношения

$$\varepsilon_m \ddot{x}_0(t, \varepsilon_m) + p(t) \dot{x}_0(t, \varepsilon_m) + [q(t) - h_{j_1+1}(\varepsilon_m) + \varphi_0(t, \varepsilon_m)] x_0(t, \varepsilon_m) = 0, \quad (8.2)$$

где $\varphi_0(t, \varepsilon_m) \geq 0$ ($\not\equiv 0$), а $x_0(t, \varepsilon_m)$ – периодическая функция, имеющая ровно $2j_0$ нулей на некотором отрезке длины периода, то тем самым получим противоречие с (8.1), а значит, докажем равенство (5.8). Соответствующие рассуждения, приводящие к нужному результату, близки к использованным в предыдущем разделе. Единственное отличие состоит в том, что функция $y_0(t, \varepsilon_m)$ в нашем случае будет иметь ровно $2j_0$ нулей на некотором отрезке длины периода. Наличие нужного числа нулей у функции $y_0(t, \varepsilon_m)$ удастся проследить, используя снова лемму 2.

9. Обоснование соотношений (5.7)

Общий ход рассуждений в этом разделе тот же, что и в двух предыдущих. Однако в деталях соответствующие построения существенно отличаются от изложенных ранее.

Итак, пусть асимптотические в нуле ряды для собственных значений $\nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ не совпадают. Предположим противное, т.е. пусть соотношение (5.7) места не имеет. Тогда найдется такой номер $l_0 \geq 0$ и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m^{-l_0} [h_{j_1}(\varepsilon_m) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon_m)] = \delta_0, \quad (9.1)$$

где $\delta_0 \neq 0$. Отметим, что в силу (5.6)

$$\delta_0 < 0. \quad (9.2)$$

Нашей конечной целью является построение такой „пробной“ функции $x^0(t, \varepsilon_m)$, которая, во-первых, периодична и является решением уравнения

$$\varepsilon_m \ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) - h_{j_1}(\varepsilon_m) - \varphi_0(t, \varepsilon_m)]x = 0, \quad (9.3)$$

где периодическая функция $\varphi_0(t, \varepsilon_m)$ положительна и, во-вторых, $x^0(t, \varepsilon_m)$ имеет ровно $2j_0$ нулей на любом отрезке $[\alpha, \alpha + T]$, для которого выполнено условие $x^0(t, \varepsilon_m) \neq 0$. Построив функцию, обладающую перечисленными выше свойствами, мы, очевидно, получим противоречие с тем, что $h_{j_1}(\varepsilon_m)$ является собственным значением периодической краевой задачи и удовлетворяет неравенствам (5.6).

При построении функции $x^0(t, \varepsilon_m)$ основную роль будет играть некоторая вспомогательная функция $y_0(t, \varepsilon_m)$. Определим эту функцию. Для этого введем в рассмотрение уравнение

$$\varepsilon_m \ddot{y} + \psi_0(t, \varepsilon_m)y = \lambda y. \quad (9.4)$$

В (9.4) периодическая функция $\psi_0(t, \varepsilon_m)$ определяется следующим образом. Фиксируем сначала такой отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset [0, T]$, чтобы при всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ функция $p(t)$ была отрицательной. Положим затем

$$\psi_0(t, \varepsilon_m) = \begin{cases} q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon_m}p^2(t), & t \in [0, T] \quad t \notin (\alpha_1, \beta_1), \\ -\frac{a_0}{\varepsilon_m^2}, & t \in (\alpha_1, \beta_1), \end{cases}$$

где $a_0 > 0$. Отметим, что в дальнейшем будем рассматривать лишь те значения m , при которых выполняется неравенство

$$\psi_0(t, \varepsilon_m) \leq -\frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4\varepsilon_m}p^2(t) + q(t), \quad t \in [0, T].$$

Поставим теперь для уравнения (9.4) периодическую краевую задачу. Собственные значения $\bar{\nu}_j^+(\varepsilon_m)$ этой краевой задачи будем нумеровать в порядке убывания. Нас будет интересовать поведение только собственного значения $\bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)$. Для него, впрочем, как и для всех остальных собственных значений, справедливо асимптотическое равенство

$$\bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon_m) = O(\varepsilon^\infty). \quad (9.5)$$

Этот важный для нас вывод следует непосредственно из результатов работ [4] и [5] и разделов 1–4. Обозначим, далее, через $y_0(t, \varepsilon_m)$ собственную функцию, соответствующую собственному значению $\bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)$. От возможного поведения этой функции зависят последующие построения. В связи с этим изучим некоторые свойства функции $y_0(t, \varepsilon_m)$.

Предположим сначала существование такой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что при каждом ε_{m_k} функция $y_0(t, \varepsilon_{m_k})$ имеет нуль на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2] \subset [\alpha_1, \beta_1)$.

Лемма 3. *Существует такое m_0 , что при всех $m_k > m_0$ функция*

$$u_0(t, \varepsilon_{m_k}) = \frac{\dot{y}_0(t, \varepsilon_{m_k})}{y_0(t, \varepsilon_{m_k})}$$

положительна для значений t из промежутка $[\bar{\alpha}_0 + rT, \bar{\beta}_0 + rT]$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где

$$\alpha_2 < \bar{\alpha}_0 < \bar{\beta}_0 \leq \beta_1.$$

Ниже для сокращения записи часто будем считать, что в качестве подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ взята сама последовательность $\{\varepsilon_m\}$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно заметить, что в уравнении

$$\varepsilon_m \ddot{y} + [\psi_0(t, \varepsilon_m) - \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)]y = 0, \quad (9.6)$$

решением которого является $y_0(t, \varepsilon_m)$, коэффициент, стоящий при y , отрицателен при всех малых ε_m и $t \in [\alpha_1 + rT, \beta_1 + rT]$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Предположим, далее, что описанная выше ситуация места не имеет, т.е. нельзя указать такого отрезка вида $[\alpha_1, \alpha_2] \subset [\alpha_1, \beta_1)$, на котором бы функция $y_0(t, \varepsilon_m)$ обращалась в нуль на некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\} \subset \{\varepsilon_m\}$. Тогда выполняется хотя бы один из следующих двух случаев. Первый из них состоит в допущении существования такого отрезка $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0] \subset (\alpha_1, \beta_1)$, что при всех $t \in [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$ функция $u_0(t, \varepsilon_m)$ неотрицательна на некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_{m_k}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$. Второй случай состоит в том, что найдется такой отрезок $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$ и такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_k}\}$, что при $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ и малых ε_{m_k} функция $y_0(t, \varepsilon_{m_k})$ в нуль не обращается, а знак ее производной противоположен знаку самой функции. Определим в последнем случае отрезок $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_2 \leq \bar{\alpha}_0 < \bar{\beta}_0 < \beta_2. \quad (9.7)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$|u_0(t, \varepsilon_{m_k})| \leq \frac{c_0}{(\varepsilon_{m_k})^{\frac{3}{2}}}, \quad t \in [\alpha_0 + rT, \beta_0 + rT] \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (9.8)$$

где c_0 не зависит от ε_{m_k} .

Доказательство. Ниже вместо ε_{m_k} будем писать ε_m . Для доказательства леммы заметим, что на отрезке $[\alpha_1, \beta_2]$ выполняется равенство

$$y_0(t, \varepsilon_m) = c_1(\varepsilon_m) \exp \left(\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)} t \right) + \\ + c_2(\varepsilon_m) \exp \left(-\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)} t \right).$$

Далее, из условий

$$|y_0(t, \varepsilon_m)| > 0 \quad \text{и} \quad y_0(t, \varepsilon_m) \dot{y}_0(t, \varepsilon_m) < 0, \quad t \in [\alpha_1, \beta_2]$$

вытекает соотношение

$$|c(\varepsilon_m)| \leq \exp \left(-2\beta_2 \sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)} \right), \quad (9.9)$$

где положено

$$c(\varepsilon_m) = \frac{c_1(\varepsilon_m)}{c_2(\varepsilon_m)}.$$

Для функции $u_0(t, \varepsilon_m)$ на отрезке $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$ справедлива формула

$$u_0(t, \varepsilon_m) = \left[c(\varepsilon_m) - \exp \left(-2t \sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)} \right) \right] \times \\ \times \left[c(\varepsilon_m) + \exp \left(-2t \sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)} \right) \right]^{-1} \sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon_m^3} - \frac{1}{\varepsilon_m} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m)}.$$

Отсюда, принимая во внимание (9.7) и (9.9), и следует обоснование леммы.

На следующем этапе введем в рассмотрение еще одну вспомогательную периодическую и непрерывно дифференцируемую функцию $p_0(t)$. Положим

$$p_0(t) \equiv p(t), \quad t \in [0, T], \quad t \in [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0],$$

а на отрезке $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$ определим $p_0(t)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$M[p_0(t)] = 0, \quad p_0(t) \leq p(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9.10)$$

Будем, далее, считать, что число m_0 выбрано таким образом, чтобы для всех $m > m_0$ имело место неравенство

$$\frac{a_0}{\varepsilon_m^2} > \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m} p_0^2(t), \quad t \in [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]. \quad (9.11)$$

Теперь, когда все подготовительные построения проделаны, мы можем определить функцию $x^0(t, \varepsilon_m)$. Для этого положим

$$x^0(t, \varepsilon_m) = y_0(t, \varepsilon_m) \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon_m} \int_0^t p_0(\tau) d\tau \right). \quad (9.12)$$

Для этой функции справедливо дифференциальное равенство

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m \ddot{x}^0(t, \varepsilon_m) + p_0(t) \dot{x}^0(t, \varepsilon_m) + \\ & + \left[\psi_0(t, \varepsilon_m) + \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m} p_0^2(t) - \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m) \right] x^0(t, \varepsilon_m) = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Последнее выражение можно переписать и так:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m \ddot{x}^0(t, \varepsilon_m) + p(t) \dot{x}^0(t, \varepsilon_m) + \left[\psi_0(t, \varepsilon_m) + \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m} p_0^2(t) - \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m) + \right. \\ & \left. + (p_0(t) - p(t)) \left(u_0(t, \varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m} p_0(t) \right) \right] x^0(t, \varepsilon_m) = 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Таким образом, мы показали, что функция $x^0(t, \varepsilon_m)$ является решением уравнения (9.3), в котором

$$\begin{aligned} -\varphi_0(t, \varepsilon_m) &= \psi_0(t, \varepsilon_m) + \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m} p_0^2(t) - \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m) + \\ &+ h_{j_1}(\varepsilon_m) - q(t) + [p_0(t) - p(t)] \left[u_0(t, \varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m} p_0(t) \right]. \end{aligned}$$

Установим теперь положительность функции $\varphi_0(t, \varepsilon_m)$. Из определения функций $\psi_0(t, \varepsilon_m)$ и $p_0(t)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \psi_0(t, \varepsilon_m) + \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) + \frac{1}{4\varepsilon_m} p_0^2(t) - q(t) + \\ & + [p_0(t) - p(t)] \left[u_0(t, \varepsilon_m) - \frac{1}{2\varepsilon_m} p_0(t) \right] \leq 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

если только ε_m достаточно мало. Действительно, если на отрезке $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$ функция $u_0(t, \varepsilon_m)$ положительна, то все последнее слагаемое в (9.15) неположительно. Если функция $u_0(t, \varepsilon_m)$ отрицательна на $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$, то, как мы показали, имеет место оценка (9.8). Поэтому все равно знак левой части (9.15) будет определяться при малых ε_m первым слагаемым, которое отрицательно на отрезке $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$. Наконец, из соотношений (9.3), (9.4) и (9.5) получаем, что

$$\bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon_m) - h_{j_1}(\varepsilon_m) > \varepsilon_m^{l_0} \delta^0, \quad m > m_0,$$

в котором m_0 достаточно велико, а δ^0 определяется формулой

$$\delta^0 = \begin{cases} -\frac{\delta_0}{2}, & \text{если } \delta_0 \neq -\infty, \\ 1, & \text{если } \delta_0 = \infty. \end{cases}$$

Итак, мы установили неравенство

$$\varphi_0(t, \varepsilon_m) \geq \varepsilon_m^{l_0} \delta^0 \quad (m > m_0).$$

Остальные нужные нам свойства функции $x^0(t, \varepsilon_m)$ выполняются очевидным образом. Отметим лишь, что из периодичности функции $y_0(t, \varepsilon_m)$ и из условия (9.10) следует периодичность функции $x^0(t, \varepsilon_m)$.

10. Завершение доказательств теорем несамосопряженного случая

Прежде всего закончим обоснование теоремы 5. Для этого нам осталось лишь установить существование при всех достаточно малых ε собственных значений $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$, удовлетворяющих неравенствам (5.6). Напомним, что мы рассматриваем тот случай, когда асимптотические в нуле ряды для собственных значений $\nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ не совпадают. В этом случае найдется такой номер $l \geq 0$, что

$$\delta_0 = \nu_{2j_0,l}^+ - \nu_{2j_0+1,l}^+ > 0, \quad (10.1)$$

где через $\nu_{2j_0,l}^+$ и $\nu_{2j_0+1,l}^+$ обозначены l -е производные по ε при $\varepsilon = 0$ соответственно функций $\nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ параметра ε . Через l_0 обозначим наименьший из номеров l , удовлетворяющих неравенству (10.1).

Введем, далее, в рассмотрение дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + \left[q(t) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0} \frac{\delta_0}{2} \right] x = 0. \quad (10.2)$$

При $\lambda = \nu_{2j_0}^+(\varepsilon)$ и $\lambda = \nu_{2j_0+1}^+(\varepsilon)$ решения уравнения (5.1) экспоненциально устойчивы. Поэтому для доказательства существования собственных значений $h_{j_1}(\varepsilon)$ и $h_{j_1+1}(\varepsilon)$ периодической краевой задачи для уравнения (5.1), удовлетворяющих соотношениям (5.6), достаточно показать, что решения уравнения (10.2) неустойчивы при малых ε . Для этого, в свою очередь, мы воспользуемся критерием неустойчивости, полученным в [3] (§1.5 глава 1).

Итак, мы покажем, как определить такие периодические функции $u_1(t, \varepsilon)$ и $u_2(t, \varepsilon)$, чтобы, во-первых, выполнялись дифференциальные равенства

$$\begin{aligned} & \varepsilon \ddot{u}_i(t, \varepsilon) + p(t)\dot{u}_i(t, \varepsilon) + \\ & + \left[q(t) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0} \frac{\delta_0}{2} + (-1)^i \varphi_i(t, \varepsilon) \right] u_i(t, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (10.3)$$

в которых $\varphi_i(t, \varepsilon) \not\equiv 0$ ($i = 1, 2$) есть неотрицательные периодические функции, а во-вторых, чтобы каждая из функций $u_1(t, \varepsilon)$ и $u_2(t, \varepsilon)$ имела ровно $2j_0$ нулей на любом таком отрезке $[\alpha_1(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon) + T]$ и $[\alpha_2(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon) + T]$ соответственно, что $u_1(\alpha_1(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ и $u_2(\alpha_2(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$. При этом мы воспользуемся некоторыми построениями, приведенными в разделах 7–9 настоящей статьи.

Положим

$$u_1(t, \varepsilon) = x^0(t, \varepsilon), \quad u_2(t, \varepsilon) = x_0(t, \varepsilon),$$

где функции $x^0(t, \varepsilon)$ и $x_0(t, \varepsilon)$ определены в разделах 8 и 9. Тогда, очевидно, выполняются равенства (10.3), в которых функции $\varphi_i(t, \varepsilon)$ таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \varepsilon) = & \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) + \varepsilon^{l_0} \frac{\delta_0}{2} + q(t) - \psi_0(t, \varepsilon) - \\ & - \frac{1}{2} \dot{p}_0(t) - \frac{1}{4\varepsilon} p_0^2(t) + [p(t) - p_0(t)] \left[u_0(t, \varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon} p_0(t) \right], \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\varphi_2(t, \varepsilon) = \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) - \bar{\nu}_{2j_0+1}^+(\varepsilon) - \frac{3}{4}\varepsilon^{l_0}\delta_0 + \varphi^0(t, \varepsilon). \quad (10.5)$$

В формулах (10.4) и (10.5) использованы обозначения, подобные тем, которые применялись в разделах 7–9. Детальнее мы на этом останавливаться не будем. Для доказательства положительности при всех достаточно малых ε функций $\varphi_1(t, \varepsilon)$ и $\varphi_2(t, \varepsilon)$ заметим, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{2j_0}^+(\varepsilon) - \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) &= O(\varepsilon^\infty), \\ [p(t) - p_0(t)] \left[u_0(t, \varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon}p_0(t) \right] + q(t) - \\ &- \frac{1}{2}\dot{p}_0(t) - \frac{1}{4\varepsilon}p_0^2(t) - \psi_0(t, \varepsilon) \geq 0, \\ \nu_{2j_0}^+(\varepsilon) - \bar{\nu}_{2j_0+1}^+(\varepsilon) - \varepsilon^{l_0}\delta_0 &= O(\varepsilon^{l_0}), \quad \varphi^0(t, \varepsilon) \geq 0, \end{aligned}$$

полученные ранее.

Отметим, что в случае несовпадения асимптотических рядов для собственных значений $\nu_{2j_0-1}^-(\varepsilon)$ и $\nu_{2j_0}^-(\varepsilon)$ антипериодической краевой задачи доказательство теоремы 6 проводится аналогично, и поэтому мы его приводить не будем.

Как следствие трех теорем 5, 6 и [3] (теорема 1.5.2) – получаем обоснование критерия устойчивости, содержащегося в теореме 7. Первое утверждение теоремы 9, а с ним и теорема 10, также являются непосредственным следствием теорем 5, 6 и результатов, полученных [3] – [5]. Второе утверждение теоремы 9, в свою очередь, вытекает из утверждений теорем 1.5.2 из [3] и 3. Таким образом, нам осталось доказать лишь теорему 8, причем достаточно ограничиться случаем, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_1^+(\varepsilon) = \nu_0.$$

Отсюда можно сделать вывод о справедливости неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_1(\varepsilon) \geq \nu_0.$$

Доказательство наличия равенства (5.10) для $h_1(\varepsilon)$ можно провести с помощью построения, как мы уже делали, „пробной“ функции. При этом используются примерно те же соображения, что и приведенные в разделе 7. Детально на этом мы останавливаться не будем.

В заключение отметим, что развитую в двух предыдущих параграфах теорию можно обобщить на более общий класс уравнений

$$\varepsilon \ddot{x} + p(t, \varepsilon)\dot{x} + q(t, \varepsilon)x = \lambda r(t, \varepsilon)x,$$

где периодические по t функции разлагаются в асимптотические ряды по ε при $\varepsilon = 0$. Пользуясь методикой, разработанной в предыдущих разделах, можно изучить асимптотику собственных значений в случае наличия у функции $p(t, 0)$ нулей конечной кратности.

11. Заключение

Сформулируем кратко основные выводы. Найдены предельные значения всех собственных чисел первой краевой задачи. Эти значения принципиальным образом отличаются от тех, которые имеют место в уравнении без точек поворота. Как оказалось, существенное значение для нахождения асимптотики собственных чисел имеет поведение функций $p(t)$ и $q(t)$ только в достаточно малых окрестностях точек поворота.

Список литературы / References

- [1] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: Coddington E., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, London, 1955.
- [2] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsial'nyye uravneniya s periodicheskimi koefitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]
- [3] Кащенко С. А., *Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*, Ярославль, 2006; [Kashchenko S. A., *Ustoychivost uravneniy vtorogo poriyadka s periodicheskimi koefitsientami*, Yaroslavl, 2006, (in Russian).]
- [4] Кащенко С. А., “Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 682–710; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Perturbed Second-order Differential Equation with Turning Points”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 682–710, (in Russian).]
- [5] Кащенко С. А., “Асимптотические разложения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 41–60; [Kashchenko S. A., “Asymptotics of Eigenvalues of First Boundary Value Problem for Singularly Perturbed Second-order Differential Equation with Turning Points”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 41–60, (in Russian).]
- [6] Кащенко С. А., Колесов Ю. С., “Критерий устойчивости решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами”, *УМН*, **XXIX**:4 178 (1974), 171–172; [Kashchenko S. A., Kolesov Y. S., “Kriteriy ustoychivosti resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy vtorogo poriyadka s periodicheskimi koefitsiyentami”, *UMN*, **XXIX**:4 178 (1974), 171–172, (in Russian).]
- [7] Колесов Ю. С., “Периодические решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка”, *Тр. Моск. мат. общ.*, **21** (1970), 103–134; [Kolesov Y. S., “Periodicheskiye resheniya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy vtorogo poriyadka”, *Tr. Mosk. mat. obshch.*, **21** (1970), 103–134, (in Russian).]
- [8] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969; [Naymark M. A., *Lineynyye differentsial'nyye operatory*, Nauka, M., 1969, (in Russian).]
- [9] Чаплыгин В. Ф., “Положительные периодические решения сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка”, *Тр. научно-исслед. ин-та математики ВГУ*, **2** (1970), 43–46; [Chaplygin V. F., “Polozhitel'nyye periodicheskiye resheniya singulyarno vozmushchennykh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poriyadka”, *Tr. nauchno-issled. in-ta matematiki VGU*, **2** (1970), 43–46, (in Russian).]

Kashchenko S. A., "Asymptotic Expansions of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Problems for Singularly Perturbed Second Order Differential Equation with Turning Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 61–85.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-61-85

Abstract. For a second order equation with a small factor at the highest derivative the asymptotic behavior of all eigenvalues of periodic and antiperiodic problems is studied. The main assumption is that the coefficient at the first derivative in the equation is the sign of the variable so that turning points exist an algorithm for computing all coefficients of asymptotic series for every considered eigenvalue is developed. It turns out that the values of these coefficients are defined by coefficient values of the original equation only in a neighborhood of turning points. Asymptotics for the length of Lyapunov zones of stability and instability was obtained. In particular, the problem of stability of solutions of second order equations with periodic coefficients and small parameter at the highest derivative was solved.

Keywords: singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

On the authors:

Kashchenko Sergey Alexandrovich, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

©Нестеров П. Н., 2015

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-86-88

УДК 517.929

Erratum to: Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II

Нестеров П. Н.

получена 15 декабря 2015

Аннотация. В работе исправляются вычислительные ошибки, допущенные в статье:

Нестеров П. Н. Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 5. С. 5 – 37.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, критическое многообразие, асимптотическое интегрирование, метод усреднения, теорема Левинсона

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Erratum to: Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:1 (2016), 86–88.

Об авторах:

Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

В работе [1] в качестве примера использования предложенного метода асимптотического интегрирования рассматривалась задача построения асимптотических формул при $t \rightarrow \infty$ для решений уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho}x(t),$$

где $a, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\rho > 0$. В одной из формул, относящихся к случаю

$$\frac{1}{3} < \rho \leq \frac{1}{2},$$

содержится арифметическая ошибка, которая существенным образом влияет на конечный результат. В данной заметке мы публикуем список исправлений, которые в этой связи необходимо сделать в статье [1].

1. Стр. 32, формулу (135) заменить на

$$g_{1,2}(\theta) = K_{1,2} e^{i(\frac{\pi}{2} \pm \omega)\theta} + \frac{2a}{\omega(4 + \pi^2)} \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}\theta} + \frac{2a}{(\omega \pm \pi)(4 + \pi^2)} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}, \quad (135)$$

$$K_{1,2} = \mp \frac{a}{2\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega - \frac{\pi}{2} \exp\{\mp i\omega\}\right)}.$$

2. Стр. 33, формулу (144) заменить на

$$A_2 = \frac{a^2}{4 + \pi^2} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{8}{5\pi} + i\left(-\frac{4}{5} - \frac{4}{5\pi}\right) & -\frac{2}{5} + \frac{8}{5\pi} - i\left(-\frac{4}{5} - \frac{4}{5\pi}\right) \\ -\frac{2}{\pi} - i & -\frac{2}{\pi} + i \end{pmatrix}. \quad (144)$$

3. Стр. 33, формулу (145) заменить на

$$\mu_{1,2} = \frac{a^2}{5\pi(4 + \pi^2)} (8 - 2\pi \pm \sqrt{9\pi^2 - 32\pi + 84}). \quad (145)$$

4. Стр. 33, формулу (148) заменить на

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad \nu = -\frac{a^2 i}{4 + \pi^2} \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \omega - \frac{\pi}{2} e^{i\omega}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \omega - \frac{\pi}{2} e^{-i\omega}}\right). \quad (148)$$

5. Стр. 34, формулу (150) заменить на

$$\operatorname{Re} \nu = \frac{2\pi^2 a^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) (2\omega^2 + 4\omega \sin \omega + \pi^2 \cos \omega - \pi^2)}{(4 + \pi^2) (4\omega^4 + \pi^4 + \pi^2 (4\omega^2 - 2\pi^2) \cos \omega + \pi^2 (\pi^2 - 4\omega^2) \cos^2 \omega)}. \quad (150)$$

6. Стр. 34, рисунок 1 заменить на Рис. 1.

7. Стр. 34, формулу (151) заменить на

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \nu = \frac{\pi^2 a^2 (12 - \pi^2)}{(4 + \pi^2)^3}, \quad \operatorname{Re} \nu = \frac{\pi^2 a^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{(4 + \pi^2) \omega^2} \left(1 + O(\omega^{-1})\right), \quad \omega \rightarrow +\infty. \quad (151)$$

8. Стр. 34, формулу (152) заменить на

$$\lim_{\omega \rightarrow \pi} \operatorname{Re} \nu = \frac{a^2 (\pi^2 - 4)}{4(4 + \pi^2)^2}. \quad (152)$$

9. Стр. 34, предложение «Из (151), (152) (см. также Рис. 1) заключаем, в частности, что $\operatorname{Re} \nu > 0$ при достаточно больших ω ($\omega \neq 2\pi n, n \in \mathbb{N}$) и $\operatorname{Re} \nu < 0$, если $\omega \rightarrow \pi + 0$ » заменить на

«Используя (150) (см. также Рис. 1), несложно установить, что $\operatorname{Re} \nu > 0$ для всех $\omega \neq 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ ».

10. Стр. 36, предложения «Так, в уравнении (11) неограниченные колебания реализуются почти при всех ω , когда $\omega \gg 1$. Кроме того, все решения уравнения (11) могут стремиться к нулю, если $\omega \rightarrow \pi + 0$ » заменить на

«Так, в уравнении (11) неограниченные колебания реализуются при всех $\omega \neq 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ ($\omega > 0$)».

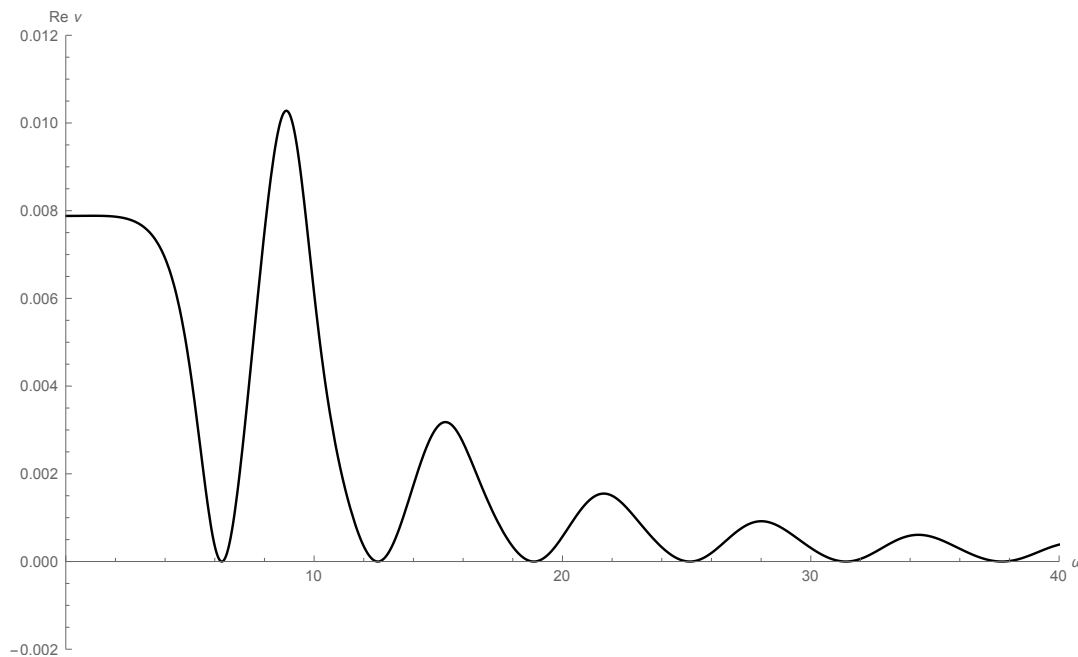


Рис. 1. График величины (150) при $a = 1$

Список литературы / References

- [1] Нестеров П. Н., “Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:5 (2014), 5–37; [Nesterov P.N., “Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21**:5 (2014), 5–37, (in Russian).]

Nesterov P. N., "Erratum to: Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II (in Russian)", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:1 (2016), 86–88.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-1-86-88

Abstract. We correct the computational mistakes in paper:

Nesterov P. N. Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II. In: *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2014. Vol. 21, № 5. P. 5 – 37, (in Russian).

Keywords: functional-differential equations, critical manifold, asymptotic integration, averaging method, Levinson's theorem

On the authors:

Nesterov Pavel Nikolaevich, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com