ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 23 № 3(63) 2016

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Главный редактор
В.А. Соколов,
доктор физико-математических наук, профессор, Россия

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **В.С. Афраймович**, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия; **В.Н. Белых**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Кушнаренко**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАО, Россия; **Н. Сидорова**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **М.Б. Трахтенброт**, д-р комп. наук, Израиль, **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Х. Файт**, д-р наук, проф., Австрия; **Ф. Шнеблен**, проф., Франция

Ответственный секретарь **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTEX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

12+

©Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №3. 2016

От редактора специального выпуска
Глызин С. Д. 235

Аделаида Борисовна Васильева (к девяностолетию со дня рождения)
Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. 236

МКЭ-анализ на адаптированных к слою сетках в задачах с точкой поворота, имеющих внутренний слой
Бехер С. 240

Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения
Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р. 248

Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем
Быков А. А. 259

Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы
Давыдова М. А., Левашова Н. Т., Захарова С. А. 283

Сходимость сеточного решения задачи Дирихле с разрывной производной граничной функции для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии
Ершова Т. Я. 291

Численное моделирование процессов формирования полос адиабатического сдвига в композитах
Кудряшов Н. А., Муратов Р. В., Рябов П. Н. 298

Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками
Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. 309

Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта
Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Быцюра С. В. 317

Моделирование неизотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ
Литвинов К. В. 326

Аналитико-численный подход для решения сигулярно возмущенных параболических уравнений с использованием динамически адаптированных сеток
Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. 334

Существование и устойчивость периодических решений уравнения реакция-диффузия в двумерном случае
Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. 342

Численное решение одной сингулярно возмущённой задачи в круговой области
Хегарти А. Ф., О'Риордан Ю. 349

Оценки погрешности в сбалансированных нормах методов конечных элементов
на сетках Шишкина для задач реакции-диффузии
Роос Х.-Г. 357

Робастная оценка погрешности в сингулярно возмущённых задачах четвертого порядка
Франц С., Роос Х.-Г. 364

Двухточечная краевая задача Капуто: существование, единственность
и регулярность решения
Стайнс М. 370

Интерполяционные формулы для функций с большими градиентами
в пограничном слое и их применение
Задорин А. И. 377

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ №ФС77-49724 от 11.05.2012 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 17.06.2016. Дата выхода в свет 2016. Формат 60x84$^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 18,13. Уч.-изд. л. 16,0. Объем 156 с. Тираж 50 экз. Свободная цена. Заказ Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 23 No 3(63) 2016

Founded in 1999
6 issues per year

Editor-in-Chief
V. A. Sokolov,
Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

Editorial Board

S.M. Abramov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **H. Veith**, Prof., Dr. Sci., Austria

Responsible Secretary **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2016

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3. 2016

Adelaida Borisovna Vasil'eva (on her 90-th birthday)
Butusov V.F., Nefedov N.N. 238

FEM-analysis on Layer-adapted Meshes for Turning Point Problems Exhibiting an Interior Layer
Becher S. 240

Asymptotics, Stability and Region of Attraction of a Periodic Solution to a Singularly Perturbed Parabolic Problem in Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation
Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schneider K. 248

Numerical Scheme for the Pseudoparabolic Singularly Perturbed Initial-boundary Problem with Interior Transitional Layer
Bykov A. A. 259

The Asymptotical Analysis for the Problem of Modeling the Gas Admixture in the Surface Layer of the Atmosphere
Davydova M.A., Levashova N.T., Zakharova S.A. 283

Convergence of the Difference Solutions of a Dirichlet Problem with a Discontinuous Derivative of the Boundary Function for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equation
Ershova T. Ya. 291

Numerical Simulation of Adiabatic Shear Bands Formation in Composites
Kudryashov N. A., Muratov R. V., Ryabov P. N. 298

Analytical Solutions of a Nonlinear Convection-Diffusion Equation With Polynomial Source
Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I. 309

The Application of the Differential Inequalities Method Application for Proving the Existence of Moving Front Solution of the Parabolic Equations System
Levashova N. T., Melnikova A. A., Bytsyura S. V. 317

Modelling of Non-isothermal Flow Abnormally Viscous Fluid in the Channels with Various Geometry of Boundaries
Litvinov K. V. 326

Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes
Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. 334

Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-Diffusion Equations in the Two-Dimensional Case
Nefedov N. N., Nikulin E. I. 342

Numerical Solution of a Singularly Perturbed Problem on a Circular Domain
Hegarty A. F., O'Riordan E. 349

Error Estimates in Balanced Norms of Finite Element Methods on Shishkin Meshes for Reaction-Diffusion Problems
Roos H.-G. 357

Robust Error Estimation for Singularly Perturbed Fourth Jrder Problems
Franz S., Roos H.-G. 364

A Caputo Two-point Boundary Value Problem:
Existence, Uniqueness and Regularity of a Solution
Stynes M. 370

Interpolation formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application
Zadorin A. I. 377

От редактора специального выпуска

Глызин С. Д.

Данный выпуск журнала содержит статьи, подготовленные на основе докладов Тринадцатого ежегодного семинара **«Численные методы решения задач с погранслоем» (13th Annual Workshop on Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena),** посвященного девяностолетию А.Б. Васильевой. Семинар был организован и проведен с 6 по 9 апреля 2016 года кафедрой математики Физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. В настоящий выпуск журнала включены шестнадцать статей, подготовленных по итогам семинара.

Выпуск открывается статьей В. Ф. Бутузова, Н. Н Нефедова, посвященной девяностолетию А.Б. Васильевой.

В статье С. Бехера рассматриваются адаптированные на внутреннем погранслое сетки.

Статья В. Ф. Бутузова, Н. Н Нефедова, Л. Реке и К. Р. Шнайдера посвящена построению асимптотики и оценке области притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения.

В работе А. А. Быкова выведены уравнения эволюции решения типа контрастной структуры обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с малым параметром при старших производных.

Асимптотический анализ для модели переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы выполнен в статье М.А. Давыдовой, Н.Т. Левашовой и С.А. Захаровой.

В работе Т. Я. Ершовой рассмотрена задача Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами в прямоугольнике в случае, когда конвекция параллельна горизонтальным сторонам прямоугольника.

Численное моделирование процессов формирования полос адиабатического сдвига в композитах обсуждается в статье Н. А. Кудряшова, Р. В. Муратова и П. Н. Рябова.

Статья Н. А. Кудряшова и Д. И. Синельщикова посвящена построению аналитических решений уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками.

Применение метода дифференциальных неравенств позволило Н. Т. Левашовой, А. А. Мельниковой и С. В. Быцюре обосновать в своей статье представление решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта.

В статье К. В. Литвинова моделируется неизотермическое течение аномально вязкой жидкости в каналах.

В работе Д. В. Лукьяненко, В. Т. Волкова, Н. Н. Нефедова, Л. Реке и К. Шнайдера развивается аналитико-численный подход, основанный на динамически адаптированных сетках для решения сингулярно возмущенных параболических уравнений.

Существованию и устойчивости периодических решений уравнения реакция-диффузия в двумерном случае посвящена статья Н. Н. Нефедова и Е. И. Никулина.

В статье А.Ф. Хегарти и Ю. О'Риордана изучается сингулярно возмущенная эллиптическая задача типа конвекция-диффузия в круговой области.

Х.-Г. Роос в своей работе предлагает оценки погрешности методов конечных элементов для задач реакции-диффузии в сбалансированной энергетической норме, а в статье С. Франца и Х.-Г. Рооса рассматриваются двумерные сингулярно возмущенные задачи четвертого порядка и в соответствующих сбалансированных нормах оцениваются ошибки адаптированного метода.

В статье М. Стайнса рассматривается двухточечная краевая задача, в которой старшая производная является дробной производной Капуто порядка $2 - \delta$ при $0 < \delta < 1$.

В работе А. И. Задорина предлагаются интерполяционные формулы для функций с большими градиентами в пограничном слое.

Аделаида Борисовна Васильева (к девяностолетию со дня рождения)

Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.

10 марта 2016 г. математическая общественность нашей страны отметила юбилей выдающегося российского математика – профессора кафедры математики физического факультета Московского университета Аделаиды Борисовны Васильевой.

Среди специалистов по качественной теории дифференциальных уравнений А.Б. Васильева занимает видное место. Она – признанный классик в теории сингулярных возмущений.

А.Б. Васильева – талантливая ученица крупнейшего российского математика академика А.Н. Тихонова. В конце сороковых – начале пятидесятых годов прошлого века А.Н. Тихонов опубликовал цикл работ по дифференциальным уравнениям с малыми параметрами при старшей производной, которые положили начало новому направлению в области дифференциальных уравнений и математической физики. Позднее это направление стало называться теорией сингулярных возмущений. А.Б. Васильева стояла у истоков этого направления. Ее дипломная работа, а затем кандидатская диссертация выполнялись под непосредственным руководством А.Н. Тихонова и были посвящены задачам, развивающим теорему Тихонова об условиях сходимости решения сингулярно возмущенной задачи к решению вырожденной задачи.

Заложив основы нового направления, А.Н. Тихонов передал эстафету своей молодой ученице. И это направление оказалось в надежных руках.

За короткий срок А.Б. Васильева разработала эффективный метод, позволяющий строить равномерные асимптотические приближения для решений сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей быстрые и медленные переменные (такая система получила название тихоновской системы). Суть этого метода состоит в том, что асимптотическое разложение решения начальной задачи для тихоновской системы строится в виде суммы двух рядов по степеням малого параметра – регулярного ряда, дающего приближение для решения вне некоторой окрестности начальной точки, и погранслойного ряда, служащего для описания решения в окрестности начальной точки, где имеет место пограничный слой. Члены погранслойного ряда зависят от растянутого (быстрого) времени и называются пограничными функциями. Поэтому и сам метод получил название метода пограничных функций. Он был развит А.Б. Васильевой не только для начальных, но и для краевых задач, в которых может возникать пограничный слой на обоих концах отрезка и может появляться внутренний переходный слой.

Метод пограничных функций считается теперь классическим методом в теории сингулярных возмущений и по праву носит имя его создателя – А.Б. Васильевой. В 1961 г. за работы по методу пограничных функций А. Б. Васильевой была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. В последующие годы А.Б. Васильевой и ее учениками метод пограничных функций был распространен на интегро-дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с малым запаздыванием и разностные уравнения с малым шагом, на все основные типы уравнений с частными производными. Вокруг А.Б. Васильевой сложился мощный научный коллектив, занимающийся проблемами теории сингулярных возмущений. В него входят многочисленные ученики А.Б. Васильевой, работающие в Московском университете и за его пределами, ученики ее учеников, аспиранты и студенты. Непосредственно под ее руководством подготовлено около 30 кандидатских диссертаций, шесть ее учеников стали докторами наук.

Имя А.Б. Васильевой широко известно среди ученых математиков не только в нашей стране, но и во всех ведущих странах мира. Неоднократно она докладывала свои результаты на крупных международных математических форумах. Ею опубликовано около 200 научных работ, в том числе четыре монографии. В последние годы А.Б. Васильевой получены новые крупные результаты по существованию, построению асимптотик и устойчивости контрастных структур, описываемых решениями дифференциальных уравнений, испытывающими резкие изменения типа скачков, всплесков и т.д. Это направление в теории сингулярных возмущений в настоящее время переживает период бурного развития, здесь сосредоточены усилия многих известных специалистов, занимающихся теорией сингулярных возмущений и ее приложениями к задачам химфизики, биофизики, синергетики, а первые результаты в этом направлении были получены А.Б. Васильевой почти пятьдесят лет назад.

А.Б. Васильева – человек разносторонних интересов, неутомимый путешественник, тонкий знаток и ценитель различных видов искусства. Особенно покоряет ее увлеченность музыкой. Она создала эквиритмические переводы текстов вокальных произведений Брамса, Леве и других композиторов. Переводы были опубликованы издательством “Музыка”, и теперь эти вокальные произведения исполняются профессиональными артистами на русском языке.

Поздравляя Аделаиду Борисовну с юбилеем, мы желаем ей от всей души доброго здоровья, счастья и еще многих-многих лет жизни.

Adelaida Borisovna Vasil'eva
(on her 90-th birthday)

Butusov V. F., Nefedov N. N.

On 10 March 2016 our country's mathematical community celebrated the birthday of the outstanding Russian mathematician, professor in the department of mathematics at the Faculty of Physics of Moscow University, Adelaida Borisovna Vasil'eva.

Vasil'eva obviously has a place among specialists in the qualitative theory of differential equations. She is an acknowledged classic scholar in the theory of singular perturbations.

Vasil'eva is a gifted pupil of the outstanding Russian mathematician Academician A.N. Tikhonov. At the end of the forties and the beginning of the fifties of the last century, he published a series of papers on differential equations with small parameters before highest derivatives, which determined the beginning of a new direction in the field of differential equations and mathematical physics. Later this direction was called the theory of singular perturbations. Vasil'eva was present at the source of this direction. Her diploma work and then her Ph.D. dissertation, carried out under the direct supervision of Tikhonov, were on problems initiated by Tikhonov's theorem on the conditions for convergence of the solution of a singular perturbation problem to the solution of a degenerate problem.

After laying the foundations of this new direction, Tikhonov passed the banner to his young pupil. And this line of work proved to be in safe hands.

In a short time Vasil'eva worked out an effective method which made it possible to construct asymptotic approximations for solutions of a singularly perturbed system of ordinary differential equations, containing fast and slow variables (such a system came to be called a Tikhonov system). The main point of this method consists in the fact that the asymptotic expansion of the solution of the initial problem for the Tikhonov system is constructed as a sum of two series in powers of a small parameter – of a regular series, giving an approximation for the solution outside some neighbourhood of the initial point, and a boundary layer series, which serves as a description of the solution in the neighbourhood of the initial point where the boundary layer is situated. The terms of the boundary layer series depend on the extended (fast) time and are called boundary functions. The method itself was therefore called the method of boundary functions. It was developed by Vasil'eva not only for the initial problems, but also for boundary problems, in which a boundary layer may arise at both ends of the segment and an internal transitional layer may appear.

The method of boundary functions is now regarded as the classic method in the theory of singular perturbations and rightly bears the name of its founder – A. B. Vasil'eva. In 1961 she was awarded the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences for her work on the method of boundary functions. In the following years she and her students extended the method of boundary functions to integro-differential equations, to differential equations with small delay and difference equations with a small step, and to all basic types of partial differential equations. A powerful scientific group formed around Vasil'eva, working on problems in the theory of singular perturbations. To it came numerous pupils of Vasil'eva, working at the University of Moscow and beyond it, pupils of her pupils, postgraduates, students. Directly under her supervision some 30 Ph.D. theses were prepared, and 6 of her students became Doctors of Sciences.

The name of Vasil'eva is widely known among academic mathematicians not only in our country but in all the leading countries in the world. Repeatedly she has presented her results at high-ranking international mathematical forums. She has published some 200 scientific papers, of which four are monographs. In recent years Vasil'eva has obtained powerful new results on existence, the construction of asymptotics and the stability of contrasting structures, described by the solutions of differential equations that test sharp changes in the type of shocks, splashes, and so on. This direction in the theory of singular perturbations is at present going through a period of turbulent development. Here are concentrated the efforts of many famous specialists working on the theory of singular perturbations and its applications to problems of chemical physics, biophysics, synergetics, and the first results on these lines were obtained by Vasil'eva almost fifty years ago.

Professor Vasil'eva is a person of varied interests, an indomitable traveller, fine connoisseur and judge of various forms of art. Especially is she under the spell of music. She has made excellent translations of the text of the vocal works of Brahms, Levi, and other composers. The translations were published by the publisher Musyka, and now these vocal productions are used by professional artists in the Russian language.

We congratulate Adelaida Borisovna on her birthday, and wish her good health, happiness and many more years of life.

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 240–247
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 240–247

©Becher S., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-240-247
UDC 519.6

FEM-analysis on Layer-adapted Meshes for Turning Point Problems Exhibiting an Interior Layer

Becher S.

Received May 20, 2016

Abstract. We consider singularly perturbed turning point problems whose solutions exhibit an interior layer. Two suitable layer-adapted mesh-types are presented. For both types we give uniform error estimates in the ε-weighted energy norm for finite elements of higher order. Numerical experiments are used to compare the meshes and to confirm the theoretical findings.

Keywords: singular perturbation, turning point, interior layer, layer-adapted meshes, higher order finite elements

For citation: Becher S., "FEM-analysis on Layer-adapted Meshes for Turning Point Problems Exhibiting an Interior Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 240–247.

On the authors:
Becher Simon,
Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland,
e-mail: simon.becher@tu-dresden.de

1. Introduction

In this paper we consider singularly perturbed problems of the type

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \qquad x \in (-1,1), \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

with a small parameter $0 < \varepsilon \ll 1$. We assume that the data a, c, f are sufficiently smooth and satisfy

$$a(x) = -xb(x), \qquad b(x) > 0, \qquad c(x) \geq 0, \qquad c(0) > 0. \tag{1b}$$

Then, the solution of (1) exhibits an interior layer of "cusp"-type at the simple interior turning point $x = 0$. It is well known (see e.g. [3], [4, p. 71], [6, Lemma 2.3]) that the derivatives of the solution can be bounded by

$$\left|u^{(i)}(x)\right| \leq C\left(1 + \left(\varepsilon^{1/2} + |x|\right)^{\lambda - i}\right) \tag{2}$$

where the parameter λ satisfies $0 < \lambda < \bar{\lambda} := c(0)/|a'(0)| = c(0)/b(0)$. If $\bar{\lambda}$ is not an integer, the estimate even holds for $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$, see references cited above.

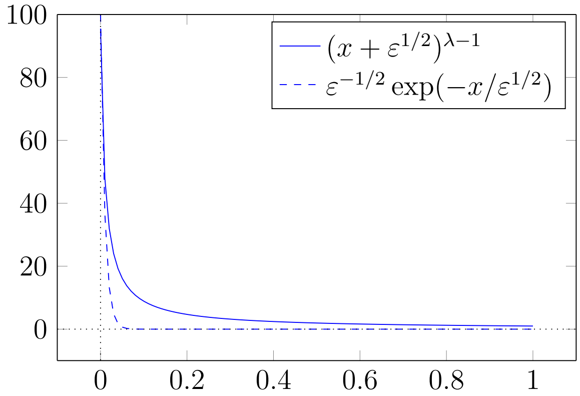


Fig 1. First derivatives of different layer types ($\varepsilon = 10^{-4}$, $\lambda = 10^{-2}$)

A common strategy to enable ε-uniform estimates for singularly perturbed problems is the use of layer-adapted meshes to handle the occuring layers. We will shortly present two suitable meshes for layers of "cusp"-type in the following. Besides their definition we give error estimates in the energy norm for higher order finite elements on these meshes. Moreover, some numerical results are presented.

Throughout the paper let C denote a positive generic constant that is independent of ε and the number of mesh points. For spaces, norms, and inner products standard notation is used, e.g. $\|\cdot\|$ is the L^2 norm and $(\cdot,\cdot)$ the L^2 inner product.

2. Meshes for layers of "cusp"-type

Many researchers have studied layer-adapted meshes in the last decades. Particularly meshes for exponential layers have been examined a lot. Since these layers fade away very quickly it is possible to use meshes that are fine in the layer regions only, such as S-type meshes. Unfortunately, layers of "cusp"-type behave much different (for an illustration see Fig. 1). They are "much wider" than $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Indeed, if $\lambda < 1$ we can not guarantee $|u'| \le C$ outside of $[-\varepsilon^\theta, \varepsilon^\theta]$ for any fixed positive constant θ. Therefore, in order to capture the layer, local refinements do not suffice.

In the following let $\lambda \in (0, k+1)$ with $k \ge 1$ which is the most difficult case. Thinking on k as the ansatz order of a finite element space otherwise all crucial derivatives of the solution could be bounded by a generic constant independent of ε. This would enable to prove optimal order ε-uniform estimates with standard methods on uniform meshes.

2.1. Graded meshes of Liseikin

At first we want to present special graded meshes which were used by Liseikin [4] to prove the uniform first order convergence of an upwind scheme for problem (1). His basic idea is to find a transformation $\varphi(\xi, \varepsilon)$ that eliminates the singularities of the solution when it is studied with respect to ξ. Condensing this approach for our layer type yields the

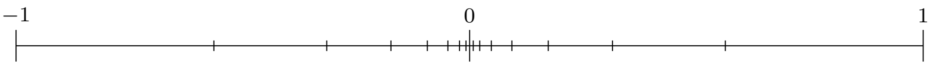


Fig 2. Graded mesh for $\varepsilon = 0.0001$, $\alpha = 0.01$, $N = 8$

task to find $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ such that

$$\varphi' \left(\varphi + \varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-1} \le C, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1. \tag{3}$$

As result we gain the mesh generating function

$$\varphi(\xi,\varepsilon) = \begin{cases} \left(\varepsilon^{\alpha/2} + \xi\left[(1+\varepsilon^{1/2})^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha/2}\right]\right)^{1/\alpha} - \varepsilon^{1/2} & \text{for } 0 \le \xi \le 1, \\ \varepsilon^{1/2} - \left(\varepsilon^{\alpha/2} - \xi\left[(1+\varepsilon^{1/2})^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha/2}\right]\right)^{1/\alpha} & \text{for } 0 \ge \xi \ge -1, \end{cases} \tag{4}$$

where $0 < \alpha \le \lambda$. Here α serves as grading parameter. Note that by construction $\varphi(0,\varepsilon) = 0$ and $\varphi(\pm1,\varepsilon) = \pm1$. The mesh points are then generated by $x_i = \varphi(\frac{i}{N},\varepsilon)$, $i = -N,\dots,N$. We define the mesh interval lengths by $h_i := x_i - x_{i-1}$ and set $h := N^{-1}$.

An easy calculation shows that condition (3) is satisfied by (4). We have, cf. [2],

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\varphi + \varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-1} \le C\frac{(1+\varepsilon^{1/2})^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha/2}}{\alpha} \le C\min\left\{\alpha^{-1}, 1 + \left|\log_2(\varepsilon^{1/2})\right|\right\}$$

where we, in general, can not prevent the dependence on α. Since φ is associated to the mesh points and $h_i = h\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi_i,\varepsilon)$ for a $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ by the mean value theorem, the above property of the mesh generating function yields the following lemma. We only consider $\xi \ge 0$ due to symmetry.

Lemma 1 (see [2, Lemma 2.1])**.** *Let $\lambda > 0$ and $0 < \alpha \le \min\{\lambda/k, 1\}$ with $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$ then*

$$h_i^k\left(x_{i-1} + \varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-k} \le \begin{cases} Ch^k & \text{for } 2 \le i \le N, \\ h_1^k\varepsilon^{(\lambda-k)/2} \le Ch^k & \text{for } i = 1, \quad \varepsilon \ge h^{2/\alpha}. \end{cases}$$

If $0 < \alpha \le 1/(2k)$ with $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$ and $\varepsilon \le h^{2/\alpha}$ then we have

$$x_1 \le Ch^{2k}.$$

In general, we have for $0 < \alpha \le 1$

$$h_i \le Ch \qquad \text{for } 1 \le i \le N.$$

The constants C in Lemma 1 may depend on α and k. Note that there are two characteristic cases. In the first one, we can bound a term of the form $h_i^k(x_{i-1}+\varepsilon^{1/2})^{\lambda-k}$ by CN^{-k}. In the other case, we know that the length of the mesh interval next to the turning point can be bounded by CN^{-2k}.

2.2. Piecewise equidistant meshes of Sun and Stynes

As a second approach we want to present the meshes of Sun and Stynes [6, Section 5.1]. They generalise the basic idea of Shishkin and propose a mesh which is equidistant in each of $\mathcal{O}(\ln N)$ subintervals.

For $\varepsilon \in (0,1]$ and given positive integer N we set

$$\sigma = \max\left\{\varepsilon^{(1-\lambda/(k+1))/2}, N^{-(2k+1)}\right\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{K} = \left\lfloor 1 - \frac{\ln(\sigma)}{\ln(10)}\right\rfloor,$$

where $\lfloor z \rfloor$ denotes the largest integer less or equal to z. The mesh is constructed in two steps: First the interval $(0,1]$ is partitioned in a logarithmic sense into the $\mathcal{K}+1$ subintervals $(0,10^{-\mathcal{K}}]$, $(10^{-\mathcal{K}},10^{-\mathcal{K}+1}],\dots,(10^{-1},1]$. Then each of these subintervals is divided uniformly into $\lfloor N/(\mathcal{K}+1)\rfloor$ parts.

It is easy to see that

$$\mathcal{K}+1 \le 2 + \min\left\{\frac{1-\lambda/(k+1)}{2}\frac{|\ln(\varepsilon)|}{\ln(10)}, (2k+1)\frac{\ln(N)}{\ln(10)}\right\} \le C\ln N. \tag{5}$$

Consequently, for N sufficiently large, we have $\mathcal{K}+1 \le N$. For simplicity we assume that $\lfloor N/(\mathcal{K}+1)\rfloor = N/(\mathcal{K}+1)$.

Lemma 2 (see [1, Lemma 3.1])**.** *Let $j = 0,1$. The following inequalities hold*

$$h_i^{k+1-j}\left(x_{i-1}+\varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-(k+1-j)} \le C\left((\mathcal{K}+1)N^{-1}\right)^{k+1-j}, \quad \textit{for} \quad x_i \in (10^{-\mathcal{K}},1], \tag{6}$$

$$h_i^{k+1-j}\left(x_{i-1}+\varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-(k+1-j)} \le C\,(i-1)^{-(k+1-j)}, \quad \textit{for} \quad x_i \in (x_1,10^{-\mathcal{K}}]. \tag{7}$$

If $\sigma = \varepsilon^{(1-\lambda/(k+1))/2}$, then

$$h_i^{k+1-j}\left(x_{i-1}+\varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-(k+1-j)} \le C\left((\mathcal{K}+1)N^{-1}\right)^{k+1-j}, \quad \textit{for} \quad x_i \in (0,10^{-\mathcal{K}}]. \tag{8}$$

In general, the mesh interval length can be bounded by

$$h_i \le (\mathcal{K}+1)N^{-1}.$$

Furthermore, in the case of $\sigma = N^{-(2k+1)}$, we have

$$x_1 = h_1 \le (\mathcal{K}+1)N^{-2(k+1)}. \tag{9}$$

Similar to Lemma 1 we have two characteristic cases. In the fist one we can estimate terms of the form $h_i^k\left(x_{i-1}+\varepsilon^{1/2}\right)^{\lambda-k}$ by inequalities (6) and (8). In the second case we have a bound for x_1. Inequalities (7) and (9) provide information for the whole subinterval next to the turning point due to the piecewise uniformity.

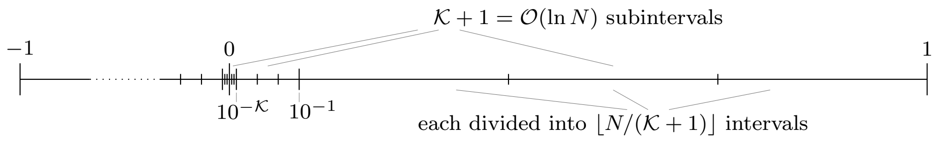


Fig 3. Typical piecewise equidistant mesh of Sun and Stynes

3. Error estimates for higher order finite elements

In this section we present the energy norm error estimates for finite elements of order $k \geq 1$. Without loss of generality (cf. [6, Lemma 2.1]) we may assume that

$$\left(c - \tfrac{1}{2}a'\right)(x) \geq \gamma > 0 \qquad \text{for all } x \in [-1,1], \quad \varepsilon \text{ sufficiently small.} \tag{10}$$

The standard finite element formulation of problem (1) reads as follows:

Find $u_N \in V^N$ such that

$$B_\varepsilon(u_N, v_N) = (f, v_N) \quad \text{for all } v_N \in V^N \tag{11}$$

where the bilinear form $B_\varepsilon(\cdot,\cdot) : H_0^1(-1,1) \times H_0^1(-1,1) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$B_\varepsilon(v,w) := (\varepsilon v', w') + (av', w) + (cv, w)$$

and the trial and test space $V^N \subset H_0^1(-1,1)$ is given by

$$V^N := \left\{ v \in C([-1,1]) : v|_{(x_{i-1},x_i)} \in P_k(x_{i-1},x_i)\, \forall i,\; v(-1) = v(1) = 0 \right\}.$$

Here $P_k(x_a,x_b)$ denotes the space of polynomial functions of maximal order k over (x_a,x_b). Thanks to (10) the bilinear form $B_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ is uniformly coercive over $H_0^1(-1,1) \times H_0^1(-1,1)$ in terms of the weighted energy norm $|||\cdot|||_\varepsilon$ defined by

$$|||v|||_\varepsilon := \left(\varepsilon \|v'\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2}.$$

In order to estimate the error of the finite element solution we split it as

$$u - u_N = (u - u_I) + (u_I - u_N)$$

where $u_I \in V^N$ denotes the standard Lagrange-interpolant of u. Using the coercivity and orthogonality of $B_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ together with Cauchy Schwarz' inequality and the special structure of a, we obtain the following.

Lemma 3 (see [1, Lemma 2.1])**.** *Let u be the solution of* (1) *and u_N the solution of* (11) *on an arbitrary mesh. Then we have*

$$|||u_I - u_N|||_\varepsilon \leq C\Big(|||u_I - u|||_\varepsilon + \|x(u_I - u)'\| \Big).$$

Because of this estimate it remains to bound the interpolation error measured in different norms and semi norms only. For the meshes presented in Section 2. this can be done as in [2, Lemma 3.3 and 3.4] and [1, Lemma 3.2]. Finally, we obtain the error estimates in the energy norm.

Theorem 4 (see [2, Theorem 3.5]). *Let u be the solution of* (1) *and u_N the solution of* (11) *on the graded mesh of Section 2.1. with* $0 < \alpha \le \min\{\lambda/(k+1), 1/(2(k+1))\}$. *Then we have*

$$|||u - u_N|||_\varepsilon \le CN^{-k}.$$

Theorem 5 (see [1, Theorem 3.3]). *Let u be the solution of* (1) *and u_N the solution of* (11) *on the piecewise equidistant mesh of Section 2.2.. Then we have*

$$|||u - u_N|||_\varepsilon \le C\left((\mathcal{K}+1)N^{-1}\right)^k \le C\left(N^{-1}\ln N\right)^k.$$

Note that the graded mesh of Liseikin seems to be optimal in a certain way for layers of "cusp"-type, i.e., there is no additional logarithmic factor in the error estimate. However, the constant in Theorem 4 may depends on α.

4. Numerical experiments

In this section we want to compare the two presented mesh types numerically. In order to do this we use the following test problem from [6].

Example 6. *Consider the problem*

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' - x(1+x^2)u' + \lambda(1+x^3)u &= f, \qquad \textit{for} \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

where the right-hand side $f(x)$ is chosen such that the solution $u(x)$ is given by

$$u(x) = \left(x^2+\varepsilon\right)^{\lambda/2} + x\left(x^2+\varepsilon\right)^{(\lambda-1)/2} - (1+\varepsilon)^{\lambda/2}\left(1 + x\,(1+\varepsilon)^{-1/2}\right).$$

The parameter λ in Example 6 coincides with the quantity $\bar{\lambda} = c(0)/|a'(0)|$. Besides the derivatives of the solution behave like (2) and, thus, as good and as bad as assumed in theory.

For all computations we have used a FEM-code based on $\mathbb{SOFE}$ by Lars Ludwig [5]. The grading parameter α for the graded mesh is chosen as

$$\alpha = \min\{\lambda/(k+1), 1/(2(k+1))\}.$$

This is the largest possible choice allowed by Theorem 4. Note that numerical experiments suggest that a smaller choice of α has nearly no influence on the error, see [2, Figure 2].

In Figure 4 the energy norm error for finite elements of order $k = 1, \dots, 4$ calculated on the graded mesh (square marks) and on the piecewise equidistant mesh (triangle marks) applied to Example 6 with $\varepsilon = 10^{-8}$ and $\lambda = 0.005$ is plotted. By comparison to the given reference curves the proven error behaviour can be confirmed.

The logarithmic factor occurring in Theorem 5 can not be seen numerically. This is not surprising due to the dominance of the first term in the minimum of (5) for the studied ε and λ, see also [1, Remark 3.4]. Nevertheless, the error on the piecewise equidistant mesh is larger than the error on the graded mesh for all ansatz orders. So the graded meshes also seem to be "better" with respect to the magnitude of the energy norm error. For more numerical results we refer to [1, 2].

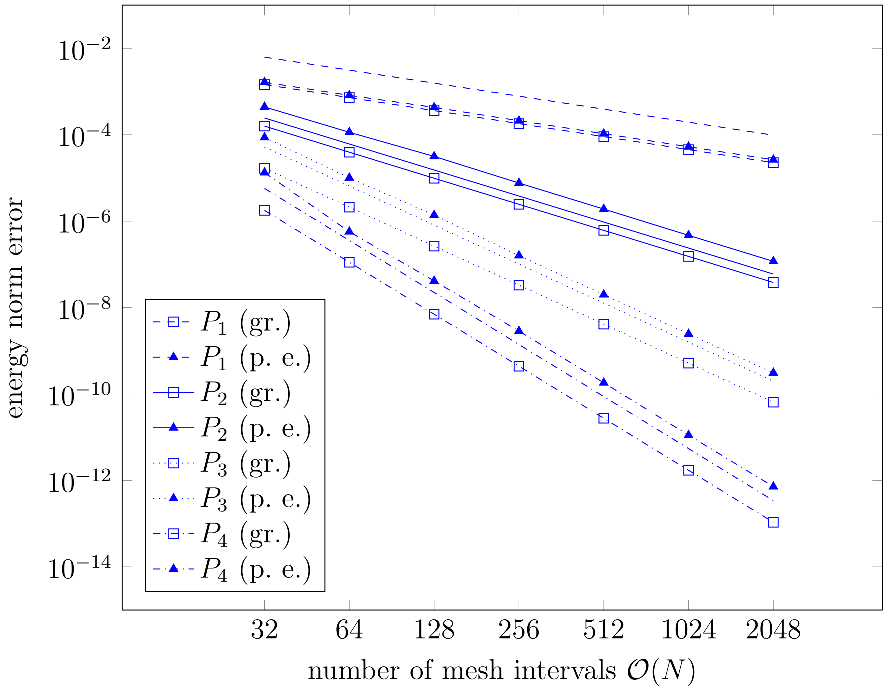


Fig 4. Energy norm error for P_k-FEM, $k = 1, \dots, 4$ applied to Example 6 with $\varepsilon = 10^{-8}$ and $\lambda = 0.005$. Reference curves of the form $\mathcal{O}(N^{-k})$

References

[1] Becher S., "Analysis of Galerkin and SDFEM on piecewise equidistant meshes for turning point problems exhibiting an interior layer", 2016, arXiv:1604.01327v1 [math.NA].

[2] Becher S., "FEM-analysis on graded meshes for turning point problems exhibiting an interior layer", 2016, https://arxiv.org/abs/1603.04653v1.

[3] Berger A. E., Han H., Kellogg R. B., "A Priori Estimates and Analysis of a Numerical Method for a Turning Point Problem", *Math. Comp.*, **42**:166 (1984), 465–492.

[4] Liseikin V. D., "Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems", 2001.

[5] Ludwig L., "$\mathbb{SOFE}$", http://www.math.tu-dresden.de/ ludwigl/.

[6] Sun G., Stynes M., "Finite element methods on piecewise equidistant meshes for interior turning point problems", *Numer. Algorithms*, **8**:1 (1994), 111–129.

Бехер С., "МКЭ-анализ на адаптированных к слою сетках в задачах с точкой поворота, имеющих внутренний слой", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 240–247.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-240-247

Аннотация. Рассматриваются сингулярно возмущенные задачи с точкой поворота, решения которых имеют внутренний слой. Представлены подходящие для таких задач два типа адаптированных к слою сеток. Для обоих типов даны равномерные оценки погрешности в ε-весовой энергетической норме для конечных элементов высокого порядка. В целях сравнения этих сеток и подтверждения теоретических выводов использованы численные эксперименты.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, точка поворота, внутренний слой, адаптированные к слою сетки, конечные элементы высокого порядка

Об авторах:
Саймон Бехер,
Институт вычислительной математики, Технический Университет Дрездена, 01062 Дрезден, Германия,
e-mail: simon.becher@tu-dresden.de

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 248–258
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 248–258

©Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-248-258
УДК 519.624.2

Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р.

получена 15 мая 2016

Аннотация. Для сингулярно возмущённой параболической задачи с краевыми условиями Дирихле построено и обосновано асимптотическое разложение периодического по времени решения с пограничными слоями вблизи концов отрезка в случае, когда вырожденное уравнение имеет двукратный корень. Поведение решения в пограничных слоях и сам алгоритм построения асимптотики существенно отличаются от случая однократного корня вырожденного уравнения. Исследован также вопрос об устойчивости периодического решения и области его притяжения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения реакция-диффузия, асимптотические приближения, устойчивость по Ляпунову, периодические решения, пограничные слои, область притяжения

Для цитирования: Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р., "Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущённой параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 248–258.

Об авторах:
Бутузов Валентин Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Нефедов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Реке Луц, доктор физ.-мат. наук, профессор,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Шнайдер Клаус, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany,
e-mail: schneider@wias-berlin.de

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ и РФФИ – ННИО (проекты 15-01-04619, 14-01-91333).

1. Введение

Рассматривается сингулярно возмущённое параболическое уравнение

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=f(u,x,t,\varepsilon), \tag{1.1}$$

$$(x,t)\in D=(0<x<1)\times(-\infty<t<\infty),$$

в котором $\varepsilon>0$ – малый параметр, $f(u,x,t,\varepsilon)$ – T-периодическая по времени функция, с краевыми условиями

$$u(0,t,\varepsilon)=u^0(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=u^1(t),\quad -\infty<t<\infty, \tag{1.2}$$

где $u^0(t)$, $u^1(t)$ – T-периодические функции, и условием T-периодичности решения по времени:

$$u(x,t+T,\varepsilon)=u(x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\bar{D}. \tag{1.3}$$

Известно, что если вырожденное уравнение

$$f(u,x,t,0)=0 \tag{1.4}$$

имеет простой (однократный) корень, то построение асимптотики, а также ее обоснование проводится по достаточно стандартной схеме (см. [1], [2]).

В данной работе задача (1.1) – (1.3) исследуется при условии, что вырожденное уравнение (1.4) имеет двукратный корень. Более точно, мы будем рассматривать случай, когда

$$f(u,x,t,\varepsilon)=h(x,t)\,(u-\varphi(x,t))^2-\varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon). \tag{1.5}$$

В этом случае корень $u=\varphi(x,t)$ вырожденного уравнения является двукратным. Оказывается, что при определённых условиях (см. ниже Условия A1–A3), задача (1.1) – (1.3) имеет решение с более сложной асимптотикой, в частности, изменяется алгоритм построения пограничных функций, а пограничные слои становятся трёхзонными.

Отметим, что аналогичная задача о погранслойном T-периодическом по времени решении уравнения (1.1) с функцией $f(u,x,t,\varepsilon)$ вида (1.5) и краевыми условиями Неймана была рассмотрена в [3]. В этом случае, в отличие от рассматриваемого в данной работе, асимптотика строится с помощью стандартного алгоритма и пограничные слои имеют однозонный характер с экспоненциальным убыванием пограничных функций, как и в случае простого корня вырожденного уравнения. Отличие от случая простого корня состоит лишь в том, что погранслойные переменные ξ и $\tilde{\xi}$ имеют другой масштаб. Рассматриваемая в данной работе краевая задача Дирихле развивает результаты работы авторов по построению асимптотики для начальной задачи [4] на более сложный класс, а также методы обоснования асимптотики, исследования устойчивости и области влияния устойчивого решения работ [5], [6], [7].

2. Построение асимптотики решения

2.1. Условия и вид асимптотики

Уточним требования к функциям $f(u, x, t, \varepsilon)$, $\quad u^0(t)$ и $u^1(t)$.

Условие A1. Пусть функция $f(u, x, t, \varepsilon)$ имеет вид (1.5), и пусть

$$h(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D}, \tag{2.1}$$

и функции $h(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $f_1(u, x, t, \varepsilon)$, $u^0(t)$ и $u^1(t)$ являются T-периодическими по переменной t и достаточно гладкими.

Как обычно, требуемый порядок гладкости обусловлен порядком асимптотики, которую мы хотим построить. Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие A2.

$$\bar{f}_1(x, t) := f_1\left(\varphi(x, t), x, t, 0\right) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Как будет видно из дальнейшего, это условие играет принципиальную роль как в построении погранслойной асимптотики, так и в доказательстве существования решения с построенной асимптотикой. Оно означает, что в случае двукратного корня вырожденного уравнения (в отличие от случая однократного корня) принципиальную роль играют слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, входящие в правую часть уравнения (1.1).

Условие A3.

$$u^0(t) > \varphi(0, t), \quad u^1(t) > \varphi(1, t).$$

Это условие играет важную роль при построении погранслойных рядов.

При условиях A1–A3 асимптотическое разложение решения задачи (1.1)–(1.3) будем строить в виде, существенное отличие которого от случая простого корня состоит в том, что регулярная часть асимптотики будет рядом по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε, как в случае простого корня), а погранслойные ряды будут рядами по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$, т.е.

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i(x, t), \tag{2.2}$$

$$\Pi(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \Pi_i(\xi, t), \tag{2.3}$$

$$\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t). \tag{2.4}$$

Погранслойные переменные ξ и $\tilde{\xi}$ в (2.3) и (2.4) имеют такой же масштаб, как и в случае простого корня вырожденного уравнения:

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tilde{\xi} = \frac{1 - x}{\varepsilon}.$$

Сразу же отметим, что на самом деле пограничные функции $\Pi_i(\xi, t)$ и $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t)$ будут зависеть не только от ξ, t и $\tilde{\xi}, t$, но также и от ε, однако с целью упрощения записи эту зависимость от ε не будем указывать, т.е. будем писать $\Pi_i(\xi, t)$ вместо $\Pi_i(\xi, t, \varepsilon)$.

2.2. Регулярная часть асимптотики

Стандартным способом, т.е. подставляя ряд (2.2) в равенство

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = f(\bar{u}, x, t, \varepsilon)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложениях обеих частей равенства, получаем уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x,t)$ ряда (2.2). Для $\bar{u}_0(x,t)$ получается вырожденным уравнение

$$h(x,t) \left(\bar{u}_0 - \varphi(x,t) \right)^2 = 0,$$

откуда следует, что $\bar{u}_0(x,t) = \varphi(x,t)$.

Для $\bar{u}_1(x,t)$ получается квадратное уравнение

$$h(x,t) \cdot \bar{u}_1^2 - \bar{f}_1(x,t) = 0.$$

В силу (2.1) и условия A2 это уравнение имеет два корня. В качестве $\bar{u}_1(x,t)$ возьмём положительный корень

$$\bar{u}_1(x,t) = \left[h^{-1}(x,t) \bar{f}_1(x,t) \right]^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{2.5}$$

Такой выбор будет оправдан ниже при рассмотрении уравнений для пограничных функций и далее при доказательстве существования решения с построенной асимптотикой.

Для следующих коэффициентов $\bar{u}_i(x,t)$, $i = 2, 3, \ldots$ ряда (2.2) получаются линейные алгебраические уравнения

$$\left[2h(x,t)\bar{u}_1(x,t) \right] \bar{u}_i = F_i(x,t),$$

где $F_i(x,t)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x,t)$ с номерами $j < i$. Так как $2h(x,t)\bar{u}_1(x,t) \neq 0$, то из этих уравнений однозначно определяются функции $\bar{u}_i(x,t)$. Очевидно, все $\bar{u}_i(x,t)$ являются T-периодическими функциями по переменной t.

2.3. Погранслойная часть асимптотики

Задачи для пограничных функций $\Pi_i(\xi,t)$ будем формировать с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \Pi f := f(\bar{u}(\varepsilon\xi, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon), \varepsilon\xi, t, \varepsilon) -$$

$$- f(\bar{u}(\varepsilon\xi, t, \varepsilon), \varepsilon\xi, t, \varepsilon) = h(\varepsilon\xi, t) \Big[\left(\bar{u}(\varepsilon\xi, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon\xi, t) \right)^2 -$$

$$- \left(\bar{u}(\varepsilon\xi, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon\xi, t) \right)^2 \Big] - \varepsilon \Pi f_1, \quad \xi > 0, \tag{2.6}$$

и граничных условий

$$\Pi(0, t, \varepsilon) = -\bar{u}(0, t, \varepsilon), \quad \Pi(\infty, t, \varepsilon) = 0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) и граничные условия (2.7) являются стандартными для метода пограничных функций (см. [1]), однако извлечение из (2.6) уравнений для коэффициентов $\Pi_i(\xi, t)$ ряда (2.3) после подстановки этого ряда в (2.6), будем производить не стандартным способом, а с помощью специального алгоритма, поскольку стандартный способ оказывается непригодным в случае кратного корня вырожденного уравнения.

Опишем алгоритм формирования уравнений для функций $\Pi_i(\xi, t)$.

Уравнение для $\Pi_0(\xi, t)$ возьмём в виде

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \xi^2} = h(0,t)\left[\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\Pi_0\right], \quad \xi > 0. \tag{2.8}$$

Отметим, что при стандартном алгоритме правая часть уравнения (2.8) не будет содержать второго слагаемого в квадратных скобках, в результате чего функция $\Pi_0(\xi, t)$ будет стремиться к нулю при $\xi \to \infty$ как $O(\frac{1}{\xi^2})$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1.1) - (1.3) в пограничном слое.

Граничные условия для $\Pi_0(\xi, t)$ следуют из (2.7):

$$\Pi_0(0,t) = u^0(t) - \varphi(0,t), \quad \Pi_0(\infty, t) = 0. \tag{2.9}$$

Задача (2.8), (2.9) сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} = -\left[2h(0,t)\left(\frac{1}{3}\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \Pi_0, \quad \xi > 0 \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$\Pi_0(0,t) = u^0(t) - \varphi(0,t) =: \Pi^0(t). \tag{2.11}$$

Решение задачи (2.10), (2.11) находится в явном виде, и так как $\Pi^0(t) > 0$ в силу условия A3, и $\bar{u}_1(0,t) > 0$ (см. (2.5)), то $\Pi_0(\xi, t)$ монотонно стремится к нулю при $\xi \to \infty$.

Запишем решение так:

$$\Pi_0(\xi,t) = \frac{12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\left[1 + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})\right]\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}k_0(t)\xi\right)}{\left\{1 - \left[1 - (12\bar{u}_1(0,t)(\Pi^0(t))^{-1})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + O(\sqrt{\varepsilon})\right]\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}k_0(t)\xi\right)\right\}^2}, \tag{2.12}$$

где $k_0(t) = [2h(0,t)\bar{u}_1(0,t)]^{\frac{1}{2}} > 0$, а величины $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ и $O(\sqrt{\varepsilon})$ имеют указанный порядок малости при $\varepsilon \to 0$ равномерно на полупрямой $\xi \geq 0$.

Отметим, что если $\Pi^0(t) < 0$, то задача (2.8), (2.9) не имеет решения, а если $\Pi^0(t) = 0$, то $\Pi_0(\xi, t) = 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения.

Несложный анализ выражения (2.12) показывает, что убывание функции $\Pi_0(\xi, t)$ с ростом ξ имеет различный характер на разных промежутках изменений ξ. Можно выделить три зоны.

Первой зоной является промежуток $0 \le \xi \le \varepsilon^{-\gamma}$ (т.е. $0 \le x \le \varepsilon^{1-\gamma}$), где в качестве γ можно взять любое число из промежутка $0 \le \gamma < \frac{1}{4}$. В этой зоне $\Pi_0(\xi,t) = O\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)$, т.е. функция $\Pi_0(\xi,t)$ убывает с ростом ξ степенным образом.

Промежуток $\varepsilon^{-\gamma} \le \xi \le \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ (т.е. $\varepsilon^{1-\gamma} \le x \le \varepsilon^{\frac{3}{4}}$) является второй (переходной) зоной. Здесь происходит изменение характера убывания функции $\Pi_0(\xi,t)$ и изменение масштаба погранслойной переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\xi \ge \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ (т.е. $x \ge \varepsilon^{\frac{3}{4}}$) функция $\Pi_0(\xi,t)$ имеет оценку

$$\Pi_0(\xi,t) = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(-k_0\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \varepsilon^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}},$$

т.е. новая погранслойная переменная ζ, возникшая в третьей зоне, имеет иной масштаб по сравнению со старой переменной ξ, а функция Π_0 убывает в третьей зоне экспоненциально при $\zeta \to \infty$. Отметим ещё раз, что принципиальную роль в описанном поведении функции $\Pi_0(\xi,t)$ играет положительность $\bar{u}_1(0,t)$.

Из (2.12) для $\Pi_0(\xi,t)$ следует оценка

$$|\Pi_0(\xi,t)| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{2.13}$$

где

$$\Pi_\kappa(\xi) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\xi\right)}{\left[1-(1-\varepsilon^{\frac{1}{4}})\exp\left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}}\kappa\xi\right)\right]^2}. \tag{2.14}$$

Функция $\Pi_\kappa(\xi)$ имеет такое же трёхзонное поведение, как и функция $\Pi_0(\xi,t)$. Она играет роль эталонной (оценочной) функции для коэффициентов $\Pi_i(\xi,t)$ ряда (2.3) аналогично тому, как функция $\exp(-\kappa\xi)$ была эталонной функцией для пограничных функций в случае простого корня вырожденного уравнения. Оценку такого же типа, как и оценка $\Pi_0(\xi,t)$, имеет производная $\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}(\xi,t)$:

$$\left|\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}(\xi,t)\right| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Её можно получить, продифференцировав по t выражение (2.12) для $\Pi_0(\xi,t)$, либо рассмотрев краевую задачу для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial t}$, которая получается из задачи (2.8), (2.9) дифференцированием по t.

Задачи для следующих коэффициентов $\Pi_i(\xi,t)$, $i = 1, 2, \ldots$ ряда (2.3) имеют вид

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\xi^2} = \alpha(\xi,t,\varepsilon)\Pi_i + \pi_i(\xi,t,\varepsilon), \quad \xi > 0, \tag{2.15}$$

$$\Pi_i(0,t) = \begin{cases} -\bar{u}_{\frac{i}{2}}(0,t), & \text{если } i \text{ – чётное число,} \\ 0, & \text{если } i \text{ – нечётное число,} \end{cases} \qquad \Pi_i(\infty,t) = 0,$$

где $\alpha(\xi,t,\varepsilon) = 2h(0,t)\left[\Pi_0(\xi,t) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,t)\right]$, а функции $\pi_i(\xi,t,\varepsilon)$ в (2.15) рекуррентно выражаются через $\Pi_j(\xi,t)$ с номерами $j < i$ и формируются не стандартным способом. Чтобы описать этот способ, перепишем правую часть уравнения (2.6) в следующем виде (учитывая, что $x = \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta$):

$$\Pi f = h(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\Big[\left(\bar{u}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\right)^2 -$$

$$-\left(\bar{u}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, t)\right)^2\Big] - \varepsilon\Pi f_1.$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по целым степеням $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ и обозначим коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i}{4}}$ через $\beta_i(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$. В этот коэффициент мы не включаем слагаемое $2h(0,t)\Pi_0(\xi,t)\Pi_i$, оно вошло в выражение для $\alpha(\xi,t,\varepsilon)\Pi_i$ в уравнении (2.15).

Если какое-то слагаемое (обозначим его $\beta_{ij}(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$), входящее в состав $\beta_i(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей $|\Pi_k(\xi,t)|$ с какими-то номерами $k < i$, т.е. $|\beta_{ij}| \le c|\Pi_k(\xi,t)| \cdot |\Pi_l(\xi,t)|, \quad k < i, \quad l < i$, то это слагаемое, заменив ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi$, включаем в $\pi_i(\xi,t,\varepsilon)$; если же оценка по модулю β_{ij} содержит только один сомножитель $|\Pi_k(\xi,t)|, \quad k < i$, то это слагаемое, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$, включаем в $\pi_{i-2}(\xi,t,\varepsilon)$, заменив, как и в первом случае, ζ на $\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi$.

Кроме того, при $i \ge 6$ в состав $\pi_i(\xi,t,\varepsilon)$ включаем слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial \Pi_{i-6}}{\partial t}(\xi,t)$, которое появляется как часть слагаемого $-\varepsilon^2\frac{\partial \Pi}{\partial t}$, входящего в левую часть (2.6).

Отметим, что $\pi_1(\xi,t,\varepsilon) = 0$, поэтому

$$\Pi_1(\xi,t) \equiv 0,$$

и выпишем в качестве примера выражение для $\pi_2(\xi,t,\varepsilon)$:

$$\pi_2(\xi,t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\left(2h(0,t)\bar{u}_2(0,t)\Pi_0(\xi,t) - \Pi_0 f_1\right),$$

где

$$\Pi_0 f_1 = f_1\left(\varphi(0) + \Pi_0(\xi,t), 0, t, 0\right) - f_1\left(\varphi(0), 0, t, 0\right).$$

Описанная процедура формирования функций $\pi_i(\xi,t,\varepsilon)$ позволяет получить для них последовательно (для $i = 2, 3, \ldots$) оценку типа

$$|\pi_i(\xi,t,\varepsilon)| \le c\left[\Pi_\kappa^2(\xi) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\kappa(\xi)\right], \tag{2.16}$$

где функция $\Pi_\kappa(\xi)$ определена формулой (2.14), а постоянные c и κ будут, вообще говоря, различными для разных i.

Неравенство (2.16) обеспечивает для всех $\Pi_i(\xi,t)$ оценку типа (2.13):

$$|\Pi_i(\xi,t)| \le c\Pi_\kappa(\xi), \quad \xi \ge 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad i = 2, 3, \ldots. \tag{2.17}$$

с различными c и κ для разных i. Из этой оценки следует, что все $\Pi_i(\xi,t)$ имеют такое же трёхзонное поведение, как и $\Pi_0(\xi,t)$. Оценка (2.17) доказывается с использованием явного выражения для $\Pi_i(\xi,t)$:

$$\Pi_i(\xi,t) = \Phi(\xi,t)\Phi^{-1}(0,t)\Pi_i(0,t) + \Phi(\xi,t)\int_0^\xi \Phi^{-2}(s,t)\int_\infty^s \Phi(\sigma,t)\pi_i(\sigma,t,\varepsilon)d\sigma ds,$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi}(\xi, t).$$

Производные $\frac{\partial \Pi_i}{\partial t}$ имеют оценку такого же типа, как (2.17). Отметим, что все функции $\Pi_i(\xi, t)$ и их производные являются T-периодическими по переменной t.

Коэффициенты ряда (2.4), т.е. пограничные функции $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, t)$, определяются аналогично функциям $\Pi_i(\xi, t)$ и имеют оценки, аналогичные (2.17).

Таким образом, формальная асимптотика решения задачи (1.1) – (1.3) построена в виде суммы рядов (2.2), (2.3) и (2.4).

3. Существование решения с построенной асимптотикой

Обозначим через $U_n(x, t, \varepsilon)$ частичную сумму построенного разложения, состоящего из трёх рядов (2.2), (2.3) и (2.4):

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \left[\Pi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) + \tilde{\Pi}_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}, t\right) \right]. \qquad (3.1)$$

Очевидно, $U_n(x, t, \varepsilon)$ является T-периодической функцией по переменной t.

Теорема 1. *Если выполнены условия A1 – A3, то для достаточно малых ε задача (1.1) – (1.3) имеет решение $u_T(x, t, \varepsilon)$, для которого функция $U_n(x, t, \varepsilon)$ при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е.*

$$u_T(x, t, \varepsilon) = U_n(x, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x, t) \in \bar{D}. \qquad (3.2)$$

Доказательство теоремы проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что верхнее и нижнее решения для задачи (1.1) – (1.3) формируются с помощью частичной суммы $U_n(x, t, \varepsilon)$ построенного ряда, дающего формальную асимптотику решения задачи (1.1) – (1.3) (аналогичная схема развивается авторами, например, в [5], [6], [7]).

4. Устойчивость и область притяжения решения $u_T(x, t, \varepsilon)$

Теорема 2. *Если выполнены условия A1 – A3, то для достаточно малых ε решение $u_T(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3) является асимптотически устойчивым (по Ляпунову) при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим производную по u функции $f(u,x,t,\varepsilon)$, взятую на решение $u_T(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3):

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) = 2h(x,t)\,(u_T(x,t,\varepsilon)-\varphi(x,t)) + \varepsilon f_{1u}(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon).$$

Используя асимптотику решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ (см. (3.2)), получаем:

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) = f_u(U_n(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Отсюда при $n \geq 1$ следует неравенство (для достаточно малых ε):

$$f_u(u_T(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) > c_0\sqrt{\varepsilon}, \quad (x,t)\in\bar{D}. \tag{4.1}$$

Неравенство (4.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ для достаточно малых ε (см. [8]).

Рассмотрим теперь вопрос об области притяжения решения $u_T(x,t,\varepsilon)$, т.е. о множестве таких функций $u_0(x,\varepsilon)$, для которых решение $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2) и начальным условием (t_0 – произвольный момент времени):

$$u(x,t_0,\varepsilon) = u_0(x,\varepsilon), \quad 0\leq x\leq 1, \tag{4.2}$$

существует при $t > t_0$ и удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{t\to+\infty}[u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon)] = 0, \quad 0\leq x\leq 1. \tag{4.3}$$

Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A1 – A3 и пусть $u^0(x,\varepsilon)$ – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию*

$$u_0(x,\varepsilon) \geq u_T(x,t_0,\varepsilon), \quad 0\leq x\leq 1. \tag{4.4}$$

Тогда для достаточно малых ε задача (1.1), (1.2), (4.2) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$ при $t > t_0$, и это решение удовлетворяет предельному равенству (4.3).

Доказательство. Снова воспользуемся методом дифференциальных неравенств (определение нижнего и верхнего решений, а также теорему существования решения см., например, в [9]) .

Непосредственной подстановкой можно показать, что функция

$$\bar{U}(x,t,\varepsilon) = u_T(x,t,\varepsilon) + A\cdot E(t,\varepsilon), \tag{4.5}$$

где $E(t,\varepsilon) = \exp\left[-\frac{p(t-t_0)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\right]$, A и p – положительные числа, не зависящие от ε, для достаточно большого A, достаточно малого p и достаточно малых ε является верхним решением.

Аналогично показывается, что нижним решением этой задачи является функция

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) = u_T(x,t,\varepsilon) - \varepsilon E(t,\varepsilon). \tag{4.6}$$

Существование нижнего и верхнего решений задачи (1.1), (1.2), (4.2) обеспечивает существование решения $u(x,t,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющего неравенствам

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,t,\varepsilon), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge t_0.$$

Из этих неравенств, используя выражения (4.5) и (4.6) для $\bar{U}(x,t,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,t,\varepsilon)$, получаем:

$$-\varepsilon E(t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon) \le AE(t,\varepsilon), \;\; 0 \le x \le 1, \;\; t \ge t_0.$$

Так как $E(t,\varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} [u(x,t,\varepsilon) - u_T(x,t,\varepsilon)] = 0, \;\; 0 \le x \le 1,$$

и, следовательно, для решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), (4.2) выполняется предельное равенство (4.3). Из теоремы 3 следует, что любая гладкая функция $u_0(x,\varepsilon)$, $0 \le x \le 1$, удовлетворяющая неравенству (4.4), принадлежит области притяжения решения $u_T(x,t,\varepsilon)$ задачи (1.1) – (1.3).

Список литературы / References

[1] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations, in Russian*, Vyss. Shkola, Moscow, 1990.

[2] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, "Contrast structures in singularly perturbed problems (in Russian)", *Fundamentalnaja i prikladnaja matematika*, **4** (1998), 799–851.

[3] V. F. Butuzov, "On the periodic solutions of singularly perturbed parabolic problems in case of multiple roots of the degenerate equation, in Russian", *Zh. Vych. Math. Math. Phys.*, **51** (2011), 44–55.

[4] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, "On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation", *Nonlinear Analysis*, 2012, 1–11.

[5] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, "Existence and stability of solutions with periodically moving weak internal layers", *J. Math. Anal. Appl.*, **348** (2008), 508–517.

[6] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, "Region of attraction of a periodic solution to a singularly perturbed parabolic problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **91** (2012), 1265–1277.

[7] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schneider, "Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed Neumann boundary conditions", *Int. J. Bif. Chaos*, **24** (2014).

[8] P. Hess, "Periodic-parabolic boundary value problems and positivity", *Pitman Research Notes in Math. Series*, 1991, 247.

[9] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York and London, 2004.

Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., "Asymptotics, Stability and Region of Attraction of a Periodic Solution to a Singularly Perturbed Parabolic Problem in Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 248–258.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-248-258

Abstract. For a singularly perturbed parabolic problem with Dirichlet conditions we prove the existence of a solution periodic in time and with boundary layers at both ends of the space interval in the case that the degenerate equation has a double root. We construct the corresponding asymptotic expansion in a small parameter. It turns out that the algorithm of the construction of the boundary layer functions and the behavior of the solution in the boundary layers essentially differ from that ones in case of a simple root. We also investigate the stability of this solution and the corresponding region of attraction.

Keywords: singularly perturbed reaction-diffusion equation; asymptotic approximation; periodic solution; boundary layers; Lyapunov stability; region of attraction

On the authors:
Butuzov Valentin Fedorovich, Professor
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, faculty of physics, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Nefedov Nikolay Nikolaevich, Professor
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, faculty of physics, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Recke Lutz, Professor,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Schneider Klaus, Professor,
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany,
e-mail: schneider@wias-berlin.de

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR and RFBR–DFG projects(pr. 15-01-04619, 14-01-91333).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №3 (2016), с. 259–282
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 259–282

©Быков А. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-259-282

УДК 517.228.4

Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем

Быков А. А.

получена 20 мая 2016

Аннотация. Выведены уравнения эволюции решения типа контрастной структуры обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП) с малым параметром при старших производных. Уравнение ОКПП относится к классу псевдопараболических уравнений и описывает разнообразные процессы в физике, химии, биологии, в частности процессы генерации магнитного поля в турбулентной среде, движение фронта концентрации носителей в полупроводниках. Найдена форма и скорость перемещения внутреннего переходного слоя (ВПС). Построен и строго обоснован алгоритм адаптивной сетки (АС) для эффективного численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП с движущимся ВПС. Построен алгоритм АС для случая наличия особой точки первого рода, т.е. точки с нулевой скоростью дрейфа ВПС в первом порядке формального асимптотического ряда. Сформулированы достаточные условия того, что ВПС пересекает особую точку за конечное время. Построен алгоритм АС для случая наличия особой точки второго рода, т.е. точки с формально бесконечно большой скоростью дрейфа ВПС в первом порядке. Дано обоснование на основе метода дифференциальных неравенств, построены верхнее и нижнее решение, представлены результаты численного счета.

Ключевые слова: сингулярно возмущённое уравнение, внутренний переходный слой, метод разностных схем, асимптотическое разложение

Для цитирования: Быков А. А., "Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 259–282.

Об авторах:
Быков Алексей Александрович, orcid.org/0000-0002-9399-7115,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики физического факультета,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Ленинские Горы, 1.
E-mail: abkov@yandex.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00690-а.

1. Введение

Мы рассматриваем проблему численного решения начально краевой задачи для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП) [1], [2], [3], [4], [5],

$$(u - u_{xx})_t + Vu_x = u_{xx} - f(u, x) \tag{1}$$

в том практически важном случае, когда решение имеет вид контрастной структуры (КС). Также рассматриваются некоторые более простые модели, в частности уравнение реакции–диффузии (РД) в неоднородной среде [6]

$$u_t + Vu_x = \kappa u_{xx} - f(u, x). \tag{2}$$

Уравнения РД и ОКПП относятся к классу квазилинейных уравнений соответственно параболического и псевдопараболического типа. Задача для уравнений (1) или (2) ставится на отрезке $[a, b]$ с граничными условиями $u_x(a) = u^{(a)}(t)$, $u_x(b) = u^{(b)}(t)$ и начальными условиями $u(x, 0) = u^{(0)}(x)$.

Уравнение (2) описывает процесс генерации магнитных полей в турбулентной среде [7] в теории галактического динамо. В этом случае u определяет напряженность магнитного поля, причем плотность источников антисимметрична, $f(-u, x) = -f(u, x)$, эта функция имеет три корня, положение которых зависит от координат, в том числе корень $u = 0$. Уравнение (2) описывает также процесс распространения пламени типа бегущей волны при горении и взрыве [8]. Автомодельные решения типа бегущей волны возникают в теории ударных волн [9], а также для описания нестационарного процесса фазового перехода [10]. В случае, когда $f(u)$ – кубическая парабола, уравнение (2) описывает процессы в цепных химических реакциях и носит название уравнения Семенова [10]. В [11] дан обзор решений вида бегущей волны для уравнения Ходжкина–Хаксли, которое описывает [12] процесс распространения импульсов по нервным волокнам и также имеет вид (2) со специальным образом выбранной функцией плотности источников. Уравнение РД и решения типа вида бегущей волны появляются в задаче динамики популяций (например, модель хищник–жертва), эволюции пораженных клеток в живом организме, цитокининов при атеросклерозе [13]. Уравнение (2) в биологических приложениях называют также уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова, так как впервые оно было выведено в работе [14].

В [1], [2], [3] приведены примеры физических процессов, которые описываются уравнениями, более сложными, чем уравнение РД, в том числе обобщенным уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова, содержащим производные смешанного типа третьего порядка. К числу таковых относятся квазистационарный процесс переноса зарядов в двухкомпонентной квазилинейной полупроводниковой плазме, нестационарные процессы в униполярном полупроводнике во внешнем магнитном поле, малые колебания слабопроводящей жидкости во внешнем магнитном поле. Уравнение ОКПП описывает, в частности, процесс диффузии носителей заряда в полупроводниках в случае, когда среда обладает отрицательной дифференциальной проводимостью [4], [5].

Структура решения уравнений (1) и (2), как почти для любого нелинейного уравнения, может быть сколь угодно сложна. Нас интересует только широко распространенный на практике класс решений типа так называемой контрастной структуры.

Решения типа КС характеризуются наличием больших областей (пятен), в которых u близко к одному из устойчивых состояний, разделенных узкими областями, в которых происходит переход от одного устойчивого состояния к другому через неустойчивое состояние. Например, если

$$f(u,x) = f_0(u,x)\Pi_{j=1}^{2J+1}\big(u - U_j(x)\big),$$

$f_0(u,x) > 0$ и непрерывна на $(-\infty,+\infty) \times [a,b]$, $U_j(x) > 0$, $U_{j-1}(x) < U_j(x)$, то имеется $J+1$ устойчивых состояний, $u \simeq U_{2j-1}$, причем $f_u(U_j,x) > 0$, разделенных J неустойчивыми состояниями, $u \simeq U_{2j}$, для которых $f_u(U_j,x) < 0$.

Между пятнами КС образуется узкий слой, в пределах которого происходит переход от одного из устойчивых состояний к другому, сопровождающийся переходом через неустойчивое состояние. Этот слой называют внутренним переходным слоем (ВПС). Мы предполагаем, что толщина ВПС много меньше размера области $D = [a,b]$. На границах D образуются узкие пограничные слои, которые в данной работе не рассматриваются. Для создания условий, при которых имеется решение типа КС, мы введем в уравнения (1) и (2) малый параметр $\varepsilon > 0$ при частных производных, при достаточно малом значении которого решение типа КС существует. Параметр ε, как будет показано далее, пропорционален толщине ВПС. Начально-краевая задача для уравнения (2) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u,x), \;\; a < x < b, \;\; 0 < t < T, \\ u_x(a,t,\varepsilon) = 0, \;\; u_x(b,t,\varepsilon) = 0, \;\; u(x,0,\varepsilon) = u^{(0)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{3}$$

В неоднородных средах ВПС почти всегда перемещается. Дрейф ВПС определяется величиной асимметрии $B(x) = \int_{U_1(x)}^{U_{2J+1}(x)} f(u,x)\,du$. При нулевой асимметрии, $B(x) = 0$, скорость дрейфа определяется градиентом функции плотности источников U_{jx}, f_u, f_x. В данной работе мы рассматриваем именно последний случай, когда дрейф асимметрии отсутствует, и перемещение ВПС обусловлено градиентным дрейфом. Мы найдем асимптотическое выражение скорости дрейфа при достаточно слабых условиях на функцию $f(u,x)$. Заметим, что в ряде работ [15], [16] найдены точные выражения скорости дрейфа квазиволны для случая некоторых специально подобранных функций $f(u)$. В [17] получено выражение скорости дрейфа и показано, что при сохранении знака скорости фронт ВПС преодолевает промежуток за конечное время. Мы обобщим этот результат на случай уравнения ОКПП и сформулируем метод, позволяющий численно с гарантированной точностью и за приемлемое время счета находить решение задачи.

Во всех этих случаях особое значение для приложений имеет не только аналитическое описание на основе асимптотических методов, дающих приближение к точному решению с гарантированной точностью при условии плавного изменения параметров среды в пространстве, но также и точное и эффективное численное решение начально-краевой задачи с внутренними переходными слоями.

Наша цель состоит в

- построении формального асимптотического ряда для уравнений (1) и (2) в случае, когда толщина ВПС много меньше диаметра области D,
- построении верхнего и нижнего решения, строгого обоснования метода асимптотического разложения на основе метода дифференциальных неравенств,

- разработке численного алгоритма приближенного решения этих уравнений с гарантированной точностью и за приемлемое время.

Мы построим нулевой, первый и второй члены асимптотического ряда по степеням ε. Мы покажем, что частичные суммы этого ряда дают приближение решения уравнения по невязке с заданной точностью.

Мы построим также алгоритм, основанный на использовании метода адаптивной сетки (АС) для численного решения (1) и (2). Метод АС основан на сгущении сетки в окрестности области с большим градиентом решения. Метод АС для решения начально-краевых задач для эволюционных (параболического типа) уравнений предложен и детально проработан достаточно давно [18]. Проблема генерации адаптивной сетки имеет как абстрактное решение, безотносительно к классу рассматриваемых начально-краевых задач, так и конкретные решения для определенных классов уравнений, в которых можно сформулировать алгоритм предсказания положения области с большим градиентом [19]. Например, таковы некоторые задачи динамики жидкости, в которых предсказать положение области с большим градиентом можно, опираясь на полную или частично заданную информацию о поле скоростей и давлений (например, [20]).

Метод АС широко применяется для численного решения задач реакции-диффузии, возникающих в различных приложениях. В [21] метод АС применен для решения задачи о распространении ракового образования мозговой ткани. В [22] метод использован для численного моделирования процесса радиационной диффузии светового пучка в мутной среде. В [23] метод АС применен для решения уравнений мелкой воды, описывающих распространение фронта волны в случае, когда толщина слоя жидкости достаточна мала, так что система уравнений Навье–Стокса динамики жидкости упрощается за счет пренебрежения эффектами, связанными с вертикальными потоками. Метод АС, разработанный для решения уравнения ОКПП, применим также для решения задач с движущимися внутренними переходными слоями, возникающими при моделировании пучков заряженных частиц в электронных приборах с распределенным взаимодействием.

Суть метода АС состоит в том, что малые ячейки сетки размещаются в области больших градиентов решения. В нашей задаче, естественно, это область ВПС. Внутри пятен ВПС шаг сетки может быть значительно больше.

Для точного предсказания положения ВПС мы используем метод асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Уравнение (3) с малым параметром относится к классу сингулярно возмущенных. Это означает, что при $\varepsilon = 0$ оно из дифференциального превращается в алгебраическое, причем это алгебраическое уравнение имеет несколько решений. Из этих решений (соответствующих устойчивым положениям равновесия) мы сконструируем так называемую регулярную функцию нулевого порядка. Регулярная функция нулевого порядка претерпевает разрыв в точках ВПС.

Затем мы построим функции переходного слоя нулевого порядка и пограничные функции нулевого порядка, которые складываются с регулярной функцией нулевого порядка и дают в результате единое гладкое приближение по невязке к точному решению во всей области, удовлетворяющее также граничным условиям. Регулярные функции и функции переходного слоя зависят от времени, причем эту зависимость можно охарактеризовать как дрейф ВПС. Мы найдем также скорость дрейфа ВПС в нулевом порядке, которая также является приближением к точному значению.

Затем мы последовательно построим первый и последующие члены асимптотического ряда по степеням малого параметра. Скорость дрейфа ВПС также будет представлена в виде ряда по степеням малого параметра, $W(x) = W^{(0\star)}(x) + \varepsilon W^{(1\star)}(x) + \ldots$ Для нестационарных задач метод асимптотических рядов ранее использовался для построения решений уравнения типа реакция–диффузия с движущимся фронтом типа ступеньки [17], [24], [25] и всплеска [26].

Мы рассматриваем случай, когда скорость дрейфа ВПС нулевого порядка положительна на промежутке (a, b). Таким образом, ВПС проходит весь отрезок (a, b) за конечное время. Мы строим также модификации метода, которые позволяют дать описание случаев, когда скорость дрейфа в нулевом порядке обращается в нуль или в бесконечность.

2. Построение формальной асимптотики

2.1. Условия формирования ВПС

Предположим, что толщина ВПС много меньше диаметра области D, который в одномерной по пространственной координате задаче равен $b - a$. Введем в уравнение (1) малый параметр ε, который пропорционален отношению толщины ВПС к диаметру области D. Мы выберем такие значения показателя степени при малом параметре в различных слагаемых уравнения (1), при которых эффекты классической диффузии u_{xx} и обобщенного диффузионного члена u_{xxt} будут одного порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u, x), \;\; a < x < b, \;\; 0 < t < T, \\ u_x(a, t, \varepsilon) = 0, \;\; u_x(b, t, \varepsilon) = 0, \;\; u(x, 0, \varepsilon) = u^{(0)}(x, \varepsilon), \end{cases} \tag{4}$$

$u(x, t, \varepsilon) \in C^2(G) \bigcap C(\bar{G})$, $G = (a, b) \times (0, T)$, $\mu > 0$, $k > 0$. Теоретические результаты будут верны в том случае, когда величина параметра ε не превосходит некоторого предельно допустимого значения, поэтому мы рассматриваем значения $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Мы не рассматриваем в данной работе зависимость $f(u, x)$ от ε, так как намереваемся исследовать только эффекты, связанные с поведением ВПС в неоднородной среде.

Сформулируем условия, которые мы будем предполагать выполненными при построении формального асимптотического ряда для уравнения (1) и обеспечивающие существование решения уравнения (4) типа КС. Пусть

[У1] Функция $f(u, x)$ непрерывно дифференцируема в области G, причем каждая производная функции f, которая появляется в выражениях для членов асимптотического ряда, непрерывна и равномерно ограничена в G.

[У2] Для любого $x \in [a, b]$ уравнение $f(u, x) = 0$ имеет ровно три корня: $u_1 = \phi^{(-)}(x)$, $u_2 = \phi^{(0)}(x)$, $u_3 = \phi^{(+)}(x)$, причем $\phi^{(-)}(x) < \phi^{(0)}(x) < \phi^{(+)}(x)$. Все корни простые, причем $f_u\big(\phi^{(-)}(x), x\big) > 0$, $f_u\big(\phi^{(0)}(x), x\big) < 0$. $f_u\big(\phi^{(+)}(x), x\big) > 0$.

[У3] На $[a, b]$ выполнено условие баланса $\mathcal{B}(x) = 0$, где $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}^{(-)}(x) + \mathcal{B}^{(+)}(x)$,

$$\mathcal{B}^{(-)}(x) = \int_{\phi^{(-)}(x)}^{\phi^{(0)}(x)} f(u, x) du, \;\; \mathcal{B}^{(+)}(x) = \int_{\phi^{(0)}(x)}^{\phi^{(+)}(x)} f(u, x) du.$$

Для построения асимптотического ряда, сходящегося к точному решению задачи, используем метод сшивания асимптотических представлений решения в области отрицательного и положительного пятен. В данной работе мы рассмотрим КС, включающую ровно два пятна, разделенных одним ВПС, но отметим, что метод пригоден для любого числа ВПС.

2.2. Асимптотические ряды

Будем называть "точкой перехода" координату $x^\star(t,\varepsilon)$, для которой
$$u(x^\star,t,\varepsilon)=\varphi^{(\star)}\big(x^\star(t,\varepsilon)\big).$$

Используем для построения асимптотического ряда методику, разработанную в [17] для уравнения реакции-диффузии. На промежутке $a<x<x^\star(t,\varepsilon)$ решение задачи (4) найдем из системы

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t=\varepsilon^4\mu u_{xxt}+\varepsilon^2 k u_{xx}-f(u,x),\\ u_x(a,t,\varepsilon)=0,\;\; u\big(x^\star(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big)=\phi^{(0)}\big(x^\star(t,\varepsilon)\big),\\ u(x,0,\varepsilon)=u^{(0)}(x,\varepsilon), \end{cases} \tag{5}$$

а на промежутке $x^\star(t,\varepsilon)<x<b$ – из системы

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t=\varepsilon^4\mu u_{xxt}+\varepsilon^2 k u_{xx}-f(u,x),\\ u_x(b,t,\varepsilon)=0,\;\; u\big(x^\star(t,\varepsilon),t,\varepsilon\big)=\phi^{(0)}\big(x^\star(t,\varepsilon)\big),\\ u(x,0,\varepsilon)=u^{(0)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{6}$$

Решения задач (5) и (6) обозначим $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ соответственно. Частичную сумму асимптотического ряда m–го порядка справа и слева от точки перехода представим в виде

$$u^{(m+)}(x,t,\varepsilon)=\bar u^{(m+)}(x,t,\varepsilon)+Q^{(m+)}(\xi,t,\varepsilon)+\Pi_b^{(m)}(\zeta_b,\varepsilon), \tag{7}$$

$$u^{(m-)}(x,t,\varepsilon)=\bar u^{(m-)}(x,t,\varepsilon)+Q^{(m-)}(\xi,t,\varepsilon)+\Pi_a^{(m)}(\zeta_a,\varepsilon), \tag{8}$$

где $\bar u^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon)$ – регулярная часть, $Q^{(m\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ – функции переходного слоя, $\Pi_{a,b}^{(m)}(\zeta_{a,b},\varepsilon)$ – пограничные функции, ξ, ζ_a, ζ_b – растянутые переменные:

$$\xi=\frac{x-x^\star(t,\varepsilon)}{\varepsilon},\;\; \zeta_a=\frac{a-x}{\varepsilon}\le 0,\;\; \zeta_b=\frac{b-x}{\varepsilon}\ge 0. \tag{9}$$

Зависимость $\bar u^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon)$ от t обусловлена наличием зависимости $x^\star$ от t. Каждое слагаемое в (7) и (8) представим в виде частичной суммы асимптотического ряда по степеням ε:

$$\bar u^{(m\pm)}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\bar u_k^{(\pm)}(x,t),\;\; Q^{(m\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi,t), \tag{10}$$

$$\Pi_a^{(m)}(\zeta_a,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\Pi_{a,k}(\zeta_a),\;\; \Pi_b^{(m)}(\zeta_b,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\Pi_{bk}(\zeta_b), \tag{11}$$

причем $x^\star(t,\varepsilon)=x^{(m\star)}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}W^{(m\star)}(x^\star,\varepsilon)dt$,

$$dx^{(m\star)}(t,\varepsilon)\big/dt=W^{(m\star)}(x^\star,\varepsilon),\quad W^{(m\star)}(x^\star,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k W_k(x^\star,\varepsilon), \tag{12}$$

$W_k(x^\star, \varepsilon)$ есть регулярная функция ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Используем далее методику, разработанную в [17] для построения асимптотического ряда. Выполним в (4) замену переменной (9) и представим $f(u, x, \varepsilon)$ в виде

$$f(u, x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon) + Qf(\xi, \varepsilon) + \Pi f(\zeta, \varepsilon),$$

где

$$\bar{f}(x, \varepsilon) = f\big(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon\big),$$
$$Qf(\xi, t, \varepsilon) = f\big(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon) + Q(\xi, t, \varepsilon), x(\xi), \varepsilon\big) - f\big(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon), x(\xi), \varepsilon\big),$$
$$\Pi_\nu f(\zeta_\nu, \varepsilon) = f\big(\bar{u}(x(\zeta_\nu), \varepsilon) + \Pi_\nu(\zeta_\nu, \varepsilon), x(\zeta_\nu), \varepsilon\big) - f\big(\bar{u}(x(\zeta_\nu), \varepsilon), x(\zeta_\nu), \varepsilon\big),$$

$\nu = a, b$, зависимость от t как от параметра через $\bar{u}(t)$ далее явно не указываем. Уравнения для определения коэффициентов разложения (10) получим, приравняв по отдельности слагаемые, зависящие от пространственной переменной x, растянутой переменной ξ и растянутых переменных пограничного слоя ζ :

$$\varepsilon^2 k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon), \tag{13}$$

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{dx^\star}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \mu \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial t} + \varepsilon \mu \frac{dx^\star}{dt} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) Q(\xi, t, \varepsilon) = -Qf(\xi, t, \varepsilon). \tag{14}$$

Уравнения для коэффициентов рядов (11) в данной работе не рассматриваются, так как мы строим метод точного и эффективного численного решения задачи с внутренним переходным слоем.

2.3. Вычисление профиля КС и скорости дрейфа ВПС в градиентной среде

Покажем, что в рамках задачи о КС для сбалансированного уравнения ОКПП профиль ВПС можно найти, решив аналитически уравнения нулевого порядка. Регулярную функцию нулевого порядка найдем из уравнения $f(\bar{u}, x) = 0$. В соответствии с **[У2]**, выберем разрывное решение с одной точкой разрыва:

$$\bar{u}_0\big(x, x^\star\big) = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) & \text{при} \quad x < x^\star, \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) & \text{при} \quad x > x^\star, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) = \phi^{(-)}(x), \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) = \phi^{(+)}(x). \end{cases} \tag{15}$$

При расчете функций ВПС нулевого порядка в этом разделе обозначим $x^\star = x^{(0\star)}$. Здесь и далее зависимость $x^{(0\star)}(t)$ явно не указываем. Функции переходного слоя нулевого порядка найдем из краевых задач

$$\begin{cases} \kappa Q_{0\xi\xi}^{(\pm)} = f\big(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^\star) + Q_0^{(\pm)}, x^\star\big) - f\big(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^\star), x^\star\big), \\ Q_0^{(\pm)}(0) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^\star) = \phi^{(0)}(x^\star), \;\; Q_0^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

которые получаем из (14) собиранием слагаемых нулевого порядка относительно ε.

Для выделения единственного решения используем также условия гладкого сопряжения функции $u^{(0\pm)}(\xi) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x^\star) + Q_0^{(\pm)}(\xi)$ в точке $x^\star = x^{(0\star)}$. Таким образом, условия сопряжения для функций ВПС можно записать в виде $Q_{0\xi}^{(-)}(0) = Q_{0\xi}^{(+)}(0)$. Понижение порядка в (16) с учетом условия убывания $Q_0^{(\pm)}(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ приводит к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(\pm)}}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \Big(\int_{\varphi^{(\pm)}(x^\star)}^{\varphi^{(\pm)}(x^\star) + Q_0^{(\pm)}} f\big(u, x^\star\big) du\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $\dfrac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\kappa}}\big(\mathcal{B}^{(-)}(x^\star)\big)^{1/2}$, $\dfrac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\kappa}}\big(-\mathcal{B}^{(+)}(x^\star)\big)^{1/2}$, так что в силу **[У3]** условия гладкого сопряжения $Q_{0\xi}^{(-)}(0) = Q_{0\xi}^{(+)}(0)$ удовлетворяются вне зависимости от величины $W^{(0\star)}$. Скорость дрейфа ВПС в нулевом порядке $W^{(0\star)}$ будет найдена из уравнений первого порядка. В дальнейшем решение задачи (16) при заданном значении $x^\star$ будем обозначать $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star)$. Если

$$f(u,x) = \gamma u\big(u^2 - U^2(x)\big), \tag{18}$$

то $\phi^{(-)}(x) = -U(x)$, $\phi^{(0)}(x) = 0$, $\phi^{(+)}(x) = U(x)$. Тогда условие баланса **[У3]** выполнено тождественно, уравнение (17) имеет гладкое решение

$$Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star) = U(x^\star)\big(\tanh\big(\xi/\theta(x^\star)\big) \mp 1\big),$$

где $\theta(x^\star) = \big(U(x^\star)\big)^{-1}\sqrt{2\kappa/\gamma}$, $x^\star$ любое в пределах (a, b).

Регулярную функцию первого порядка найдем из уравнения $f_u(\bar u_0, x)\bar u_1(x) = 0$, решение которого $\bar u_1(x) = 0$. Теперь проведем разложение по степеням ε левой и правой частей (14) до порядка $m = 1$ включительно, используя (10). Далее при расчетах первого порядка в этом разделе обозначаем $x^\star = x^{(1\star)}$. Пусть

$$Q^{(1\pm)}(\xi, x^\star) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star),$$

функция $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star)$ найдена из (16), причем второй аргумент равен теперь $x^{(1\star)}$, так что $x = x^\star + \varepsilon\xi$, $dx^\star/dt = W^{(1\star)}$, $W^{(1\star)} = W^{(0\star)} + \varepsilon W_1$. Зависимость функций переходного слоя $Q_0^{(\pm)}$ и $Q_1^{(\pm)}$ от $x^\star$ далее явно указывать не будем.

Введем оператор $\mathcal{D}\phi(\xi) = \phi\big(\tilde u^{(\pm)}(\xi), x^\star\big) - \phi\big(\bar u_0^{(\pm)}(x^\star), x^\star\big)$, где

$$\tilde u^{(\pm)}(\xi) \equiv \begin{cases} \phi^{(-)}(x^\star) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \le 0, \\ \phi^{(+)}(x^\star) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Так как $\tilde u^{(-)}(0) = \tilde u^{(+)}(0)$, то

$$\mathcal{D}f_u^{(\pm)}(\xi) = f_u\big(\tilde u^{(\pm)}(\xi), x^\star\big) - f_u\big(\bar u_0^{(\pm)}(x^\star), x^\star\big),\ \ \mathcal{D}f_x^{(\pm)}(\xi) = f_x\big(\tilde u^{(\pm)}(\xi), x^\star\big) - f_x\big(\bar u_0^{(\pm)}(x_0), x^\star\big).$$

Для $Q_1^{(\pm)}$ слева и справа от точки перехода, используя (16), получим краевые задачи

$$\begin{cases} \kappa\dfrac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi^2} - f_u\big(\tilde u(\xi), x^\star\big)Q_1^{(\pm)}(\xi) = q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star), \\ Q_1^{(\pm)}(0) = 0,\ \ Q_1^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

связанные условием непрерывного сшивания первых производных в точке перехода

$$\Big[Q_{1\xi}^{(\pm)}(\xi)\Big]\Big|_\ominus^\oplus + \Big[\bar u_{0x}^{(\pm)}(x^\star)\Big]\Big|_\ominus^\oplus = 0, \tag{20}$$

где $q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star) = -W^{(0\star)}\mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)} + K_1^{(\pm)}(\xi, x^\star)$. Здесь и далее $\mathcal{R}_j^{(\pm)} = Q_j^{(\pm)} - \mu Q_{j\xi\xi}^{(\pm)}$, $\mathcal{R}_{j\xi}^{(\pm)} = Q_{j\xi}^{(\pm)} - \mu Q_{j\xi\xi\xi}^{(\pm)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ $W^{(0\star)}(t) = dx^{(0\star)}/dt$,

$$K_1^{(\pm)}(\xi, x^\star) = \xi\bar u_{0x}^{(\pm)}(x^\star)\mathcal{D}f_u^{(\pm)}(\xi) + \xi\mathcal{D}f_x^{(\pm)}(\xi),$$

для пары функций $\bar v^{(\pm)}(x)$ обозначаем $\big[\bar v^{(\pm)}(x^\star)\big]\big|_\ominus^\oplus = \bar v^{(+)}(x^\star) - \bar v^{(-)}(x^\star)$, для пары функций $v^{(\pm)}(\xi)$ обозначаем $\big[v^{(\pm)}(\xi)\big]\big|_\ominus^\oplus = v^{(+)}(+0) - v^{(-)}(-0)$.

При выводе системы (19) мы использовали уравнения (16), которые верны для любого значения $x^\star$ независимо от значения $W^{(1\star)}$. Заметим, что величина W_1 не входит в задачу (19), так как в соответствии с (14) эта величина войдет только в слагаемые порядка ε^2 и более высокого.

Пусть оператор $\mathcal{J}^{(\pm)}\big[\phi\big]$ действует на функцию $\phi^{(\pm)}(\xi)$ по правилу

$$\mathcal{J}^{(\pm)}\big[\phi\big](\xi)=\kappa^{-1}Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi)\int_0^\xi\big(Q_{0\xi}^{(\pm)}(\eta)\big)^{-2}d\eta\int_\eta^{\pm\infty}Q_{0\xi}^{(\pm)}(\sigma)\phi^{(\pm)}(\sigma)d\sigma$$

при условии сходимости несобственных интегралов, что всегда будет иметь место в дальнейшем, это легко проверить, используя (17). Теперь решение $Q_1^{(\pm)}(\xi)$ задачи (19) можно записать в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi)=Q_1^{(\pm)}(0)\Psi^{(\pm)}(\xi)-J^{(\pm)}\big[q_1^{(\pm)}\big](\xi)=$$
$$=Q_1^{(\pm)}(0)\Psi^{(\pm)}(\xi)+W^{(0\star)}\mathcal{J}^{(\pm)}\big[\mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)}\big]-\mathcal{J}^{(\pm)}\big[\xi\mathcal{D}f_u(\xi)\bar{u}_{0x}^{\pm}\big(x^\star\big)+\xi\mathcal{D}f_x(\xi)\big], \quad (21)$$

где $\Psi^{(\pm)}(\xi)=\big(Q_{0\xi}^{(\pm)}(0)\big)^{-1}Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi)$. Из условия сшивания в точке $x^\star$ и из **[У2]** найдем $\Psi^{(+)}(0)=\Psi^{(-)}(0)=1$. Неизвестную пока величину $W^{(0\star)}$ найдем из условия сшивания первого порядка в точке перехода (20), которое вместе с (15) и (21), а также с учетом легко проверяемого тождества $\big(\mathcal{J}^{(\pm)}\big[\phi\big](\xi)\big)_\xi(0)=\kappa^{-1}\int_0^{\pm\infty}\Psi^{(\pm)}(\sigma)\phi^{(\pm)}(\sigma)d\sigma$ дает

$$\Big[Q_{1\xi}^{(\pm)}(\xi)\Big]\Big|_\ominus^\oplus=\Big[Q_1^{(\pm)}(\xi)\Psi_\xi^{(\pm)}(\xi)\Big]\Big|_\ominus^\oplus-\tfrac{1}{\kappa}\int_{-\infty}^\infty\Psi^{(\pm)}(\xi)q_1^{(\pm)}(\xi)d\xi.$$

Здесь и далее при вычислении интегралов по всей числовой прямой полагаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^{(\pm)}(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^0\phi^{(-)}(\xi)d\xi+\int_0^{+\infty}\phi^{(+)}(\xi)d\xi.$$

Обозначим

$$\mathcal{H}_1^{(\pm)}[\phi^{(\pm)}]=\pm\int_0^{\pm\infty}Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi)\phi^{(\pm)}(\xi)d\xi,\ \ \mathcal{H}_2^{(\pm)}[\phi^{(\pm)}]=\pm\int_0^{\pm\infty}Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}(\xi)\phi^{(\pm)}(\xi)d\xi,$$
$$\mathcal{H}_{1,2}\big[\phi^{(\pm)}\big]=\mathcal{H}_{1,2}^{(-)}\big[\phi^{(-)}\big]+\mathcal{H}_{1,2}^{(+)}\big[\phi^{(+)}\big].$$

Теперь найдем скорость дрейфа в нулевом порядке $W^{(0\star)}(x^\star)$:

$$W^{(0\star)}(x^\star)=\frac{\mathcal{H}_1^{(\pm)}\big[\xi\bar{u}_{0x}^{(\pm)}(x^\star)Df_u^{(\pm)}(\xi)+\xi Df_x^{(\pm)}(\xi)\big]}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2+\mu\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}-\frac{\kappa Q_{0\xi}^{(\pm)}(0)\big[\varphi_x^{(\pm)}(x)\big]\big|_{x^\star-0}^{x^\star+0}}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2+\mu\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}. \quad (22)$$

Корректность этого выражения обусловлена тем, что $\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2=\mathcal{H}_1\big[Q_{0\xi}^{(\pm)}\big]>0$, $\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2=\mathcal{H}_2\big[Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\big]>0$, и по постановке задачи $\mu>0$. Первое слагаемое в (22) определяется градиентом функции плотности источников, второе слагаемое определяется градиентом той же функции в точках ее корней. Решение $x^{(0\star)}(t)$ задачи Коши

$$dx^{(0\star)}\big/dt=W^{(0\star)}(x^{(0\star)}),\ \ x^{(0\star)}(0)=x_0^{(0\star)}, \quad (23)$$

может быть определено на конечном промежутке $[0,T]$, и тогда или $x^\star(T)=a$, или $x^\star(T)=b$, а это означает, что ВПС вошел в контакт с границей. Решение $x^{(0\star)}(t)$ также может быть определено на промежутке $[0,+\infty)$, и тогда $x^\star(t)\to x_{stop}$ (в первом порядке ВПС останавливается в некоторой внутренней точке).

Расчет для случая (18) после вычисления интегралов в (22) дает такое выражение:

$$W_0(x^\star)=-3\kappa\Big(1+\frac{4\mu}{5\theta^2}\Big)^{-1}\frac{U_x(x^\star)}{U(x^\star)}, \quad (24)$$

а для расчета координаты точки перехода $x^{(0\star)}(t)$, которую можно считать точкой нахождения ВПС, получим задачу Коши (23).

2.4. Второй порядок асимптотического ряда

Для построения алгоритма численного решения задачи с особыми точками нам потребуется второй и третий порядки асимптотического ряда. Регулярную функцию второго порядка найдем из уравнения $k\bar{u}_{0xx} - f_u(\bar{u}_0, x)\bar{u}_2 = 0$, так что $\bar{u}_2(x) = f_u\big(\bar{u}_0(x), x\big)^{-1} k\bar{u}_{0xx}$. Пусть

$$Q^{(2\pm)}(\xi, x^\star) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon^2 Q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star),$$

функция $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star)$ найдена из (16), $Q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star)$ из (19), причем входящая в (19) величина $W^{(0\star)}(x^\star)$ найдена из (22). Теперь $W^{(0\star)}(x^\star)$ можно рассматривать как известную функцию параметров задачи и координаты точки перехода. Далее при расчетах второго порядка обозначаем $x^\star = x^{(2\star)}$. Пусть

$$W^{(1\star)}(x^\star) = W^{(0\star)}(x^\star) + \varepsilon W_1(x^\star). \tag{25}$$

Соберем слагаемые порядка ε^2 и учтем (16), (19), (25). Для нахождения $Q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star)$ получим краевую задачу

$$\begin{cases} \Big(k\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - f_u\big(\tilde{u}(\xi), x^\star\big)\Big) Q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star) = q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star), \\ Q_2^{(\pm)}(0, x^\star) = -\bar{u}_2^{(\pm)}(x^\star), \;\; Q_2^{(\pm)}(\pm\infty, x^\star) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star) = -W_1\mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)} - W^{(0\star)}\mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)} + W^{(0\star)}\big(P_0^{(\pm)} - \mu P_{0\xi\xi}^{(\pm)}\big) + K_2^{(\pm)}$, $K_2^{(\pm)}(\xi, t)$ выражается через частные производные f до второго порядка, $P_0^{(\pm)}(\xi, x^\star) = \frac{\partial}{\partial x^\star} Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star)$.

Решение задачи (26) можно записать в явном виде:

$$Q_2^{(\pm)}(\xi) = Q_2^{(\pm)}(0)\Psi(\xi) - \mathcal{J}^{(\pm)}\big[q_2^{(\pm)}\big](\xi). \tag{27}$$

Условие гладкого сшивания дает скорость дрейфа первого приближения W_1:

$$W_1(x^\star) = \frac{\mathcal{H}_1\big[K_2\big] - W^{(0\star)}\mathcal{H}_1\mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)} + W^{(0\star)}\mathcal{H}_1\big(P_0^{(\pm)} - \mu P_{0\xi\xi}^{(\pm)}\big)}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}. \tag{28}$$

Координата точки перехода в первом порядке $x^{(1\star)}$ находится из задачи Коши

$$dx^{(1\star)}/dt = W^{(0\star)}\big(x^{(1\star)}\big) + \varepsilon W_1(x^{(1\star)}),\;\; x^{(1\star)}(0) = x_{00}, \tag{29}$$

причем $W^{(1\star)}(x^{(1\star)}) = W^{(0\star)}(x^{(1\star)}) + \varepsilon W_1(x^{(1\star)})$. Из **[У1]** следует, что правая часть (29) имеет равномерно ограниченную на $[a, b]$ производную по $x^{(1\star)}$), и поэтому удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, поэтому решение существует.

Пусть на всем промежутке $a < x < b$ верно $W^{(0\star)}(x^\star) \geq w_o > 0$. Записав решение (29) в явном виде, убедимся в том, что решение (29) при $\varepsilon \to +0$ стремится к решению (23) равномерно на $[0, T]$. Линеаризация (29) приводит к семейству задач Коши

$$\begin{cases} x_{0t} = W^{(0\star)}(x_0), \\ x_0(0) = x_{00}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1t} = x_1 W_x^{(0\star)}(x_0) + W_1(x_0), \\ x_1(0) = x_{10}, \end{cases}$$

первая из которых является автономной, вторая – линейной.

Найдем W_1 в явном виде для кубической неоднородности (18), (24). Вычисление интегралов показывает, что $W_1(x^\star) = 0$, поэтому $W^{(1\star)}(x^\star) = W^{(0\star)}(x^\star)$. Равенство нулю скорости дрейфа первого порядка связано с тем, что функция переходного слоя нулевого порядка $Q_0(\xi, x^\star)$ является нечетной от ξ при любом $x^\star$, скорость дрейфа первого порядка выражается в конечном счете в виде комбинации сходящихся несобственных интегралов от произведения нечетной функции и $Q_{0\xi}(\xi, x^\star)$ (которая является четной функцией). Это свойство скорости первого порядка, естественно, является специфическим и верно только для нечетной функции плотности источников, $f(-u, x) = f(u, x)$. Именно к такому классу относится функция (18). Поэтому для особой точки первого рода необходимо найти третий порядок асимптотического разложения.

2.5. Третий порядок асимптотики

Регулярная функция третьего порядка для случая $f_\varepsilon = 0$ равна $\bar{u}_3(x) = 0$. Для вычисления функций переходного слоя обозначим

$$Q^{(3\pm)}(\xi, x^\star) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon^2 Q_2^{(\pm)}(\xi, x^\star) + \varepsilon^3 Q_3^{(\pm)}(\xi, x^\star),$$
$$W^{(2\star)}(x^\star) = W^{(0\star)}(x^\star) + \varepsilon W^{(1\star)}(x^\star) + \varepsilon^2 W_2(x^\star),$$

$x^\star = x^{(3\star)}$, функции $Q_{0,1,2}^{(\pm)}(\xi, x^\star)$ выражаются (16), (21), (27), $W^{(0\star)}(x^\star)$, $W^{(1\star)}(x^\star)$ выражаются (22), (28). Найдем функцию переходного слоя $Q_3^{(\pm)}(\xi)$ из задачи, аналогичной (26). Условие гладкого сшивания в третьем порядке позволяет найти

$$W_2 = \frac{\mathcal{H}_1[K_3] - W^{(0\star)}\mathcal{H}_1[\mathcal{R}_{2\xi}^{(\pm)}] - W^{(1\star)}\mathcal{H}_1[\mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)}] + \mathcal{H}_1[P_1^{(\pm)} - \mu P_{1\xi\xi}^{(\pm)}]}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}, \tag{30}$$

$P_1^{(\pm)}(\xi, x^\star) = \frac{\partial}{\partial x^\star} Q_1^{(\pm)}(\xi, x^\star)$. Координату $x^{(2\star)}$ найдем из задачи Коши

$$dx^{(2\star)}/dt = W^{(0\star)}\big(x^{(2\star)}\big) + \varepsilon W^{(1\star)}\big(x^{(2\star)}\big) + \varepsilon^2 W_2\big(x^{(2\star)}\big), \;\; x^{(2\star)}(0) = x_{00}. \tag{31}$$

Точно так же убедимся в том, что линеаризация (31) при условии $W^{(0\star)}(x^\star) > 0$ приводит к семейству одной автономной и нескольких линейных задач Коши. Как и в [17], уравнения для dx_m/dt, $m \geq 1$, имеют одинаковую линейную часть.

Для кубической функции (18) выражение скорости второго порядка имеет вид

$$W_2(x^\star) = -C_2 \frac{k^2}{\gamma} \frac{U_{xxx}(x^\star)}{U^3(x^\star)} \frac{1}{1 + 4\mu/5\theta^2}. \tag{32}$$

Константа C_2 представляет собой комбинацию сходящихся несобственных интегралов от степенных и гиперболических функций, числовое значение этой величины $C_2 = 2,4674...$

Заметим, что для рассматриваемого нами случая $U_{xxx}(\hat{x}) < 0$ выражение $W_2(x^\star) > 0$, поэтому $W^{(2\star)}(x^\star) > 0$ в окрестности x_{stop}, это означает, что ВПС перейдет через особую точку и продолжит движение в том же направлении. Таким образом, в третьем порядке аппроксимации

$$dx^{(3\star)}/dt = W_0(x^{(3\star)}) + \varepsilon^2 W_2(x^{(3\star)}), \;\; x^{(3\star)}(0) = x_{00}. \tag{33}$$

Теорема 1. *В приближении третьего порядка найдется такая окрестность Ω точки x_{stop}, что при $U_x(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xx}(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) < 0$ и при любом*

$x_{00} < x_{\text{stop}}$, $x_{00} \in \Omega$, *что трижды непрерывно дифференцируемая функция* $x^\star(t)$ *является возрастающей на* $(0, T)$, *причем уравнение* $x^\star(t) = x_{\text{stop}}$ *имеет единственный простой корень* $t_1 > t_0$.

Так же как и в [6] (для квазилинейного параболического уравнения) и в [26], [17] (для уравнения с малым параметром) построим верхнее и нижнее решение задачи (1). Обоснование упорядоченности верхнего и нижнего решений проводится так же, как в [17], мы будем использовать для построения верхнего и нижнего решений порядок асимптотического разложения не менее трех и предположим, что $W_3(x^\star) \geq W_{30} > 0$ на $[a, b]$. Вместо принципа сравнения для эллиптического уравнения [6] мы используем обобщенный принцип сравнения для оператора (1), сформулированный и доказанный в [27]. Приведем только формулировки теорем.

Теорема 2. *Для любого порядка асимптотического разложения* $m \geq 3$ *существуют упорядоченные верхнее решение* $\beta(x, t, \varepsilon)$ *и нижнее решение* $\alpha(x, t, \varepsilon)$ *задачи (4) такие, что* $L[\alpha] > 0$, $L[\beta] < 0$, $\alpha(x, t, \varepsilon) < \beta(x, t, \varepsilon)$, *где* $L[u] = -\varepsilon^2 u_t + \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x)$.

Теорема 3. *Пусть начальная функция* $u^{(0)}(x, \varepsilon)$ *дважды дифференцируема, и* $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^{(0)}(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$. *Тогда существует единственное решение задачи (4), причем* $\alpha(x, t, \varepsilon) < u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, t, \varepsilon)$.

3. Построение адаптивной сетки для задачи в градиентной среде

Теперь мы можем сформулировать алгоритм численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП (4) на адаптивной сетке, используя наиболее эффективный метод априорного прогноза положения ВПС, основанный на использовании явных выражений для скорости ВПС.

Мы выделим три класса задач, для которых построение такого алгоритма существенно различается. В этом разделе мы рассмотрим (1) случай гладкой функции плотности источников и предположим, что выполнено достаточное условие прохождения ВПС всей области $[a, b]$ за конечное время:

$$W_0(x^\star) \geq \tilde{W}_0 > 0.$$

В двух последующих разделах мы рассмотрим более сложные случаи, когда (2) скорость $W_0(x^\star) = 0$ в некоторой точке промежутка $[a, b]$, и тогда без дополнительных мер нарушается условие ограниченности толщины области D_2, (3) формально найденная из (22) скорость $W_0(x^\star) = \infty$ в некоторой точке промежутка $[a, b]$, это может быть, если функция плотности источников разрывна или имеет неограниченную первую производную. Эти два случая мы будем называть соответственно особыми точками первого и второго рода контрастной структуры.

Для построения и обоснования адаптивной сетки используем методику верхнего и нижнего решения, разработанную для уравнения реакции-диффузии в серии работ [26], [17] и для уравнения КПП в работах [29], [30]. Построим верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$ [6], [17] задачи (4). Эти функции имеют вид бегущей квазиволны, как и точное решение (4). Детально методику такого построения мы описывать здесь не будем, так как сделаем это для более общего случая среды с кусочно-гладкой функцией плотности источников в разделе 6. Точка перехода для верхнего решения и $x^\star_\alpha$ для верхнего решения в первом порядке асимптотического ряда находятся из дифференциальных уравнений, аналогичных (23). Мы используем оценку скорости убывания функций $\delta_\beta = \beta(x,t,\varepsilon) - \phi^{(-)}(x)$ при удалении x влево от $x^\star_\beta$ и $\delta_\alpha = \phi^{(-)}(x) - \alpha(x,t,\varepsilon)$ при удалении x вправо от $x^\star_\alpha$, которая вытекает из (17) и из явного выражения для верхнего и нижнего решений, которое будет дано в разделе 6. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. *При выполнении условий* **[У1, 2, 3]** *найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для любого заданного порядка частичной суммы асимптотического ряда $n \geq 1$ и заданного порядка производной $m \geq 1$ найдется константа $C_2 > 0$ такая, что в области $D_{1,\beta} = \{a < x < x^\star_\beta - C_2\varepsilon\theta\}$ и в области $D_{3,\beta} = \{x^\star_\beta + C_2\varepsilon\theta < x < b\}$ все частные производные функции $\beta(x,t,\varepsilon)$ порядка до m включительно равномерно ограничены по модулю константой C_1. В области $D^{(-)}_{2,\beta} = \{x^\star_\beta - C_2\varepsilon\theta \leq x < x^\star_\beta\}$ и $D^{(+)}_{2,\beta} = \{x^\star_\beta < x \leq x^\star_\beta + C_2\varepsilon\theta\}$ все частные производные указанных порядков функции $\beta(x,t,\varepsilon)$ ограничены по модулю константой C_1/ε. Аналогичные утверждения верны для нижнего решения.*

Напомним, что мы постулировали в постановке задачи равномерную ограниченность всех частных производных функции f всех порядков, входящих в явное выражение для соответствующей частичной суммы асимптотического ряда.

Таким образом, мы выделяем области пятен КС D_1 и D_3, для которых можно составить и использовать сетку ω_1 с шагом $h_1 = \mathrm{const}$ (имеется в виду, что величина h_1 выбирается априорно по заданным значениям максимума модуля всех производных нужного порядка для построения сеточной аппроксимации дифференциального уравнения). При таком способе выбора шага в выражения для невязки разностной схемы будут входить только равномерно ограниченные частные производные, причем константа ограниченности не будет зависеть от значения параметра ε.

Мы выделяем также область ВПС D_2, ширина которой в растянутой переменной ξ равна $\tilde{C}_2$, в координате x равна $\tilde{C}_2\varepsilon$, причем константа $\tilde{C}_2$ не зависит от ε, но зависит от значения константы равномерной ограниченности производных функции плотности источников. Таким образом, в этой области мы можем построить сетку ω_2 с априорно выбранным шагом h_2, значение которого мы выберем так, чтобы гарантировать равномерную ограниченность невязки разностной схемы.

Нам придется также обеспечить сопряжение сеток ω_1 и ω_2. Без ограничения общности можно считать, что $h_2 = 2^{-k}h_1$, k натуральное число, которое можно выбрать так, чтобы удовлетворить требованиям к сеткам ω_1 и ω_2. В подобласти $\tilde{D}_1 \subset D_1$, расположенной внутри D_1 и примыкающей к D_2, мы расположим переходную сетку, которая обеспечит сопряжение. Переходная сетка будет иметь переменный шаг, причем эта переходная сетка будет являться объединением трехточечных частично перекрывающихся шаблонов, величина шага соседних шаблонов будет различаться ровно в 2 раза. Таким образом, общая трудоемкость расчета одного временного слоя имеет порядок $C' + C'' \log_2(\varepsilon^{-1})$.

Разумеется, можно легко сконструировать алгоритм АС, основанный на апостериорной оценке положения ВПС, которую можно дать, используя оценки для экспоненциального убывания функций ВПС.

4. Численное моделирование задач с особыми точками первого рода

Нередко возникающая в практически важных задачах разновидность градиентной среды порождает задачи с особыми точками первого рода.

Мы называем точку x_{stop} особой точкой первого рода, если скорость дрейфа ВПС в данной точке, найденная в нулевом порядке асимптотического разложения для задачи с несбалансированной неоднородностью (или найденная в первом порядке асимптотического разложения для задачи со сбалансированной неоднородностью), равна нулю. Мы покажем, что в этом случае (который, естественно, не соответствует сформулированным ранее достаточным условиям корректности метода АС) необходимо по-другому строить АС, чтобы обеспечить заданный порядок к аппроксимации в области пятен КС и в области ВПС, и одновременно сохранить оценку $C' + C'' \log_2(\varepsilon^{-1})$ для числа операций на одном временном слое.

В работе [30] построена теория прохождения фронта ВПС через особые точки КС. Решение (в неявной форме) уравнения (23) движения ВПС в нулевом порядке асимптотического разложения имеет вид $\int_{x_0}^{x} \big(W^{(0\star)}(x^\star)\big)^{-1} dx^\star = t - t_0$. Рассмотрим случай, в котором скорость нулевого порядка обращается в нуль в некоторой точке. Мы используем методику и результаты, полученные в [30]. При конструировании численного алгоритма решения начально-краевой задачи (4) важно иметь информацию о положении ВПС с гарантированной точностью, и это требование предполагает вычисление не только старшего, но и следующего первого по номеру отличного от нуля члена асимптотического ряда, что и было выполнено нами в разделах 2.4 и 2.5.

Для определенности рассмотрим только случай кубической правой части (18) и будем использовать (24) для скорости дрейфа. Пусть $U_x(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xx}(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) \neq 0$, тогда $W^{(0\star)}$ сохраняет знак в некоторой проколотой окрестности точки x_{stop}. Достаточно рассмотреть случай $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) < 0$, тогда $W^{(0\star)}(x^\star) > 0$ в некоторой окрестности точки x_{stop}, кроме самой точки x_{stop}, в которой $W^{(0\star)}(x^\star) = 0$. Вопрос о прохождении особой точки первого рода в нулевом порядке асимптотического разложения скорости дрейфа равносилен сходимости или расходимости $\int_{x_{\text{stop}}}^{x} dx^\star / W^{(0\star)}(x^\star)$. Без ограничения общности считаем $x_{\text{stop}} = 0$. Рассмотрим широко распространенную на практике степенную зависимость

$$U(x) = \begin{cases} U_0 - Cx^\alpha, \ x \geq 0, \\ U_0 + C(-x)^\alpha, \ x \leq 0 \end{cases}$$

в выражении (24) при $C > 0$, $\alpha > 1$, так что $W^{(0\star)}(0) = 0$ и $W^{(0\star)}(x) > 0$ при $x \neq 0$. Предполагаем, что $a < 0$, $b > 0$, и $U(x) > 0$ на $[a, b]$. Начальное положение ВПС выберем левее точки x_{stop}.

Для случая $\alpha \geq 2$ решение уравнения (24) можно оценить, используя метод дифференциальных неравенств [26]. Для любого $x_0^{(0\star)} < 0$ найдутся такие C_1 и C_2, $0 < C_1 < C < C_2$, что $X_\alpha(C_1, t) < x^{(0\star)}(t) < X_\alpha(C_2, t)$ при $t > t_0$, где

$$X_\alpha(C, t) = \begin{cases} -\Big(\big(-x_0^{(0\star)}\big)^{-(\alpha-2)} + C\alpha(\alpha-2)(t-t_0)\Big)^{-\frac{1}{\alpha-2}} \text{ при } \alpha \neq 2, \\ x_0^{(0\star)} e^{-C\alpha(t-t_0)} \text{ при } \alpha = 2, \end{cases} \tag{34}$$

Решение (24) существует на промежутке $t \in [t_0, +\infty)$, причем для всех t верно $x^{(0\star)}(t) < x_{\text{stop}}$, $x^{(0\star)}(t) \to -x_{\text{stop}} - 0$ при $t \to +\infty$.

Если же $1 < \alpha < 2$, то в соответствии с результатами [30], ВПС за конечное время пройдет окрестность такой особой точки первого рода. Таким образом, найдется такое $t_1 > t_0$, что точное решение уравнения (23) станет равно x_{stop} при $t = t_1$. Задача (23) имеет неединственное решение, решением будет теперь функция $x^{(0\star)}(t) < x_{\text{stop}}$

при $t < t_1$, $x^{(0\star)}(t) = x_{\mathrm{stop}}$ при $t_1 \le t \le t_2$, где $t_2 \ge t_1$, и $x^{(0\star)}(t) > x_{\mathrm{stop}}$ при $t > t_2$. Значение t_2 не определяется из уравнений нулевого порядка.

Таким образом, численная модель КС с особой точкой первого рода требует по крайней мере второго порядка выражения для скорости дрейфа. Для построения нижнего и верхнего решения мы используем теперь третий порядок частичной суммы асимптотического ряда, выражения (22), (24) и (30), (32) для скорости дрейфа ВПС в третьем порядке, уравнение (31), (33) для положения точки перехода. Теперь область мелкой сетки ω_2 выбирается с использованием выражения третьего порядка (33) и соответствующим образом построенных верхнего и нижнего решений, детальное описание построения которых дано в разделе 6.

5. Численное моделирование задач с особыми точками второго рода

Мы называем особой точкой второго рода точку $x^{(\infty)}$, в которой скорость дрейфа ВПС в нулевом (для несбалансированной задачи) и в первом (для сбалансированной задачи) порядке формально обращается в бесконечность. Так как в данной работе рассматривается задача со сбалансированной плотностью источников, то в соответствии с (24) эта ситуация возникает при $U_x(x) \to +\infty$ при $x \to x^{(\infty)}$, или при наличии точки разрыва первого рода функции с конечным значением скачка $U(x^{(\infty)}+0) - U(x^{(\infty)}-0) > 0$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u,x,\varepsilon), \\ u_x(a,t,\varepsilon) = u_a, \quad u_x(b,t,\varepsilon) = u_b, \quad u(x,0,\varepsilon) = \psi(x,\varepsilon), \end{cases} \tag{35}$$

$x \in (a,b)$, $t \in [0,T]$, $u(x,t,\varepsilon) \in C^1(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$, $\Omega = [a,b] \times [0,T]$, $\varepsilon > 0$, которая отличается от (4) наличием зависимости $f(u,x,\varepsilon)$.

Пусть функция плотности источников $f(u,x,\varepsilon)$ задана в виде

$$f(u,x,\varepsilon) = f_0(u,x) + \varepsilon f_1(u,x),$$

причем главная часть $f_0(u,x)$ есть кубическая функция (18), а в первом порядке

$$f_1(u,x) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad x < \hat{x}, \\ -2\gamma u U(x)\delta U, \quad \text{при} \quad x \ge \hat{x}, \end{cases}$$

δU – константа. Заметим, что тем самым мы будем строить обобщенное решение задачи (35). Точка сшивания $x^\star$ разделяет промежуток $[a,b]$ на два интервала: $G^{(-)} = \{a \le x < x^\star(t,\varepsilon)\}$, $G^{(+)} = \{x^\star(t,\varepsilon) < x \le b\}$. Задача (35) также расщепляется на две задачи аналогично (16), (19), (26), по левую сторону от $x^\star$, и по правую сторону $x^\star$. Однако теперь в зависимости от положения точки перехода одна из этих двух задач также расщепляется на две, левее и правее точки скачка $\hat{x}$. Формулы асимптотического разложения (10), (12) остаются верными. Регулярная функция первого порядка теперь не равна нулю:

$$\bar{u}^{(\pm)} = -\big(f_{0u}(\bar{u}_0^{(\pm)}(x),x)\big)^{-1} f_1(\bar{u}_0^{(\pm)}(x),x),$$

так что $\bar{u}_1^{(+)}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad x < \hat{x}, \\ \delta U, \quad \text{при} \quad x \ge \hat{x}, \end{cases} \qquad \bar{u}_1^{(-)}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad x < \hat{x}, \\ -\delta U, \quad \text{при} \quad x \ge \hat{x}. \end{cases}$

В случае разрывной функции первого порядка удобно записать представление сразу для суммы регулярной функции и функции переходного слоя:

$$\tilde{u}_i(\xi) = \begin{cases} \bar{u}_i^{(+)}(x^\star) + Q_i^{(+)}(\xi) \text{ при } \xi \geq 0, \\ \bar{u}_i^{(-)}(x^\star) + Q_i^{(-)}(\xi) \text{ при } \xi \leq 0, \quad i = 0, 1, 2 \dots . \end{cases}$$

Для $x^\star \leq \hat{x}$ получим краевую задачу вида (19), однако теперь функция плотности источников первого порядка $\tilde{f}_1 = f_1(\tilde{u}, x^\star)$ имеет вид

$$\tilde{f}_1 = \begin{cases} 0, \ 0 \leq \xi < \hat{\xi}, \\ -2\gamma U(x^\star)\delta U \tilde{u}, \ \ \xi \geq \hat{\xi} = (\hat{x} - x^\star)/\varepsilon, \end{cases}$$

Если же слой расположен справа от точки скачка $\hat{x}$, т.е. $x^\star \geq \hat{x}$, получим

$$\tilde{f}_1^{(-)} = \begin{cases} 0, \ \xi < \hat{\xi} = (\hat{x} - x^\star)/\varepsilon, \\ 2\gamma U(x^\star)\delta U \tilde{u}, \ \ \hat{\xi} \leq \xi \leq 0, \end{cases} \qquad \tilde{f}_1^{(+)} = -2\gamma U(x^\star)\delta U \tilde{u}, \ \ 0 \leq \xi \leq \infty.$$

Для кубической функции плотности источников получим выражение

$$W_0 = \frac{3}{1 + 4\mu/5\theta^2} \left[-\kappa \frac{U_x(x_0)}{U(x_0)} + 2^{-3/2}\sqrt{\kappa\gamma}\,\delta U \left(\tanh^2(\sqrt{\frac{\gamma}{2\kappa}} U \hat{\xi}) - 1 \right) \right], \qquad (36)$$

которое мы будем использовать для построения адаптивной сетки в окрестности особой точки второго рода. Верхнее и нижнее решения, так же как в разделе 2, строим в первом порядке частичной суммы асимптотического ряда, причем результаты раздела 2.5 гарантируют корректность построения АС, т.е. равномерную оценку точности и логарифмическую по ε оценку числа операций. Для обоснования мы получили также явные выражения следующих порядков асимптотического ряда, которые в данной работе не приводим.

6. Построение верхнего и нижнего решения

Мы используем для построения АС не саму формальную асимптотику некоторого порядка, а верхнее и нижнее решения, между которыми в соответствии с принципом максимума заключено точное решение. Для того, чтобы единообразно описать задачи с градиентной средой, задачи с особыми точками первого и второго рода, мы построим обобщенное верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и обобщенное нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$. Эти функции непрерывны и удовлетворяют условиям $\langle \mathbb{D}(\alpha), w \rangle > 0$, $\langle \mathbb{D}(\beta), w \rangle < 0$ почти всюду в области $x \in (a, b) \setminus \{x^\star\}$, и $t \in (0, T]$, а также граничным условиям $\alpha(a, t, \varepsilon) < u_a$, $\alpha(b, t, \varepsilon) < u_b$ почти всюду на $t \in [0, T]$, $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^0(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$ почти всюду на $x \in [a, b]$, и условиям излома в точках сшивания

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\alpha_m(x^\star_\alpha - 0, t, \varepsilon) > \tfrac{\partial}{\partial x}\alpha_m(x^\star_\alpha + 0, t, \varepsilon), \quad \tfrac{\partial}{\partial x}\beta_m(x^\star_\beta - 0, t, \varepsilon) < \tfrac{\partial}{\partial x}\beta_m(x^\star_\beta + 0, t, \varepsilon).$$

Здесь $\mathbb{D}$ есть оператор задачи (4), w пробная функция [28]. Мы построим $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ в виде модифицированных частичных сумм рядов (10), (12), так же как это было сделано в [17]:

$$\alpha_m(x, t, \varepsilon) = U_{m,\alpha} + \varepsilon^{m+1}\big(\tilde{u}_{(m+1),\alpha}(\xi_\alpha) - p + \Pi_{(m+1)\alpha}(\zeta_a) + \Pi_{(m+1)\alpha}(\zeta_b)\big),$$
$$\beta_m(x, t, \varepsilon) = U_{m,\beta} + \varepsilon^{m+1}\big(\tilde{u}_{(m+1),\beta}(\xi_\beta) + p + \Pi_{(m+1)\beta}(\zeta_a) + \Pi_{(m+1)\beta}(\zeta_b)\big),$$

где $p > 0$, $\xi_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{-1}(x - x^\star_{\alpha,\beta}(t, \varepsilon))$, $x^\star_{\alpha,\beta}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k x_k(t) + \varepsilon^m x_{(m)\alpha,\beta}(t)$.

Здесь $U_{m,\alpha,\beta}(x, t, \varepsilon)$ – частичные суммы, аналогичные (7) и (8),

$$U_{m,\alpha,\beta}(x, t, \varepsilon) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \big(\tilde{u}_{k,\alpha,\beta}(\xi_{\alpha,\beta}, t) + \Pi_{a,k,\alpha,\beta}(\zeta_a) + \Pi_{b,k,\alpha,\beta}(\zeta_b)\big),$$

$$\bar{u}^{(\pm)}_{k,\gamma} = \begin{cases} \bar{u}^{(-)}_{k,\gamma} & \text{при} \quad x \leq x^\star_\gamma, \\ \bar{u}^{(+)}_{k,\gamma} & \text{при} \quad x > x^\star_\gamma, \end{cases} \qquad Q^{(\pm)}_{k,\gamma} = \begin{cases} Q^{(-)}_{k,\gamma} & \text{при} \quad x \leq x^\star_\gamma, \\ Q^{(+)}_{k,\gamma} & \text{при} \quad x > x^\star_\gamma, \end{cases} \qquad \gamma = \alpha, \beta.$$

Модифицированные функции переходного слоя m–го порядка для верхнего решения $Q^{(\pm)}_{k,\beta}$, и $Q^{(\pm)}_{k,\alpha}$ для нижнего решения, $k=0,\dots,m$, найдем из задач

$$\begin{cases} \left(\kappa\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma{}^2} - f_{0u}\big(\tilde u^{(\pm)}(\xi_\gamma),x^\star,0\big)\right)\tilde u_{j,\gamma} = q^{(\pm)}_{j,\gamma}(\xi_\gamma), \\ \tilde u^{(\pm)}_{j,\gamma}(0) = -p_{j,\gamma},\ \ \tilde u^{(\pm)}_{j,\gamma}(\pm\infty)=0, \quad j=0\dots m+1, \end{cases} \tag{37}$$

где $q^{(\pm)}_{j,\gamma}(\xi,t) = -W_{j-1,\gamma}\big(Q^{(\pm)}_{0\xi_\gamma}(\xi_\gamma,t) - \mu Q^{(\pm)}_{0\xi_\gamma\xi_\gamma\xi_\gamma}\big) + K^{(\pm)}_{j,\gamma}$,

$$\tilde u_j(\xi_\gamma) = \begin{cases} \bar u^{(+)}_j(x^\star_\gamma) + Q^{(+)}_j(\xi_\gamma,t), & \xi_\gamma \ge 0, \\ \bar u^{(-)}_j(x^\star_\gamma) + Q^{(-)}_j(\xi_\gamma,t), & \xi_\gamma \le 0, \end{cases}$$

$$W_{j,\gamma} = \begin{cases} W_j, & j=0\dots m-1, \\ W_{j,\gamma}, & j=m, \end{cases} \qquad \tilde u^{(\pm)}_{j,\gamma} = \begin{cases} \tilde u^{(\pm)}_j, & j=0\dots m, \\ \tilde u^{(\pm)}_{j,\gamma}, & j=m+1, \end{cases}$$

$$K^{(\pm)}_{j,\gamma} = \begin{cases} K^{(\pm)}_j, & j=0\dots m, \\ K^{(\pm)}_{j,\gamma}, & j=m+1, \end{cases} \quad p^{(\pm)}_{j,\gamma} = \begin{cases} 0,\ j=0\dots m, \\ p, \gamma=\beta,\ j=m+1, \\ -p, \gamma=\alpha,\ j=m+1, \end{cases} \qquad \gamma=\alpha,\beta.$$

Выражения для $K_{m+1,\gamma}$ вычисляются с заменой ξ на ξ_γ и $\bar u_{(m+1)}$ на $\bar u_{(m+1)}+p_{m+1,\gamma}$, явные выражения приводить не будем, эти функции выражаются через правую часть и ее производные. Координату $x_{(m,\gamma)}$ найдем из системы $(m+1)$–го порядка:

$$dx_{(m,\gamma)}/dt = W^{(1)}_1 x_{(m,\gamma)} + W^{(0)}_{(m,\gamma)} + \sigma_\gamma, \quad x_{(m,\gamma)}(0) = \delta_\gamma, \tag{38}$$

$\sigma_\gamma = \begin{cases} \sigma, & \gamma=\alpha, \\ -\sigma, & \gamma=\beta, \end{cases}$ $\delta_\gamma = \begin{cases} \delta, & \gamma=\alpha, \\ -\delta, & \gamma=\beta, \end{cases}$ где $\sigma>0$ и $\delta>0$ константы,

$W^{(0)}_{(m,\gamma)} = \hat W^{(0)}_{(m,\gamma)}\big(\int_{-\infty}^{\infty}(Q^{(\pm)}_{0\xi_\gamma})^2 d\xi_\gamma + \mu\int_{\infty}^{\infty}(Q^{(\pm)}_{0\xi_\gamma\xi_\gamma})^2 d\xi_\gamma\big)^{-1}$,

$\hat W^{(0)}_{(m,\gamma)} = -W_{m-1}\mathcal{H}\big[\tilde u_{1,\xi_\gamma} - \mu\tilde u_{1,\xi_\gamma\xi_\gamma\xi_\gamma}\big] + \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(\pm)}_{0\xi_\gamma}\tilde f_u\big(\bar u_{m+1}(x^\star_\gamma) + p_{m+1,\gamma} + \dots\big)d\xi_\gamma + \dots$.

Константа σ обеспечивает нужный скачок производных, константа δ дает сдвиг начального положения слоя. Все $W^{(0)}_{j,\gamma}$ равномерно ограничены ввиду экспоненциального убывания функций переходного слоя, $Q^{(\pm)}_{j,\gamma}$ экспоненциально убывают. Коэффициенты $p>0$, $\sigma>0$ и $\delta>0$ обеспечивают также условия $dx^\star_\beta/dt < dx^\star/dt$, $dx^\star_\alpha/dt > dx^\star/dt$. Параметр $\delta>0$ гарантирует, что при $t\in[0,T]$ функции $x_{(m,\beta)}$ и $x_{(m,\alpha)}$ удовлетворяют условиям $x_{(m,\beta)} < 0 < x_{(m,\alpha)}$. Заметим, что $W^{(1)}_1$ в (38) равномерно ограничена на $[a,b]$.

7. Численное моделирование

Для численного моделирования квазилинейного уравнения ОКПП используем метод разностных схем с итерационным решением системы нелинейных уравнений на каждом временном слое. Мы используем метод адаптивных неоднородных сеток с переменным во времени шагом. Мы выбираем величину шага по пространственной и временной координате так, чтобы иметь возможность находить скорость дрейфа ВПС с точностью до шести верных значащих цифр после запятой.

Для нахождения численного решения начально-краевой задачи (4) для уравнения ОКПП был использован метод разностных схем [31], [32], [33], модифицированный в соответствии с идеями построения обобщенных решений [34]. Этот метод позволяет представить решение системы (4) как предел решения специально построенной нелинейной системы алгебраических уравнений при одновременном стремлении к нулю шага по временной координате и шага по пространственной координате.

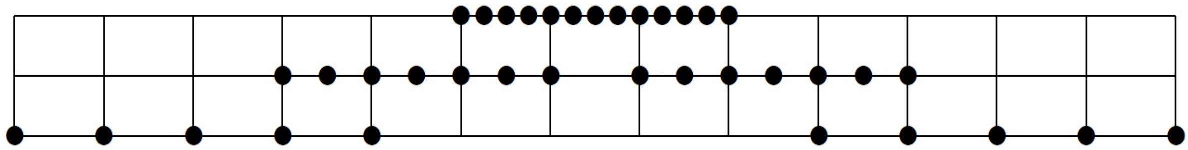


Рис. 1. Схематическое изображение одного временного слоя разностной схемы
Fig. 1. Schematic representation of a single time-direction layer of the model discrete approximation

Для построения разностной схемы мы используем шеститочечный шаблон на прямоугольной сетке. Пусть $\omega_{M,N}$ – сетка $x_n = a + nh_x$, $0 \le n \le N$, $t_m = mh_t$, $0 \le m \le M$, h_x, h_t – шаги по координатам x и t. $h_x = \frac{b-a}{N}$, $h_t = \frac{T}{M}$. Пусть $u_{m,n}$ – сеточное значение $u(x,t)$ для (4) в точке $x = x_n$ и $t = t_m$, Запишем нелинейную систему, аппроксимирующую (4) на шаблоне

(x_{n-1}, t_m)	(x_n, t_m)	(x_{n+1}, t_m)
(x_{n-1}, t_{m-1})	(x_n, t_{m-1})	(x_{n+1}, t_{m-1})

в виде

$$\frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{h_t} + V\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1} + u_{m-1,n+1} - u_{m-1,n-1})}{4h_x} - \\ - \frac{\mu}{2h_t}\frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h_x^2} - \frac{\mu}{2h_t}\frac{u_{m-1,n-1} - 2u_{m-1,n} + u_{m-1,n+1}}{h_x^2} = \\ = \kappa\frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{2h_x^2} + \kappa\frac{u_{m-1,n-1} - 2u_{m-1,n} + u_{m-1,n+1}}{2h_x^2} - \\ - \frac{1}{2}f(u_{m,n}, x_n) - \frac{1}{2}f(u_{m-1,n}, x_n), \quad (39)$$

с граничными и начальными условиями

$$u(m,0) - \alpha_a(u_{m,1} - u_{m,0)}/h_x = \beta_a, \;\; u(m,N) + \alpha_b(u_{m,N} - u_{m,N-1})/h_x = \beta_b, \quad (40)$$

$$u(0,n) = u^0(n). \quad (41)$$

Запишем кратко уравнение (39) в виде

$$A_1^{\ddagger}(x_{n-1}, t_m)u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{\ddagger}\big(u(x_n, t_m)\big) + A_3^{\ddagger}u(x_{n+1}, t_m) + \\ + A_1^{\dagger}(x_{n-1}, t_{m-1})u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{\dagger}\big(u(x_n, t_{m-1})\big) + A_3^{\dagger}u(x_{n+1}, t_{m-1}) = B_{m,n}. \quad (42)$$

Здесь A_1 и A_3 – числовые коэффициенты, определяемые только через параметры задачи и сетки, $A_2(u)$ функция, в определение которой входят параметры задачи и сетки и еще функция f. Теперь рассмотрим наложенные одна на другую сетки

$\omega^{(0)} = \omega_{M,N}$, $\omega^{(1)} = \omega_{M,N\cdot 2}$, ..., $\omega^{(K)} = \omega_{M,N\cdot 2^K}$,

причем $x_n^{(k)} = a + n\frac{h_x}{2^k}$, рис.1.

В соответствии с методикой Кутта–Мерсона [35], [36], мы выбираем шаг более подробной сетки в два раза меньше шага более грубой.

Пусть каждая из сеток определена на своем множестве индексов,

$\omega^{(0)}$ на множестве $n^{(0)} \in \{n_a^{(0)}, ..., n_b^{(0)} \bigcup n_c^{(0)}, ..., n_d^{(0)}\}$, $n_a^{(0)} = 0$, $n_d^{(0)} = N$,

$\omega^{(1)}$ на множестве $n^{(1)} \in \{n_a^{(1)}, ..., n_b^{(1)} \bigcup n_c^{(1)}, ..., n_d^{(1)}\}$, ...,

$\omega^{(J)}$ на множестве $n^{(J)} \in \{n_a^{(J)}, ..., n_b^{(J)} \bigcup n_c^{(J)}, ..., n_d^{(J)}\}$,

см. рис. 1, где показаны три наложенные сетки. Каждая сетка, кроме $\omega^{(K)}$, состоит из левой и правой группы узлов. Соответствие индексов обеспечивает следующее правило соответствия ячеек: $n_a^{(i)} = 2n_b^{(i-1)} - 2$, $n_d^{(i)} = 2n_c^{(i-1)} + 2$ для $k = 1, ..., K-1$. При этом два крайних справа узла левой группы узлов более грубой сетки совпадают с соответствующими узлами более мелкой сетки, соответствующие значения неизвестной функции также отождествляем: $x^{(j-1)}_{n_b^{(j-1)}-1} = x^{(j)}_{n_b^{(j)}-2}$, $u^{(j-1)}_{n_b^{(j-1)}-1} = u^{(j)}_{n_b^{(j)}-2}$, $x^{(j-1)}_{n_b^{(j-1)}} = x^{(j)}_{n_b^{(j)}}$, $u^{(j-1)}_{n_b^{(j-1)}} = u^{(j)}_{n_b^{(j)}}$, $x^{(j-1)}_{n_c^{(j-1)}} = x^{(j)}_{n_c^{(j)}}$, $x^{(j-1)}_{n_c^{(j-1)}+1} = x^{(j)}_{n_b^{(j)}+2}$. Теперь запишем уравнение (39) для каждого внутреннего узла каждой из сеток $\omega^{(0)}, ..., \omega^{(J)}$:

$$\begin{aligned} & A_1^{(j\ddagger)}(x_{n-1}^{(j)}, t_m)u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{(j\ddagger)}\big(u(x_n^{(j)}, t_m)\big) + A_3^{(j\ddagger)}u(x_{n+1}^{(j)}, t_m) + \\ & + A_1^{(j\dagger)}(x_{n-1}^{(j)}, t_{m-1})u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{(j\dagger)}\big(u(x_n^{(j)}, t_{m-1})\big) + A_3^{(j\dagger)}u(x_{n+1}^{(j)}, t_{m-1}) = B_{m,n}, \end{aligned} \quad (43)$$

$j \in \{0, ..., J\}$, $n \in \{n_a^{(i)} + 1, ..., n_b^{(i)} - 1\} \bigcup \{n_c^{(i)} + 1, ..., n_d^{(i)} - 1\}$. Неизвестными в этой системе являются $u(x^{(0)}_{n_a^{(0)}}, t_m)$,..., $u(x^{(0)}_{n_b^{(0)}-1}, t_m) = u(x^{(1)}_{n_a^{(1)}}, t_m)$, $u(x^{(1)}_{n_a^{(1)}+1}, t_m)$, $u(x^{(0)}_{n_b^{(0)}}, t_m) = u(x^{(1)}_{n_a^{(1)}+2}, t_m)$, ..., $u(x^{(0)}_{n_b^{(j)}-1}, t_m) = u(x^{(j)}_{n_a^{(j)}}, t_m)$, $u(x^{(1)}_{n_a^{(j)}+1}, t_m)$, $u(x^{(0)}_{n_b^{(j-1)}}, t_m) = u(x^{(j)}_{n_a^{(j)}+2}, t_m)$, ..., $u(x^{(J)}_{n_a^{(J)}}, t_m)$,...,$u(x^{(J)}_{n_d^{(J)}}, t_m)$, ..., $u(x^{(0)}_{n_d^{(0)}}, t_m)$. К системе (43) следует также добавить граничные условия (40) и (41). При записи системы уравнений (43) мы учитываем, что у примыкающих областей сеток двух соседних пространственных уровней разрешения имеется ровно две общие ячейки, в которых решение имеет, естественно одинаковые значения на этих сетках. Так как система (43, 40, 41) является нелинейной относительно u, был применен итерационный метод. Решение на m слое для k -й итерации представляем в виде $u_{m,n}^{(k)} = u_{m,n}^{(k-1)} + \delta u_{m,n}^{(k-1)}$, итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока $\max(|\delta u_{m,n}^{(k-1)}|) > \delta$, $\delta > 0$ заданное число (определяет точность результата), $\delta \ll 1$. Этот подход позволяет линеаризовать $f(u, x)$ с помощью метода Ньютона:

$$f(u_{m,n}^{(k)}, x_n) = f(u_{m,n}^{(k-1)} + \delta u_{m,n}^{(k)}, x_n) + f(u_{m,n}^{(k-1)}, x_n) + f_u(u_{m-1,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m,n}^{(k)} + R,$$

R есть остаточный член. При численной реализации остаточный член опускаем,

$$f(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) \simeq f(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) + f_u(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}.$$

Линейная система для одного итерационного шага имеет вид

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{h_t}(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)} - u_{m,n}) + \tfrac{V}{4h_x}(u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)} - u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + u_{m,n+1} - \\ & - u_{m,n-1}) - \tfrac{\mu}{h_x^2 h_t}[u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - 2(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}) + u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)} - \\ & - (u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1})] - \tfrac{k}{2h_x^2}[(u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - 2(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}) + u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \\ & + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)}) + (u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1})] = -f(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) - f_u(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Соберем отдельно слагаемые с $\delta u_{m+1}^{(k-1)}$:

$$A_{m,n}\delta u_{m,n-1}^{(k-1)} - B_{m,n}\delta u_{m,n}^{(k-1)} + C_{m,n}\delta u_{m,n+1}^{(k-1)} = -F_{m,n},$$

где коэффициенты $A_{m+1,n-1}$, $B_{m+1,n}$, $C_{m+1,n+1}$ являются известными, явные выражения не приводим. Далее реализуем метод прогонки [31] для $\delta u_{m+1}^{(k-1)}$. Во всех

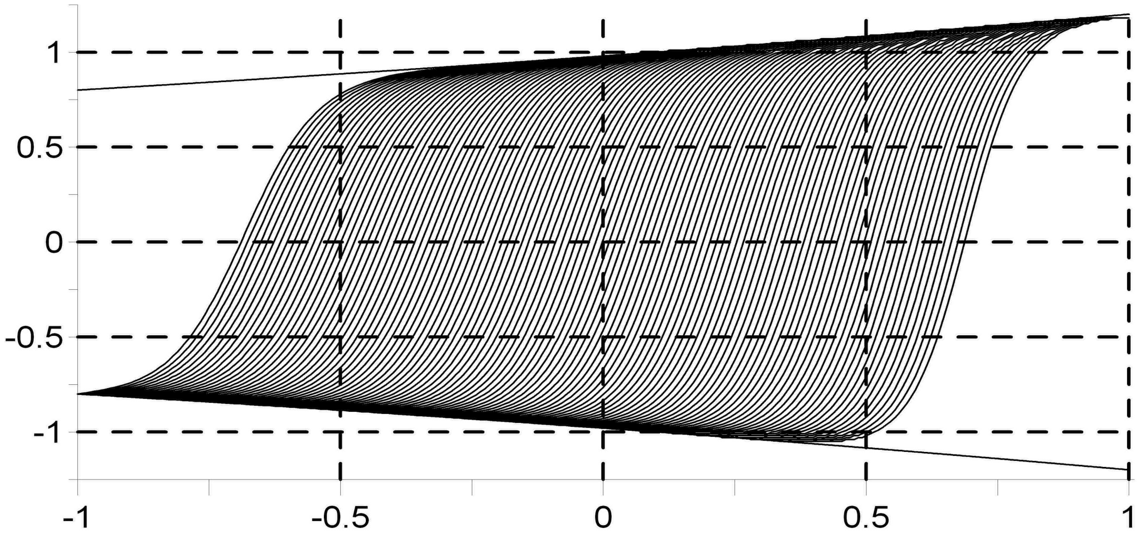


Рис. 2. Эволюция контрастной структуры для экспоненциального профиля уровня насыщения
Fig. 2. Contrasting structure evolution for the exponential saturation profile

приводимых далее результатах значение параметра критерия останова итерационного процесса ε выбрано так, чтобы были верны все значащие цифры приводимых числовых значений. Для графиков значение ε выбрано так, чтобы отличие точного результата от приводимого на графике не превышало видимой толщины линии графика. Оценка погрешности осуществлялась стандартными методами оценки точности решения разностной схемы итерационными методами, изложенными в книгах [31], [32], [33]. Были проведены также модельные расчеты для начально-краевых задач, для которых известно точное решение, в том числе для правой части вида $f(u,x) = \gamma(u-U_1)(u-U_2)(u-U_3)$ в однородном пространстве со сбалансированной и несбалансированной реакцией.

Мы провели сравнение рассчитанных аналитически в первых пяти порядках аппроксимации скорости дрейфа ВПС и скорости, найденной в численном эксперименте с использованием методики АС. Пусть $k = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$, $U(x) = \exp(-x/100)$. При этих значениях параметров толщина ВПС при $x_0 = 0$ равна $\theta = \varepsilon\sqrt{2k/\gamma U^2} = \frac{1}{\sqrt{500}}$. В соответствии с (22), точное значение $W_0 = 0.03$ при $x_0 = 0$. Измеренное в численном эксперименте $\hat{W}_0$ отличается от указанного теоретического значения не больше чем на 10^{-7} при $-10 < x_0 < 10$.

На рис. 2 показана эволюция контрастной структуры для экспоненциального профиля: $U(x) = c_1 e^{(x-c_2)/c_3}$, $k = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$, причем на промежутке $-1 < x < 1$ величина $U(x)$ возрастает от 0,8 до 1,2. Снимки сделаны через равные промежутки времени.

На рис. 3 показан пример численного решения задачи с наличием особых точек второго рода, показаны также функции $U(x)$ и $-U(x)$. Параметры задачи выбраны так, чтобы величина скорости градиентного дрейфа ВПС (22) и величина скорости в окрестности особой точки второго рода (точки скачка $U(x)$) были сравнимы. Можно заметить, что в окрестности каждой точки скачка скорость дрейфа ВПС

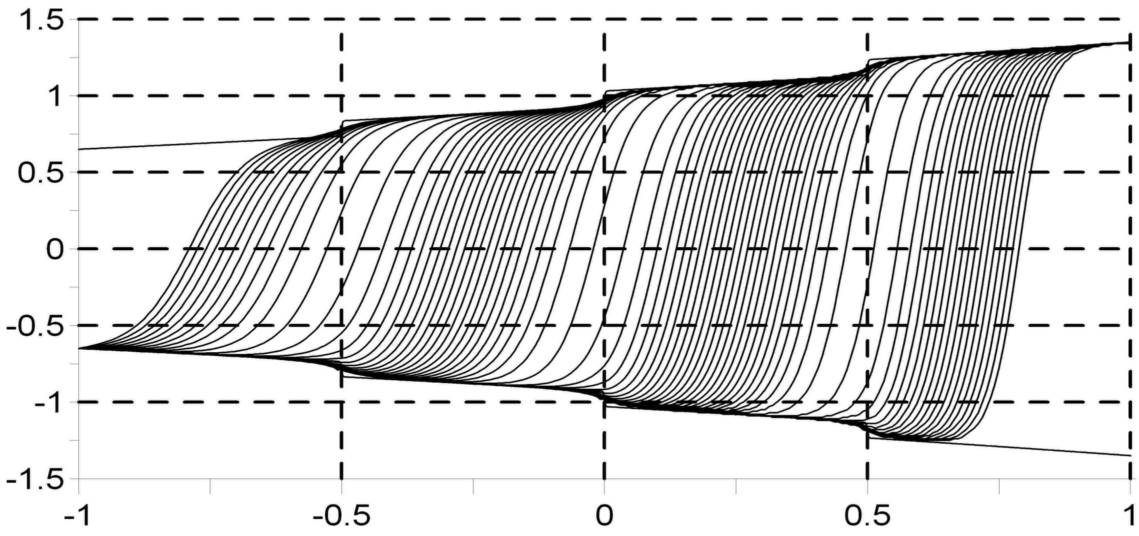


Рис. 3. Эволюция ВПС в среде с особыми точками второго рода
Fig. 3. The Interior Layer evolution for the case of first kind spesific points

увеличивается, но остается конечной, что полностью соответствует физической сути процесса реакции-адвекции-диффузии.

Таким образом, разработанный в данной статье метод адаптивных сеток для численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП с наличием внутреннего переходного слоя, а также для особенных случаев обращения скорости дрейфа первого порядка в нуль в некоторой точке промежутка (особая точка первого рода) и в бесконечность (особая точка второго рода) позволяет построить эффективный алгоритм решения практически важной задачи с априорно вычисляемой точностью.

Автор благодарен В. Ф. Бутузову и Н. Н. Нефедову за обсуждение результатов и ценные замечания.

Список литературы / References

[1] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, 2007; [Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Ju. D., *Linejnye i nelinejnye uravnenija sobolevskogo tipa*, Fizmatlit, 2007, (in Russian).]

[2] Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г., “О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **40**:8 (2000), 1237–1249; [Korpusov M.O., Pletner Ju.D., Sveshnikov A.G., “O kvazistacionarnyh processah v provodjashhih sredah bez dispersii”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki*, **40**:8 (2000), 1237–1249, (in Russian).]

[3] Корпусов М. О., Свешников А. Г., “О разрушении за конечное время решений начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа с псевдолапласианом”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **45**:2 (2005), 272–286; [Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., “O razrushenii za konechnoe vremja reshenij nachalno-kraevyh zadach dlja uravnenij psevdoparabolicheskogo tipa s psevdolaplassianom”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki*, **45**:2 (2005), 272–286, (in Russian).]

[4] Alshin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter, 2011.

[5] Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., "On blow up of generalized Kolmogorov–Pertovskii–Piskunov equation", *Nonlinear Analysis*, **71** (2009), 5724–5732.

[6] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum, New York, 1992.

[7] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., *Магнитные поля в астрофизике*, Ин-т хаотич. динам., Ижевск, 2006; [Zel'dovich Ja. B., Ruzmajkin A. A., Sokolov D. D., *Magnitnye polja v astrofizike*, In-t haotich. dinam., Izhevsk, 2006, (in Russian).]

[8] Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., "Промежуточные асимптотики в математической физике", *Успехи математических наук*, **26**:2(158) (1971), 115–129; [Barenblatt G. I., Zel'dovich Ja. B., "Promezhutochnye asimptotiki v matematicheskoj fizike", *Uspehi matematicheskih nauk*, **26**:2(158) (1971), 115–129, (in Russian).]

[9] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, 2-е изд., Наука, М., 1978; [Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N., *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics (Translations of Mathematical Monographs vol 55)*, American Mathematical Society, Providence, 1980, (in English).]

[10] Мартинсон Л. К., Малов Ю. И., *Дифференциальные уравнения математической физики*, Изд-во МГТУ им. Баумана, Moscow, 2002; [Martinson L. K., Malov Ju. I., *Differencialnye uravnenija matematicheskoj fiziki*, Izd-vo MGTU im. Baumana, Moscow, 2002, (in Russian).]

[11] Ikeda H., Mimura M., Tsuijikawa T., "Singular Perturbation Approach to Travelling Wave Solutions of the Hodgkin–Huxley Equations and Its Application to Stability Problems", *North–Holland Mathematics Studies*, **148** (1987), 1–73.

[12] Давыдов А. С., *Биология и квантовая механика*, Наукова думка, Киев, 1979; [Davydov A. S., *Biology and quantum mechanics*, Pergamon, Oxford, 1982, (in English).]

[13] Volpert V., Petrovskii S., "Reaction–diffusion waves in biology", *Physics of Life Reviews*, **6** (2009), 267–310.

[14] Kolmogorov A., Petrovsky I., Piskounoff N., "Etude de L'Equations de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique", *Bull Univ.Moskou, Ser. Internat. 1A*, 1937, 1–25.

[15] Ma W.X., Fuchssteiner B., "Explicit and exact solutions to a Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **31**:3 (1996), 329–338.

[16] Wei J., Yang J. Solutions with transition layers and spike in an inhomogeneous phase transition models, *J. Differential Equations*, **246** (2009), 3642–3667.

[17] Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н., "Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:2 (2010), 276–285; [Bozhevol'nov Ju.V., Nefedov N.N., "Dvizhenie fronta v parabolicheskoj zadache reakcija – diffuzija", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki*, **50**:2 (2010), 276–285, (in Russian).]

[18] Oran E., Boris J., *Numerical simulation of reactive flow*, Elsevier, N.Y., 1987.

[19] Thompson J., Warsi Z., Mastin C., *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*, Elsevier Sci. Publ. Co., 1985.

[20] Eiseman P.R., "Grid Generation for Fluid Mechanics Computations", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **17** (1985), 487–522.

[21] Kolbe N. et al., "A study on time discretization and adaptive mesh refinement methods for the simulation of cancer invasion", *Applied Mathematics and Computation*, **273** (2016), 353–376.

[22] Philip B. et al. Dynamic implicit 3D adaptive mesh refinement for non-equilibrium radiation diffusion, *Journal of Computational Physics*, **262** (2014), 17–37.

[23] Donat R. et al., "Well-Balanced Adaptive Mesh Refinement for shallow water flows", *Journal of Computational Physics*, **257-A** (2014), 937–953.

[24] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., "Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах", *Фундаментальная и прикладная математика*, **4**:3 (1998), 799–851; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., "Kontrastnye struktury v singuljarno vozmushhennyh zadachah.", *Fundamental'naja i prikladnaja matematika*, **4**:3 (1998), 799–851, (in Russian).]

[25] Быков А.А., Попов В.Ю., "О времени жизни одномерных нестационарных контрастных структур", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **309**:2 (1999), 280–288; [Bykov A.A, Popov V.Ju., "O vremeni zhizni odnomernyh nestacionarnyh kontrastnyh struktur", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki*, **309**:2 (1999), 280–288, (in Russian).]

[26] Нефедов Н.Н., "Нестационарные контрастные структуры в системе реакция – диффузия", *Математическое моделирование*, **4**:8 (1992), 58–65; [Nefedov N.N., "Nestacionarnye kontrastnye struktury v sisteme reakcija – diffuzija", *Matematicheskoe modelirovanie*, **4**:8 (1992), 58–65, (in Russian).]

[27] Кожанов А.И., "Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником", *Математические заметки*, **65**:1 (1999), 70–75; [Kozhanov A.I., "Nachal'no-kraevaja zadacha dlja uravnenij tipa obobshhennogo uravnenija Bussineska s nelinejnym istochnikom", *Matematicheskie zametki*, **65**:1 (1999), 70–75, (in Russian).]

[28] Kufner A, Fucik S., *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, Oxford, N.Y., 1980.

[29] Быков А.А., Нефедов Н.Н., Шарло А.С., "Контрастные структуры для квазилинейного уравнения соболевского типа с несбалансированной нелинейностью", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54**:8 (2014), 1270–1280; [Bykov A.A., Nefedov N.N., Sharlo A.S., "Kontrastnye struktury dlja kvazioinejnogo uravnenija sobolevskogo tipa s nesbalansirovannoj nelinejnost'ju", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki*, **54**:8 (2014), 1270–1280, (in Russian).]

[30] Быков А.А., Шарло А.С., "Нестационарные контрастные структуры в окрестности с особой точки", *Математическое моделирование*, **26**:8 (2014), 107–125; [Bykov A.A., Sharlo A.S., "Nestacionarnye kontrastnye struktury v okrestnosti s osoboj tochki", *Matematicheskoe modelirovanie*, **26**:8 (2014), 107–125, (in Russian).]

[31] Калиткин Н.Н., *Численные методы*, Наука, Moscow, 1978; [Kalitkin N.N., *Chislennye metody*, Nauka, M., 1978, (in Russian).]

[32] Самарский А.А., *Теория разностных схем*, Наука, Moscow, 1977; [Samarskij A.A., *Teorija raznostnyh shem*, Nauka, M., 1977, (in Russian).]

[33] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., *Численные методы*, Бином, Лаборатория знаний, 2003; [Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M., *Chislennye metody*, Binom, Laboratorija znanij, 2003, (in Russian).]

[34] Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая Школа, М., 1987; [Samarskij A. A., Lazarov R. D., Makarov V. L., *Raznostnye shemy dlja differencialnyh uravnenij s obobshhennymi reshenijami*, Vysshaja Shkola, Moscow, 1987, (in Russian).]

[35] Fox L., *Numerical solution of ordinary and partial differential equations*, Oxford Press, Oxford, 1962.

[36] Lance G.N., *Numerical methods for high speed computers*, London, 1960.

Bykov A.A., "Numerical Scheme for the Pseudoparabolic Singularly Perturbed Initial-boundary Problem with Interior Transitional Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 259–282.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-259-282

Abstract. Evolution equations are derived for the contrasting-structure-type solution of the generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov (GKPP) equation with the small parameter with high order derivatives. The GKPP equation is a pseudoparabolic equation with third order derivatives. This equation describes numerous processes in physics, chemistry, biology, for example, magnetic field generation in a turbulent medium and the moving front for the carriers in semiconductors. The profile of the moving internal transitional layer (ITL) is found, and an expression for drift speed of the ITL is derived. An adaptive mesh (AM) algorithm for the numerical solution of the initial-boundary value problem for the GKPP equation is developed and rigorously substantiated. AM algorithm for the special point of the first kind is developed, in which drift speed of the ITL in the first order of the asymptotic expansion turns to zero. Sufficient conditions for ITL transitioning through the special point within finite time are formulated. AM algorithm for the special point of the second kind is developed, in which drift speed of the ITL in the first order formally turns to infinity. Substantiation of the AM method is given based on the method of differential inequalities. Upper and lower solutions are derived. The results of the numerical algorithm are presented.

Keywords: singularly perturbed equation, interior transitional layer, finite difference method, asymptotic expansion

On the authors:
Alexey A. Bykov, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Department of Mathematics,
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow, 119991, Leninskiye gory, 1, b. 2, Russian Federation. E-mail: abkov@yandex.ru.

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project 16-01-00690-a.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 283–290
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 283–290

©Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-283-290

УДК 517.9

Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы

Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А.

получена 20 мая 2016

Аннотация. Рассматривается модельная краевая задача для стационарного сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция, возникающая при описании процессов переноса газовой примеси в экосистеме «лес–болото». Применение метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств позволяет построить асимптотику решения погранслойного типа, доказать существование решения с такой асимптотикой и его асимптотическую устойчивость по Ляпунову, как стационарного решения соответствующей параболической задачи с определением локальной области формирования решения погранслойного типа. Последнее имеет определенное прикладное значение, т.к. позволяет выявить решение, описывающее одно из наиболее вероятных состояний экосистемы. В заключительной части работы обсуждаются достаточные условия существования решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур).

Ключевые слова: уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры

Для цитирования: Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А., "Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 283–290.

Об авторах:
Давыдова Марина Александровна, orcid.org/0000-0002-9255-7353, канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: natasha@npanalytica.ru

Захарова Светлана Александровна, студентка, orcid.org/0000-0002-3421-1311
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №16-01-00437.
Построение асимптотического приближения решения и создание фазовых портретов выполнены С.А. Захаровой при поддержке гранта Российского Научного Фонда №14-14-00956.

1. Постановка задачи

Стационарное распределение концентрации парниковых газов в экосистеме «лес–болото» в предположении изотропности пространства по одной из горизонтальных координат имеет вид контрастной структуры с локализацией внутреннего переходного слоя в окрестности границы между лесополосой и болотом. Это явилось основанием для применения асимптотической теории контрастных структур к исследованию одномерной модельной краевой задачи для усредненного уравнения переноса газовой примеси

$$\varepsilon^2 u'' - \varepsilon A(x) u' = B(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \varepsilon \in (0, 1), \tag{1}$$

с граничными условиями вида

$$u'(-1, \varepsilon) = u'(1, \varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Здесь u – безразмерная концентрация газовой примеси, $A(x)$ – горизонтальная компонента безразмерной скорости ветра. В рамках данной модели функция взаимодействия с растительностью $B(u, x, \varepsilon)$ выбирается в виде

$$B(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)),$$

где функции $u = \varphi_i(x)$, $i = 1, 3$ интерпретируются как безразмерные концентрации парниковых газов над лесом и болотом.

2. Решение погранслойного типа

Вопрос о существовании контрастных структур в задаче (1)–(2) непосредственно связан с вопросом о существовании решений погранслойного типа в следующей задаче:

$$\varepsilon^2 u'' - \varepsilon A(x) u' = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)), \quad x \in (-1, 1), \tag{3}$$

$$u'(-1, \varepsilon) = g_1, \quad u(1, \varepsilon) = g_2. \tag{4}$$

Далее будем исследовать решение погранслойного типа задачи (3)–(4), которое близко к решению $u = \varphi_1(x)$ вырожденного уравнения $B(u, x, 0) = 0$ внутри интервала $(-1, 1)$, а в точках $x = \pm 1$ удовлетворяет граничным условиям (4). Для определённости будем считать, что $g_2 > \varphi_1(1)$.

Пусть выполнены условия:

(У1) *Функции $A(x)$ и $\varphi_i(x)$ – достаточно гладкие функции в области $x \in [-1, 1], i = 1, 2, 3$*

(У2) *Корни $u = \varphi_i(x)$ вырожденного уравнения таковы, что $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$.*
Порядок гладкости функций $A(x)$ и $\varphi_i(x)$ определяется порядком строящейся асимптотики.

Пусть $(A(1))^2 + 4(\varphi_2(1) - \varphi_1(1))(\varphi_2(1) - \varphi_3(1)) < 0$. Тогда в силу условия (У2) точки покоя $(\varphi_1(1), 0)$ и $(\varphi_3(1), 0)$ на фазовой плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ присоединенной системы

$$\begin{aligned} &d\widetilde{v}/d\rho_+ = A(1)\widetilde{v} + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_2(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)), \\ &d\widetilde{u}/d\rho_+ = \widetilde{v}, \quad -\infty < \rho_+ < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

классифицируются как точки покоя типа седла, а точка $(\varphi_2(1), 0)$ – как фокус.

Для существования решения погранслойного типа задачи (3)–(4) достаточно, чтобы прямая $\widetilde{u} = g_2$ на плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ пересекала сепаратрису, входящую в седло $(\varphi_1(1), 0)$ при $\rho_+ \to -\infty$ [1]. Соответствующее пересечение обеспечивает следующее условие на значение g_2 :

(У3) *Если* $A(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $\varphi_1(1) < g_2 \leqslant \varphi_3(1)$ *;*
если $A(1) > \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $g_2 > \varphi_1(1)$*;*
если $A(1) < \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $\varphi_1(1) < g_2 \leqslant \hat{u}$,
где $\hat{u}$ *– наибольшее из возможных значений таких, что* $\varphi_1(1) < \hat{u} < \varphi_3(1)$,
$\widetilde{v}(\hat{u}) = 0, \quad \hat{u} \neq \varphi_2(1)$.

В частности, пусть $B = u(u-1)(u-4)$. Положение сепаратрис в верхней полуплоскости фазовой плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ при различных значениях коэффициента $A(1)$ представлено на рис. 1–3.

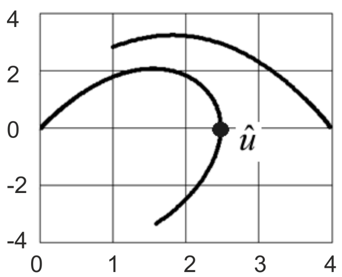


Рис. 1. $A(1) = 1$, $\widehat{u} = 2.5$

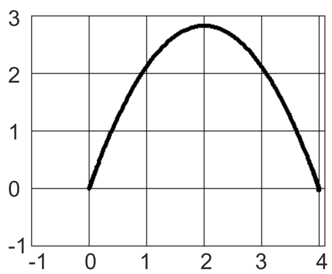


Рис. 2. $A(1) = \sqrt{2}$

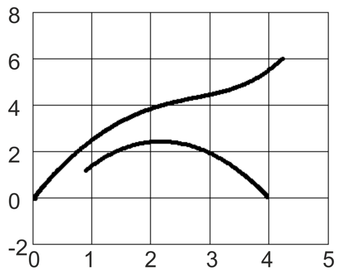


Рис. 3. $A(1) = 1.9$

Условие (У3) выполнено, если $0 < g_2 \leq 2.5$ при $A(1) = 1$, $0 < g_2 \leq 4$ при $A(1) = \sqrt{2}$, и, наконец $g_2 > 0$ при $A(1) = 1.9$.

В соответствии с методом пограничных функций [2] асимптотику погранслойного решения ищем в виде ряда:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u^+(\rho_+, \varepsilon) + \Pi u^-(\rho_-, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots, \quad \Pi u^\pm(\rho_\pm, \varepsilon) = \Pi u_0^\pm(\rho_\pm) + \varepsilon \Pi u_1^\pm(\rho_\pm) + \ldots,$$

$$\rho_- = (x+1)/\varepsilon, \quad \rho_+ = (x-1)/\varepsilon.$$

В нулевом приближении имеем:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_0^-/d\rho_-^2 - A(-1)\, d\Pi u_0^-/d\rho_- = B\left(\varphi_1(-1) + \Pi u_0^-, -1, 0\right), \\ &d\Pi u_0^-(0)/d\rho_- = 0, \quad \Pi u_0^-(+\infty) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$B\left(\varphi_1(-1) + \Pi u_0^-, -1, 0\right) = \Pi u_0^-\left(\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1) + \Pi u_0^-\right)\left(\varphi_1(-1) - \varphi_3(-1) + \Pi u_0^-\right).$$

Анализируя фазовый портрет системы, которая соответствует уравнению из задачи (7), видим, что задача (7) имеет тривиальное решение: $\Pi u_0^-(\rho_-) = 0$.

Аналогично получаем задачу для определения функции $\Pi u_0^+(\rho_+)$:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_0^+/d\rho_+^2 - A(1)\, d\Pi u_0^+/d\rho_+ = B\left(\varphi_1(1) + \Pi u_0^+, 1, 0\right), \\ &\Pi u_0^+(0) = g_2 - \varphi_1(1), \quad \Pi u_0^+(-\infty) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$B\left(\varphi_1(1) + \Pi u_0^+, 1, 0\right) = \Pi u_0^+\left(\varphi_1(1) - \varphi_2(1) + \Pi u_0^+\right)\left(\varphi_1(1) - \varphi_3(1) + \Pi u_0^+\right).$$

Если положить $\widetilde{u}(\rho_+) = \varphi_1(1) + \Pi u_0^+(\rho_+)$, то уравнению из задачи (8) будет соответствовать система (5). В силу условия (У3) существует решение задачи (8). В качестве решения выбираем монотонно изменяющуюся функцию от значения $g_2 - \varphi_1(1)$ при $\rho_+ = 0$ до нуля при $\rho_+ \to -\infty$, причем $\left|\Pi u_0^+(\rho_+)\right| \le Ce^{\chi_0\rho_+}, \quad \chi_0 > 0$.

Константы, значения которых не зависят от ε, здесь и далее будем обозначать буквой C.

При $n > 0$ для членов разложения $\Pi u^+(\rho_+)$ имеем линейные задачи:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_n^+/d\rho_+^2 - A(1)\, d\Pi u_n^+/d\rho_+ - \widetilde{B}_u^+(\rho_+)\Pi u_n^+ = f_n^+(\rho_+), \quad -\infty < \rho_+ < 0, \\ &\Pi u_n^+(0) = -\overline{u}_n(1), \quad \Pi u_n^+(-\infty) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\widetilde{B}_u^+(\rho_+) = (\widetilde{u} - \varphi_2(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)) + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)) + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_2(1))$, $f_n^+(\rho_+)$ – известные функции, причем $|f_n^+(\rho_+)| \le Ce^{\overline{\chi}_n^+\rho_+}, \quad \overline{\chi}_n^+ > 0$.

Поскольку решения задач (9) представимы в явном виде

$$\Pi u_n^+(\rho_+) = -\frac{\overline{u}_n(1)}{\widetilde{v}(0)}\widetilde{v}(\rho_+) - \widetilde{v}(\rho_+)\int\limits_{\rho_+}^{0} e^{A(1)s}\left(\widetilde{v}(s)\right)^{-2} ds \int\limits_{-\infty}^{s} e^{-A(1)\eta}\widetilde{v}(\eta)\, f_n^+(\eta)\, d\eta,$$

то для функций Πu_n^+ легко получить экспоненциальные оценки:

$$\left|\Pi u_n^+(\rho_+)\right| \le Ce^{\chi_n^+\rho_+}, \quad \chi_n^+ > 0.$$

При $n > 0$ относительно функций Πu_n^- имеем аналогичные задачи

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_n^-/d\rho_-^2 - A(-1)\, d\Pi u_n^-/d\rho_- - \overline{B}_u^-\Pi u_n^- = f_n^-(\rho_-), \quad 0 < \rho_- < +\infty, \\ &d\Pi u_n^-(0)/d\rho_- = -\overline{u}'_{n-1}(-1), \quad \Pi u_n^-(+\infty) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

решения которых представимы в виде:

$$\Pi u_n^- = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_1 - A(-1))\xi} f_n^-(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_1} \overline{u}'_{n-1}(-1) \right) e^{\lambda_1 \rho_-} + \Pi \widetilde{u}_n^-,$$

где $\Pi \widetilde{u}_n^- = -Y_1(\rho_-) \int\limits_0^{\rho_-} e^{-A(-1)\xi} Y_2(\xi) f_n^-(\xi)\, d\xi + Y_2(\rho_-) \int\limits_{+\infty}^{\rho_-} e^{-A(-1)\xi} Y_1(\xi) f_n^-(\xi)\, d\xi$ — частное решение неоднородного уравнения из задачи (10), $Y_k(\rho_-) = \frac{e^{\lambda_k \rho_-}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}$ — ФСР однородного уравнения, $\lambda_k = \frac{A(-1) \mp \sqrt{A^2(-1) + 4\overline{B}_u^-}}{2}$, $k = 1, 2$,
$\overline{B}_u^- = (\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1))(\varphi_1(-1) - \varphi_3(-1))$, $f_n^-(\rho_-)$ – известные функции.

Справедливы оценки: $|\Pi u_n^-(\rho_-)| \le C e^{\chi_n^- \rho_-}, \quad \chi_n^- < 0.$

Доказательство существования решения задачи (3)–(4) с асимптотикой (6) основано на идеях асимптотического метода дифференциальных неравенств (см., напр., [3, 4]). Верхнее $\beta_n(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha_n(x,\varepsilon)$ решения строятся в виде стандартных модификаций асимптотического разложения (6):

$$\beta_n(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n (\bar{u}_n(x) + \gamma) + \Pi u_0^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^+(\rho_+) + \ldots +$$
$$+ \varepsilon^n \Pi u_n^+(\rho_+) + \varepsilon^n \Pi_\beta u_n^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^-(\rho_-) + \ldots + \varepsilon^{n+1} \Pi u_{n+1}^-(\rho_-)$$
$$\alpha_n(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n (\bar{u}_n(x) - \gamma) + \Pi u_0^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^+(\rho_+) + \ldots +$$
$$+ \varepsilon^n \Pi u_n^+(\rho_+) + \varepsilon^n \Pi_\alpha u_n^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^-(\rho_-) + \ldots + \varepsilon^{n+1} \Pi u_{n+1}^-(\rho_-),$$

где $\gamma > 0$, а функции $\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(\rho_+)$ определяются как решения следующих задач:

$$d^2 \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ / d\rho_+^2 - A(1)\, d\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ / d\rho_+ - \widetilde{B}_u^+(\rho_+) \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ =$$
$$= \mp \gamma \Pi u_0^+ \left(3\Pi u_0^+ + 4\varphi_1(1) - 2(\varphi_2(1) + \varphi_3(1)) \right) \pm \Psi(\rho_+), -\infty < \rho_+ < 0,$$
$$\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(0) = 0, \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(-\infty) = 0.$$

Здесь $0 < \Psi(\rho_+) \le C_\Psi exp(\overline{\sigma} \rho_+)$, $\overline{\sigma} > 0$, $C_\Psi > 0$.

В результате проверки соответствующих дифференциальных неравенств [4] доказывается

Теорема. *Пусть выполнены условия (У1)–(У3). Тогда существует решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи* (3)–(4) *такое что*

$$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ *– частичная сумма* n*-го порядка асимптотического ряда* (6), C *– не зависящая от* ε *константа.*

Если рассмотреть параболическую задачу, соответствующую задаче (3)–(4), с начальной функцией $u^0(x)$ такой, что $\alpha_1(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \beta_1(x,\varepsilon)$, то её стационарное решение $u(x,\varepsilon)$ с асимптотикой (6) будет асимптотически устойчивым по Ляпунову, и, следовательно, единственным в указанной области [5]. Это утверждение легко доказать, если применить асимптотический метод дифференциальных неравенств к исследованию вышеупомянутой параболической задачи.

3. Контрастные структуры

Сформулируем основные условия существования контрастных структур в задаче (1)–(2).

Пусть $(A(x))^2 + 4B_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0$ при $x \in [-1, 1]$, выполнены условия (У1) , (У2) и условие

(У3^0) *Существует значение* $x_0 \in (-1, 1)$ *такое, что*

$$A(x_0) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\varphi_1(x_0) + \varphi_3(x_0) - 2\varphi_2(x_0))\,.$$

При описании контрастных структур существенную роль играет присоединенная система

$$\begin{aligned} &d\widetilde{v}/d\xi = A\,(x)\,\widetilde{v} + (\widetilde{u} - \varphi_1\,(x))\,(\widetilde{u} - \varphi_2\,(x))\,(\widetilde{u} - \varphi_3\,(x))\,,\\ &d\widetilde{u}/d\xi = \widetilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Определим функцию $H\,(x) = \widetilde{v}^+\,(0, x) - \widetilde{v}^-\,(0, x)$, $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta = O\,(\varepsilon)$, где $\widetilde{v}^{\mp}\,(\xi, x)$ – решения системы (11) с условиями $\widetilde{u}^{\mp}\,(\mp\infty, x) = \varphi_i\,(x)$, $i = 1, 3$, $\widetilde{v}^{\mp}\,(\mp\infty, x) = 0$. В силу условия (У3^0) при $x = x_0$ на фазовой плоскости системы (11) существует сепаратриса, соединяющая седла $(\varphi_1(x_0), 0)$ и $(\varphi_3(x_0), 0)$. Следовательно, $H\,(x_0) = 0$.

(У4). *Пусть* $H'(x_0) > 0$.

Асимптотическое разложение решения $u(x,\varepsilon)$ типа контрастной структуры получается в результате C^1 – сшивания двух асимптотик погранслойного типа в точке $x = \widehat{x}$:

$$\begin{aligned} &u^- = \overline{u}^-\,(x,\varepsilon) + Qu^-\,(\xi,\varepsilon) + \Pi u^-\,(\rho_-,\varepsilon)\,, x \in [-1, \widehat{x})\,,\\ &u^+ = \overline{u}^+\,(x,\varepsilon) + Qu^+\,(\xi,\varepsilon) + \Pi u^+\,(\rho_+,\varepsilon)\,, x \in (\widehat{x}, 1]\,, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\xi = (x - \widehat{x})/\varepsilon,$$

где $\overline{u}^-\,(x,\varepsilon) = \varphi_1\,(x) + \varepsilon\overline{u}_1^-\,(x) + \ldots, \overline{u}^+\,(x,\varepsilon) = \varphi_3\,(x) + \varepsilon\overline{u}_1^+\,(x) + \ldots$ – регулярные части разложений, $\Pi u^{\pm}\,(\rho_\pm,\varepsilon) = \Pi u_0^{\pm}\,(\rho_\pm) + \varepsilon\Pi u_1^{\pm}\,(\rho_\pm) + \ldots$ – функции, описывающие пограничные слои в окрестности точек $x = \pm 1$, $Qu^{\pm}\,(\xi,\varepsilon) = Qu_0^{\pm}\,(\xi) + \varepsilon Qu_1^{\pm}\,(\xi) + \ldots$ – функции, описывающие пограничные слои в окрестности точки $x = \hat{x}$, положение которой определяется условием $u\,(\hat{x},\varepsilon) = \varphi_2\,(\hat{x})$, а значение ищется в виде

$$\hat{x} = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots, \tag{13}$$

где в качестве главного члена выбирается значение x_0, определяемое условием (У3^0).

Построение рядов (12) выполняется в соответствии с п. 2. Коэффициенты x_i ряда (13) определяются из условия гладкого сшивания асимптотик при $x = \widehat{x}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}&\left(du^+(\hat{x})/dx - du^-(\hat{x})/dx\right) = H\left(\hat{x}\right) + \\ &+ \varepsilon\left(\varphi_3'\left(\hat{x}\right) - \varphi_1'\left(\hat{x}\right) + dQu_1^+(0,\hat{x})/d\xi - dQu_1^-(0,\hat{x})/d\xi\right) + \ldots\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (14), с учетом явного вида функций $Qu_k^{\pm}$, получаем последовательность разрешимых, в силу условия (У4), уравнений относительно x_i, $i > 0$:

$$H'(x_0)x_i + G_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\right) = 0,$$

где $G_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\right)$ – известные функции.

Список литературы / References

[1] Давыдова М.А., “Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Математические заметки*, **98**:6 (2015), 45–55; English transl.:M. A. Davydova, “Existence and Stability of Solutions with Boundary Layers in Multidimensional Singularly Perturbed Reaction-Diffusion-Advection Problems”, *Math. Notes*, **98**:6 (2015), 853–864.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil’eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[3] Нефедов Н.Н., “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных снгулярно возмущенных задач с внутренними слоями”, *Дифференц. уравнения*, **31**:7 (1995), 1132–1139; English transl.: Nefedov N.N., “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1077–1085.

[4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова*, **268** (2010), 258–283; English transl.: Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., “Singularly perturbed problems with boundary and internal layers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **268** (2010), 258–283.

[5] Pao C.V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press. New York, London, 1992, 777 pp.

Davydova M.A. , Levashova N.T., Zakharova S.A., "The Asymptotical Analysis for the Problem of Modeling the Gas Admixture in the Surface Layer of the Atmosphere", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 283–290.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-283-290

Abstract. In the present work the model boundary value problem for a stationary singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation arising at the description of gas impurity transfer processes in an ecosystem ”forest – swamp” is considered. Application of a boundary functions method and an asymptotic method of differential inequalities allow to construct an asymptotics of the boundary layer type solution, to prove the existence of the solution with such an asymptotics and its asymptotic stability by Lyapunov as the stationary solution of the corresponding parabolic problem with the definition of local area of boundary layer type solution formation. The latter has a certain importance for applications, since it allows to reveal the solution describing one of the most probable conditions of the ecosystem. In the final part of the work sufficient conditions for existence of solutions with interior transitional layers (contrast structures) are discussed.

Keywords: reaction-diffusion-advection type equations, contrast structures

On the authors: Davydova Marina Aleksandrovna, orcid.org/0000-0002-9255-7353, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Levashova Natalia Timurovna, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: natasha@npanalytica.ru

Zakharova Svetlana Aleksandrovna, orcid.org/0000-0002-3421-1311, student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by Russian fund of basic researches, project 16-01-00473
The building of the asymptotic approach of the solution and the phase portraits creation were made by S.A. Zakharova with support of Russian Science Foundation 14-14-00956.

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 291–297
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 291–297

©Ershova T. Ya., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-291-297
UDC 519.624.2

Convergence of the Difference Solutions of a Dirichlet Problem With a Discontinuous Derivative of the Boundary Function for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equation

Ershova T. Ya.

Received May 20, 2016

Abstract. We consider a Dirichlet problem for a singularly perturbed convection-diffusion equation with constant coefficients in a rectangular domain in the case when the convection is parallel to the horizontal faces of the rectangular and directed to the right while the first derivative of the boundary function is discontinuous on the left face. Under these conditions the solution of the problem has a regular boundary layer in the neighborhood of the right face, two characteristic boundary layers near the top and bottom faces, and a horizontal interior layer due to the non-smoothness of the boundary function. We show that on the piecewise uniform Shishkin meshes refined near the regular and characteristic layers, the solution given by the classical five-point upwind difference scheme converges uniformly to the solution of the original problem with almost first-order rate in the discrete maximum norm. This is the same rate as in the case of a smooth boundary function. The numerical results presented support the theoretical estimate. They show also that in the case of the problem with a dominating interior layer the piecewise uniform Shishkin mesh refined near the layer decreases the error and gives the first-order convergence.

The article is published in the author's wording.

Keywords: convection-diffusion, singular perturbation, interior layer, uniform convergence

For citation: Ershova T. Ya., "Convergence of the Difference Solutions of a Dirichlet Problem With a Discontinuous Derivative of the Boundary Function for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 291–297.

On the author:
Ershova Tatiana Yakovlevna, orcid.org/0000-0003-4442-1651, PhD,
M.V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, str. 52, Moscow, 199991, Russia,
e-mail: ersh@cs.msu.ru

Setting the problem

We consider a Dirichlet problem for singularly perturbed convection-diffusion equation in a rectangle domain $\Omega = (0,1) \times (-1,1)$ with the boundary $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} Lu \equiv -\,\varepsilon\triangle u + a\,\partial u/\partial x + qu = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \quad \varepsilon \in (0,1], \\ a = const > 0, \qquad q = const > 0, \\ u = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Assume that $g(x,y)$ on $\partial\Omega \setminus \{(0,0)\}$ and $f(x,y)$ on Ω are sufficiently smooth and

$$\frac{\partial g_1(y)}{\partial y}\Big|_{y=+0} \neq \frac{\partial g_1(y)}{\partial y}\Big|_{y=-0} \tag{2}$$

where $g_1(y) = g(0,y)$. It is known that a solution of the problem for a small ε can have a regular layer $O(\varepsilon)$ wide near the boundary $x = 1$, through which the flow is leaving the domain; the characteristic layers of the wideness $O(\sqrt{\varepsilon})$ near the boundaries $y = \pm 1$ parallel to the flow; corner layers near the vertices at the exit of the flow, and also corner singularities because no compatibility conditions at the corners of the domain are assumed.

1. Difference problem

In the domain Ω we define the following mesh $\overline{\Omega}^h$ as a direct product of one-dimensional meshes $\overline{\omega}_1^h(x)$ and $\overline{\omega}_2^h(y)$, where $\overline{\omega}_1^h(x) = \{x_i \,|\, 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1\}$, $\overline{\omega}_2^h(y) = \{y_i \,|\, -1 = y_{-N} < y_{-N+1} < \cdots < y_{-1} < y_0 = 0 < y_1 < \cdots < y_N = 1\}$.

Defining the mesh domain, we shall use a piece-wise uniform Shishkin mesh refining near the boundary $x = 1$ where the solution has a regular layer, and near the boundaries $y = \pm 1$, where it can have characteristic layers.

We introduce the following notation: steps of the mesh $h_{1,i} = x_i - x_{i-1}$, $h_{2,j} = y_j - y_{j-1}$ and $\hbar_{k,i} = (h_{k,i} + h_{k,i+1})/2$; divided diferences $v_{\bar{x},i,j} = (v_{i,j} - v_{i-1,j})/h_{1,i}$, $v_{x,i,j} = v_{\bar{x},i+1,j}$ and $v_{\hat{x},i,j} = (v_{i+1,j} - v_{i,j})/\hbar_{1,i}$; boundaries of the mesh domain $\partial\Omega^h = \overline{\Omega}^h \cap \partial\Omega$.

We approximate the problem for $u(x,y)$ by the classical five-point difference scheme for $u^h_{i,j}$ on the mesh $\overline{\Omega}^h$:

$$\begin{aligned} L^h u^h_{i,j} \equiv -\varepsilon(u^h_{\bar{x}\,\hat{x}} + u^h_{\bar{y}\,\hat{y}})_{i,j} + a\,u^h_{\bar{x}\,i,j} + qu^h_{i,j} = f(x_i,y_j), \qquad (x_i,\, y_j) \in \Omega^h = \overline{\Omega}^h \cap \Omega, \\ u^h_{i,j} = g(x_i,y_j), \qquad (x_i,y_j) \in \partial\Omega^h. \end{aligned} \tag{3}$$

Observe that the maximum principle holds for the difference problem in question.

For sufficiently smooth on the faces of the rectangle boundary functions the problem was considered by several authors, in particular in [1], [2], [3]. In the case when no compatibility conditions, except for minimal ones, are assumed in the corners of the domain in [2] on the piece-wise uniform Shishkin meshes refining near the regular and the characteristic layers it was obtained the convergence of the mesh solution to the solution of the original problem with rate $O(N^{-1}\ln^2 N)$ uniformly in ε (N is the number of the points in the mesh in every direction).

For the singularly perturbed convection–diffusion equation in a half-plane the problem with non-smooth boundary conditions, when there is a discontinuity of the boundary function or its derivatives, is considered in [4] where the estimates for the solution and itsderivatives depending on the parameter ε are given. We use these estimates, and also rely on the results of [2] and [3].

Below c denotes a positive constant independent of ε and N.

2. Decomposition of the solution

To begin with we single out a solution $u_1(x, y)$ related to the singularity of the boundary condition $g_1(y)$. For this purpose we define the function $g_1^*(y) = g_1(y) * \eta(y)$ on the line $\mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x = 0\}$ where

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leqslant 1/3, \\ 0, & |y| \geqslant 2/3, \end{cases} \qquad \eta(y) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

We consider a bounded solution $u_1^*(x, y)$ of the problem

$$Lu_1^* \equiv -\varepsilon \triangle u_1^* + a\,\partial u_1^*/\partial x + qu_1^* = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad u_1^*(0, y) = g_1^*(y) \tag{4}$$

in the half-plane $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y), x > 0\}$. To estimate the solution $u_1^*(x, y)$ we use the results of [4]. The main theorem of this work in particular states the following. Let $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, and let $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) denote the interval $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$,).

Theorem 1. *Let $g_1^*(y) \in H^7(\mathbb{R}_+ \bigcup \mathbb{R}_-)$. Then there exists a constant c such that for $0 < \varepsilon < 1$ and $m = 0, 2, 3,\ \ n = 0, 1, 2, 3$ the following inequalities hold for the solution $u_1^*(x, y)$:*

$$\begin{aligned}
|D_x\, u_1^*(x, y)| &\leqslant c(1 + \ln r), \\
|D_x^m\, u_1^*(x, y)| &\leqslant c(1 + r^{-m+1}) \quad \textit{for} \ \ r \leqslant 2\varepsilon, \\
|D_y^n\, u_1^*(x, y)| &\leqslant c(1 + r^{-n+1}) \quad \textit{for} \ \ r \leqslant 2\varepsilon, \\
|D_x^m\, u_1^*(x, y)| &\leqslant c(1 + \sqrt{\varepsilon}\, r^{-m+1/2}\, e^{-cy^2/\varepsilon r} + r^{-m+1}\, e^{-cr/\varepsilon}) \qquad \textit{for} \ \ 2\varepsilon \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \\
|D_y^n\, u_1^*(x, y)| &\leqslant c(1 + \varepsilon^{(-n+1)/2}\, r^{(-n+1)/2}\, e^{-cy^2/\varepsilon r} + r^{-n+1}\, e^{-cr/\varepsilon}) \ \ \textit{for} \ \ 2\varepsilon \leqslant r \leqslant \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

We represent the solution $u(x, y)$ of the original problem in the form $u = u_1 + u_2$ where u_1 is the restriction of the solution $u_1^*(x, y)$ to $\overline{\Omega}$ and $u_2(x, y)$ is a solution of the problem

$$\begin{aligned}
-\,\varepsilon \triangle u_2 + a\,\partial u_2/\partial x + qu_2 &= f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \\
u_2(x, y)|_{\partial\Omega} &= (g(x, y) - u_1(x, y))|_{\partial\Omega}.
\end{aligned}$$

The boundary function of the solution $u_2(x, y)$ has no singularity on $x = 0$.

3. The estimate of the convergence rate of the mesh solution

According to the decomposition $u = u_1 + u_2$ we write down the difference solution as $u^h = u_1^h + u_2^h$ where every u_k^h is a solution of the problem

$$L^h u_{k,i,j}^h = Lu_k(x_i, y_j), \qquad (x_i, y_j) \in \Omega^h, \qquad u_{k,i,j}^h|_{\partial\Omega^h} = u_k(x_i, y_j)|_{\partial\Omega^h}. \tag{5}$$

It is our main task to investigate the convergence rate of the difference solution u_1^h to $u_1(x,y)$.

The approximation error of the equation on the solution $u_1(x,y)$ is equal to $\Psi_{i,j}(u_1) = L^h(u_{1,i,j} - u_{1,i,j}^h)$. The estimate $\Psi_{i,j}(u_1)$ is obtained from the estimates of the the solution $u_1(x,y)$ and some additional inequalities (similar to how it was done in [2]):

$$|L^h(u_1 - u_1^h)|_{i,j} = |\Psi_{i,j}(u_1)| \leqslant c\,\left(\varepsilon(h_{1,i+1}\, r_{i,j}^{-2} + h_{2,j+1}\, r_{i,j}^{-2}) + h_{1,i}\, r_{i,j}^{-1} + h_{2,j+1}\, r_{i,j}^{-1}\right). \quad (6)$$

For the estimation of the $|u_1 - u_1^h|$ we use the barrier function introduced by V.B.Andreev in [2]: $B(r',\varphi') = \ln\dfrac{r'}{H} + (\pi/2 - \varphi')(\pi/2 + \varphi' + 1) + 1$ where $r' = \sqrt{x'^2 + y^2}$, $\varphi' = \arctan\dfrac{y}{x'}$, $x' = x + bH$, $b \geqslant 1$. The following lemma is an analog of the Theorem 1 of that work for the mesh we consider here.

Lemma 1. *If the function $w_{i,j}^h$ satisfies the following inequalities*

$$|L^h w_{i,j}^h| \leqslant c\,(\varepsilon r_{ij}^{-2} + r_{ij}^{-1} + 1) \quad \text{for} \quad (x_i,y_j) \in \Omega^h, \qquad |w_{i,j}^h| \leqslant c \quad \text{for} \quad (x_i,y_j) \in \partial\Omega^h,$$

then the estimate $|w_{i,j}^h| \leqslant c \ln N$ is fulfilled in the whole domain $\overline{\Omega}^h$.

The following estimate of the error of the solution u_1^h of the difference problem follows from (6) and Lemma 1 :

Lemma 2. *Let $u_1(x,y)$ be the above defined restriction of the solution of the problem (4) to the domain $\overline{\Omega}$, and u_1^h- be the solution of the problem (5). Let $f(x,y)$ be smooth enough in Ω, the same holds for $g_(x,y)$ in $\partial\Omega \setminus \{(0,0)\}$, and $g(0,y) \in H^7(\{-2/3 \leqslant y < 0\} \bigcup \{0 < y \leqslant 2/3\})$. Then the following estimate holds*

$$|u_1 - u_1^h| \leqslant c\,N^{-1} \ln^2 N, \quad (x_i,y_j) \in \overline{\Omega}^h.$$

A convergence rate for the solution u_2^h is obtained in [2], [3]:

$$|u_2 - u_2^h| \leqslant c\,N^{-1} \ln^2 N, \quad (x_i,y_j) \in \overline{\Omega}^h.$$

The last two estimates imply our main result:

Theorem 2. *Let $u(x,y)$ be a solution of the problem (1), (2). Let $f(x,y)$ be smooth enough in Ω, the same holds for $g_(x,y)$ in $\partial\Omega \setminus \{(0,0)\}$ and $g_1(y) \in H^7\big(\{-2/3 \leqslant y < 0\} \bigcup \{0 < y \leqslant 2/3\}\big)$. Then the following inequality holds for the solution $u_{i,j}^h$ of the problem (3) on the mesh $\overline{\Omega}^h$ uniformly in ε:*

$$|u(x_i,y_j) - u_{i,j}^h|_{L_\infty^h} \leqslant c\,N^{-1} \ln^2 N, \qquad (x_i,y_j) \in \overline{\Omega}^h.$$

4. Example of numerical solution

We consider the following problem in the unit square:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\triangle u + 2\,\partial u/\partial x + 3u = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2,\\ &u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega \setminus \{(0,y)\},\\ &u(0,y) = \begin{cases} y^3, & 0 < y \leqslant 0.5,\\ (1-y)^3, & 0.5 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

The solution of this problem has a discontinuity of the first derivative on the boundary $x = 0$ at $y = 0.5$, thus it has a weak interior layer. For $f(x,y) = 0$ the solution has relatively small regular layer near the boundary $x = 1$, no characteristic layers along the boundaries $y = 0$, $y = 1$ and singularities in the corners of the square (Fig.1). The problem of the regular layer is resolved by means a mesh refining in the strip of width $\sigma_1 = \min\{1/2\,\varepsilon \ln N;\ 1/4\}$.

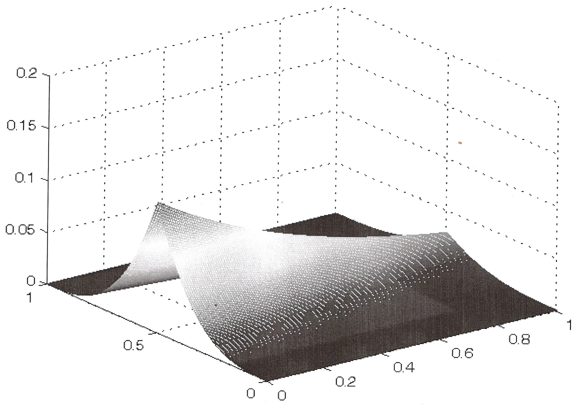


Fig. 1. Solution

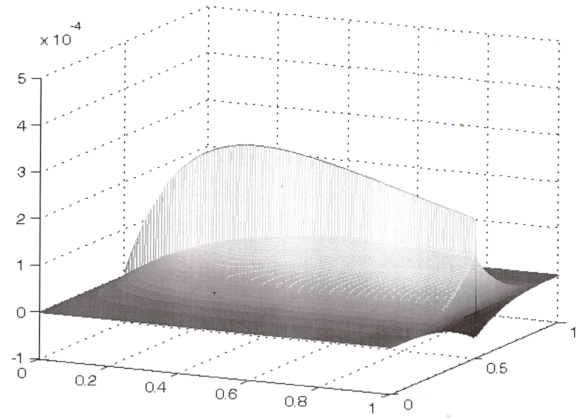


Fig. 2. The error of the solution

To estimate the convergence rate we use the values of $e_1 = \max\limits_{(i,j)} \left| u_N^h(i,j) - u_{2N}^h(2i,2j) \right|$ where $u_N^h(i,j)$ is a difference solution on the mesh with the number of points equal to N in every direction and u_{2N}^h is a solution on the mesh with the double number of points while the value of σ_1 is the same. In the Table 1 the e_1, $e_2 = e_1 \cdot N$, $e_3 = e_1 \cdot N/\ln N$ for every considered value ε are evaluated.

The numerical investigations show that the maximal errors in the solution are located in the interior layer, near the middle of it (Fig. 2).

For $\varepsilon = 10^{-2}$ the convergence rate is $O(N^{-1})$; for $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$ it is $O(N^{-1}\ln N)$ which meets the above obtained estimate (Lemma 2). In course of decreasing the ε the error stabilizes which gives evidence of the uniform in ε convergence. The piecewise uniform Shishkin mesh with $\sigma_2 = \min\{q^{-1/2}\sqrt{\varepsilon}\ln N;\ 1/8\}$ refined along the interior layer improves the convergence up to the rate $O(N^{-1})$ for our solution with the dominating interior layer.

If for the right hand part of the equation we have $f(x,y) = 1$ then the solution has a more serious regular interior layer and characteristic layers. In this case the maximal error is located in the neighborhood of the regular interior layer. Moreover, the convergence rate is $O(N^{-1}\ln^2 N)$ uniformly in ε which meets the above obtained estimates (Theorem 2).

The author is grateful to V.B. Andreev for setting the problem, his attention and valuable remarks.

Table 1

The errors of solution $e_1 = \max|u_N^h - u_{2N}^h|$
and it compositions on N and N/lnN

N	32	64	128	256
		$\varepsilon = 10^{-2}$		
e_1	$3.15{\cdot}10^{-3}$	$1.63{\cdot}10^{-3}$	$0.80{\cdot}10^{-3}$	$0.39{\cdot}10^{-3}$
e_2	$1.01{\cdot}10^{-1}$	$1.04{\cdot}10^{-1}$	$1.02{\cdot}10^{-1}$	$0.98{\cdot}10^{-2}$
e_3	$2.91{\cdot}10^{-2}$	$2.51{\cdot}10^{-2}$	$2.11{\cdot}10^{-2}$	$1.78{\cdot}10^{-2}$
		$\varepsilon = 10^{-4}$		
e_1	$1.49{\cdot}10^{-3}$	$1.10{\cdot}10^{-3}$	$0.70{\cdot}10^{-4}$	$0.37{\cdot}10^{-4}$
e_2	$4.76{\cdot}10^{-2}$	$7.05{\cdot}10^{-2}$	$8.95{\cdot}10^{-2}$	$9.41{\cdot}10^{-2}$
e_3	$1.37{\cdot}10^{-2}$	$1.69{\cdot}10^{-2}$	$1.84{\cdot}10^{-2}$	$1.70{\cdot}10^{-2}$
		$\varepsilon = 10^{-6}$		
e_1	$1.02{\cdot}10^{-3}$	$0.54{\cdot}10^{-4}$	$0.29{\cdot}10^{-4}$	$0.17{\cdot}10^{-4}$
e_2	$3.28{\cdot}10^{-2}$	$3.43{\cdot}10^{-2}$	$3.69{\cdot}10^{-2}$	$4.46{\cdot}10^{-2}$
e_3	$9.46{\cdot}10^{-3}$	$8.24{\cdot}10^{-3}$	$7.60{\cdot}10^{-3}$	$8.05{\cdot}10^{-3}$
		$\varepsilon = 10^{-7}$		
e_1	$1.02{\cdot}10^{-3}$	$0.53{\cdot}10^{-4}$	$0.27{\cdot}10^{-4}$	$0.14{\cdot}10^{-4}$
e_2	$3.26{\cdot}10^{-2}$	$3.36{\cdot}10^{-2}$	$3.43{\cdot}10^{-2}$	$3.54{\cdot}10^{-2}$
e_3	$9.41{\cdot}10^{-3}$	$8.07{\cdot}10^{-3}$	$7.07{\cdot}10^{-3}$	$6.39{\cdot}10^{-3}$
		$\varepsilon = 10^{-8}$		
e_1	$1.02{\cdot}10^{-3}$	$0.52{\cdot}10^{-4}$	$0.27{\cdot}10^{-4}$	$0.13{\cdot}10^{-4}$
e_2	$3.26{\cdot}10^{-2}$	$3.35{\cdot}10^{-2}$	$3.40{\cdot}10^{-2}$	$3.44{\cdot}10^{-2}$
e_3	$9.40{\cdot}10^{-3}$	$8.06{\cdot}10^{-3}$	$7.01{\cdot}10^{-3}$	$6.20{\cdot}10^{-3}$

References

[1] Shishkin G. I., *Grid approximation of singularly perturbed elliptic and parabolic equations*, Ur.O.Ran., Ekaterinburg, 1992.

[2] Andreev V. B., “Pointwise approximation of corner singularities for singularly perturbed elliptic problems with characteristic layers”, *Int. J. of Num. An. and Mod.*, **7**:3 (2010), 416–427.

[3] O‘Riordan E., Shishkin G. I., “Parameter uniform numerical methods for singularly perturbed elliptic problems with parabolic boundary layers”, *Applied numerical mathematics*, **58** (2008), 1761–1772.

[4] Kellogg R., Stynes M., “A singularly perturbed convection-diffusion problem in a half-plane”, *App. Anal.*, **85** (2006), 1471–1485.

Ершова Т. Я., "Сходимость сеточного решения задачи Дирихле с разрывной производной граничной функции для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 291–297.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-291-297

Аннотация. Рассмотрена задача Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами в прямоугольнике в случае, когда конвекция параллельна горизонтальным сторонам прямоугольника и направлена в сторону правой границы, а на левой границе первая производная граничной функции разрывна. При этих условиях решение задачи имеет регулярный пограничный слой в окрестности правой границы, два характеристических пограничных слоя около верхней и нижней границы и горизонтальный внутренний слой, возникающий из-за малой гладкости граничной функции. Показано, что на кусочно равномерных сетках Шишкина, сгущающихся около регулярного и характеристических слоев, решение, получаемое по классической пятиточечной разностной схеме с направленной разностью, равномерно по малому параметру сходится к решению исходной задачи в сеточной норме максимум модуля почти с первым порядком, а именно с той же скоростью, что и при гладкой граничной функции. Представлены численные результаты, подтверждающие теоретическую оценку. Также показано, что в случае задачи с преобладающим внутренним слоем кусочно равномерная сетка Шишкина, сгущающаяся около внутреннего слоя, дает уменьшение ошибки и сходимость с первым порядком.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: конвекция-диффузия, сингулярное возмущение, внутренний слой, сеточное решение, равномерная сходимость

Об авторе:
Ершова Татьяна Яковлевна, orcid.org/0000-0003-4442-1651, канд. физ.-мат. наук,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Ленинские горы, 1, стр. 52, Москва, 119991, Россия,
e-mail: ersh@cs.msu.ru

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 298–308
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 298–308

©Кудряшов Н. А., Муратов Р. В., Рябов П. Н., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-298-308

УДК 539.42

Численное моделирование процессов формирования полос адиабатического сдвига в композитах

Кудряшов Н. А., Муратов Р. В., Рябов П. Н.

получена 15 марта 2016

Аннотация. В работе рассматривается процесс локализации пластической деформации в композитном материале, состоящем из сваренных стальной и медной пластины при сдвиговых деформациях. Сформулирована математическая модель данного физического процесса. Для проведения вычислительных экспериментов предложен новый численный алгоритм, основанный на схеме Куранта–Изаксона–Риса. Данный алгоритм верифицирован на трех тестовых задачах. Его работоспособность и эффективность подтверждена в результате проведенных тестов. С использованием предложенного алгоритма проведено численное моделирование процессов локализации пластической деформации в композитных материалах. Исследовано влияние граничных условий, начальной скорости пластической деформации и ширины материалов, входящих в композитный блок, на процесс локализации. Показано, что на начальном этапе скорость сдвига слоев материала колеблется. Предложены теоретические оценки частоты и периода колебаний, расчеты по которым полностью согласуются с численным экспериментом. Установлено, что деформация локализуется в медной части композита. В зависимости от ширины стальной и медной части, а также начальной скорости пластической деформации и выбранного типа граничных условий, возникает одна или две области локализции, расположенные на характерном расстоянии от границ. Показана зависимость данного расстояния от начальной скорости пластической деформации, и получены соответствующие оценки для двух типов граничных условий. Установлено, что при возникновении двух областей локализации в одной из них температура и деформация растет существенно быстрее, чем в другой, тогда как на начальном этапе данные величины совпадают в этих областях.

Ключевые слова: полоса сдвига, локализация деформации, пластическая деформация, численное моделирование

Для цитирования: Кудряшов Н. А., Муратов Р. В., Рябов П. Н., "Численное моделирование процессов формирования полос адиабатического сдвига в композитах", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 298–308.

Об авторах:
Кудряшов Николай Алексеевич, orcid.org/0000-0001-5926-9715, д-р. физ.-мат. наук, профессор,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409, Россия, e-mail: nakudr@gmail.com

Муратов Родион Владимирович, orcid.org/0000-0002-4574-4412, студент,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409, Россия, e-mail: rodyon-mur@yandex.ru

Рябов Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-3780-9204, канд. физ.-мат. наук
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409, Россия, e-mail: pnryabov31@gmail.com

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект для поддержки исследований, проводимых отдельными научным группами, № 14-11-00258

Введение

Исследованию природы процессов формирования полос адиабатического сдвига (ПАС) в материалах при деформациях в последнее десятилетие уделяется большое внимание. Это связано с тем, что данное явление наблюдается в технологических процессах обрабатывающей, атомной и космической промышленности, а также во многих физических экспериментах и является одной из основных причин отказа материалов при высокоскоростных деформациях. Примеры таких процессов встречаются при пробивании материала на высоких скоростях, при обработке материала давлением, при механической обработке материала при прессовании и т.д. [1–5]. В работах [6, 7] отмечалось явление формирования ПАС, возникающих при работе ядерного реактора, а в работах [8, 9] – при запуске и крушении космических аппаратов.

По существу, данное явление представляет собой очень узкие области шириной от 1 до 500 мкм, в которых за короткое время достигаются существенные деформации и температуры. Причиной образования полос сдвига является потеря устойчивости пластического течения, возникающая вследствие эффекта термического разупрочнения [10]. Согласно этой теории, в условиях, близких к адиабатическим, работа пластической деформации переходит в тепло, что и вызывает термическое разупрочнение материала и приводит к образованию полос адиабатического сдвига.

Одной из первых экспериментальных работ по исследованию процессов формирования ПАС является работа Марчанда и Дуффи [11] по коаксиальному нагружению тонкостенных стальных образчиков Кольски [12]. По результатам эксперимента авторы установили, что в области шириной около 20 мкм температура образца достигла 863 K, а деформация – 1900%. Главным недостатком методики [11] является низкое значение максимальной скорости пластической деформации материала, создаваемое экспериментальными установками. Следующим этапом развития экспериментальных исследований по изучению процессов формирования ПАС стала работа Нестеренко [13]. Авторы разработали методику нагружения стальных и титановых образцов, благодаря которой удалось достичь начальной скорости деформации $\sim 10^4$ с$^{-1}$. Авторы показали, что в процессе нагружения образуются несколько полос сдвига, число которых увеличивается с ростом начальной скорости деформации. Помимо экспериментальных работ, данное явление интенсивно изучается с использованием теоретических подходов [14–18]. Однако отметим, что подавляющее большинство данных работ сконцентрировано на исселедовании процессов формирования ПАС в определенному материале. Таким образом, интерес представляет изучение процессов формирования ПАС в композитах, состоящих из разных по своим теплофизическим свойствам материалов.

1. Математическая модель

Рассмотрим процесс сдвиговой деформации бесконечного бруса, представляющего собой сплав двух разных по своим теплофизическим свойствам материалов. Общая высота бруса равна H. Нижняя граница бруса зафиксирована, а верхняя перемещается с постоянной скоростью v_B вдоль оси x. В такой постановке все параметры материала (смещение частиц, скорость, температура, и т.д.) зависят только от координаты y, а отличной от нуля компонентой тензора напряжений является компонента τ_{xy}. Обозначим $u(y,t)$ – смещение частиц материала, $\tau_{xy} = \tau$ – напряжение. В данных обозначениях математическая модель, описывающая процессы формирования полос адиабатического сдвига примет вид:

$$v_t = \frac{1}{\rho}\tau_y, \tag{1}$$

$$\tau_t - \mu v_y = -\mu\dot{\varepsilon}^p, \tag{2}$$

$$\psi_t = \frac{\tau\dot{\varepsilon}^p}{\kappa(\psi)}, \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \Phi^{-1}(T,\psi,\tau), \tag{4}$$

$$C\rho T_t = (kT_y)_y + \beta\tau\dot{\varepsilon}^p, \tag{5}$$

где y – пространственная переменная, t – время, v – скорость, T – температура, $\dot{\varepsilon}^p$ – скорость пластической деформации, ρ – плотность, β – параметр Тейлора–Куни, μ – модуль упругого сдвига, C – удельная теплоемкость, k – коэффициент теплопроводности, функция $g(T)$ описывает чувствительность материала к изменению температуры.

Поскольку процесс формирования ПАС сопровождается высокими температурами и деформациями, в материале могут иметь место фазовые переходы. В рассматриваемой нами модели не учитываются процессы подобного рода.

В качестве начальных условий, описывающих состояние системы при $t = 0$, выбраны условия

$$\begin{gathered} v(y,0) = v_0(y), \quad T(y,0) = T_0(y), \quad \tau(y,0) = \tau_0(y), \\ \psi(y,0) = \psi_0, \quad \dot{\varepsilon}^p(y,0) = \dot{\varepsilon}_0, \quad \varepsilon(y,0) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Граничные условия на скорость примут вид

$$v(0,t) = 0, \quad v(H,t) = v_B. \tag{7}$$

В качестве граничных условий на температуру использованы либо граничные условия 1-го, либо 2-го рода

$$\begin{gathered} T(y=0,t) = 0, \quad T(y=H,t) = 0, \\ T_y(y=0,t) = 0, \quad T_y(y=H,t) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим, что также могут быть использованы граничные условия других типов, примеры которых могут быть найдены в работах [14–16].

Используемые в расчетах материалы, из которых изготовлен блок, представляют собой легированную низкоуглеродистую сталь марки HY-100, которая применяется при изготовлении тяжелого строительного оборудования, камер высокого давления, а также бескислородную медь OFHC, обладающую высокой проводимостью и использующуюся для изготовления различных типов кабелей. Теплофизические и пластические параметры данных материалов приведены в Табл. 1.

Таблица 1. Теплофизические параметры используемых материалов
Table 1. Thermophysical properties of materials

Материал Material	μ, Гпа GPa	ρ, кг/м^3 kg/m^3	k, Вт/мК W/mK	C, Дж/кгК J/kgK	$\dot{\varepsilon}_y$, с$^{-1}$ c^{-1}	a, К$^{-1}$ K^{-1}	κ_0, МПа MPa	m	ψ_0	n
HY-100	80	7860	49.2	473	10^{-4}	$6.43{\cdot}10^{-4}$	600	0.0251	0.012	0.107
OFHC	45	8960	386	383	1	$9.47{\cdot}10^{-4}$	69	0.027	0.261	0.32

Закон пластической текучести (4) используется в форме

$$\tau = \kappa(\psi) g(T) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_y}\right)^m. \tag{9}$$

Для проведения численных расчетов соотношение (9) следует разрешить относительно величины скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}^p$ с учетом того, что $\dot{\varepsilon}^p \geqslant 0$. В результате имеем

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\varepsilon}_y}{2}\left(\left[\frac{|\tau|}{\kappa(\psi)g(T)}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right)\left(1 + \operatorname{sign}\left[\left[\frac{|\tau|}{\kappa(\psi)g(T)}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right]\right). \tag{10}$$

Функция температурного сглаживания материала выбирается в экспоненциальном виде для стали

$$g(T) = \exp(-aT), \tag{11}$$

и степенном для меди

$$g(T) = (1 - aT)^3. \tag{12}$$

Функция $\kappa(\psi)$ выражается формулой

$$\kappa(\psi) = \kappa_0 \left(1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^n\right). \tag{13}$$

В случае, если этот эффект не учитывается, в (9) используется константное значение $\kappa = \kappa_0$, а уравнение (3) исключается из системы.

Численное решение задачи (1)–(5) строится аналогично алгоритму, предложенному в работе [17], с некоторой модификацией. На первом этапе решается механическая часть задачи, т.е. определяются значения скорости v и напряжения τ в композитном блоке. Разностная аппроксимация системы уравнений (1)–(2) для определения величин v и τ строится на основе схемы Куранта–Изаксона–Риса [19] с использованием итераций по Ньютону. Затем на основе полученных значений рассчитывается величина скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}^p$ и деформации ε^p. Скорость пластической деформации определяется из закона пластической текучести (4), а величина деформации вычисляется при помощи метода трапеций, путем интегрирования величины $\dot{\varepsilon}^p$ по времени. В свою очередь, величина деформационного упрочнения ψ рассчитывается при помощи метода Рунге–Кутта [17]. Второй этап решения задачи (1)–(5) заключается в определении температуры образца. С этой целью интегрирование последнего уравнения (5) проводится с использованием неявной конечно-разностной схемы.

Верификация разработанного численного алгоритма строилась на основе решения трех тестовых задач [14, 15, 17, 18]. В первой задаче исследуется формирование одиночной полосы адиабатического сдвига в центре стального бруса без учета процесса деформационного упрочнения. Вторая задача заключается в исследовании влияния деформационного упрочнения на процесс формирования полосы сдвига в образце, изготовленном из бескислородной меди. Третья задача состоит в исследовании процесса самоорганизации полос адиабатичсекого сдвига в медных и стальных образцах [17]. Во всех трех случаях разработанный алгоритм иллюстрирует свою работоспособность, а полученные результаты полностью согласуются с результатами, полученными в [14, 15, 17, 18].

2. Результаты численного моделирования

Рассмотрим процесс формирования ПАС в материале, состоящем из спаянных друг с другом образцов из стали HY-100 и меди OFHC. Плоскость соприкосновения материалов проходит параллельно грани пластины в точке $y = \gamma H$, где $\gamma \in (0, 1)$. Для описания ширины стальной и медной части введем обозначение: x мм – z мм, где x – высота стальной части, z – высота медной части.

На границах либо температура, либо тепловой поток поддерживается равным нулю. Напряжение, температура, фактор ψ и скорость пластической деформации в начальный момент равны нулю. Предполагается, что скорость изменяется линейно. Формирование ПАС будем исследовать при различных коэффициентах $\dot{\varepsilon}_0$, H и γ.

На начальных этапах численного эксперимента, независимо от параметров $\dot{\varepsilon}_0$, H и γ, поведение величин одинаково. Поскольку напряжение в стали на порядок выше, чем в меди, на границе раздела возникает большой градиент напряжения. Отношение ускорений материала слева от раздела сред (в стали) и справа (в меди) отличается на порядок.

$$\frac{v_{t\text{ст}}}{v_{t\text{м}}} \approx \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{ст}}} \frac{\kappa_{0\text{ст}}}{\kappa_{0\text{м}}} \approx 10, \tag{14}$$

из-за чего скорость в точке раздела сред испытывает разрыв и слева (в стали) уменьшается значительно быстрее. Далее возмущение идет по стали к точке $y = 0$, где волна отражается от закрепленной границы, а после возвращается к границе между материалами и передает часть энергии меди. На Рис. 1 представлены этапы распространения волны от точки спайки двух материалов.

График зависимости скорости от времени в точках $y < \gamma H$ довольно точно описывается формулой затухающих колебаний с периодом и частотой около

$$T = 4\gamma H \sqrt{\frac{\rho_{\text{ст}}}{\mu_{\text{ст}}}}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2\gamma H} \sqrt{\frac{\mu_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}}. \tag{15}$$

Численные расчеты показывают, что частота колебаний точек материла отличается от приведенной оценки не более чем на 5%.

В результате затухающих периодических колебаний стали, возмущение и часть энергии передается медной части сплава, где в дальнейшем возможна локализация

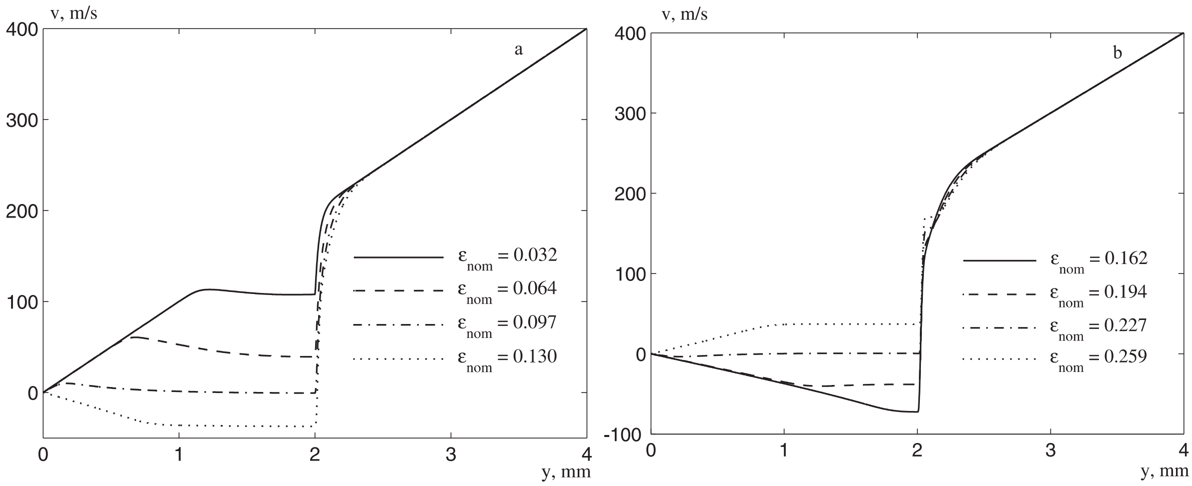


Рис. 1. Распределение скоростей в образце в различные моменты времени при $\dot{\varepsilon}_0 = 10^5$ с$^{-1}$ и $H = 4$ (2 мм – 2 мм). (a) – $\varepsilon_{\text{ном}} \in [0.032, 0.13]$; (b) – $\varepsilon_{\text{ном}} \in [0.162, 0.259]$
Fig. 1. The velocity distribution in the specimen at different times at $\dot{\varepsilon}_0 = 10^5$ c^{-1} and $H = 4$ mm (2 mm – 2 mm). (a) – $\varepsilon_{\text{nom}} \in [0.032, 0.13]$; (b) – $\varepsilon_{\text{nom}} \in [0.162, 0.259]$

пластических деформаций и возникновение нескольких ПАС. К моменту их формирования стальная часть пластины уже практически полностью покоится.

Далее изучим подробнее процессы, происходящие в медной части образца. В зависимости от начальной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ кардинально меняются характерные распределения величин, возможно возникновение от одной до нескольких полос сдвига в различных местах медной части.

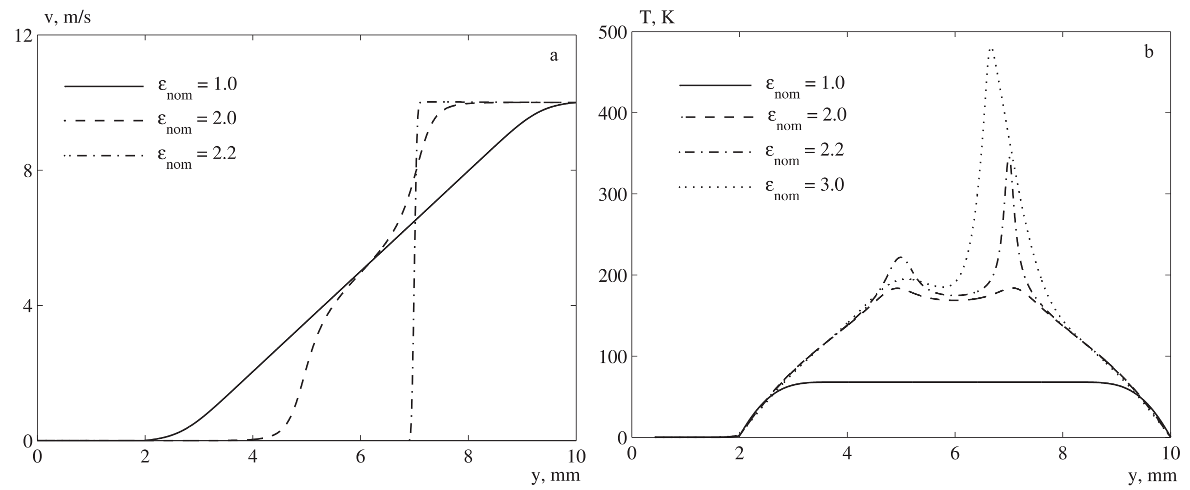


Рис. 2. Распределение скорости и температуры в образце толщиной $H = 10$ мм (2 мм – 8 мм) в различные моменты времени при $\dot{\varepsilon}_0 = 10^3$ с$^{-1}$. (a) – скорость; (b) – температура
Fig. 2. The velocity and temperature distribution in specimen with $H = 10$ mm (2 mm – 8 mm) at $\dot{\varepsilon}_0 = 10^3$ c^{-1}. (a) – velocity; (b) – temperature

Численные эксперименты показывают, что на начальной стадии процесса распределение температуры, деформации и скорости деформации почти симметричны в медной части пластины и имеют один (пластины 1 мм – 4 мм, 2 мм – 3 мм, 2 мм – 6 мм) или два локальных максимума около середины (пластины 2 мм – 8 мм). Однако, начиная с некоторого момента времени, максимальное значение соответствующих величин за короткий промежуток времени увеличивается в несколько раз. В случае наличия двух локальных максимумов, как например в образце 2 мм – 8 мм, наблюдается резкое увеличение правого из них, что обусловлено, по-видимому, дополнительным температурным градиентом на границе образца, см. Рис. 2. Также из Рис. 2 видно, что начиная с некоторого момента времени распределение скорости в образце приобретает ступенчатый вид, причем вся стальная часть и существенная часть меди покоятся.

На Рис. 3 приведены зависимости максимальных значений температуры, деформации, скорости деформации и минимума напряжения от времени для всех испытанных образцов. Из Рис. 3 видно, что начало формирования полосы адиабатического сдвига приходится на момент времени $\varepsilon_{\text{ном}}$ от 1.2 до 2.2 для образцов различной толщины. Можно заметить, что чем больше толщина меди, тем позднее образуется ПАС. Далее, за короткий промежуток времени пик температуры возрастает в 2-3 раза, а деформации в 4-5 раз.

В данной серии экспериментов образование по крайней мере одной ПАС в середине медной части неизбежно. Стальная часть пластины практически не нагревается, поэтому на левой границе меди (в точке раздела материалов) температура очень мала, на правой же границе меди температура поддерживается равной нулю. Медная часть постоянно получает энергию из-за движения правой границы и нагревается, при таких условиях около середины медной части образца обязательно образуется не менее одного, постоянно увеличивающегося максимума температуры.

Влияние граничных условий на процесс локализации оказывается существенным, о чем говорят численные эксперименты с нулевым потоком тепла на границах. В этом случае, процесс локализации существенно зависит от толщины медной части. Так, на начальных этапах температура в медной части имеет довольно однородное распределение. Затем наблюдается возникновение локальных максимумов температуры и деформации на расстоянии чуть меньше 3 мм от границы между материалами. Далее, в зависимости от толщины медного слоя возможны два варианта. Если толщина меди менее 5 мм, то максимум сдвигается к самой границе и в дальнейшем практически вся пластина имеет нулевую скорость, а двигается только граничная точка. Если толщина медного слоя достаточно велика, то локализация деформации происходит внутри медной части бруса.

Увеличение начальной скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_0$ до значения 10^4 с$^{-1}$ приводит к образованию двух областей, в которых локализуется деформация для всех рассматриваемых композитных блоков. Данные области располагаются симметрично относительно левой и правой границы меди и лежат в среднем на расстоянии 0.8 мм от ее границ. Однако спустя некоторое время в одной из областей наблюдается резкий рост температуры и деформации. Если толщина меди меньше 7 мм, то ПАС образуется справа – рядом с двигающейся границей, при выборе толщины медной части от 7 мм ПАС образуется слева – рядом с грани-

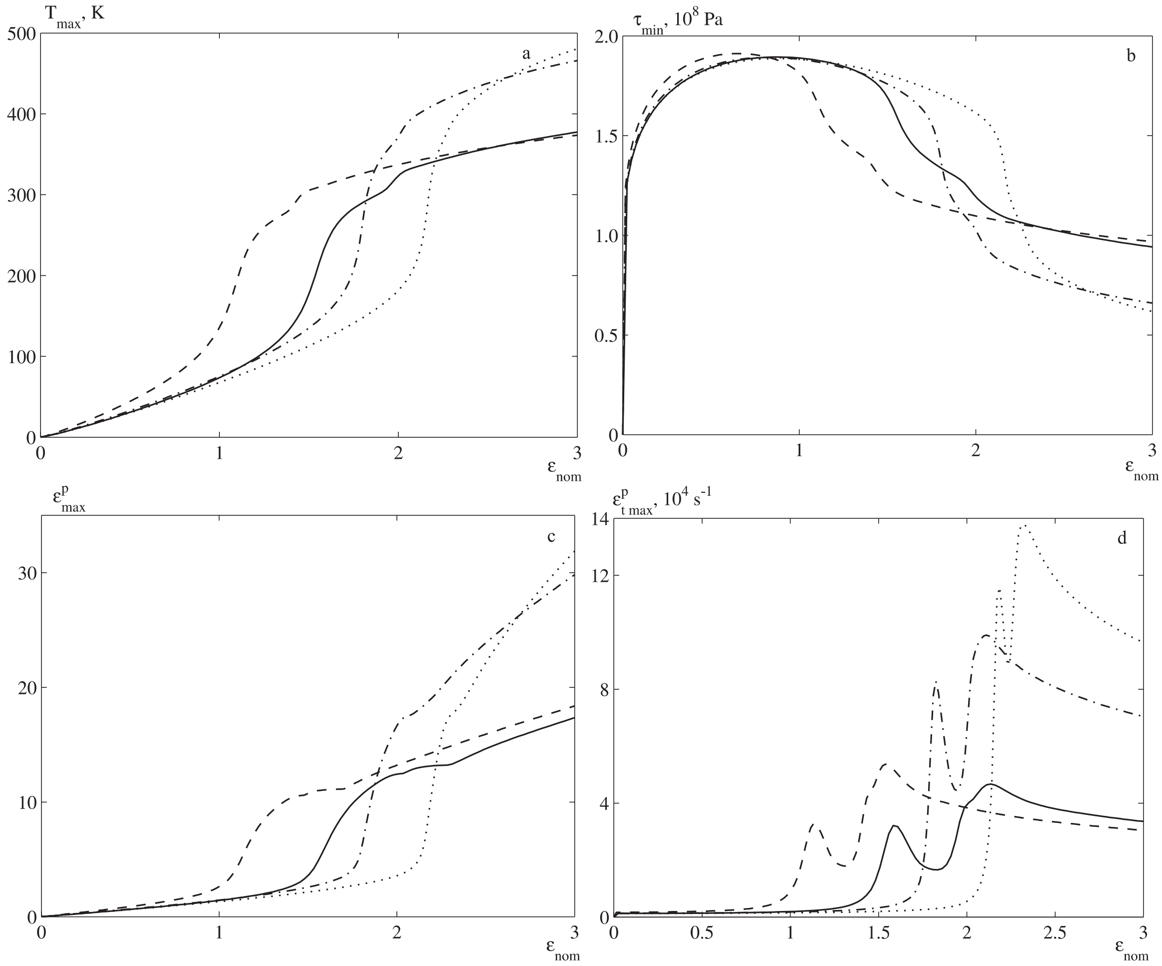


Рис. 3. (a) – максимальное значение температуры; (b) – минимальное значение напряжения; (c) – максимальное значение деформации; (d) – максимальное значение скорости пластической деформации. Образцы высотой 1 мм – 4 мм, 2 мм — 3 мм, 2 мм – 8 мм, 2мм – 6 мм (линии сплошная, пунктирная, точечная и точка-тире соответственно)

Fig. 3. (a) – maximum value of temperature; (b) – minimum value of stress; (c) – maximum value of strain; (d) – maximum value of plastic strain rate. Specimen height 1 mm – 4 mm, 2 mm – 3 mm, 2 mm – 8 mm, 2 mm – 6 mm (solid, dashed, dotted, dashed-dotted line respectively)

цей между материалами. Данное явление уже наблюдалось ранее в работе [20] при исследовании процесса взаимодействия полос сдвига между собой.

Численные эксперименты показывают, что как в случае образования нескольких областей локализации, так и в случае образования одной, существует характерное расстояние ξ (глубина), на котором локализуется деформация (в качестве примера см. Рис. 4a). В свою очередь, глубина локализации зависит от параметра $\dot{\varepsilon}_0$. Графическое представление данной зависимости дано на Рис. 4b. Из Рис. 4 видно, что глубина локализации обратно пропорциональна начальной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$. При низкой начальной скорости деформации медь нагревается более равномерно,

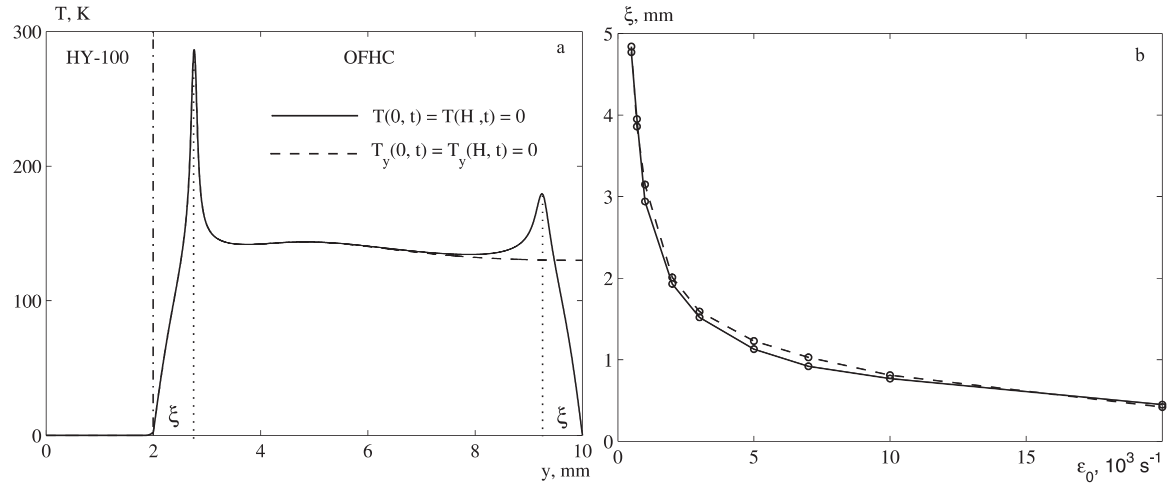


Рис. 4. (a) – распределение температуры в образце 2 мм – 8 мм при различных граничных условиях при $\dot{\varepsilon}^p = 10^4$ с$^{-1}$ и $\varepsilon_{\text{ном}} = 2$; (b) – зависимость расстояния ξ от начальной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ в образце 2 мм – 8 мм при различных граничных условиях
Fig. 4. (a) – temperature distribution in specimen 2 mm – 8 m at different boundary conditions and $\dot{\varepsilon}^p = 10^4$ c^{-1} and $\varepsilon_{\text{nom}} = 2$; (b) – dependence of distance ξ from initial strain rate $\dot{\varepsilon}_0$ in specimen 2 mm – 8 mm at different boundary conditions

а деформации успевают проникнуть в глубь бруса. В свою очередь, при увеличении $\dot{\varepsilon}_0$ брус нагревается по краям, и там же очень быстро накапливаются большие деформации. Величина ξ зависит в большей степени от значения $\dot{\varepsilon}_0$ и гораздо меньше подвержена влиянию толщины бруса и соотношению материалов в нем. Так, по Рис. 4b можно довольно хорошо оценивать глубину, на которой локализуются деформации, если толщина медной или стальной части находится в пределах 2 – 20 мм. Если при нулевых граничных условиях ширина медной части менее 2ξ, то в этом случае деформация локализуется в центре медной части, что происходит, к примеру, в образце 2 мм – 4 мм и скорости $\varepsilon_0 = 10^3$ с$^{-1}$ ($\xi \approx 3$ мм). В случае нулевого теплового потока на границе бруса толщина меди меньше некоторого значения, деформация локализуется на подвижной границе, этот случай реализуется, к примеру, в образце 2 мм – 4 мм и скорости $\varepsilon_0 = 10^3$ с$^{-1}$ ($\xi \approx 3$ мм).

Заключение

В работе рассмотрены процессы локализации пластической деформации в композитном материале, состоящем из стали и меди. Для описания данного физического процесса предложена математическая модель. Разработан численный алгоритм и проведена его верификация. Показана эффективность данного алгоритма.

Установлено, что генерация возмущений, приводящих к локализации пластической деформации в изучаемом образце, происходит за счет наличия стыка между материалами. Установлено, что пластическая деформация локализуется в более хрупкой части образца, т.е. в медной её части. Также показано, что в зависимости от параметров задачи и ширины стальной и медной части образца имеет место процесс образования одной или двух областей локализации, отстоящих от границ в среднем на одно и то же расстояние. Показано, что в основном величина данного расстояния изменяется за счет изменения начальной скорости пластической дефорамции, причем данная зависимость имеет вид гиперболы. Помимо этого, исследовано влияние граничных условий на процесс локализации и выявлены характерные особенности данного процесса.

Список литературы / References

[1] Schneider J., Nunes J. A., "Characterization of plastic flow and resulting microtextures in a friction stir weld", *Metall. Mater. Trans. B.*, **35** (2004), 777–783.

[2] Seidel T., Reynolds A., "Visualization of the material flow in aa2195 friction stir welds using a marker insert technique", *Metall. Mater. Trans.*, **32A** (2001), 2879–2884.

[3] Moss G., *Shear strains, strain rates, temperature changes in adiabatic shear bands*, In: Meyers L. MurrShock L.(Eds.), Waves and High Strain Rate Phenomena in Metals, 1981.

[4] Rogers H. C., "Adiabatic plastic deformation", *Annu. Rev. Mater. Sci.*, **9** (1979), 283.

[5] Bai Y., Dodd B., *Adiabatic Shear Localization*, Pergamon press, Oxford, 1992.

[6] Lee W. S., Liu C. Y., Chen T. C., "Adiabatic shearing bends havior of different steels under extreme high shear loading", *Journal of Nuclear Materials*, **374** (2008), 313–319.

[7] Gupta G., Was G. S., Alexandreanu B., "Grain boundary engineering of ferritiction martensitic alloy T91", *Metallurgical and Materials Transaction A*, **35** (2004), 717–719.

[8] Rittel D., "Adiabatic shear failure of a syntactic polymeric foam", *Materials Letter*, **59** (2005), 723–732.

[9] Shockey D. A. et.al., "Shear failure of inconel 718 under dynamic loads", *Experimental Mechanics*, **47** (2007), 723–732.

[10] Wright T. W., *The phisics and mathematics of adiabatic shear bands*, Cambridge University Press, 2002.

[11] Marchand A., Duffy J., "An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel", *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988), 251–283.

[12] Kolsky H., "An investigation of the mechanical properties of materials at very. High rates of loading", *Proc. Phys. Soc.*, **62-B** (1949), 676.

[13] Nesterenko V. F., Bondar M. P., "Investigation of Deformation Localization by the 'Thick-Walled Cylinder' Method", *DYMAT journal*, **1** (1994), 245–251.

[14] Zhou F., Wright T. W., Ramesh K. T., "A numerical methodology for invesigating the formation of adiabatic shear bands", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54** (2006), 904–926.

[15] Zhou F., Wright T. W., Ramesh K. T., "The formation of multiple adiabatic shear bands", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54** (2006), 1376–1400.

[16] Batra R. C., Wei Z. G., "Shear bands due to heat flux prescribed at boundaries", *Int. J. Plast.*, **22** (2006), 1–15.

[17] Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Zakharchenko A. S., "Self-organization of adiabatic shear bands in OFHC copper and HY-100 steel", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **76** (2015), 180–192.

[18] Walter J. W., "Numerical experiments on adiabatic shear band formation in one dimension", *International Journal of Plasticity*, **8** (1992), 657–693.

[19] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике (2-е изд.)*, М.: Наука, 1978; [Rozhdestvenskij B. L., Yanenko N. N., *Sistemy kvazilinejnyx uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike*, M.: Nauka, 1978, (in Russian).]

[20] Кошкин В. И., Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., "Численное моделирование образования полос адиабатического сдвига при деформациях", *Ядерная физика и инжиниринг*, **1** (2010), 465–474; [Koshkin V. I., Kudryashov N. A., Ryabov P. N., "Chislennoe molelirovanie obrazovaniya polos adiabaticheskogo sdviga pri deformatsiyah", *Yadernaya fizika i inzeniring*, **1** (2010), 465–474, (in Russian).]

Kudryashov N. A., Muratov R. V., Ryabov P. N., "Numerical Simulation of Adiabatic Shear Bands Formation in Composites", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 298–308.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-298-308

Abstract. The process of plastic flow localization under shear deformations of a composite material consisting from welded steel and copper is studied. A mathematical model describing this physical process is proposed. A new numerical approach based on Courant–Isaacson–Rees scheme is suggested. This algorithm was verified using three benchmark problems. Operability and effectiveness of this algorithm is confirmed. A numerical simulation of plastic flow localization in composite materials is performed. The influence on localization process of boundary conditions, of initial strain rate and materials width is studied. It is shown that at the initial stage the shear velocity of material layers oscillates. Theoretical estimates of frequency and oscillation period is given. Computational results coincide with these estimates. It is found that plastic flow localizes in the copper part of the composite. One or two areas of plastic flow localization appears depending on the width of steel and copper parts, as well as on the initial plastic strain rate and the selected type of a boundary conditions. The areas locate on characteristic distance from borders. The dependence of this distance and initial strain rate is shown and the corresponding estimates are obtained for two types of boundary conditions. When two areas of localization are formed, in one of them the temperature and the deformation increas faster than in another one.

Keywords: shear band, deformation localization, plastic deformation, numerical simulation

On the authors:
Kudryashov Nikolay Alexeevich, orcid.org/0000-0001-5926-9715, PhD, Dr. Sci., professor
National research nuclear university MEPhI,
Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia, e-mail: nakudr@gmail.com

Muratov Rodyon Vladimirovich, orcid.org/0000-0002-4574-4412, graduate student,
National research nuclear university MEPhI,
Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia, e-mail: rodyon-mur@yandex.ru

Ryabov Pavel Nikolaevich, orcid.org/0000-0002-3780-9204, PhD,
National research nuclear university MEPhI,
Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia, e-mail: pnryabov31@gmail.com

Acknowledgments:
This work was supported by Russian Science Foundation, project to support research carried out by individual research groups No. 14-11-00258

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №3 (2016), с. 309–316
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 309–316

©Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-309-316

УДК 517.9

Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками

Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И.

получена 30 мая 2016

Аннотация. Нелинейные уравнения типа конвекции–диффузии с нелинейными источниками встречаются при описании многих процессов и явлений в физике, механике и биологии. В работе рассматривается семейство нелинейных дифференциальных уравнений, являющееся редукцией к переменным бегущей волны для нелинейного уравнения конвекции–диффузии с полиномиальными источниками. Исследуется вопрос о построении общего аналитического решения данного уравнения. Рассмотрены как стационарный, так и не стационарный случаи при учете и без учета конвекции. Для построения аналитических решений используется подход, основанный на применении нелокальных преобразований, обобщающих преобразования Зундмана. Показано, что в стационарном случае без учета конвекции общее аналитическое решение может быть найдено без ограничений на параметры уравнения и выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Поскольку в общем случае данное решение имеет громоздкий вид, найдены ограничения на параметры, при которых оно имеет простой вид, и в явном виде построены соответствующие аналитические решения. Показано, что в нестационарном случае, как при учете конвекции, так и в случае её отсутствия, общее решение исследуемого уравнения может быть построено при некоторых ограничениях на параметры. С этой целью использованы недавно полученные критерии интегрируемости для уравнений типа Льенара. Соответствующие общие аналитические решения исследуемого уравнения, выраженные через показательные или эллиптические функции, построены в явном виде.

Ключевые слова: аналитические решения, эллиптические функции, нелокальные преобразования, уравнения Льенара

Для цитирования: Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И., "Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 309–316.

Об авторах:
Кудряшов Николай Алексеевич, orcid.org/0000-0001-5926-9715, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия, e-mail: nakudr@gmail.com

Синельщиков Дмитрий Игоревич, orcid.org/0000-0003-0993-219X, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия, e-mail: disinelshchikov@mephi.ru

Благодарности:
Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00258).

Введение

В работе рассматривается семейство нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$y_{zz} + \frac{m}{y}y_z^2 + \left(a_1 y^{n-m} + C_0 y^{-m}\right) y_z - a_2 y^{k-m} + a_3 y^{l-m} = 0, \tag{1}$$

где y и z – зависимая и независимые переменные соответственно, m, n, k, l — целые числа, a_i, $i = 1, 2, 3$ и C_0 — произвольные действительные параметры, при этом предполагается, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + C_0^2 \neq 0$.

Исследование уравнения (1) представляет интерес, поскольку оно возникает как редукция к переменным бегущей волны следующего семейства нелинейных уравнений в частных производных:

$$u_t = (u^m u_x)_x + a_1 u^n u_x - a_2 u^p + a_3 u^l, \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$ — неизвестная функция. Уравнение (2) имеет приложения в биологии, теории нелинейной диффузии и теплопроводности. В частности, при $a_1 = 0$ уравнение (2) сводится к обобщенному уравнению Фишера (см. [1, 2]). При $a_1 \neq 0$ уравнение (2) можно рассматривать как нелинейное уравнение фильтрации с нелинейным источником и нелинейной конвекцией [3].

Уравнение (1) принадлежит к семейству обобщенных уравнений Льенара. Вопрос о построении аналитических решений для подобных уравнений рассматривался в ряде работ (см. [4–6]). Недавно в работах [7–10] был предложен новый подход к исследованию уравнений данного типа, основанный на использовании нелокальных преобразований, обобщающих преобразования Зундмана (см. [11, 12]):

$$w = F(y), \quad d\zeta = G(y)dz, \quad F_y G \neq 0. \tag{3}$$

Здесь w и ζ – новые зависимая и независимая переменные.

В соответствии с данным подходом исследуется связь, задаваемая преобразованиями (3), между уравнениями типа Льенара и уравнениями, для которых возможно построение общего аналитического решения в замкнутом виде. В качестве класса уравнений, для которых возможно построение общего аналитического решения, используются уравнения из классификации Пенлеве–Гамбье (см., например, [13, 14]). С помощью данного подхода в работах [7, 8] были найдены новые критерии интегрируемости для уравнений типа Льенара.

Целью данной работы является применение указанных выше критериев для построения общих аналитических решений уравнений из семейства (1). При этом представляется удобным рассмотреть два различных варианта уравнения (1): первый вариант соответствует отсутствию в (1) слагаемого, пропорционального первой производной (т.е. $a_1 = C_0 = 0$, что отвечает стационарному случаю без учета конвекции), второй вариант соответствует ненулевому коэффициенту при первой производной в уравнении (1) ($a_1^2 + C_0^2 \neq 0$). Будет показано, что в стационарном случае без учета конвекции (т.е. $a_1 = C_0 = 0$) общее решение уравнения (1) может быть получено без ограничений на его параметры. В случае $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$ будет показано, что общее решение (1) может быть найдено при некоторых ограничениях на его параметры и будут найдены соответствующие формулы для решений.

1. Стационарный случай без учета конвекции

Рассмотрим стационарный случай уравнения (1) без учета конвекции. Полагая $a_1 = C_0 = 0$ в (1) имеем

$$y_{zz} + \frac{m}{y} y_z^2 - a_2 y^{k-m} + a_3 y^{l-m} = 0. \tag{4}$$

Отметим, что с помощью преобразований растяжения $z \to Az'$, $y \to By'$ коэффициенты при последних двух слагаемых в уравнении (4) могут быть выбраны произвольными, отличными от нуля числами. В дальнейшем в данном разделе без ограничения общности будем полагать, что $a_2 = a_3 = 1$.

Уравнение (4) принадлежит к классу уравнений Льенара с квадратичной нелинейностью $y_{zz} + g(y)y_z^2 + h(y) = 0$. В работе [8] было показано, что любое уравнение данного класса может быть сведено к уравнению для эллиптических функций. Однако, применяя теорему 1 из работы [8], получим, что общее решение (1) для произвольных значений параметров имеет громоздкий вид. Поэтому представляет интерес применить теорему 2 из работы [8] и рассмотреть случай, когда преобразования (3) задаются степенными функциями. Это возможно при следующих ограничениях на параметры: $k = 2(m + l + 1)$ и $m = 2k - 3l - 1$.

Остановимся на случае $k = 2m + 2l + 2$. Тогда с помощью преобразований

$$w = y^{m+l+1}, \quad d\zeta = y^l dz, \tag{5}$$

уравнение (4) сводится к

$$w_{\zeta\zeta} + (m + l + 1)(1 - w^2) = 0. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$w = \frac{6}{m + l + 1} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(m + l + 1)^2}{3}, g_3 \right\}, \tag{7}$$

где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, ζ_0, g_3 — произвольные постоянные.

Используя преобразования (5), приходим к общему решению уравнения (4) при $k = 2m + 2l + 2$

$$y = \left[\frac{6}{m + l + 1} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(m + l + 1)^2}{3}, g_3 \right\} \right]^{\frac{1}{m+l+1}}, \quad z = \int y^{-l} d\zeta. \tag{8}$$

Рассмотрим случай $m = 2k - 3l - 1$. Тогда преобразования (3) принимают вид

$$w = y^{k-l}, \quad d\zeta = y^{2l-k} dz, \tag{9}$$

и (4) переходит в следующее уравнение:

$$w_{\zeta\zeta} + (k - l)w(a_3 - a_2 w) = 0. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$w = \frac{1}{2} + \frac{6}{k - l} \wp \left\{ \zeta - \zeta_0, \frac{(k - l)^2}{12}, g_3 \right\} \tag{11}$$

Тогда приходим к общему решению (4) при $m = 2k - 3l - 1$

$$y = \left[\frac{1}{2} + \frac{6}{k-l}\wp\left\{\zeta - \zeta_0, \frac{(k-l)^2}{12}, g_3\right\}\right]^{\frac{1}{k-l}}, \quad z = \int y^{k-2l} d\zeta, \tag{12}$$

где ζ_0, g_3 — произвольные постоянные.

В данном разделе показано, что общее решение уравнения (1) при $C_1 = a_1 = 0$ может быть получено без ограничений на его параметры, однако в общем случае данное решение имеет громоздкий вид. Найдены ограничения на параметры уравнения (1), при которых общее решение (1) для $C_1 = a_1 = 0$ имеет простой вид. Отметим, что из (8), (12) видно, что случаи $m + l + 1 = 0$ и $k - l = 0$ необходимо рассмотреть отдельно, что можно сделать аналогично выше рассмотренным примерам.

2. Общий случай уравнения (1)

В данном разделе будем предполагать, что хотя бы один из коэффициентов при первой производной в уравнении (1) не равен нулю, т.е. $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$. Дальнейшие вычисления удобно разбить на три этапа: $a_1 = 0, C_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0, C_0 = 0$ и $a_1 \neq 0, C_0 \neq 0$. Во всех случаях будем использовать критерии интегрируемости для уравнения типа Льенара, предложенные в работе [7]. Первый из них основан на исследовании связи между уравнениями типа Льенара и уравнением, общее решение которого выражается через одну их эллиптических функций Якоби. Второй критерий, рассмотренный в работе [7], основан на линеаризации уравнения Льенара с помощью преобразований (3). Случай линеаризуемых уравнений рассмотрен также в работе [11].

Исследуем вопрос о линеаризации уравнения (1) с помощью преобразований (3). Сначала остановимся на случае $a_1 = 0$. Используя теорему 2 из работы [7], получим, что уравнение (1) может быть линеаризовано с помощью преобразований (3) при $k = 1 - m$, $l = -m$. Действительно, принимая во внимание данные ограничения и используя преобразования

$$F = -y + \frac{a_3}{a_2}, \quad d\zeta = C_0 y^{-m} dz, \tag{13}$$

из (1) получим

$$w_{\zeta\zeta} + w_\zeta - \frac{a_2}{C_0^2} w = 0. \tag{14}$$

Используя общее решение уравнения (14) и преобразования (13), находим общее решение уравнения (1) при $a_1 = 0$, $k = 1 - m$ и $l = -m$:

$$y = \frac{a_3}{a_2} - e^{-\zeta/2}\left[C_1 \exp\left\{\frac{\sqrt{C_0^2 + 4a_2}}{2C_0}\zeta\right\} + C_2 \exp\left\{-\frac{\sqrt{C_0^2 + 4a_2}}{2C_0}\zeta\right\}\right], \quad z = C_0 \int y^m d\zeta, \tag{15}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Отметим, что при $a_2 < -C_0^2/4$ для того, чтобы получить действительное решение, в формуле (15) необходимо взять линейную комбинацию действительной и мнимой части от выражения, стоящего в квадратных скобках.

Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$, $C_0 = 0$. Используя теорему 2 из работы [7], получим, что уравнение (1) может быть линеаризовано с помощью преобразований (3) при $k = 2(n-m)+1$, $l = n-2m$. Действительно, принимая во внимание данные ограничения и используя преобразования

$$F = \frac{1}{n+1}\left(y^{n+1} - \frac{a_3}{a_2}\right), \quad d\zeta = y^{n-m}dz, \tag{16}$$

из (1) получим

$$w_{\zeta\zeta} + a_1 w_\zeta - a_2(n+1)w = 0. \tag{17}$$

Используя общее решение уравнения (17) и преобразования (16), находим общее решение уравнения (1) при $C_0 = 0$, $k = 2(n-m)+1$, $l = n-2m$:

$$y = \left[(n+1)e^{-\frac{a_1}{2}\zeta}\left(C_3 \exp\left\{\frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(n+1)}}{2}\zeta\right\} + C_4 \exp\left\{-\frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(n+1)}}{2}\zeta\right\}\right)\right],$$
$$z = \int y^{m-n} d\zeta, \tag{18}$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные. Отметим, что при $a_2 < -a_1^2/(4(n+1))$ действительное решение выделяется аналогично случаю решения (15).

Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$ и $C_0 \neq 0$. Тогда линеаризация с помощью преобразований (3) возможна только при $n = 0$ и $n = -2$. Случай $n = 0$ сводится к уже рассмотренному случаю $a_1 = 0$. Следовательно, необходимо рассмотреть случай $n = -2$. Тогда с помощью преобразований

$$F = -C_0 y + \frac{a_1}{y}, \quad d\zeta = y^{-m}(a_1 y^{-2} + C_0)dz \tag{19}$$

уравнение (1) при $n = -2$, $k = -m-3$, $l = -m+1$, $a_3 = C_0^2 a_2/a_1^2$ сводится к

$$w_{\zeta\zeta} + w_\zeta + \frac{a_2}{a_1^2} w = 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание общее решение (20), находим общее решение уравнения (1) при $n = -2$, $k = -m-3$, $l = -m+1$, $a_3 = C_0^2 a_2/a_1^2$:

$$y = -\frac{w \pm \sqrt{w^2 + 4C_0 a_1}}{2C_0}, \quad w = e^{-\frac{\zeta}{2}}\left[C_5 \exp\left\{\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_1}\zeta\right\} + C_6 \exp\left\{-\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_1}\zeta\right\}\right],$$
$$dz = \frac{y^{m+2}}{a_1 + C_0 y^2} d\zeta, \tag{21}$$

где C_5, C_6 — произвольные постоянные. Действительное решение при $a_2 > a_1^2/4$ выделяется аналогично предыдущим двум случаям. График решения (21) для некоторых значений параметров представлен на рис. 1.

Теперь воспользуемся другим критерием интегрируемости, найденным в работе [7]. Можно показать, что уравнение (1) удовлетворяет этому критерию лишь в

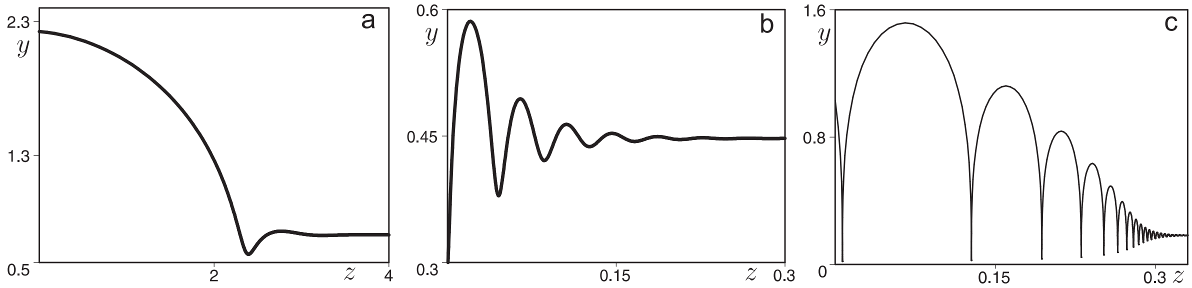


Рис. 1. Точное решение (21) уравнения (1), соответствующее следующим значениям параметров: a) $a_1 = a_2 = 1$, $C_0 = 2$, $C_5 = -3$, $C_6 = -1$, $m = 2$; b) $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $C_0 = 5$, $C_5 = C_6 = 1$, $m = 2$; c) $a_1 = 0.1$, $a_2 = 1$, $C_0 = 3$, $C_5 = 1$,$C_6 = -4$, $m = 2$

случаях $a_1 = 0, C_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 0, C_1 = 0$. Рассмотрим первый из этих случаев, при этом без ограничения общности в обоих случаях заменим a_2 на $-a_2$ в (1). Тогда можно показать, что уравнение (1) при $k = 3-m$, $l = 1-m$ и $a_3 = 2C_0^2/9$ с помощью преобразований

$$w = \frac{3\sqrt{a_2}}{C_0}y, \quad d\zeta = \frac{C_0}{3}y^{-m}dz, \tag{22}$$

сводится к уравнению

$$w_{\zeta\zeta} + 3w_\zeta + w^3 + 2w = 0. \tag{23}$$

Используя (22) и общее решение уравнения (23) (см. [7]), приходим к общему решению уравнения (1) при $k = 3 - m$, $l = 1 - m$ и $a_3 = 2C_0^2/9$:

$$y = \frac{C_0}{3\sqrt{a_2}}e^{-(\zeta+\zeta_0)}\mathrm{cn}\{e^{-(\zeta+\zeta_0)} - C_7, 1/\sqrt{2}\}, \quad z = \frac{3}{C_0}\int y^m d\zeta, \tag{24}$$

где cn — эллиптический синус, ζ_0, C_7 — произвольные постоянные.

Рассмотрим случай $C_0 = 0$. Тогда при $k = 4n - m + 3$, $l = 2n - m + 1$ и $a_3 = 2a_1^2/(9(n+1))$ уравнение (1) с помощью преобразований

$$w = \frac{3\sqrt{a_1(n+1)}}{a_1}y^{n+1}, \quad d\zeta = \frac{a_1}{3}y^{n-m}dz, \tag{25}$$

можно преобразовать к уравнению (23). Используя общее решение уравнения (23) и преобразования (25), находим общее решение (1) при $k = 4n - m + 3$, $l = 2n - m + 1$ и $a_3 = 2a_1^2/(9(n+1))$

$$y = \left[\frac{a_1}{3\sqrt{a_2(n+1)}}e^{-(\zeta+\zeta_0)}\mathrm{cn}\{e^{-(\zeta+\zeta_0)} - C_8, 1/\sqrt{2}\}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad z = \frac{3}{a_1}\int y^{m-n}d\zeta, \tag{26}$$

где ζ_0, C_8 — произвольные постоянные.

В данном разделе показано, что общее решение уравнения (1) при $a_1^2 + C_0^2 \neq 0$ может быть найдено при некоторых ограничениях на его параметры. Рассмотрено пять различных случаев, и для каждого из них найдено общее решение (1), выраженное либо через показательные, либо через эллиптические функции.

3. Заключение

В работе рассмотрено семейство нелинейных дифференциальных уравнений, являющееся редукцией к переменным бегущей волны для нелинейного уравнения конвекции–диффузии с полиномиальным источниками. Показано, что в стационарном случае без учета конвекции для данного уравнения общее решение можно построить без ограничений на его параметры. В общем случае найдены ограничения на параметры уравнения (1), при котором возможно построить его общее решение. Во всех случаях найдены соответствующие формулы для решений, выраженные через показательные и эллиптические функции.

Список литературы / References

[1] J. D. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 556 pp.

[2] N.A. Kudryashov, A.S. Zakharchenko, “A note on solutions of the generalized Fisher equation”, *Appl. Math. Lett.*, **32** (2014), 43–56

[3] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-London-New York, 2011, 112 pp.

[4] M. Sabatini, “On the period function of $x'' + f(x)x'^2 + g(x) = 0$”, *J. Differ. Equ.*, **196** (2004), 151–168

[5] V.K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, “On the complete integrability and linearization of certain second-order nonlinear ordinary differential equations”, *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461** (2005), 2451–2476

[6] A.K. Tiwari, S.N. Pandey, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, “Classification of Lie point symmetries for quadratic Lienard type equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$”, *J. Math. Phys.*, **54** (2013), 053506

[7] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “On the criteria for integrability of the Lienard equation”, *Appl. Math. Lett.*, **57** (2016), 114–120

[8] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “On the connection of the quadratic Lienard equation with an equation for the elliptic functions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20** (2015), 486–496

[9] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “Analytical solutions for problems of bubble dynamics”, *Phys. Lett. A*, **379** (2015), 798–802

[10] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, “Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble”, *J. Phys. A Math. Theor.*, **47** (2014), 405202

[11] W. Nakpim, S.V. Meleshko, “Linearization of Second-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations”, *Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl.*, **6** (2010), 1–11
a

[12] S. Moyo, S.V. Meleshko, “Application of the generalised Sundman transformation to the linearisation of two second-order ordinary differential equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12** (2011), 213–236

[13] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956

[14] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Dover Publications, Mineola, 1997

[15] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927

Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I., "Analytical Solutions of a Nonlinear Convection-Diffusion Equation With Polynomial Sources", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 309–316.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-309-316

Abstract. Nonlinear convection–diffusion equations are widely used for the description of various processes and phenomena in physics, mechanics and biology. In this work we consider a family of nonlinear ordinary differential equations which is a traveling wave reduction of a nonlinear convection–diffusion equation with a polynomial source. We study a question about integrability of this family of nonlinear ordinary differential equations. We consider both stationary and non–stationary cases of this equation with and without convection. In order to construct general analytical solutions of equations from this family we use an approach based on nonlocal transformations which generalize the Sundman transformations. We show that in the stationary case without convection the general analytical solution of the considered family of equations can be constructed without any constraints on its parameters and can be expressed via the Weierstrass elliptic function. Since in the general case this solution has a cumbersome form we find some correlations on the parameters which allow us to construct the general solution in the explicit form. We show that in the non–stationary case both with and without convection we can find a general analytical solution of the considered equation only imposing some correlation on the parameters. To this aim we use criteria for the integrability of the Lienard equation which have recently been obtained. We find explicit expressions in terms of exponential and elliptic functions for the corresponding analytical solutions.

Keywords: analytical solutions, elliptic function, nonlocal transformations, Liénard equations

On the authors:
Kudryashov Nikolay Alexeevich, orcid.org/0000-0001-5926-9715, Sci. Dr, Professor, Head of Department
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia, e-mail: nakudr@gmail.com

Sinelshchikov Dmitry Igorevich, orcid.org/0000-0003-0993-219X, PhD, Associate Professor,
National Research Nuclear University MEPhI, Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia,
e-mail: disnelshchikov@mephi.ru

Acknowledgments:
This research was supported by Russian Science Foundation grant No. 14–11–00258.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 317–325
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 317–325

©Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Быцюра С. В., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-317-325

УДК 517.9

Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта

Левашова Н. Т.[1], Мельникова А. А.[1], Быцюра С. В.

получена 20 мая 2016

Аннотация. Исследование решений начально-краевых задач для параболических уравнений является важной составляющей математического моделирования. Особый интерес для математического моделирования представляют краевые задачи, решения которых претерпевают резкое изменение в какой-либо области пространства. Такие области называются внутренними переходными слоями. В том случае, если положение переходного слоя изменяется со временем, решение параболической задачи имеет вид движущегося фронта. При доказательстве существования у начально-краевых задач решений такого вида весьма эффективным оказывается метод дифференциальных неравенств, согласно которому для данной краевой задачи строятся так называемые верхнее и нижнее решения. Суть асимптотического метода дифференциальных неравенств заключается в том, чтобы получать верхнее и нижнее решения как модификации асимптотических представлений решений краевых задач. Существование верхнего и нижнего решений является достаточным условием существования решения краевой задачи. В ходе проверки выполнения дифференциальных неравенств существенным оказывается так называемое «условие квазимонотонности». В настоящей работе рассмотрено, каким образом можно построить верхнее и нижнее решения для системы параболических уравнений при различных условиях квазимонотонности.

Ключевые слова: система параболических уравнений, переходный слой, метод дифференциальных неравенств

Для цитирования: Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Быцюра С. В., "Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 317–325.

Об авторах:
Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Быцюра Светлана Владимировна, orcid.org/0000-0001-7787-437X, студентка,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: проект 16-01-00473

Введение

В настоящей работе исследуется решение вида движущегося фронта краевой задачи для системы параболических уравнений вида

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^4 u_{xx} - \varepsilon^3 u_t = f\,(u, v, x, \varepsilon)\,, \quad \varepsilon^2 v_{xx} - \varepsilon v_t = g\,(u, v, x, \varepsilon) \\
x \in (0;1), \quad t \in (0;T], \\
u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \\
u(x,0) = u^0(x), \quad v(x,0) = v^0(x), x \in [0;1],
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где ε — малый параметр, f и g — достаточно гладкие функции в области $\overline{\Omega} := \{(u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0;1] \times (0;\varepsilon_0]\}$, а I_u и I_v – некоторые промежутки изменения переменных u и v, $\varepsilon_0 > 0$, $T > 0$.

Решение краевых задач в подобной постановке является важной составляющей математического моделирования. В частности, к задачам такого типа относится известная система ФицХью–Нагумо, на основании которой возможна разработка моделей, описывающих различные процессы самоорганизации, например, возбуждение в сердечной мышце [1], образование пятен на шкурах животных [2] или образование городских массивов [3]. Особый интерес для математического моделирования представляют краевые задачи, решения которых претерпевают резкое изменение в какой-либо области пространства. Такие области называются внутренними переходными слоями. В том случае, если положение переходного слоя изменяется со временем, решение параболической задачи имеет вид движущегося фронта. Как правило, наличие переходных слоев характерно для «жестких» систем, численное решение которых встречает определенные сложности. Поэтому аналитическое исследование решений краевых задач с внутренними переходными слоями является крайне важным этапом при разработке моделей.

Алгоритмы построения асимптотических представлений решений в виде движущегося фронта задач типа (1) при различных условиях на функции f и g в правых частях уравнений описаны в работах [4,5]. Доказательство существования таких решений в работе [4] проведено при помощи операторного метода, а в работе [5] с этой целью применялся метод дифференциальных неравенств. Обоснование этого метода для различных начально-краевых задач приведено в работах [6,7]. Суть метода заключается в построении для задачи (1) двух пар непрерывных функций $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, называемых, соответственно, верхним и нижним решениями, и удовлетворяющих следующей системе дифференциальных неравенств:

Условие H1. Упорядоченность.

$$
\underline{U} \le \overline{U}; \quad \underline{V} \le \overline{V}; \quad (x,t) \in [0;1] \times (0;T].
$$

Условие H2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения.

$$
\begin{gathered}
L_{1\varepsilon}(\overline{U}, v) := \varepsilon^4 \overline{U}_{xx} - \varepsilon^3 \overline{U}_t - f\left(\overline{U}, v, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{1\varepsilon}(\underline{U}, v), \quad \underline{V} \le v \le \overline{V}, \\
L_{2\varepsilon}(u, \overline{V}) := \varepsilon^2 \overline{V}_{xx} - \varepsilon \overline{V}_t - g\left(u, \overline{V}, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{2\varepsilon}(u, \underline{V}), \quad \underline{U} \le u \le \overline{U}, \\
(x,t) \in [0;1] \times (0;T].
\end{gathered}
$$

Условие Н3. Если верхнее решение не является гладким в некоторой точке $x = \bar{x}(t)$, в момент времени t, то выполняются следующие неравенства:

$$\left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)+0} \geq 0, \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)+0} \geq 0,$$

аналогично, если нижнее решение не является гладким при $x = \underline{x}(t)$, то выполняются неравенства

$$\left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)+0} \leq 0, \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)+0} \leq 0,$$

Условие Н4. В граничных точках

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{x=0} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{x=0} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{x=0}, \\ \left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{x=1} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{x=1}, \quad \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{x=1} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{x=1}.\end{gathered}$$

Условие Н5. В начальный момент времени

$$\underline{U}(x,0,\varepsilon) < u^0(x) < \overline{U}(x,0,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,0,\varepsilon) < v^0(x) < \overline{V}(x,0,\varepsilon)$$

Как показано в работе [7], существование верхнего и нижнего решений задачи (1) достаточно для существования классического решения задачи (1), которое заключено между верхним и нижним решениями.

В работах [5,8–10] предложен алгоритм построения верхнего и нижнего решений для задач с малыми параметрами при производных, согласно которому функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, строятся как модификации асимптотических представлений решений исследуемых задач. Этот алгоритм носит название асимптотического метода дифференциальных неравенств. В ходе проверки выполнения дифференциальных неравенств существенным оказывается так называемое «условие квазимонотонности» функций f и g в правых частях уравнений (1), а именно условий на производные функций f_v и g_u. В настоящей работе рассмотрено, каким образом можно построить верхнее и нижнее решения задачи (1) для различных условий на знаки этих производных.

1. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое представление решения задачи (1) будем строить, считая, что выполняются следующие условия:

Условие А1. Уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет относительно u единственное решение $u = \varphi(v,x) \in I_u$, причем $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0$.

Условие А2. Уравнение $h(v,x) := g(\varphi(v,x),v,x,0) = 0$ имеет ровно три изолированных корня $v = v^i(x) \in I_v$, $i = 1,2,3$, причем на всем отрезке $[0;1]$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^2(x) < v^3(x)$; $h_v(v^i(x),x) > 0$, $i = 1,3$; $h_v(v^2(x),x) < 0$.

Условие А3. (Условие квазимонотонности). Пусть всюду в $\overline{\Omega}$ выполняется одна из следующих систем неравенств:

$$\begin{array}{ll} \textbf{A3.1}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)<0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)<0 & \textbf{A3.2}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)>0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)>0; \\ \textbf{A3.3}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)<0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)>0 & \textbf{A3.4}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)>0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)<0, \end{array}$$

и в каждом случае справедливы неравенства

$$g_v\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)f_u\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)+$$
$$+g_u\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)f_v\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)>0.$$

Пусть в каждый момент времени t внутренний переходный слой сосредоточен в окрестности точки $x^*\in(0;1)$, а в начальный момент времени $x^*(0,\varepsilon)=x_{00}$. Кривая $x=x^*(t,\varepsilon)$ делит область $\bar{D}:=\{[0;1]\times[0;T]\}$ на плоскости (x,t) на две подобласти: $\bar{D}^-:=\{[0;x^*(t,\varepsilon)]\times[0;T]\}$ и $\bar{D}^+:=\{[x^*(t,\varepsilon);1]\times[0;T]\}$.

Асимптотическое представление решения задачи (1) в каждый момент времени строится отдельно в каждой из этих подобластей:

$$u=\begin{cases}u^{(-)},\ (x,t)\in\bar{D}^-,\\ u^{(+)},\ (x,t)\in\bar{D}^+;\end{cases}\qquad v=\begin{cases}v^{(-)},\ (x,t)\in\bar{D}^-,\\ v^{(+)},\ (x,t)\in\bar{D}^+.\end{cases}$$

Согласно алгоритму Васильевой [11] для описания решения в окрестности переходного слоя, а также в окрестности граничных точек отрезка $[0;1]$ вводятся растянутые переменные

$$\xi=\frac{x-x^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},\quad \zeta_-=\frac{x}{\varepsilon},\quad \zeta_+=\frac{1-x}{\varepsilon}.$$

Каждая из функций $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ представляет собой сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned} u^{(\mp)}&=\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q^{(\mp)}u(\xi,t,\varepsilon)+P^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon),\\ v^{(\mp)}&=\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q^{(\mp)}v(\xi,t,\varepsilon)+P^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon). \end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотического представления, $Q^{(\mp)}u(\xi,t,\varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\xi,t,\varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, $Pu^{(\mp)}(\zeta_\mp,\varepsilon)$, $Pv^{(\mp)}(\zeta_\mp,\varepsilon)$ – функции пограничных слоев в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$, соответственно.

Каждое слагаемое в суммах (2) представляется в виде разложения по степеням малого параметра ε, например

$$Q^{(-)}v(x,t,\varepsilon)=Q_0v^{(-)}(x,t)+\varepsilon Q_1v^{(-)}(x,t)+\varepsilon^2Q_2v^{(-)}(x,t)+\dots+\varepsilon^nQ_nv^{(-)}(x,t)+\dots.$$

Функция $x^*(t,\varepsilon)$ также представляется в виде разложения

$$x^*(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\dots+\varepsilon^nx_n(t)+\dots\tag{3}$$

Компоненты асимптотических представлений гладко сшиваются в точке x^* в каждый момент времени t.

Обозначим через $\tilde{v}(\xi, x^*)$ нулевое приближение асимптотического представления v-компоненты решения задачи (1), а через $\Phi(\xi, x^*)$ его производную по ξ :

$$\tilde{v}(\xi, x^*) = \begin{cases} v^1(x^*) + Q_0 v^{(-)}(\xi, t), & (x,t) \in \bar{D}^-; \\ v^3(x^*) + Q_0 v^{(+)}(\xi, t), & (x,t) \in \bar{D}^+; \end{cases} \qquad \Phi(\xi, x^*) = \begin{cases} \Phi^{(-)} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, & \xi \le 0; \\ \Phi^{(+)} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Для нулевого приближения u-компоненты решения получается выражение [4]

$$\tilde{u}\left(\xi, x^*\right) = \varphi\left(\tilde{v}(\xi, x^*), x^*\right).$$

Функция $\tilde{v}(\xi, x^*)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = h(\tilde{v}, x^*); \qquad \tilde{v}(-\infty, x^*) = v^1(x^*), \quad \tilde{v}(+\infty, x^*) = v^3(x^*). \tag{4}$$

Здесь через W обозначена скорость движения фронта: $W = \dfrac{dx^*}{dt}$.

Справедлива следующая **лемма** (см. [6]).

Для каждого значения $x^*(t)$ при фиксированном значении $t \in (0;T]$ существует единственная величина W такая, что задача (4) имеет единственное решение $\tilde{v}(\xi, x^*)$. Из условия гладкого сшивания асимптотических представлений нулевого порядка получаем следующее уравнение:

$$\Phi^{(-)}(0, x_0) = \Phi^{(+)}(0, x_0). \tag{5}$$

Здесь учтено разложение функции $x^*(t, \varepsilon)$ в ряд (3).
Условие A4. Пусть существует решение уравнения (5) с начальным условием $x_0(0) = x_{00}$.

При выполнении условий **A.1** – **A.4**, используя алгоритм Васильевой, можно получить функции U_n, V_n — асимптотическое представление произвольного порядка n решения задачи (1), а также разложение (3) порядка n.

2. Верхнее и нижнее решения

Введем обозначения

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) - \varepsilon^{n+1}\delta(t), \quad \bar{\xi} = \tfrac{x - \bar{x}(t)}{\varepsilon};$$
$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) + \varepsilon^{n+1}\delta(t), \quad \underline{\xi} = \tfrac{x - \underline{x}(t)}{\varepsilon}.$$

Кривая $\bar{x}(t)$ делит область $\bar{D}$ на подобласти $D^-_{up} := \{[0; \bar{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $D^+_{up} := \{[\bar{x}(t,\varepsilon); 1] \times [0;T]\}$, а кривая $\underline{x}(t)$ – на подобласти $D^-_{low} := \{[0; \underline{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $D^+_{low} := \{[\underline{x}(t,\varepsilon); 1] \times [0;T]\}$.

В области D^-_{up} будем строить функции $\overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon)$, в области D^+_{up} — функций $\overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon)$; аналогично для нижнего решения — функций $\underline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ и $\underline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$.

Функция $\delta(t)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия **H1** и **H3** для верхнего и нижнего решений.

2.1. Верхнее и нижнее решения в случае одинаковых знаков производных f_v и g_u

Если выполняются неравенства **А3.1** или **А3.2**, верхнее и нижнее решения строятся путем модификации асимптотических представлений решения U_{n+1} в порядке $n+1$:

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x)+q^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\overline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x)+q^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon);\\
\underline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}_{n+1}(\underline{\xi},\varepsilon)-\varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x)+q^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\underline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}_{n+1}(\underline{\xi},\varepsilon)-\varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x)+q^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon).
\end{aligned}$$

Здесь через $U^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)$ обозначены асимптотические представления функций $u^{(\mp)}$, в которых аргумент ξ заменен на $\bar{\xi}$, аналогичный смысл имеют обозначения $V^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)$. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ представляют собой модификацию регулярной части. Эти функции являются решением системы уравнений

$$\bar{f}^{(\mp)}_u(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{f}^{(\mp)}_v(x)\beta^{(\mp)}=A;\quad \bar{g}^{(\mp)}_u(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{g}^{(\mp)}_v(x)\beta^{(\mp)}=B, \tag{6}$$

где A и B — положительные константы и введено обозначение
$\bar{f}^{(\mp)}_u(x)=f(\varphi(v^{1,3}(x),x),v^{1,3}(x),x,0)$; аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}^{(\mp)}_v(x)$, $\bar{g}^{(\mp)}_u(x)$ и $\bar{g}^{(\mp)}_v(x)$.

Если выполнены условия **А3.1** или **А3.2**, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принимают положительные значения на отрезке $x\in[0;1]$.

Функции $q^{(\mp)}u$ и $q^{(\mp)}v$ устраняют невязки порядка ε^{n+1}, возникающие в результате модификации регулярной части в неравенствах из условия **Н2**, и эти неравенства оказываются выполненными при выборе достаточно больших значений констант A и B в равенствах (6).

Функции $p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon)$ и $p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon)$ подбираются таким образом, чтобы краевые условия задачи (1) выполнялись точно, тогда условие **Н4** оказывается выполненным.

Проверка условия упорядоченности осуществляется в полной аналогии с работой [12]

2.2. Верхнее и нижнее решения в случае различных знаков производных f_v и g_u

Если выполняются неравенства **А3.3** или **А3.4**, верхнее и нижнее решения строятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)+\varepsilon^{n}q^{(\mp)}_1u(\bar{\xi},t)+\varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x)+\bar{q}^{(\mp)}_2u(\bar{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\overline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}_{n+1}(\bar{\xi},\varepsilon)+\varepsilon^{n}q^{(\mp)}_1v(\bar{\xi},t)+\varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x)+\bar{q}^{(\mp)}_2v(\bar{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon);\\
\underline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}_{n+1}(\underline{\xi},\varepsilon)-\varepsilon^{n}q^{(\mp)}_1u(\underline{\xi},t)+\varepsilon^{n+1}\left(-\alpha^{(\mp)}(x)+\underline{q}^{(\mp)}_2u(\underline{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\underline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}_{n+1}(\underline{\xi},\varepsilon)-\varepsilon^{n}q^{(\mp)}_1v(\underline{\xi},t)+\varepsilon^{n+1}\left(-\beta^{(\mp)}(x)+\underline{q}^{(\mp)}_2v(\underline{\xi},t)\right)+\varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon).
\end{aligned}$$

Функции $q_1^{(-)}u(\bar{\xi},t)$, $q_1^{(-)}v(\bar{\xi},t)$ являются решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} q_1^{(-)}u=\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right)q_1^{(-)}v; \\ \frac{\partial^2 q_1^{(-)}v}{\partial\bar{\xi}^2}+\frac{dx_0}{dt}\frac{\partial q_1^{(-)}v}{\partial\bar{\xi}}-g_u\left(\bar{\xi}\right)q_1^{(-)}u-g_v\left(\bar{\xi}\right)q_1^{(-)}v=\pm2\delta\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right)\Phi^{(-)},\ \bar{\xi}<0; \\ q_1^{(-)}v(0,t)=p,\quad q_1^{(-)}v(-\infty,t)=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь обозначено $g_u\left(\bar{\xi}\right)=g_u\left(\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right),\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0,0\right)$ и аналогичный смысл имеет обозначение $g_u\left(\bar{\xi}\right)$.

Знак «$+$» в правой части дифференциального уравнения из (7) ставится, если выполнено условие **A3.4**, а если выполнено условие **A3.3**, то ставится знак «$-$». Величина p в граничном условии при $\bar{\xi}=0$ задачи (7) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие **H3**. Постановка задачи для функций $q_1^{(+)}u$, $q_1^{(+)}v$, определенных при $\bar{\xi}\geq 0$ получается, если заменить в (7) верхние индексы «$(-)$» на «$(+)$».

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в случае выполнения условия **A3.3** являются решением системы уравнений

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A;\quad -\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=B,$$

а если выполнено условие **A3.4**, эти функции суть решения системы

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}-\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A;\quad \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=B,$$

где A и B — положительные константы. В каждом случае $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принимают положительные значения на отрезке $x\in[0;1]$ в силу выполнения условия **A3**.

Функции $q_2^{(\mp)}u$ и $q_2^{(\mp)}v$ устраняют невязки порядка ε^{n+1}, возникающие в результате модификации регулярной части в неравенствах из условия **H2**.

Существование верхнего и нижнего решений задачи (1) позволяет доказать следующую теорему

Теорема 1. *При выполнении условий A1-A4 для любых достаточно гладких начальных функций $u^0(x)$, $v^0(x)$, лежащих между верхним $\overline{U},\overline{V}$ и нижним $\underline{U},\underline{V}$ решениями:*

$$\underline{U}(x,t,\varepsilon)<u^0(x)<\overline{U}(x,t,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,t,\varepsilon)<v^0(x)<\overline{V}(x,t,\varepsilon),$$

существует решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t\in[0;T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функции $U_n(x,t,\varepsilon)$, $V_n(x,t,\varepsilon)$ являются равномерным в области $\bar{D}_T:(x,t)\in[0;1]\times(0;T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Список литературы / References

[1] FitzHugh R. A., "Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane", *Biophys. J.*, **1** (1961), 445–466.

[2] Murray J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition*, Springer, 2003.

[3] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., "Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред", *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Yakovenko L. V, "A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium", *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473.

[4] Бутузов В. Ф., Неделько И. В., "Контрастная структура типа ступеньки в системе двух сингулярно возмущенных параболических уравнений", *Матем. моделирование*, **13**:12 (2000), 23–42; English transl.: Butuzov V. F., Nedelko I. V., "Step-type contrast structure in a system of two singularly perturbed parabolic equations", *Matem. Mod.*, **60**:3 (2001), 23–42.

[5] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Melnikova A. A., "Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations", *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[6] Fife P. C., McLeod J. B., "The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion. Equations to Travelling Front Solutions", *Arch. ration. mech. anal.*, **65**:4 (1977), 335–361.

[7] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press. New York, 1992.

[8] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., "Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., "Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz*, **46**:4 (2006), 585–593.

[9] Божевольнов Ю. В.,Нефедов Н. Н., "Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol'nov Yu. V., Nefedov N. N., "Front motion in a parabolic reaction-diffusion problem", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz*, **50**:2 (2010), 264–273.

[10] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N.N., "Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[11] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М, 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[12] Левашова Н. Т., Петровская Е. С., "Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки", *Ученые записки физического факультета*, 2014, №1, 1–13; [Levashova N. T., Petrovskaya E. S., "Primenenie metoda differentsialnykh neravenstv dlya obosnovaniya asimptotiki resheniya sistemy dvukh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy v vide kontrastnoy struktury tipa stupenki", *Uchenye zapiski fizicheskogo fakulteta*, 2014, №1, 1–13 (in Russian).]

Levashova N. T., Melnikova A. A., Bytsyura S. V., "The Application of the Differential Inequalities Method for Proving the Existence of Moving Front Solution of the Parabolic Equations System", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 317–325.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-317-325

Abstract. Investigations of initial boundary value problems for parabolic equations solutions are an important component of mathematical modeling. In this regard of special interest for mathematical modeling are the boundary value problem solutions that undergo sharp changes in any area of space. Such areas are called internal transitional layers. In case when the position of a transitional layer changes over time, the solution of a parabolic equation behaves as a moving front. For the purpose of proving the existence of such initial boundary value problem solutions, the method of differential inequalities is very effective. According to this method the so-called upper and lower solutions are to be constructed for the initial boundary value problem. The essence of an asymptotic method of differential inequalities is in receiving the upper and lower solutions as modifications of asymptotic submissions of the solutions of boundary value problems. The existence of the upper and lower solutions is a sufficient condition of existence of a solution of a boundary value problem. While proving the differential inequalities the so-called "quasimonotony" condition is essential. In the present work it is considered how to construct the upper and lower solutions for the system of the parabolic equations under various conditions of quasimonotony.

Keywords: parabolic equations system, internal transitional layer, differential inequalities method

On the authors:
Levashova Natalia Timurovna, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Melnikova Alina Aliksandrovna, orcid.org/0000-0001-9019-0263, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Bytsyura Svetlana Vladimirovna, orcid.org/0000-0001-7787-437X, student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by Russian fund of basic researches, project 16-01-00473

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 326–333
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 326–333

©Литвинов К. В., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-326-333
УДК 517.9

Моделирование неизотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ

Литвинов К. В.

получена 22 марта 2016

Аннотация. В данной работе проведен анализ плоского неизотермического стационарного течения аномально вязкой жидкости в каналах с несимметричными граничными условиями и неизвестной границей выхода. Геометрия каналов, в которых рассматривается задача, – это такие области, которые при переходе в биполярную систему координат отображаются в прямоугольники. Это существенно упрощает граничные условия, т.к. появляется возможность использовать ортогональную сетку и граничные условия задаются в ее узлах. Области такого типа часто встречаются в прикладных задачах. Граничные условия задаются следующим образом: жидкость прилипает к границам каналов, которые вращаются с разной скоростью и имеют разный радиус и температуру; кроме того, известна температура при входе в область деформации, а на границе с поверхностью материал имеет температуру поверхности; давление на входе и выходе из области обращается в нуль. Реологическая модель учитывает только аномалию вязкости. Материал несжимаемый.

Данный процесс описывается системой, состоящей из уравнений неразрывности, уравнения сохранения импульса и уравнения энергии: $\nabla_i v^i = 0$, $\rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij}\nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij}$, $\lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0$, свойства жидкости описываются реологическим уравнением: $P^{ij} = -g^{ij}P + \tau^{ij}$, $\tau^{ij} = \mu' e^{ij}$, где u, v – координаты скоростей движения среды, P – гидростатическое давление, T – температура, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность, τ^{ij} – тензор вязких напряжений, P^{ij} – тензор напряжения, e^{ij} – тензор скоростей деформации, g^{ij} – метрический тензор.

В данной работе предложен алгоритм расчета неизотермического течения для произвольной непрерывной функции, описывающей кривую течения.

Ключевые слова: неизотермическое, аномально вязкая жидкость, уравнение неразрывности, уравнения сохранения импульса, уравнения энергии, реология

Для цитирования: Литвинов К. В., "Моделирование неизотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 326–333.

Об авторе:
Литвинов Кирилл Владимирович, orcid.org/0000-0002-6475-8377, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, e-mail: k.v.litvinov@gmail.com

Введение

Рассматривается плоское неизотермическое стационарное течение аномально вязкой жидкости в каналах. Геометрия каналов, в которых рассматривается задача, – это такие области, которые при переходе в биполярную систему координат отображаются в прямоугольники. Это существенно упрощает граничные условия, т.к. появляется возможность использовать ортогональную сетку и граничные условия задаются в ее узлах. Области такого типа часто встречаются в прикладных задачах.

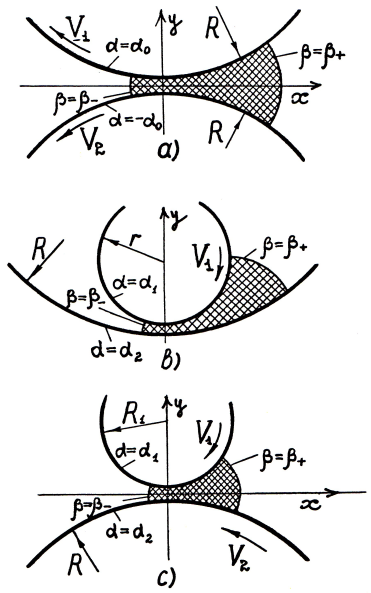


Рис. 1: Схемы областей деформации

Fig. 1: Deformation areas schemes

Граничные условия для областей, изображенных на рис. 1, задаются следующим образом: жидкость прилипает к границам каналов, которые вращаются с разной скоростью и имеют разный радиус и температуру; кроме того, известна температура при входе в область деформации, а на границе с поверхностью материал имеет температуру поверхности; давление на входе и выходе из области обращается в нуль.

Данный процесс описывается системой, состоящей из уравнений неразрывности, уравнения сохранения импульса и уравнения энергии [1]:

$$\nabla_i v^i = 0, \quad \rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij} \nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij}, \tag{1}$$

$$\lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0, \tag{2}$$

свойства жидкости описываются реологическим уравнением:

$$P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \mu' e^{ij}, \tag{3}$$

где u, v – координаты скоростей движения среды, P – гидростатическое давление, T – температура, c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность,

τ^{ij} – тензор вязких напряжений, P^{ij} – тензор напряжения, e^{ij} – тензор скоростей деформации, g^{ij} – метрический тензор.

В общем случае коэффициент μ' – функция трех первых инвариантов тензора скоростей деформации e^{ij} и параметров термодинамического состояния материала. Так как рассматривается плоская задача для несжимаемой жидкости, то первый и третий инварианты обращаются в нуль и коэффициент μ' является производной функцией только второго инварианта e^{ij} и температуры.

Существует много реологических моделей, учитывающих аномально вязкие свойства полимеров. В качестве примера использована наиболее употребляемая модель Оствальда–де Виля, которая описывает поведение некоторых вязких материалов в довольно широком диапазоне скоростей сдвига [6], [7]:

$$\tau^{ij} = \mu(T)|\frac{1}{2}I_2|^{(\frac{1}{2}(n(T)-1))}e^{ij}. \tag{4}$$

В данной работе предложен алгоритм расчета неизотермического течения для произвольной непрерывной функции, описывающей кривую течения.

Основные результаты

Исходную систему запишем в биполярной системе координат. При этом координаты x и y декартовой системы связаны с α и β биполярной следующим образом:

$$x = \frac{a\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{5}$$

Составляющие метрического тензора имеют вид:

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2} = h^2, \quad g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta} = 0, \tag{6}$$

т.е. система ортогональна, h – коэффициент Ляме.

Величина a выражается через геометрические параметры процесса R_1, R_2 и h_1, h_2,

$a = \sqrt{\frac{h_1(h_1+2R_1)+h_2(h_2+2R_2)}{2}}$.

Пусть u и v – физические компоненты скорости, ортогональные соответственно α и β. Вычисляем символы Кристоффеля [8] биполярной системы координат, тогда уравнения (1), (2) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(hv) + \frac{\partial}{\partial\beta}(hu) = 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\rho\left\{(uh)\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{u}{h}) + (vh)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h}) + h\frac{\partial}{\partial\beta}\left[(\frac{u}{h})^2 - (\frac{v}{h})^2\right] + 2h\frac{\partial h}{\partial\alpha}\frac{uv}{h^2}\right\} = \\ -\frac{\partial P}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\tau^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\tau^{\beta}_{\beta} + 2\tau^{\alpha}_{\beta}\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial\alpha} + (\tau^{\beta}_{\beta} - \tau^{\alpha}_{\alpha})\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial\beta}\end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\beta^2}\right) - \frac{\rho c_v}{h}\left(v\frac{\partial T}{\partial\alpha} + u\frac{\partial T}{\partial\beta}\right) + \tau^{mn}e_{mn} = 0 \tag{9}$$

$$e_{\alpha}^{\alpha}=2\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{u}{h^2}\frac{\partial h}{\partial\beta}\right),\ e_{\beta}^{\beta}=2\left(\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{v}{h^2}\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right),\ e_{\beta}^{\alpha}=e_{\alpha}^{\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h})+\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{v}{h}) \quad (10)$$

Решение уравнений рассматривается в приближении, где расстояние между поверхностями много меньше области деформации. Далее введем малый параметр ε, равный отношению ширины области деформации к ее длине $\varepsilon=\frac{\alpha_1}{\beta'}$.

Введем новые переменные $\xi=\frac{\beta}{\beta'}$, $\eta=\frac{\alpha}{\alpha'}$ и разложим обе компоненты скорости по степеням малого параметра ε.

$$u=V(u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\dots),\quad v=V(\varepsilon v_1(\xi,\eta)+\dots). \quad (11)$$

Параметр h удобно разложить по степеням отношения $\frac{(\operatorname{ch}\alpha-1)}{(1-\cos\beta)}$, имеющего порядок ε^2

$$h=\frac{a}{1-\cos\beta}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\alpha-1}{1-\cos\beta}+\dots\right).$$

Подставляя (11) в (7) – (9) и пренебрегая членами порядка выше ε, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(hv)+\frac{\partial}{\partial\beta}(hu)=0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\mu_e\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h})\right];\quad \frac{\partial P}{\partial\alpha}=0 \quad (13)$$

$$0=\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right)-\frac{\rho c_v}{h}\left(v\frac{\partial T}{\partial\alpha}+u\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)+\left[\mu_e\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h})\right]^2 \quad (14)$$

$$\mu_e=\mu(I_2),\quad \mu_e=\mu_0(T)\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h})\right|^{n(T)-1} \quad (15)$$

$\mu_0,\ n,\ \lambda,\ c_v$ – функции температуры, следовательно, координаты α.

Решение системы (12) – (15) с симметричными граничными условиями и различными реологическими моделями известно [1], [2]. В данной работе рассматривается существенно несимметричный случай граничных условий, которые записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}T=T_1,\quad u=V_1,\quad v=0\ (\alpha=\alpha_1),\quad T=T_2,\quad u=V_2\ (\alpha=\alpha_2);\\ P=0,\quad T=T_0\ (\beta=\beta_+,\ \alpha_2\le\alpha\le\alpha_1),\quad P=0\ (\beta=\beta_-),\end{gathered} \quad (16)$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2$ – границы области по α (поверхность); $\beta_+,\ \beta_-$ – координаты входа и выхода из области деформации.

Система (12) – (15) с условиями (16) оказывается незамкнутой: не хватает условия для определения координаты выхода материала из области деформации, или, что то же самое, не хватает условия определения величины расхода, т.е. решается задача с неизвестной свободной границей выхода. Очевидно, что математическая модель должна определять β_- или величину расхода материала независимым образом в ходе решения. Условие, позволяющее замкнуть систему (12) – (15), можно задать в виде

$$P = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0. \tag{17}$$

На выходе из области деформации $\beta = \beta_-$. Это условие подразумевалось в ряде других исследований, в частности в [2], поскольку, при учете только аномалии вязкости, условие обращения в нуль градиента давления на выходе из области деформации равносильно предположению о существовании плоского фронта при условии, что отсутствует проскальзывание материала на поверхности. Таким образом, величина расхода определяется в виде $\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}(hu)d\alpha = Q = h_*(\alpha_1 - \alpha_2)(V_1 + V_2)$, где h_* – значение h при $\beta = \beta_-$.

Получим еще одно уравнение $\int_{\beta_+}^{\beta_-} \frac{\partial P}{\partial \beta} d\beta = 0$, замыкающее исходную систему. В качестве первого приближения β_- берем из аналитического решения симметричной задачи [2]. Система (12) – (15) с граничными условиями (16) решается численными методами. Поскольку известно распределение температуры при входе в область деформации, проинтегрируем уравнение движения по α:

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial \beta} = \mu_e \frac{\partial}{\partial \alpha}(\frac{u}{h}) + C(\beta), \tag{18}$$

где $C(\beta)$ – постоянная интегрирования, имеющая смысл напряжения сдвига при $\alpha = 0$.

Проинтегрировав (18) еще раз по α и определив вторую постоянную из граничных условий, получим систему уравнений (19), описывающих динамику течения, эквивалентную исходной системе уравнений (12) – (13):

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha}\left(t\frac{\partial P}{\partial \beta} - C(\beta)\right)\frac{1}{\mu_e(t)}dtd\alpha = \frac{1}{2h^2}\left(h_*(V_1+V_2)(\alpha_1-\alpha_2) - 2V_2(\alpha_1-\alpha_2)h\right) \\
V_2 - V_1 = h^2\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\left(t\frac{\partial P}{\partial \beta} - C(\beta)\right)\frac{1}{\mu_e(t)}dt \\
\int_{\beta_+}^{\beta_-}\frac{\partial P}{\partial \beta}d\beta = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

Уравнение теплопроводности останется без изменения. Алгоритм решения поставленной задачи представляет собой следующую схему. Область деформации разбивается двумерной сеткой с равномерным шагом по каждой из переменных с узлами α_i и β_j. В узлах этой сетки и будем искать решение системы. Уравнения (19) представляют собой систему нелинейных уравнений относительно $\frac{\partial P}{\partial \beta}$ и $C(\beta)$. Решения при каждом фиксированном β ищутся методом Бройдена [3], [4], [5]. Таким образом, послойно доходим до границы выхода β_-, проверяем выполнение условий (17) и возвращаемся в начало области деформации. Из решений вычисляются в узлах сетки обе компоненты скорости:

$$u(\alpha,\beta) = h\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha}\left[\left(t\frac{\partial P}{\partial\beta} - C(\beta)\right)\frac{1}{\mu(\alpha,\beta,T)}\right]^{m(T)} dt + V_2, \tag{20}$$

$$v(\alpha,\beta) = \frac{1}{h}\int_{\alpha_2}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}(hu)dt. \tag{21}$$

Тогда уравнение энергии для некоторого фиксированного $\beta(j = const)$ запишется следующим образом:

$$0 = \frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2} + \frac{\rho c_v}{h}\left(v\frac{\partial T^j}{\partial\alpha} + u\frac{\partial T^j}{\partial\beta}\right) + \phi(u), \tag{22}$$

$$\left[\mu_e\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{u}{h})\right]^2 = \phi(u)$$

где $\phi(u)$ – функция диссипации. Оно так же решается численно, с помощью разностных схем. Но для точного решения уравнения (22) необходимо знать обе компоненты скорости на том же слое по β, где ищутся T.

Для решения этой задачи предполагается следующий алгоритм. С учетом распределения температуры при фиксированном $\beta(j = const)$ вычисляются u и v и функция диссипации. Затем по известному полю скоростей рассчитывается распределение температуры на следующем $(j+1)$-м слое. Иначе говоря, вместо решения уравнения (22) решается уравнение

$$0 = \frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial^2 T^j}{\partial\alpha^2} + \frac{\rho c_v}{h}u^*\frac{T^j - T^{j-1}}{\varDelta\beta} + v^*\frac{\partial T^j}{\partial\alpha} + \phi(u^*),$$

где

$$T^j = T(\alpha, \beta_+ + j \vartriangle \beta), \quad u^* = u(\alpha, \beta_+ + (j-1)\varDelta\beta), \quad v^* = v(\alpha, \beta_+ + (j-1)\varDelta\beta).$$

Уравнение (22) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно $T^j(\alpha)$, где – функция диссипации. Его можно решить любыми численными методами достаточно точно.

На рисунках 2 и 3 приведены примеры полученных полей температур при $T_1 = T_0 = 40^oC$, $T_2 = 60^oC$, $R1 = 30$, $R2 = 20$, $V1 = 38$, $V2 = 45$, $\beta_+ = 0.64$. Из них видно, что расстояние между цилиндрами существенно меняет поле температур. Если расстояние мало, то пограничные области, где наблюдаются локальные приросты температур, сближаются и температура среды близка к средней температуре. На рисунке 3 видно, что максимальные локальные приросты температуры наблюдаются вблизи более холодного цилиндра.

Данная модель позволяет рассчитывать поле скоростей, поле температур, давление в области деформации и затрачиваемую мощность, что представляет существенный интерес для приложений.

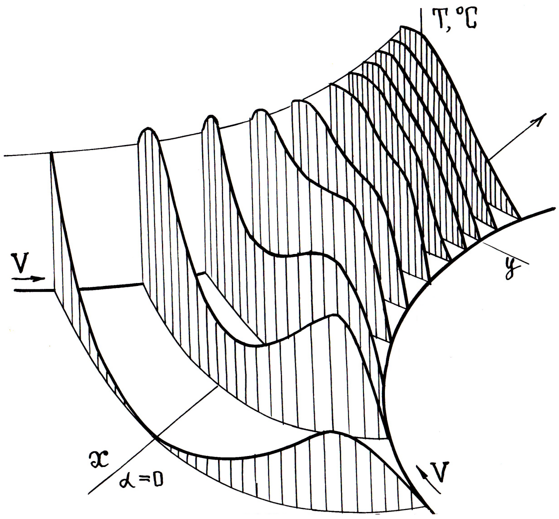


Рис. 2: Распределение температуры в области деформации($h_1 + h_2 = 0.01$).

Fig. 2: The distribution of a temperature in deformation region($h_1 + h_2 = 0.01$).

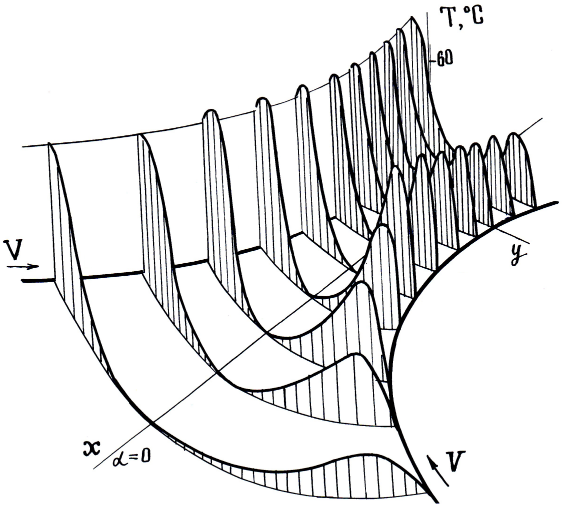


Рис. 3: Распределение температуры в области деформации($h_1 + h_2 = 0.1$)

Fig. 3: The distribution of a temperature in deformation region($h_1 + h_2 = 0.1$).

Список литературы / References

[1] Милдман С., "Течение полимеров", *Мир*, 1971; [Mildman C., "Techenie polimerov", *Mir*, 1971, (in Russian).]

[2] Белкин Н. Г., Литвинов В. В., Петрушанский В. Ю., "Механика жидкости и газа", *Известия академии наук СССР*, 1976; [Belkin N. G., Litvinov V. V., Petrushanskiy V. Yu., "Mekhanika zhidkosti i gaza", *Izvestiya akademii nauk SSSR*, 1976, (in Russian).]

[3] Van de Rotten B., *A limited memory Broyden method to solve high-dimensional systems of nonlinear equations*, University of Leiden, 2003.

[4] Broyden C. G., "On infinite soluble groups", *Math. Comp.*, **19** (1965), 577–593.

[5] Kvaalen, Eric, "A faster Broyden method", *BIT Numerical Mathematics (SIAM)*, **31** (1991), 369–372.

[6] Виноградов Г. В., Малкин А. Я., "Реология полимеров", *Химия*, 1977, 440; [Vinogradov G. V., Malkin A. Ya., "Reologiya polimerov", *Khimiya*, 1977, 440, (in Russian).]

[7] Малкин А. Я., Исаев А. И., "Реология. Концепции, методы, приложения", *Профессия*, 2007, 560; [Malkin A. Ya., Isaev A. I., "Reologiya kontseptsii, metody, prilozheniya", *Professiya*, 2007, 560, (in Russian).]

[8] Сокольников И. С., "Тензорный анализ", *Наука*, 1971, 376; [Sokolnikoff I. S., "Tensor analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua", 1951]

Litvinov K. V., "Modelling of Non-isothermal Flow Abnormally Viscous Fluid in the Channels with Various Geometry of Boundaries", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 326–333.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-326-333

Abstract. In this paper, we analyzed the flat non-isothermal stationary flow of abnormally viscous fluid in the channels with asymmetric boundary conditions and an unknown output boundary. The geometry of the channels in which the problem is considered, is such regions, that at the transition to bipolar a system of coordinates map into rectangles. This greatly simplifies the boundary conditions, since it is possible to use an orthogonal grid and boundary conditions are given in its nodes. Fields of this type are often found in applications.

The boundary conditions are set as follows: the liquid sticks to the boundaries of the channels, which rotate at different speeds and have different radius and temperature; moreover, temperature at the entrance to deformation is known, while on the boundary with the surface the material has the surface temperature; the pressure on the enter and exit of the region becomes zero. The rheological model only takes into account the anomaly of viscosity. The material is not compressible.

This process can be described by a system consisting of continuity equations, the equations of conservation of momentum and an energy equation: $\nabla_i v^i = 0, \quad \rho v^i \nabla_i v^i = -g^{ij}\nabla_i P + \nabla_i \tau^{ij}, \lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \tau^{ij} e_{ij} = 0$, rheological properties of the liquid are described by the equation: $P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \mu' e^{ij}$ where u, v - coordinates of environmental speeds, P - the hydrostatic pressure, T - temperature, c_v - specific heat, ρ - density, λ - thermal conductivity, τ^{ij} - a viscous stress tensor, P^{ij} - a stress tensor, e^{ij} - a rate of the deformation tensor, g^{ij} - the metric tensor.

In this paper, we propose an algorithm for calculating a non-isothermal flow for an arbitrary continuous function that describes the flow curve.

Keywords: non-isothermal, abnormally viscous fluid, continuity equation, momentum equation, energy equation, rheology

On the author:
Litvinov Kirill Vladimirovich, orcid.org/0000-0002-6475-8377, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia, e-mail: k.v.litvinov@gmail.com

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 334–341
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 334–341

©Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-334-341

UDC 519.956

Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes

Lukyanenko D. V.[1], Volkov V. T.[2,3], Nefedov N. N.[2,3], Recke L.[3], Schneider K.[3]

Received May 20, 2016

Abstract. The main objective of the paper is to present a new analytic-numerical approach to singularly perturbed reaction-diffusion-advection models with solutions containing moving interior layers (fronts). We describe some methods to generate the dynamic adapted meshes for an efficient numerical solution of such problems. It is based on *a priori* information about the moving front properties provided by the asymptotic analysis. In particular, for the mesh construction we take into account *a priori* asymptotic evaluation of the location and speed of the moving front, its width and structure. Our algorithms significantly reduce the CPU time and enhance the stability of the numerical process compared with classical approaches.

The article is published in the authors' wording.

Keywords: singularly perturbed parabolic periodic problems, interior layer, Shishkin mesh, dynamic adapted mesh

For citation: Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., "Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 334–341.

On the authors:
Lukyanenko Dmitry V., PhD, associate professor,
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, Faculty of Physics, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Volkov Vladimir T., orcid.org iD 0000-0002-4205-4141, PhD, associate professor,
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, Faculty of Physics, e-mail: volkovvt@mail.ru

Nefedov Nikolay N., Professor
Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Leninskie Gory, MSU, Faculty of Physics, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Recke Lutz, Professor,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Schneider Klaus, Professor,
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany, e-mail: schneider@wias-berlin.de

Acknowledgments:
This work was supported by [1] RFBR, projects No. 16-01-00755, 14-01-00182, [2] RFBR, project No. 16-01-00437, [3] RFBR - DFG, project No. 14-01-91333.

Introduction

Singularly perturbed parabolic problems often feature narrow boundary and interior layers (stationary or moving fronts). Their numerical treatment by means of difference schemes requires meshes with a very large number of nodes. In some cases it leads to unacceptable CPU-times and unreliable solutions due the accumulation of round-off errors. To overcome both problems we propose an effective asymptotic-numerical approach for problems with moving interior layers in nonlinear reaction-diffusion-advection equations. Its motivation comes from the following observations: the smaller the parameter ε in singularly perturbed problem, the more rough and unstable the constructed numerical solution we obtain; but the more precise *a priori* information about the exact solution we can get from the asymptotic analysis. So, an appropriate combination of asymptotic analysis and numerical schemes should improve the effectiveness of numerical calculations, increase its speed and stability.

This idea has been used recently for problems with stationary interior layers in [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], where special grids have been used. In the case of moving interior layers, fairly complicated difference schemes has been constructed in the papers [2, 8, 9, 10] and [11] where one example of periodic problem was considered.

In this paper we present an effective analytic-numerical approach for the numerical approximation of periodic solutions with moving interior layers in reaction-diffusion-advection equations. This approach exploits the asymptotic results obtained in [12, 13, 14] and is based on the construction of *dynamic adapted mesh*(DAM).

Note, that numerical investigation of time-periodic problems generates a number of specific features. The main of them is that there is no information about the location of the interior layer at the initial time moment. To determine the initial conditions, which are necessary for further numerical calculations with the dynamic adapted mesh, we can use asymptotic analysis of the problem.

Another approach for numerical solving of periodic problems is to use the method of relaxation count. However, in this case it is necessary to know the stability of the periodic solution and investigate its domain of influence for the correct choice of the initial approximation. This proof and related estimates also can be done using the asymptotic analysis of the periodic problem by the methods developed in [12, 13].

The paper is structured as follows. In Section 1. we discuss methods by which we can obtain *a priori* information that will be used for the process of constructing a DAM. In Section 2. we briefly describe the main ideas for constructing DAM.

1. Asymptotic analysis and *a priori* information

To demonstrate our approach we consider the following problem

$$\begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = A(u,x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + B(u,x,t) \\ \text{for } (x,t) \in D := \{x \in (-1,1);\ t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1,t) = u_{left}(t), \quad u(1,t) = u_{right}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u(x,t+T) \qquad \text{for } x \in [-1,1],\ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

where the parameter ε is sufficiently small ($0 < \varepsilon \ll 1$) and the functions $A(u,x,t)$, $B(u,x,t)$, $u_{left}(t)$ and $u_{right}(t)$ are sufficiently smooth and T-periodic in t.

The methods of asymptotic analysis for singularly perturbed time-periodic parabolic problems was developed in [12, 13]. It is known [13] that under certain conditions this problem has a solution of moving front type: in the interval $(-1,1)$ there is some periodically moving point $x_{tr}(t,\varepsilon)$ which is connected with a thin transition layer containing $x_{tr}(t,\varepsilon)$ such that the solution for $x < x_{tr}(t,\varepsilon)$ is close to some level $u_{left}(t)$ and for $x > x_{tr,\varepsilon}(t)$ close to some level $u_{right}(t)$, where $u_{left}(t) \neq u_{right}(t)$ for all t. The main purpose of this paper is to present an effective numerical method for the solution of the moving front type which is based on the asymptotic *a priori* information such as *location* and/or *speed* of the internal layer (front), *width* of the internal layer and *structure* of the internal layer. This information can be obtained by the asymptotic analysis of the problem (1) which was developed in [13]. Here we recall some ideas and formulas from [13].

If we put $\varepsilon = 0$ in (1) we get the reduced equation and define two functions

$$\begin{aligned} &\varphi^l(x,t): \quad A(u,x,t)\frac{du}{dx} + B(u,x,t) = 0, \quad u(-1,t) = u_{left}(t); \\ &\varphi^r(x,t): \quad A(u,x,t)\frac{du}{dx} + B(u,x,t) = 0, \quad u(1,t) = u_{right}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

where t has to be considered as a parameter.

Condition 1. *Suppose that for* $(x,t) \in \bar{D} := \{x \in [-1,1], t \in \mathbb{R}\}$ *there exist* T*-periodic in* t *solutions* $\varphi^l(x,t)$ *and* $\varphi^r(x,t)$ *of the problem (2) satisfying the following inequalities for all* $(x,t) \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} &a) \quad \varphi^l(x,t) < \varphi^r(x,t), \\ &b) \quad A(\varphi^l(x,t),x) > 0, \quad A(\varphi^r(x,t),x) < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Let us define the function

$$I(x,t) := \int\limits_{\varphi^l(x,t)}^{\varphi^r(x,t)} A(u,x,t)du. \tag{4}$$

Condition 2. *The equation*

$$I(x,t) = 0 \tag{5}$$

has a T*-periodic solution* $x_0(t)$ *satisfying for all* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &a) \; -1 < x_0(t) < 1, \\ &b) \quad \int\limits_{\varphi^l(x_0(t),t)}^{s} A(u,x_0(t),t)du > 0 \quad \text{for} \quad s \in \left(\varphi^l(x_0(t),t), \varphi^r(x_0(t),t)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Condition 3. *The solution* $x_0(t)$ *of equation (5) obeys the condition*

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x_0(t),t) < 0 \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

In [13] under Conditions 1–3 the existence of the solution of (1) with moving internal layer was proved and rigorous asymptotic analysis of this solution was presented.

Asymptotic of the solutions of (1) was built in the form

$$U^{l,r}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}^{l,r}(x,t,\varepsilon) + Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{l,r}(x,t) + Q_i^{l,r}(\xi,t) \right), \tag{8}$$

where $\bar{u}^{l,r}(x,t,\varepsilon)$ are regular functions which represent the solution far from the transition point $x_{tr}(t,\varepsilon)$; the functions $Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon)$, where $\xi = (x - x_{tr}(t,\varepsilon))/\varepsilon$, describe the moving front located near this point; $\xi \le 0$ is related to a function with the upper index l and $\xi \ge 0$ to a function with the upper index r.

Location of the transition point $x_{tr}(t,\varepsilon)$ presented in the form of a power series in ε

$$x_{tr}(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... \tag{9}$$

where $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$ are T-periodic functions. The terms of series in (8) and (9) can be determined by the asymptotic procedure [13] from $C^{(1)}$–matching conditions for functions $U^l(x,t,\varepsilon)$ and $U^r(x,t,\varepsilon)$ – continuous matching for functions and its first derivatives at the point $x = x_{tr}(t,\varepsilon)$ for all orders of ε.

It was also proved in [13] that functions $Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon)$ exponentially tend to zero if $\xi \to \pm\infty$. So the front width can be estimated as $d = C\varepsilon|\ln\varepsilon|$.

In Section 2. we use this information and illustrate our analytic-numerical approach by means of the following particular case of problem (1): $A(u,x,t) = -u$ and $B(u,x,t) = ub(t)$, where $b(t) = 2 + \cos(4\pi t)$; $u_{left}(t) = -8 + \sin(4\pi t)$, $u_{right}(t) = 8 - 2\sin(4\pi t)$.

For this example we have

$$\varphi^l(x,t) = -8 + \sin(4\pi t) + (x+1)\,(2 + \cos(4\pi t))\,;$$
$$\varphi^r(x,t) = 8 - 2\sin(4\pi t) + (x-1)\,(2 + \cos(4\pi t))\,.$$

Condition 1 is satisfied because it holds for all $x \in [-1, 1]$

$$\varphi^l(x,t) - \varphi^r(x,t) = -16 + 2\,(2 + \cos(4\pi t)) + 3\sin(4\pi t) < 0;$$

$$A(\varphi^l(x,t),x,t)) = 8 - (x+1)\,(2 + \cos(4\pi t)) - \sin(4\pi t) > 0,$$
$$A(\varphi^r(x,t),x,t) = -8 - (x-1)\,(2 + \cos(4\pi t)) + 2\sin(4\pi t) < 0.$$

The function $I(x,t)$ defined in (4) reads

$$I(x,t) = \int\limits_{\varphi^l(x,t)}^{\varphi^r(x,t)} -u du = \frac{1}{2}\,(2x\,(2 + \cos(4\pi t)) - \sin(4\pi t))\,(-16 + 2\,(2 + \cos(4\pi t)) + 3\sin(4\pi t))$$

and (5) gives the following expression for the zero order term of moving front position

$$x_0(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{4 + 2\cos(4\pi t)} \in [-1; 1] \qquad \text{for all} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Conditions 2 and 3 hold true for this $x_0(t)$.

At first order of ε we have from [13]

$$x_1(t) = -\frac{1}{2b(t)} \cdot \left[2x_0'(t) + \left(\bar{u}_1^l(x_0(t),t) + \bar{u}_1^r(x_0(t),t)\right)\right], \tag{11}$$

where

$$\bar{u}_1^l(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{left}(t)}{b(t)}\right] \cdot \ln\left(1 + \frac{b(t)}{u_{left}(t)}(x+1)\right) + \frac{d}{dt}\left[\ln(b(t))\right] \cdot (x+1);$$

$$\bar{u}_1^r(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{right}(t)}{b(t)}\right] \cdot \ln\left(1 + \frac{b(t)}{u_{right}(t)}(x-1)\right) + \frac{d}{dt}\left[\ln(b(t))\right] \cdot (x-1).$$

2. Dynamic adapted mesh construction

Our idea of dynamic adaptive mesh construction is quite simple. If we know the width of the transition layer, we can introduce a basic uniform mesh with steps equal to this width. Then refine two intervals that are nearest to the transition point $x_{tr}(t,\varepsilon)$ which location we estimate by asymptotic analysis as $x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$. Next, if we know the position of the transition layer for each time step, we can track whether the transition layer is located in these intervals or not. If the transition layer starts to leave one of these intervals, we refine the following or previous basic interval, perform an interpolation of the function on these additional nodes. In the following calculations we discard the nodes of the refined interval that are farthest from the position of the transition point. For an appropriate interpolation we need an information about the structure of the transition layer. As a result, we have again only two refined basic intervals. Some example of the constructed DAM by this approach is represented on Figure 1.

Another approach is to construct classical "Shishkin mesh"(see Figure 2).

A crucial assumption for this constructing process is the possibility to obtain a corresponding *a priori* information. This problem was discussed in Section 1. for one type of reaction-diffusion-advection equations.

Some example of numerical calculations is represented on the Figure 3.

3. Conclusion

Asymptotic analysis of a singularly perturbed problem gives the *a priori* which can be used for efficient mesh construction. This fact provides the possibility for a productive combination of asymptotic and numerical approaches in order to substantially improve the effectiveness of numerical calculations.

Based on these ideas we propose an efficient analytic-numerical algorithm for a singularly perturbed reaction-diffusion-advection equations that allows significantly to reduce the complexity and to enhance the stability of the numerical calculations in comparison with classical approaches. As a result, we can essentially save CPU time and significantly speed up the process of constructing approximate solutions with a suitable accuracy.

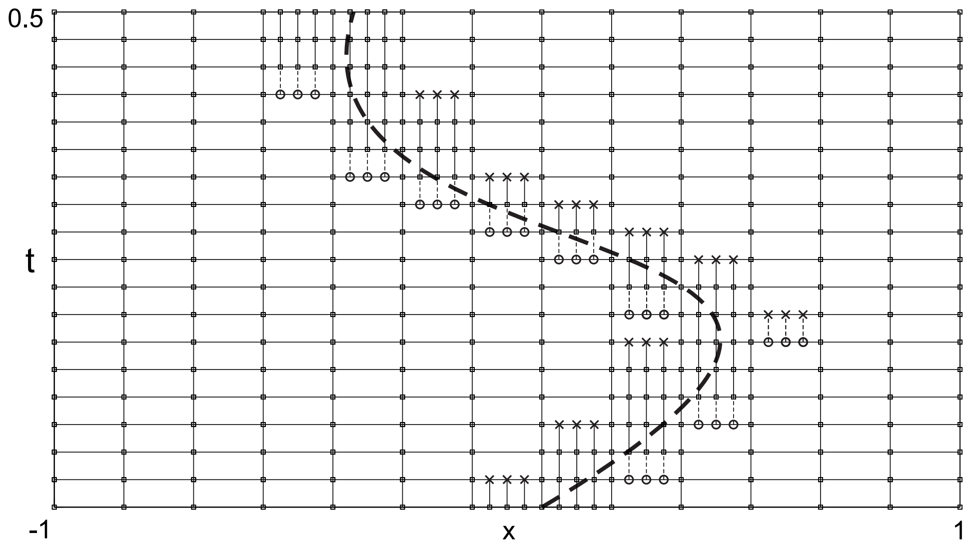


Fig 1. Some result of the process of dynamic adapted mesh construction: □ – node that is used for calculations; o – node in which function was interpolated; × – node that was discarded from the process of calculations on the following steps

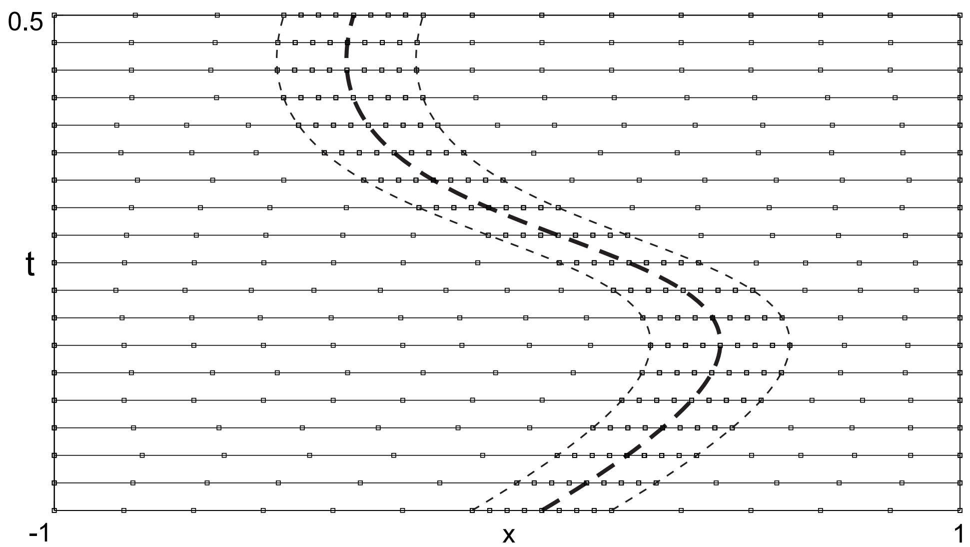


Fig 2. Some result of the process of dynamic adapted mesh construction in the case of constructing classical “Shishkin meshes”

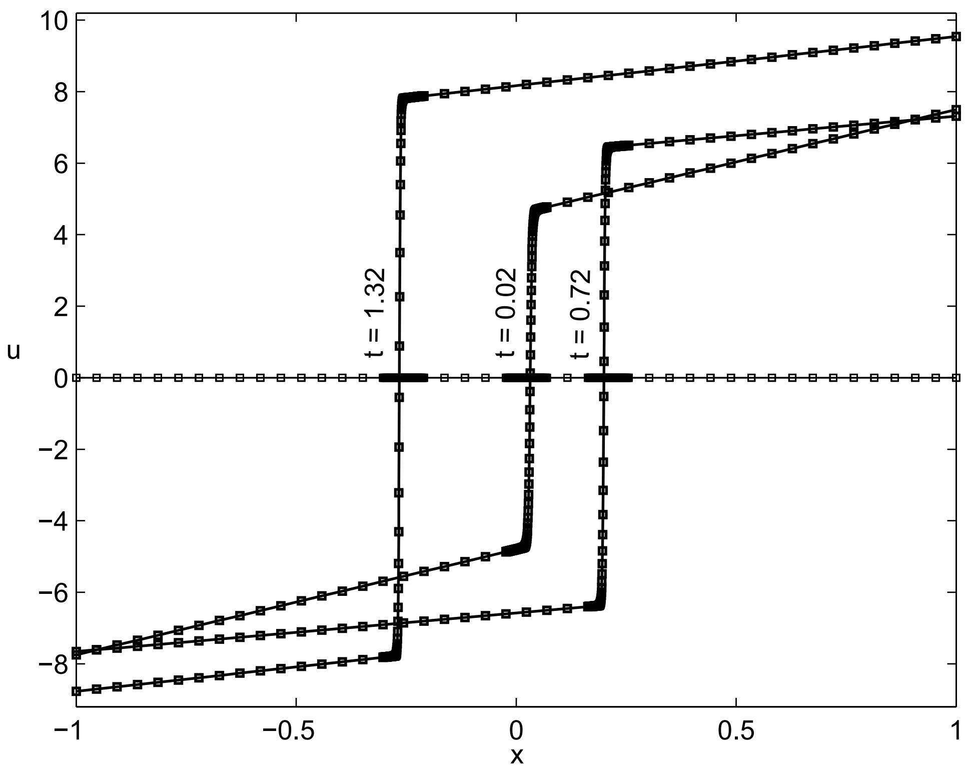


Fig 3. The example of calculation for $\varepsilon = 10^{-2}$. $N_0 = 43$ (has been calculated automatically), $N_{int} = 100$ (control parameter that has been set manually)

References

[1] G. I. Shishkin, "Grid approximation of a singularly perturbed quasilinear equation in the presence of a transition layer", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **47**:1 (1993), 83–88.

[2] E. O'Riordan, J. Quinn, "Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem", *Lectures Notes in Computational Science and Engeneering*, **81** (2011), 187–195.

[3] E. O'Riordan, J. Quinn, "Parameter-uniform numerical method for some linear and nonlinear singularly perturbed convection-diffusion boundary turning point problems", *BIT Numerical Mathematics*, **51**:2 (2011), 317–337.

[4] N. Kopteva, M. Stynes, "Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem", *Numerische Mathematik*, **119**:4 (2011), 787–810.

[5] N. Kopteva, E. O'Riordan, "Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations", *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **7**:3 (2010), 393–415.

[6] N. Kopteva, "Numerical analysis of a 2D singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem", *Lecture Notes in Computer Science*, **5434** (2009), 80–91.

[7] P. A. Farrell, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, "A class of singularly perturbed semilinear differential equations with interior layers", *Mathematics of Computation*, **74**:252 (2005), 1759–1776.

[8] G. I. Shishkin, "Necessary conditions for ε-uniform convergence of finite difference schemes for parabolic equations with moving boundary layers", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **47**:10 (2007), 1636–1655.

[9] G. I. Shishkin, L. P. Shishkina, P. W. Hemker, "A Class of Singularly Perturbed

Convection-Diffusion Problems with a Moving Interior Layer. An a Posteriori Adaptive Mesh Technique", *Comput. Meth. Appl. Math.*, **4**:1 (2004), 105–127.

[10] G. I. Shishkin, "Grid Approximation of a Singularly Perturbed Parabolic Equation on a Composite Domain in the case of a Concentrated Source on a Moving Interface", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **43**:12 (2003), 1738–1755.

[11] J. Quinn, "A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location", *Computational and Applied Mathematics*, **290**:15 (2015), 500–515.

[12] V. T. Volkov, N. N. Nefedov, "Development of the Asymptotic Method of Differential Inequalities for Investigation of Periodic Contrast Structures in Reaction–Diffusion Equations", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:4 (2006), 585–593.

[13] N. N. Nefedov and L. Recke and K. R. Schneider, "Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405** (2013), 90–103.

[14] V. T. Volkov, N. N. Nefedov, "Asymptotic-numerical investigation of generation and motion of fronts in phase transition models", *Lecture Notes in Computer Science*, **8236** (2013), 524–531.

Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К., "Аналитико-численный подход для решения сигулярно возмущенных параболических уравнений с использованием динамически адаптированных сеток", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 334–341.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-334-341

Аннотация. Основной целью данной работы является представление нового аналитико-численного подхода к исследованию сингулярно возмущенных моделей типа реакция-диффузия-адвекция, решения которых содержат движущиеся внутренние переходные слои (фронты). В работе описаны некоторые методы построения динамически адаптированных сеток для эффективного численного решения задач указанного типа. Эти методы основаны на использовании априорной информации о свойствах движущегося фронта, полученной в результате асимптотического анализа. В частности, при построении сетки учитываются априорные асимптотические оценки локализации и скорости фронта, его ширина и структура. Предложенные алгоритмы позволяют существенно снизить затраты вычислительных ресурсов и повысить стабильность численного счета по сравнению с известными классическими подходами.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические уравнения, периодические решения, динамически адаптированные сетки

Об авторах:

Лукьяненко Дмитрий Витальевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Волков Владимир Тарасович, orcid.org 0000-0002-4205-4141, канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, e-mail: volkovvt@mail.ru

Нефедов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Реке Луц, доктор физ.-мат. наук, профессор,
HU Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee, Berlin, Germany, e-mail: recke@mathematik.hu-berlin.de

Шнайдер Клаус, доктор физ.-мат. наук, профессор, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany, e-mail: schneider@wias-berlin.de

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 16-01-00755, 14-01-00182 и 16-01-00437, РФФИ - ННИО, проект № 14-01-91333.

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 342–348
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 342–348

©Nefedov N. N., Nikulin E. I., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-342-348

UDC 519

Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-Diffusion Equations in the Two-Dimensional Case

Nefedov N. N., Nikulin E. I.

Received May 20, 2016

Abstract. Parabolic singularly perturbed problems have been actively studied in recent years in connection with a large number of practical applications: chemical kinetics, synergetics, astrophysics, biology, and so on. In this work a singularly perturbed periodic problem for a parabolic reaction-diffusion equation is studied in the two-dimensional case. The case when there is an internal transition layer under unbalanced nonlinearity is considered. The internal layer is localised near the so called transitional curve. An asymptotic expansion of the solution is constructed and an asymptotics for the transitional curve is determined. The asymptotical expansion consists of a regular part, an interior layer part and a boundary part. In this work we focus on the interior layer part. In order to describe it in the neighborhood of the transition curve the local coordinate system is introduced and the stretched variables are used. To substantiate the asymptotics thus constructed, the asymptotic method of differential inequalities is used. The upper and lower solutions are constructed by sufficiently complicated modification of the asymptotic expansion of the solution. The Lyapunov asymptotical stability of the solution was proved by using the method of contracting barriers. This method is based on the asymptotic comparison principle and uses the upper and lower solutions which are exponentially tending to the solution to the problem. As a result, the solution is locally unique.

The article is published in the authors' wording.

Keywords: reaction-diffusion, singular perturbations, small parameter, interior layers, unbalanced reaction, boundary layers, differential inequalities, upper and lower solutions

For citation: Nefedov N. N., Nikulin E. I., "Existence and Stability of Periodic Solutions for Reaction-Diffusion Equations in the Two-Dimensional Case", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 342–348.

On the authors:
Nefedov Nikolay Nikolaevich, Professor
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Nikulin Egor Igorevich, orcid.org/0000-0003-3850-4960, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR and RFBR-DFG projects (pr. 15-01-04619, 14-01-91333).

Introduction

The main objective of the paper is the development and application of the asymptotic comparison principle in a new class of problems for nonlinear parabolic singularly perturbed equations in the two-dimensional case. These equations can have solutions with boundary and internal layers. These problems have been actively studied in recent years in connection with a large number of practical applications: chemical kinetics, synergetics, astrophysics, biology, and so on. Solutions of these problems, under natural assumptions, have narrow domains of rapid change, namely, boundary and internal layers, and they are difficult both for numerical solution and for asymptotic search.

1. Problem statement

In this work we consider a singularly perturbed problem. It is a parabolic nonlinear differential reaction-diffusion equation:

$$\begin{aligned} &N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2\left(\triangle u - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - F(u,x,y,t,\varepsilon) = 0,\\ &(x,y,t) \in D_t := \{(x,y,t) \in R^3 : (x,y) \in D, t \in R\},\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x,y,t,\varepsilon) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, t \in R,\\ &u(x,y,t,\varepsilon) = u(x,y,t+T,\varepsilon), \quad (x,y) \in \bar{D}, t \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, and the derivative $\frac{\partial}{\partial n_\Gamma}$ is taken along the inner normal to the smooth boundary Γ of the given two-dimensional domain D, and $\varepsilon > 0$ is a small parameter.

Assume that the following conditions hold:

(A1) Let $F(u,x,y,t,\varepsilon)$ be a function sufficiently smooth with respect to its arguments and T-periodic with respect to t.

(A2) The degenerate equation $F(u,x,y,t,0) = 0$ has precisely three isolated solutions T-periodic with respect to t, $\varphi^{(-)}(x,y,t) < \varphi^{(0)}(x,y,t) < \varphi^{(+)}(x,y,t)$, $(x,y,t) \in \bar{D}_t$.

(A3) $F_u(\varphi^{(\pm)},x,y,t,0) > 0, F_u(\varphi^{(0)},x,y,t,0) < 0$, $(x,y,t) \in \bar{D}_t$. Using in the standard way the local system of coordinate (r,θ) near the curve C_0 (how to find this curve is explained below), let us introduce a new function

$$I(r,\theta,t) := \int\limits_{\varphi^{(-)}(r,\theta,t)}^{\varphi^{(+)}(r,\theta,t)} F(u,r,\theta,t,0)du.$$

and impose the following conditions:

(A4) Suppose there exists a sufficiently smooth simple closed curve $C_0(t)$ lying in D, such that in the considered domain $I|_{r=0} = 0$, $\theta \in [0;\Theta_0]$, where $[0;\Theta_0]$ is the domain of variation of the coordinate θ on the curve C_0.

(A5) $\frac{\partial I}{\partial r}\Big|_{r=0} < 0$, which means that the nonlinearity is unbalanced.

We search for the interface curve $C(t,\varepsilon)$ in the following form: $r = \lambda^*(\theta,t,\varepsilon)$.

As is known (see [15], [11], [10], [1]), problems similar to (1) can have solutions both with boundary layers near Γ and the internal transition layers. In the present paper, we consider a solution such that, for every time moment t, as ε tends to 0, it tends to the root $\varphi^{(+)}(x,y,t)$ in the domain bounded by some smooth closed curve $C(t,\varepsilon) \subset D$ and tends to another root $\varphi^{(-)}(x,y,t)$ in the other part of the domain D. A domain of rapid change of the solution occurs in a neighborhood of the curve $C(t,\varepsilon)$, and the solution in this domain is referred to as an internal transition layer. Solutions of this kind are called contrast structures and the curve $C(t,\varepsilon)$ is the curve of the transition layer, or the interface curve; its position is not known in advance. Let us define the position of the curve of the transition layer by the condition of intersection of the solution and the root of the degenerate equation $\varphi^{(0)}(x,y,t)$, $C(t,\varepsilon) = \{(x,y) \in D : \varphi^{(0)}(x,y,t) = u(x,y,t,\varepsilon)\}$. The curve $C(t,\varepsilon)$ partitions the domain D into subdomains $D^{(-)}$ and $D^{(+)}$ which are correspondingly the outer and the inner domains for the curve.

2. Construction of the asymptotic

2.1. The asymptotics for the solution

A formal asymptotical expansion was constructed in the following form: $U^{(\pm)}(x,y,t,\varepsilon;\lambda^*) = \bar{u}^{(\pm)}(x,y,t,\varepsilon) + Q^{(\pm)}(\tau,\theta,t,\varepsilon;\lambda^*) + \Pi(\xi,\theta_\Gamma,t,\varepsilon)$, where the regular part is $\bar{u}^{(\pm)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x,y,t)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x,y,t)+\ldots+\varepsilon^n\bar{u}_n^{(\pm)}(x,y,t)+\ldots$, the boundary layer part is $\Pi(\xi,\theta_\Gamma,t,\varepsilon)$ where $\xi = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon}$ (here (r_Γ,θ_Γ) - a local system of coordinates for the curve Γ) and the interior layer part is

$$Q^{(\pm)}(\tau,\theta,t,\varepsilon;\lambda^*) = Q_0^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*) + \ldots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*) + \ldots,$$

where $\tau = (r - \lambda^*(\theta,t,\varepsilon))/\varepsilon$. The part $Q^{(\pm)}(\tau,\theta,t,\varepsilon;\lambda^*)$ depends on λ^*, but in general case is not a function depending on λ^*, thats why the notation ";"is used.

The method of boundary layer functions (see [6]), taking into account the specific features of a parabolic operator (see [1] and [15]), leads to a sequence of problems for determination of the coefficients of the asymptotic series (3), from which, in particular, we see that $\bar{u}_0^{(-)}(x,y,t) = \varphi^{(-)}(x,y,t)$, $\bar{u}_0^{(+)}(x,y,t) = \varphi^{(+)}(x,y,t)$. The functions $\bar{u}_i^{(\pm)}(x,y,t)$, $i = 1,2,3,\ldots$, and also the boundary layer functions $\Pi_i(\xi,\theta_\Gamma,t)$, are constructed in the standard way, and we do not consider this construction in the present paper.

For the part of the internal layer in zero approximation we have problems

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*)}{\partial\tau^2} = F(\varphi^{(\pm)}(\lambda^*,\theta,t) + Q_0^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*),\lambda^*,\theta,t,0) \\ &Q_0^{(\pm)}(0,\theta,t;\lambda^*) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*,\theta,t) = \varphi^{(0)}(\lambda^*,\theta,t), \\ &Q_0^{(\pm)}(\pm\infty,\theta,t;\lambda^*) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

wich have unique solutions monotone with respect to τ.

In the next approximation, we obtain the linear problems

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial u} Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)},\\
&Q_1^{(\pm)}(0,\theta,t;\lambda^*) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*,\theta,t) = 0,\\
&Q_1^{(\pm)}(\pm\infty,\theta,t;\lambda^*) = 0,\\
&r_1^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*) := -\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \tau}(\tau,\theta,t;\lambda^*)s(\lambda^*,\theta,t) + \tau\left(\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial u}\frac{\partial \bar{u}_0^{(\pm)}}{\partial r}(\lambda^*,\theta,t) + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial r}\right) +\\
&+ \bar{u}_1(\lambda^*,\theta,t)\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial \varepsilon},
\end{aligned} \tag{3}$$

where $s(r,\theta,t) = \triangle r(r,\theta,t) - \frac{\partial r}{\partial t}(r,\theta,t)\big|_{x,y=const}$, the symbols " $\sim$ ", " $*$ " above and to the right of a function mean that the value of the function is taken at the argument $(\varphi^{(\pm)}(\lambda^*,\theta,t) + Q_0^{(\pm)}(\tau,\theta,t;\lambda^*),\lambda^*,\theta,t,0)$. The solution of problems (3) is represented in an explicit form (see [15]).

Q-functions of subsequent orders are defined in a similar way.

2.2. The asymptotics for the interface curve

The asymptotics for the interface curve we will search in the following form:

$$r = \lambda^*(\theta,t,\varepsilon) = \varepsilon\lambda_1^*(\theta,t,\varepsilon) = \varepsilon(\lambda_1(\theta,t) + \varepsilon\lambda_2(\theta,t) + \varepsilon^2\lambda_3(\theta,t) + \ldots). \tag{4}$$

The coefficients of the series are found from the condition of C^1-matching of the asymptotics on the curve C,

$$\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial r}\bigg|_{r=\lambda^*(\theta,t,\varepsilon)} = \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial r}\bigg|_{r=\lambda^*(\theta,t,\varepsilon)}. \tag{5}$$

By substituting the asymptotics into condition and equating to zero the terms before every power of ε, we obtain the tasks for determining λ_i. Namely, for $\lambda_1(\theta,t)$ we have the following problem:

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r}\lambda_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\Phi(\tau,\theta,t;0)\hat{s} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}\tau + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varepsilon}\right)\Phi(\tau,\theta,t;0)d\tau = 0. \tag{6}$$

Here the symbol " $\wedge$ " above a function mean that the value of the function is taken at the argument $(0,\theta,t)$. The coefficients $\lambda_i(\theta,t), i = 2,3,\ldots$ are determined from the analogous tasks

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r}\lambda_i + f_i = 0, \quad i \geq 1, \tag{7}$$

By virtue of assumption **(A5)** problems (6), (7) have the unique solutions.

3. Substantiation of the asymptotics thus constructed

We denote by $U_n^{(\pm)}(x,y,t,\varepsilon;\lambda^*)$ the partial sums of order n of the asymptotic series constructed above in which the argument τ of the Q-functions is replaced by $\tau_n = (r - \sum\limits_{i=1}^{n+1}\varepsilon^i\lambda_i(\theta,t))/\varepsilon$ and λ^* by $\lambda_n^* = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\varepsilon^i\lambda_i(\theta,t)$ In the $\bar{D}_n^{(-)}$ and $\bar{D}_n^{(+)}$ into which the domain $\bar{D}$ is partitioned by the curve $r = \lambda_n^*$ when constructing $U_n^{(\pm)}(x,y,t,\varepsilon;\lambda^*)$, we use the functions $Q^{(-)}$ and $Q^{(+)}$, respectively. The following theorem holds.

Theorem 1. *If conditions **(A1)-(A5)** hold, then, for sufficiently small ε, there is a solution $u(x,y,t,\varepsilon)$ of problem (1) which is a contrast structure of step type, and the following bound holds:*

$$|U_n(x,y,t,\varepsilon;\lambda^*) - u(x,y,t,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (x,y)\in\bar{D}, t\in R.$$

The proof of this assertion is carried out using the asymptotic method of differential inequalities. We shall construct the upper and lower solutions of problem (1) by modifying the terms of the asymptotic series, similarly to the way in which it was done in [4]. For example, for the upper solution, one can take the function

$$\begin{aligned}\beta_n(x,y,t,\varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x,y,t) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x,y,t) + \ldots + \varepsilon^{n+2}\bar{u}_{n+2}^{(\pm)}(x,y,t)\\ &+ Q_0^{(\pm)}(\tau_\beta,\theta,t;\lambda_{n\beta}) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\tau_\beta,\theta,t;\lambda_{n\beta}) + \ldots + \varepsilon^{n+1}Q_{n+2}^{(\pm)}(\tau_\beta,\theta,t;\lambda_{n\beta})\\ &+ \Pi_\beta(\xi,\theta_\Gamma,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + Q_{n+2,\beta}^{(\pm)}(\tau_\beta,\theta,t;\lambda_{n\beta})),\end{aligned}$$

where $\lambda_{n\beta}(\theta,t,\varepsilon) = \lambda_n^*(\theta,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\lambda_{n+2}(\theta,t,\varepsilon) - \nu(\theta,t))$, $\gamma > 0$ is a constant ensuring the validity of the necessary differential inequality, and $\nu > 0$ is a function ensuring the validity of the inequality for the jump of derivatives on the curve of transition layer. The functions $Q_{n+2,\beta}^{(\pm)}$ are obtained by the scheme of [4] by modifying the equations for $Q_{n+2}^{(\pm)}$ in which τ is replaced by $\tau_\beta = (r - \lambda_{n\beta}(t,\theta,\varepsilon))/\varepsilon$, the functions Π_β ensure the validity of the differential inequalities near Γ and are not considered in this work. A lower solution $\alpha_n(x,y,t,\varepsilon)$ has a similar structure. All necessary inequalities are verified by the immediate calculations.

4. Stability of periodic contrast structures

The periodic solutions to the problem (1) can be considered as the solutions to corresponding boundary value problem with an initial condition:

$$\begin{aligned}&N_\varepsilon(v) := \varepsilon^2\left(\triangle v - \frac{\partial v}{\partial t}\right) - F(v,x,y,t,\varepsilon) = 0,\\ &(x,y,t)\in D_{t+} := \{(x,y,t)\in R^3 : (x,y)\in D, 0<t<\infty\},\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x,y,t,\varepsilon) = 0, \quad (x,y)\in\Gamma, 0<t<\infty,\\ &v(x,y,0,\varepsilon) = v^0(x,y), \quad (x,y)\in\bar{D}.\end{aligned} \tag{8}$$

Obviosly, if $v^0(x,y,\varepsilon) = u(x,y,0,\varepsilon)$, where $u(x,y,t,\varepsilon)$ - the solution to the periodic problem (1), then the problem (8) also has the solution $v(x,y,t,\varepsilon) = u(x,y,t,\varepsilon)$.

The problem of the Lyapunov stability of this solution is based on the asymptotical method of differential inequalities. We will seek upper and lower solutions to problem () in the form $\alpha(x,y,t,\varepsilon) = u(x,y,t,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,y,t,\varepsilon) - u(x,y,t,\varepsilon))$, $\beta(x,y,t,\varepsilon) = u(x,y,t,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x,y,t,\varepsilon) - u(x,y,t,\varepsilon))$, where $\lambda(\varepsilon) > 0$ is sufficiently small. It can be shown that $N_\varepsilon\beta < 0$ for $n \geq 0$. The inequality $N_\varepsilon\alpha > 0$ can be checked similarly. Thus, the above constructed periodic solution is stable with the influence domain being at least $[\alpha_0, \beta_0]$.

Theorem 2. *Let conditions **(A0)-(A5)** hold. Then the solution $u(x,y,t,\varepsilon)$ is Lyapunov asymptotically stable with the domain of stability containing at least $[\alpha_0, \beta_0]$, and hence, $u(x,y,t,\varepsilon)$ is a unique solution of problem* (1) *in this domain.*

References

[1] N. N. Nefedov, L. Recke, K. R. Schnieder, "Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations.", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405** (2013), 90–103.

[2] N. N. Nefedov, M. A. Davydova, "Contrast structures in singularly perturbed quasilinear reaction-diffusion-advection equations.", *Differentsial'nye Uravneniya*, **49** (2013), 715–733.

[3] N.N. Nefedov, L. Recke, K.R. Schneider, "Asymptotic stability via the Krein-Rutman theorem for singularly perturbed parabolic periodic-Dirichlet problems.", *Regular and Chaotic Dynamics*, **15** (2010), 382–389.

[4] N.N. Nefedov, "The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers.", *Differ. Uravn.*, **31** (1995), 1142–1149.

[5] V.T. Volkov and N.N. Nefedov, "Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reacton-diffusion-advection equations.", *Differ. Uravn.*, **46** (2006), 585–593.

[6] A.B. Vasil'eva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of the Solutions of Singularly Perturbed Equations* (in Russian), Nauka, Moscow, 1973.

[7] P. Hess, *Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*, Pitman Research Notes in Math. Series **247**, Longman Scientific&Technical, 1991.

[8] D.H. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, *Indiana Math. J.* V. 21, N11, (1972), 979–1001.

[9] P. Fife, M. Tang, "Comparison principles for reaction-diffusion systems: Irregular comparison functions and applications to question of stability and speed propagation of front.", *J. Diff. Equations.*, **40** (1981), 168–175.

[10] V.T. Volkov and N.N. Nefedov, "O periodicheskikh resheniyakh s pogranichnymi sloyami odnoy singulyarno vozmushchennoy modeli reaktsiya-diffuziya.", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **34** (1994), 1307–1315.

[11] N. N. Nefedov, "Development of the Asymptotic Method of Differential Inequalities for Investigation of Periodic Contrast Structures in Reaction–Diffusion Equations.", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46** (2006), 614–622.

[12] N. N. Nefedov, "Comparison Principle for Reaction-Diffusion-Advection Problems with Boundary and Internal Layers.", *Lecture Notes in Computer Science*, **8236** (2013), 62–72.

[13] N. N. Nefedov, O. E. Omel'chenko, "Periodic Step-Like Contrast Structures for a Singularly Perturbed Parabolic Equation.", *Differ. Uravn.*, **36** (2000), 209–218.

[14] N. N. Nefedov, "An Asymptotic Method of Differential Inequalities for the Investigation of Periodic Contrast Structures: Existence, Asymptotics, and Stability.", *Differ. Uravn.*, **36** (2000), 262–269.

[15] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, "Kontrastnye struktury v singulyarno vozmushchennykh zadachakh.", *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, **4** (1998), 799–851.

[16] C.V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York and London, 1992.

[17] *Amman H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations in nonlinear analysis New York: Acad. Press, 1978.

Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., "Существование и устойчивость периодических решений уравнения реакция-диффузия в двумерном случае", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 342–348.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-342-348

Аннотация. Параболические сингулярно возмущенные задачи активно исследуются в последние годы в связи с большим количеством практических применений: химическая кинетика, синергетика, астрофизика, биология и т.д. В этой работе исследуется сингулярно возмущенная периодическая задача для параболического уравнения реакция-диффузия в двумерном случае. Рассматривается случай существования внутреннего переходного слоя при несбалансированной нелинейности. Внутренний слой локализован вблизи так называемой кривой переходного слоя. Строится асимптотическое разложение решения и определяется асимптотика для кривой переходного слоя. Асимптотическое разложение состоит из регулярной части, внутреннего слоя и части пограничного слоя. В этой работе мы сфокусируем внимание на части внутреннего переходного слоя. С целью его описания вводится локальная система координат в окрестности кривой перехода и используются растянутые переменные. Чтобы обосновать таким образом построенную асимптотику, используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Верхнее и нижнее решения строятся путем достаточно сложной модификации асимптотического разложения решения. Асимптотическая устойчивость решения по Ляпунову доказывается с помощью метода сужающихся барьеров. Этот метод базируется на принципе дифференциальных неравенств, и в нем используются верхнее и нижнее решения, которые экспоненциально стремятся к решению задачи. Как результат, решение является локально единственным.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: реакция-диффузия, сингулярные возмущения, малый параметр, внутренние слои, несбалансированная реакция, пограничные слои, дифференциальные неравенства, верхние и нижние решения

Об авторах:
Нефедов Николай Николаевич, д-р. физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Никулин Егор Игоревич, orcid.org/0000-0003-3850-4960, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и РФФИ - ННИО (проекты 15-01-04619, 14-01-91333).

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, №3 (2016), с. 349–356
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 349–356

©Hegarty A. F., O'Riordan E., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-349-356

UDC 519.6

Numerical Solution of a Singularly Perturbed Problem on a Circular Domain

Hegarty A. F.[1], O'Riordan E.

Received May 19, 2016

Abstract. We consider a singularly perturbed elliptic problem, of convection-diffusion type, posed on a circular domain. Using polar coordinates, simple upwinding and a piecewise-uniform Shishkin mesh in the radial direction, we construct a numerical method that is monotone, pointwise accurate and parameter-uniform under certain compatibility constraints. Numerical results are presented to illustrate the performance of the numerical method when these constraints are not imposed on the data.

Keywords: circular domain, convection-diffusion, parameter-uniform, Shishkin mesh

For citation: Hegarty A. F., O'Riordan E., "Numerical Solution of a Singularly Perturbed Problem on a Circular Domain", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 349–356.

On the authors:
Alan Francis Hegarty,
Department of Mathematics and Statistics
University of Limerick, Ireland
e-mail: alan.hegarty@ul.ie

Eugene O' Riordan, School of Mathematical Sciences
Dublin City University, Ireland
e-mail: eugene.oriordan@dcu.ie

Acknowledgments:
[1]The work of the first author was supported by MACSI, the Mathematics Applications Consortium for Science and Industry (www.macsi.ul.ie), funded by the Science Foundation Ireland Investigator Award 12/IA/1683.

1. Introduction

There have been many recent publications on parameter-uniform numerical methods [9, 2] for singularly perturbed linear problems of the convection-diffusion form

$$-\varepsilon\triangle u + \vec{a}\cdot\nabla u + bu = f, \quad \vec{a} > \vec{0},$$

where the domain is the unit square. In contrast, there have been few publications for the case when the domain is non-rectangular and the problem is of convection-diffusion type. In the case of elliptic problems posed on arbitrary convex domains, several theoretical difficulties arise in designing a parameter-uniform numerical method [1]. An invertible transformation can sometimes be designed to map a non-rectangular domain to the unit square. However, in general, the differential operator in the transformed variables will contain a mixed second order derivative term. The construction of a parameter-uniformly stable discretization of a mixed second order derivative on a layer-adapted highly anisotropic mesh remains an open question. In this paper, we examine a circular domain for which the standard transformation using polar coordinates can be utilized throughout the entire domain. For this particular geometry, there are no mixed derivative terms present in the transformed problem.

The issue of compatibility conditions at the characteristic points and the construction of an ε-uniform asymptotic expansions have been studied by Jung and Teman [6]. In [3], we impose more stringent constraints on the problem data in a neighbourhood of the characteristic points, in order to exclude the potential presence of additional singularities near these two points. Under these data constraints, a parameter-uniform numerical method can be constructed [3], which captures the boundary layer at the outflow boundary. Here, we present numerical results for a problem which does not satisfy the minimal compatibility conditions. These experimental results suggest that some positive order of uniform convergence may be retained in the case of no compatibility. However, a theoretical justification for this conjecture remains an open question.

Notation: Our interest lies in designing parameter-uniform numerical methods and so throughout this paper, C denotes a generic constant that is independent of the singular perturbation parameter ε and of all discretization parameters. We will always use the pointwise maximum norm, which we denote throughout by $\|\cdot\|$.

2. Continuous problem

Consider the singularly perturbed elliptic problem:

$$\tilde{L}\tilde{u} := -\varepsilon\triangle\tilde{u} + \tilde{a}(x,y)\tilde{u}_y = \tilde{f}, \quad \text{in} \quad \tilde{\Omega} := \{(x,y)|x^2+y^2<1\} \tag{1a}$$

$$\tilde{u} = 0, \quad \text{on} \quad \partial\tilde{\Omega}; \quad \tilde{a} > \alpha > 0. \tag{1b}$$

Assume that the data are sufficiently smooth so that $\tilde{u} \in C^{3,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$. For this problem, a boundary layer will form in the vicinity of the outflow boundary $\Gamma_O := \{(x,y)|-1<x<1, y=\sqrt{1-x^2}\}$ and there will be no layer present in the vicinity of the inflow boundary $\Gamma_I := \{(x,y)|-1<x<1, y=-\sqrt{1-x^2}\}$.

Polar coordinates are a natural co-ordinate system to employ for this problem. In these coordinates, the continuous problem (1) is transformed into the problem: Find $u(r,\theta) \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ such that

$$-\frac{\varepsilon}{r^2}u_{\theta,\theta} - \varepsilon u_{rr} + a(r,\theta)\big((\sin\theta - \frac{\varepsilon}{ar})u_r + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta\big) = f, \text{ in } \Omega, \tag{2a}$$

$$u(1,\theta) = 0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2b}$$

$$u(r,2\pi) = u(r,0), \qquad u_\theta(r,2\pi) = u_\theta(r,0), \quad 0 < r < 1. \tag{2c}$$

The solution u can be decomposed into the sum of a regular component v and a singular component w such that

$$Lv = f, \text{ in } \Omega, \qquad v = u \text{ on } \Gamma_I; \ v \text{ suitably specified on } \Gamma_O;$$
$$Lw = 0, \text{ in } \Omega, \qquad w = 0 \text{ on } \Gamma_I; \ w = u - v \text{ on } \Gamma_O.$$

This type of decomposition of the solution was first introduced by Shishkin [9] for a large class of singularly perturbed partial differential equations. The decomposition is related to an asymptotic expansion [8], but note that there is no explicit identification of a remainder term. Moreover, the components v and w are not explicitly identified. From a numerical analysis perspective, the advantage of this type of decomposition is that parameter explicit pointwise bounds on the partial derivatives (up to and including third order) of these two components can be established. These bounds on the derivatives of the components are central to establishing informative pointwise bounds on the truncation error associated with any proposed numerical method.

The reduced problem is defined as: Find $\tilde{v}_0$ such that

$$\tilde{a}\frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} = \tilde{f}, \quad \text{in} \quad \overline{\tilde{\Omega}} \setminus \Gamma_I; \qquad \tilde{v}_0 = \tilde{u} = 0, \quad \text{on } \Gamma_I.$$

As identified in [6], singularities appear in the vicinity of the points $(\pm 1, 0)$ unless compatibility conditions of some level m

$$\frac{\partial^{i+j}\tilde{f}}{\partial x^i \partial y^j}(\pm 1, 0) = 0, \quad 0 \le 2i + j \le m, \qquad m \ge 0 \tag{3}$$

are imposed on the data. The first order correction to the reduced solution is given by

$$\tilde{v}_1(x, y) = \int_{w=-\sqrt{1-x^2}}^{y} \frac{\triangle \tilde{v}_0(x, w)}{\tilde{a}(x, w)}\, dw.$$

Requiring a certain regularity on $\tilde{v}_1$ places additional regularity requirements on $\tilde{v}_0$. Explicit compatibility conditions on the derivatives of the regular components $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ are given in [5, Lemma 2.2] to ensure any desired level of regularity of these components. The outflow boundary conditions for the regular component are taken to be $v_0 + \varepsilon v_1$ in order that the partial derivatives (up to second order) of the regular component are bounded independently of ε. For example, compatibility conditions of level $m = 9$ suffice for $\tilde{v}_0 \in C^5(\overline{\Omega})$ and $\tilde{v}_1 \in C^5(\overline{\Omega})$. However, to obtain pointwise bounds on the boundary layer component w, additional constraints were imposed in [3]:

Assumption Assume that there exists a $0.5 < \delta < 1$ such that

$$\tilde{f}(x, y) \equiv 0, \qquad 1 - \delta \le |x| < 1. \tag{4}$$

Note that this assumption supersedes the compatibility conditions (3) of any order.

Theorem 1. *[3] The solution u of problem (1), (4) can be decomposed into the sum $u = v + w$, where the derivatives of the regular component v satisfy the bounds*

$$\left\| \frac{\partial^{i+j} v}{\partial r^i \partial \theta^j} \right\| \le C(1 + \varepsilon^{2-i-j}), \qquad i + j \le 3,$$

and the boundary layer component satisfies (for some positive γ)

$$|w(r, \theta)| \;\; \le \;\; Cr^2 e^{-\frac{\alpha \sin(\theta)(1-r)}{2\varepsilon}} + Ce^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}.$$

3. Discrete problem

A popular assumption within the literature on numerical methods for singularly perturbed problems is to assume that

$$\varepsilon \leq CN^{-1}.$$

In this case a classical finite element method will generate large oscillatory solutions and thereby fail to capture accurately any layers present in the solution. This is one reason why this case is often viewed as the case of most interest. For certain classes of singularly perturbed problems, one can generate a uniformly valid asymptotic expansion for the continuous solution. In addition, there are problem classes for which a combination of a simple numerical method and the analytical expression for the leading order term for the layer function can be utilized to generate an approximation, to the continuous solution, of $O(N^{-1})$. For example, in the case of problem (1), (4), we observe that

$$\tilde{u} = \tilde{v}_0(x,y) - \tilde{v}_0(x,\sqrt{1-x^2})(x^2+y^2)e^{-\frac{a(1,\theta)\sin(\theta)(1-r)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon).$$

Coupling this asymptotic expansion with the restriction on the parameters of $\varepsilon \leq CN^{-1}$, means that we only require a sufficiently accurate approximation to the reduced solution $\tilde{v}_0(x,y)$. This can be easily generated by simply discretizing the first order problem defining the reduced problem and then interpolating these nodal values to produce a global approximation. However, these mixed numerical/asymptotic approaches only have validity under the assumption $\varepsilon \leq CN^{-1}$. In [3], we have designed a parameter-uniform numerical method, which is valid for all values of $0 < \varepsilon \leq 1$.

We discretize problem (2), (4) using simple upwinding on a tensor product mesh, with M mesh elements uniformly distributed in the angular direction and N mesh elements in the radial direction distributed across a piecewise uniform Shishkin mesh [9]. The mesh points (r_i, θ_j) are defined by:

$$\theta_j = iK,\ j = 0,1,\ldots,M, \qquad K = \frac{2\pi}{M} \tag{5a}$$

$$r_i = iH, i = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}, \quad r_i = 1-\sigma+(i-N/2)h, i = \frac{N}{2}+1,\ldots,N \tag{5b}$$

$$H := \frac{2(1-\sigma)}{N},\ h := \frac{2\sigma}{N}, \quad \sigma := \min\{\frac{1}{2}, C_*\varepsilon\ln N\}; \quad C_* > \frac{4}{\alpha\sqrt{1-\delta^2}}. \tag{5c}$$

The numerical method on this mesh is: For $0 < r_i < 1,\ 0 < \theta_j < 2\pi$,

$$-\frac{\varepsilon}{r_i^2}\delta_\theta^2 U - \varepsilon\delta_r^2 U + (a\sin\theta_j - \frac{\varepsilon}{r_i})D_r^\pm U + \frac{a}{r_i}\cos\theta_j D_\theta^\pm U = f; \tag{6a}$$

where $2(aD^\pm)Z := (a-|a|)D^+Z + (a+|a|)D^-Z$ and

$$U(1,\theta_j) = 0, \qquad 0 \leq \theta_j \leq 2\pi, \tag{6b}$$

$$U(r_i,2\pi) = U(r_i,0), \qquad D_\theta^- U(r_i,2\pi) = D_\theta^+ U(r_i,0), \quad 0 < r_i < 1; \tag{6c}$$

$$U(0,\theta_j) = U(0) := \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} U(r_1,\theta_j), \qquad 0 \leq \theta_j \leq 2\pi. \tag{6d}$$

The finite difference operators D^+, D^- are the standard forward and backward first order difference operators and δ^2 denotes the standard discrete approximation of the second derivative. Once the nodal values have been determined, a global approximation $\bar{U}$ can be generated using the bilinear interpolant

$$\bar{U}(r,\theta) := \sum_{i,j=0}^{N-1} U(r_i,\theta_j)\phi_i(r)\psi_j(\theta), \quad (r,\theta) \in \bar{\Omega},$$

where $\phi_i(r), \psi_j(\theta)$ are piecewise linear basis functions, defined by the nodal values of $\phi_i(r_k) = \delta_{i,k} = \psi_i(\theta_k)$.

Theorem 2. *[3] Assume $M = O(N)$. If u is the solution of the continuous problem (1), (4) and $\bar{U}$ is the bilinear interpolant of the discrete solution U, then*

$$\|u - \bar{U}\| \le C(N^{-1} + M^{-1})(\ln N)^2.$$

4. Numerical results

In this section, we examine the performance of the numerical method as applied to two particular problems. However, these problems do not satisfy the constraint (4) imposed in [3]. Observe that the choice of the transition parameter σ in (5c) depends on (4). For the problems examined in this section, we have simply replaced (5c) by

$$\sigma := \min\{\frac{1}{2}, 4\varepsilon \ln N\}.$$

Approximations to the uniform order of convergence are estimated using the double mesh method [2]. The numerical method was applied for $\varepsilon \in \{2^{-j}\}_0^{20}$ and $N \in \{2^j\}_3^{10}$. The maximum pointwise two–mesh differences D_ε^N and the parameter–uniform maximum pointwise two–mesh differences D^N, are computed from

$$D_\varepsilon^N := ||U^N - \overline{U}^{2N}||_{\Omega^N,\infty}, \qquad D^N := \max_{\varepsilon\in\{2^{-j}\}_0^{20}} D_\varepsilon^N.$$

Approximations p_ε^N to the local order of convergence and approximations p^N to the parameter–uniform order of local convergence are subsequently computed from

$$p_\varepsilon^N := \log_2 \frac{D_\varepsilon^N}{D_\varepsilon^{2N}} \qquad p^N := \log_2 \frac{D^N}{D^{2N}}.$$

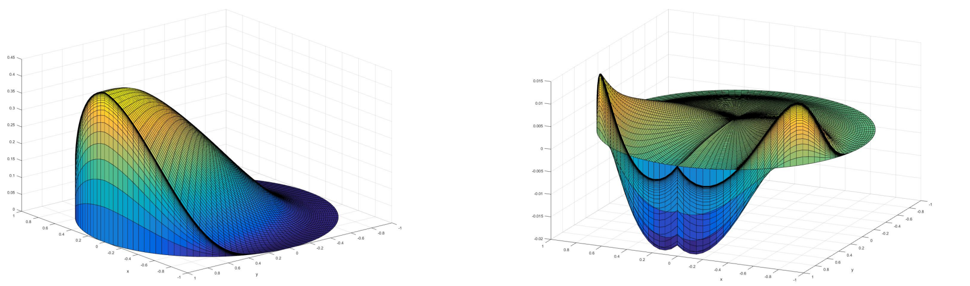
Example 1 (Compatible problem) Motivated by the test example from [4, equation (61)], we consider the following problem

$$-\varepsilon\triangle u + u_y = e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}}, \quad \text{in} \quad \Omega := \{(x,y)|x^2+y^2<1\}; \quad u = 0, \text{ on } \partial\Omega. \qquad (7)$$

This problem is not covered by the theory presented in [3]. However, it is highly compatible at the characteristic points. In Table 1, we present a corresponding table of computed orders of convergence and in Figure 1 we present a sample computed solution and a comparison between the computed solution and a fine mesh solution. We observe

Table 1. Computed double-mesh orders for (7) for some sample values of (N, ε)

	p_ε^N					
$\varepsilon \backslash \mathbf{N}$	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
$\mathbf{2^{-0}}$	0.9726	0.9828	0.9911	0.9954	0.9977	0.9988
$\mathbf{2^{-1}}$	0.9831	0.9915	0.9958	0.9979	0.9989	0.9995
$\mathbf{2^{-2}}$	1.0070	1.1536	1.0959	1.0535	1.0286	1.0148
$\mathbf{2^{-3}}$	0.8941	1.1250	1.1220	1.0737	1.0393	1.0202
$\mathbf{2^{-4}}$	0.8709	1.1697	0.8094	0.8506	0.9293	0.9647
$\mathbf{2^{-5}}$	0.8336	1.1413	0.1646	0.7814	0.8888	0.9449
$\mathbf{2^{-6}}$	0.7334	1.1615	0.6512	0.5114	0.7289	0.7194
$\mathbf{2^{-7}}$	0.6157	1.1146	0.8905	0.5192	0.7304	0.7233
$\mathbf{2^{-8}}$	0.5836	1.0358	1.0265	0.5194	0.7289	0.7273
$\mathbf{2^{-9}}$	0.5863	0.9855	0.9939	0.6061	0.7261	0.7302
$\mathbf{2^{-10}}$	0.5926	0.9584	0.9647	0.6550	0.7268	0.7312
$\mathbf{2^{-11}}$	0.5969	0.9443	0.9474	0.6808	0.7271	0.7318
$\mathbf{2^{-12}}$	0.5993	0.9373	0.9376	0.6944	0.7273	0.7321
$\mathbf{2^{-13}}$	0.6005	0.9337	0.9323	0.7015	0.7274	0.7323
$\mathbf{2^{-14}}$	0.6012	0.9320	0.9295	0.7052	0.7275	0.7324
$\mathbf{2^{-15}}$	0.6015	0.9311	0.9281	0.7070	0.7275	0.7324
$\mathbf{2^{-16}}$	0.6017	0.9307	0.9274	0.7079	0.7276	0.7325
$\mathbf{2^{-17}}$	0.6018	0.9304	0.9271	0.7084	0.7276	0.7325
$\mathbf{2^{-18}}$	0.6018	0.9303	0.9269	0.7086	0.7276	0.7325
$\mathbf{2^{-19}}$	0.6018	0.9303	0.9268	0.7087	0.7276	0.7325
$\mathbf{2^{-20}}$	0.6018	0.9303	0.9268	0.7088	0.7276	0.7325
$\mathbf{p^N}$	0.6018	0.9303	0.9268	0.7088	0.7276	0.7325



(a) Computed Solution $\bar{U}^{128}$ (b) Fine mesh comparison $\bar{U}^{128} - \bar{U}^{1024}$

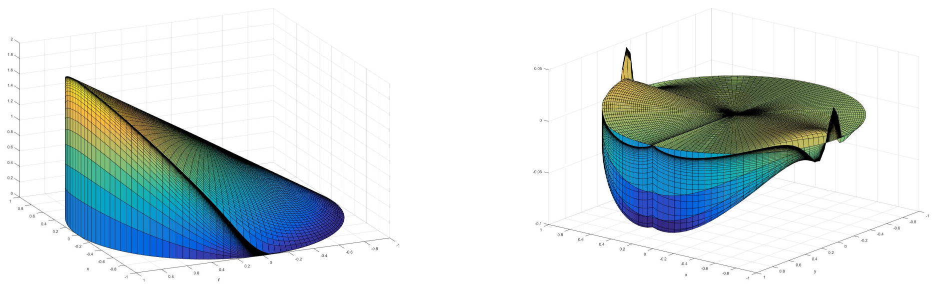
Fig 1. Plots of numerical solution and approximate error for Example 1 with $\varepsilon = 2^{-15}$.

convergence in the Table. This suggests that the theoretical constraint (4) may not be required in practice.

Example 2 (Incompatible problem) Motivated by the test example from [4, equation (63)], consider the following problem

$$-\varepsilon \triangle u + u_y = 1, \quad \text{in} \quad \Omega := \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}; \quad u = 0, \text{ on } \partial\Omega. \tag{8}$$

In Figure 2, we see some significant difference (between the computed solution and a fine mesh solution) in the vicinity of the two characteristic points. In Table 2, we present a corresponding table of computed orders of convergence. We again observe convergence in the Table. This suggests that the lack of compatibility in the reduced problem does not appear to have a significant detrimental effect on the performance of the method in the outflow region. These numerical results indicate that the question of whether the above numerical method is parameter-uniform or not, for incompatible problems like (8), warrants further investigation.



(a) Computed Solution $\bar{U}^{128}$ (b) Fine mesh comparison $\bar{U}^{128} - \bar{U}^{1024}$

Fig 2. Plots of numerical solution and approximate error for Example 2 with $\varepsilon = 2^{-15}$.

Table 2. Computed double-mesh orders for (8) for some sample values of (N, ε)

	p_ε^N					
ε\N	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
$\mathbf{2^{-0}}$	0.9984	0.9986	0.9992	0.9995	0.9998	0.9999
$\mathbf{2^{-1}}$	0.9923	1.0005	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\mathbf{2^{-2}}$	0.9156	0.8106	0.8600	0.9386	0.9699	0.9851
$\mathbf{2^{-3}}$	0.7233	0.6661	0.8192	0.9120	0.9576	0.9792
$\mathbf{2^{-4}}$	0.4440	0.5900	0.7581	0.8792	0.9408	0.9699
$\mathbf{2^{-5}}$	0.6701	0.4357	0.0832	0.8009	0.8945	0.9470
$\mathbf{2^{-6}}$	0.5775	0.8902	0.3358	0.4911	0.7178	0.7078
$\mathbf{2^{-7}}$	0.4678	1.1707	0.3489	0.4917	0.7189	0.7080
$\mathbf{2^{-8}}$	0.3690	1.1901	0.5374	0.4959	0.7192	0.7092
$\mathbf{2^{-9}}$	0.2946	1.1123	0.7616	0.4986	0.7193	0.7097
$\mathbf{2^{-10}}$	0.2345	1.0235	0.9476	0.4996	0.7197	0.7100
$\mathbf{2^{-11}}$	0.1947	0.9385	1.0912	0.5002	0.7199	0.7102
$\mathbf{2^{-12}}$	0.1722	0.8686	1.1931	0.5005	0.7199	0.7104
$\mathbf{2^{-13}}$	0.1602	0.8194	1.2461	0.5133	0.7202	0.7105
$\mathbf{2^{-14}}$	0.1539	0.7897	1.1939	0.6037	0.7204	0.7106
$\mathbf{2^{-15}}$	0.1507	0.7734	1.1456	0.6726	0.7206	0.7106
$\mathbf{2^{-16}}$	0.1491	0.7648	1.1147	0.7143	0.7206	0.7106
$\mathbf{2^{-17}}$	0.1483	0.7604	1.0970	0.7375	0.7207	0.7106
$\mathbf{2^{-18}}$	0.1479	0.7582	1.0874	0.7499	0.7207	0.7106
$\mathbf{2^{-19}}$	0.1477	0.7571	1.0824	0.7563	0.7207	0.7106
$\mathbf{2^{-20}}$	0.1476	0.7565	1.0799	0.7595	0.7207	0.7106
$\mathbf{p^N}$	0.1476	0.7565	1.0799	0.7595	0.7207	0.7106

References

[1] R. K. Dunne, E. O' Riordan and G. I. Shishkin, "Fitted mesh numerical methods for singularly perturbed elliptic problems with mixed derivatives", *IMA J. Num. Anal.*, **29** (2009), 712–730.

[2] P. A. Farrell, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, E. O' Riordan, G. I. Shishkin, *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, U.S.A., 2000.

[3] A. F. Hegarty and E. O'Riordan, "Parameter-uniform numerical method for singularly perturbed convection-diffusion problem on a circular domain", (submitted for publication).

[4] Y. Hong, C.-Y. Jung, R. Temam, "On the numerical approximations of stiff convection-diffusion equations in a circle", *Numer. Math.*, **127**:2 (2014), 291–313.

[5] C. -Y. Jung and R. Temam, "Convection-diffusion equations in a circle: The compatible case", *J. Math. Pures Appl.*, **96** (2011), 88–107.

[6] C. -Y. Jung and R. Temam, "Singular perturbations and boundary layer theory for convection-diffusion equations in a circle: the generic noncompatible case", *SIAM J. Math. Anal.*, **44**:6 (2012), 4274–4296.

[7] C. -Y. Jung and R. Temam, "Boundary layer theory convection-diffusion equations in a circle", *Russ. Math. Surveys*, **69**:3 (2014), 435–480.

[8] E. O'Riordan and G. I. Shishkin"A technique to prove parameter–uniform convergence for a singularly perturbed convection–diffusion equation", *J. Comp. Appl. Math.*, **206** (2007), 136–145.

[9] G. I. Shishkin, *Discrete approximation of singularly perturbed elliptic and parabolic equations*, Russian Academy of Sciences, Ural section, Ekaterinburg, 1992.

Хегарти А. Ф., О'Риордан Ю., "Численное решение одной сингулярно возмущённой задачи в круговой области", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 349–356.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-349-356

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная эллиптическая задача типа конвекция-диффузия в круговой области. С использованием полярных координат, простой схемы с разностями против потока и кусочно-равномерной сетки Шишкина в радиальном направлении для нее строится численный метод, который будет монотонным, поточечно точным и равномерным по параметру при некоторых ограничениях совместности. Приводятся численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность данного численного метода в случае, когда эти ограничения не накладываются на данные задачи.

Ключевые слова: круговая область, конвекция-диффузия, равномерность по параметру, сетка Шишкина

Об авторах:
Алан Фрэнсис Хегарти,
Отделение Математики и Статистики
Лимерикский Университет, Ирландия
e-mail: alan.hegarty@ul.ie

Юджин О'Риордан, Отделение Математических Наук
Городской Университет Дублина, Ирландия
e-mail: eugene.oriordan@dcu.ie

Благодарности:
Работа первого автора выполнена при поддержке MACSI, Консорциума прикладной математики в науке и промышленности (www.macsi.ul.ie), основанного Ирландским исследовательским научным фондом 12 / IA / 1683.

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 357–363
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 357–363

©Hans-G. Roos, 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-357-363
UDC 519.6

Error Estimates in Balanced Norms of Finite Element Methods on Shishkin Meshes for Reaction-Diffusion Problems

Hans-G. Roos

Received May 20, 2016

Abstract.
Error estimates of finite element methods for reaction-diffusion problems are often realized in the related energy norm. In the singularly perturbed case, however, this norm is not adequate. A different scaling of the H^1 seminorm leads to a balanced norm which reflects the layer behavior correctly.

Keywords: singular perturbation, supercloseness, combination technique, balanced norms

For citation: Hans-G. Roos, "Error estimates in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 357–363.

On the authors:
Hans-Gorg Roos, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden,
01062 Dresden, Deutschland, e-mail: hans-goerg.roos@tu-dresden.de

1. Introduction

We shall examine the finite element method for the numerical solution of the singularly perturbed linear elliptic boundary value problem

$$Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + cu = f \qquad \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \tag{1a}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{1b}$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$ is a small positive parameter, $c > 0$ is (for simplicity) a positive constant and f is sufficiently smooth.

The problem has a unique solution $u \in V = H_0^1(\Omega)$ which satisfies in the energy norm

$$\|u\|_\varepsilon := \varepsilon^{1/2}|u|_1 + \|u\|_0 \preceq \|f\|_0. \tag{2}$$

Here we used the following notation: if $A \preceq B$, there exists a (generic) constant C independent of ε (and later also of the mesh used) such that $A \le C\,B$. The error of a finite element approximation $u^N \in V^N \subset V$ satisfies

$$\|u-u^N\|_\varepsilon \preceq \min_{v^N\in V^N}\|u-v^N\|_\varepsilon. \tag{3}$$

When linear or bilinear elements are used on a Shishkin mesh, one can prove for the interpolation error of the Lagrange interpolant $u^I \in V^N$

$$\|u - u^I\|_\varepsilon \preceq \left(\varepsilon^{1/4} N^{-1} \ln N + N^{-2}\right). \tag{4}$$

It follows that the error $u - u^N$ also satisfies such an estimate.

However, the typical boundary layer function $\exp(-x/\varepsilon^{1/2})$ measured in the norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ is of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$. Consequently, error estimates in this norm are less valuable as for convection diffusion equations where the layers are of the structure $\exp(-x/\varepsilon)$. Wherefore we ask the fundamental question:

Is it possible to prove error estimates in the balanced norm

$$\|v\|_b := \varepsilon^{1/4}|v|_1 + \|v\|_0 \quad ? \tag{5}$$

2. The basic error estimate in a balanced norm and some extensions

The mesh Ω^N used is the tensor product of two one-dimensional piecewise uniform Shishkin meshes. I.e., $\Omega^N = \Omega_x \times \Omega_y$, where Ω_x (analogously Ω_y) splits $[0,1]$ into the subintervals $[0, \lambda_x]$, $[\lambda_x, 1-\lambda_x]$ and $[1-\lambda_x, 1]$. The mesh distributes $N/4$ points equidistantly within each of the subintervals $[0, \lambda_x]$, $[1-\lambda_x, 1]$ and the remaining points within the third subinterval. For simplicity, assume

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \min\{1/4, \lambda_0 \sqrt{\varepsilon/c^*} \ln N\} \quad \text{with } \lambda_0 = 2 \text{ and } c^* < c.$$

Let $V^N \subset H_0^1(\Omega)$ be the space of bilinear finite elements on Ω^N or the space of linear elements over a triangulation obtained from Ω^N by drawing diagonals.

A standard formulation of problem (1) reads: find $u \in V$, such that

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + c(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \tag{6}$$

By replacing V in (6) with V^N one obtains a standard discretization that yields the FEM-solution u^N. The following estimates for the interpolation error of the Lagrange interpolant hold true:

$$\|u - u^I\|_0 \preceq N^{-2}, \qquad \varepsilon^{1/4}|u - u^I|_1 \preceq N^{-1} \ln N \tag{7}$$

and

$$\|u - u^I\|_{\infty,\Omega_0} \preceq N^{-2}, \quad \|u - u^I\|_{\infty,\Omega\setminus\Omega_0} \preceq (N^{-1} \ln N)^2, \tag{8}$$

here $\Omega_0 = (\lambda_x, 1-\lambda_x) \times (\lambda_y, 1-\lambda_y)$. Let us also introduce $\Omega_f := \Omega \setminus \Omega_0$.

Instead of the Lagrange interpolant we use in our error analysis the L_2 projection $\pi u \in V^N$ from u. Based on

$$u - u^N = u - \pi u + \pi u - u^N$$

we estimate $\xi := \pi u - u^N$:

$$\|\xi\|_\varepsilon^2 \preceq \varepsilon|\nabla\xi|_1^2 + c\,\|\xi\|_0^2 = \varepsilon(\nabla(\pi u - u), \nabla\xi) + c\,(\pi u - u, \xi).$$

Because $(\pi u - u, \xi) = 0$, it follows

$$|\pi u - u^N|_1 \preceq |u - \pi u|_1. \tag{9}$$

If we now could prove a similar estimate as (4) for the error of the L_2 projection, we obtain an estimate in the balanced norm because we have already an estimate for $\|u - u_N\|_0$.

Lemma 1. *The error of the L_2 projection on the Shishkin mesh satisfies*

$$\|u - \pi u\|_\infty \preceq \|u - u^I\|_\infty, \quad \varepsilon^{1/4}|u - \pi u|_1 \preceq N^{-1}(\ln N)^{3/2}. \tag{10}$$

The proof uses the L_∞-stability of the L_2 projection on our mesh [4]. Inverse inequalities are used to move from estimates in W^1_∞ to L_∞, for details see [5].

From Lemma 1 we get

Theorem 1. *The error of the Galerkin finite element method with linear or bilinear elements on a Shishkin mesh satisfies*

$$\|u - u^N\|_b \preceq N^{-1}(\ln N)^{3/2} + N^{-2}. \tag{11}$$

Remark that for Q_k elements with $k > 1$ one can get an analogous result.

It is easy to modify the basic idea to the singularly perturbed semilinear elliptic boundary value problem

$$Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + g(\cdot, u) = 0 \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{12a}$$
$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{12b}$$

We assume that g is sufficiently smooth and $\partial_2 g \geq \mu > 0$.

A standard weak formulation of our semilinear problem reads: find $u \in V$, such that

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (g(\cdot, u), v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{13}$$

By replacing V in (13) with V^N one obtains a standard discretization that yields the FEM-solution u^N. In the error analysis we now use the projection πu defined by

$$(g(\cdot, \pi u), v) = (g(\cdot, u), v) \quad \text{for all } v \in V^N. \tag{14}$$

Our assumption $\partial_2 g \geq \mu > 0$ tells us immediately that πu is well defined, moreover

$$\|u - \pi u\|_0 \preceq \inf_{v \in V^N} \|u - v\|_0. \tag{15}$$

It follows from the definition of our projection

$$|\pi u - u^N|_1 \preceq |u - \pi u|_1. \tag{16}$$

If we now could prove a nice estimate for our projection error in the H^1 seminorm, we would obtain an estimate in the balanced norm because it is easy to estimate $\|u - u_N\|_0$. Based on Taylors formula we can prove

Lemma 2. *The projection defined by (14) is L_∞ stable.*

Similarly as in the linear case we get

Lemma 3. *The projection error of* (14) *on the Shishkin mesh satisfies*

$$\|u - \pi u\|_\infty \preceq \|u - u^I\|_\infty, \quad \varepsilon^{1/4}|u - \pi u|_1 \preceq N^{-1}(\ln N)^{3/2}. \tag{17}$$

Consequently, we get the same error estimate as in Theorem 1 also in the semilinear case.

Next we consider the anisotropic problem

$$-\varepsilon u_{xx} + u_{yy} + cu = f \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{18a}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{18b}$$

Now we have only boundary layers at $x = 0$ and $x = 1$. If we want to estimate the error in the balanced norm

$$\|v\|_{b,a} := \varepsilon^{1/4}\|u_x\|_0 + \|u_y\|_0 + \|u\|_0,$$

we start for $\xi := \pi u - u^N$ from

$$\varepsilon\|\xi_x\|_0^2 \leq \varepsilon((\pi u - u)_x, \xi_x) + ((\pi u - u)_y, \xi_y) + c\,(\pi u - u, \xi).$$

Now we define in the anisotropic case the projection onto the finite element space by

$$((\pi u - u)_y, \xi_y) + c\,(\pi u - u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in V^N.$$

Consequently it remains to estimate for that projection $\|(\pi u - u)_x\|_0$. But the projection satisfies

$$\pi v = \pi^y(\pi^x\, v),$$

where π^x is the one-dimensional L_2 projection and π^y the one-dimensional Ritz projection (with respect to a non-singularly perturbed operator on a standard mesh), compare [2]. Consequently, the projection is L_∞ stable and we can repeat our basic idea to prove estimates in the balanced norm.

3. Supercloseness and a combination technique

We come back to the linear reaction-diffusion problem

$$Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + cu = f \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{19a}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \tag{19b}$$

For bilinear elements on the corresponding Shishkin mesh it is well known that we have the supercloseness property (assuming $\lambda_0 \geq 2.5$)

$$\|u^N - u^I\|_\varepsilon \preceq \left(\varepsilon^{1/2}(N^{-1}\ln N)^2 + N^{-2}\right). \tag{20}$$

Can we prove a supercloseness property with respect to the balanced norm?

With $v_N := u^N - \Pi u$ we start from

$$\varepsilon|v_N|_1^2 + c\,\|v_N\|_0^2 \preceq \varepsilon(\nabla(u - \Pi u), \nabla v_N) + c\,(u - \Pi u, v_N).$$

Next we use the decomposition of u into a smooth part S and the layer terms E, i.e., $u = S + E$, decompose also $\Pi u = \Pi S + \Pi E$ and use different projections into our bilinear finite element space for S and E. We choose:

- $\Pi S \in V^N$ satisfies (with given values on the boundary)

$$(\Pi S, v) = (S, v) \quad \forall v \in V_0^N.$$

- ΠE is zero in Ω_0 and the standard bilinear interpolation operator in the fine subdomain with exception of one strip of the width of the fine stepsize in the transition region

With this choice we obtain

$$\varepsilon|v_N|_1^2 + c\,\|v_N\|_0^2 \preceq \varepsilon(\nabla(u-\Pi u), \nabla v_N) + c\,(E-\Pi E, v_N)_{\Omega_f}.$$

In the second term we hope to get some extra power of ε, in the first term we want to apply superconvergence techniques for the estimation of the expression $(\nabla(E-\Pi E), \nabla v_N)$. First let us remark that ΠE satisfies the same estimates as the bilinear interpolant E^I on Ω_f and (based on Lin identities)

$$\varepsilon|(\nabla(E-\Pi E), \nabla v_N)| \preceq N^{-2}\varepsilon^{3/4}|v_N|_1.$$

It is only a technical question to prove that for our modified interpolant using the fact that E is on that strip is as small as we want and that the measure of the strip is small as well.

Summarizing we get the supercloseness result

$$\varepsilon^{1/4}|u^N - \Pi u|_1 \preceq \varepsilon^{1/4}N^{-1} + (N^{-1}\ln N)^2.$$

It is no problem to estimate the L_2 error.

Next we present an application of the supercloseness result to the combination technique. We analyse the version of the combination technique presented in [1].

Writing N for the maximum number of mesh intervals in each coordinate direction, our combination technique simply adds or subtracts solutions that have been computed by the Galerkin FEM on $N \times \sqrt{N}$, $\sqrt{N} \times N$ and $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ meshes. We obtain the same accuracy as on a $N \times N$ mesh with less degrees of freedom. In the following we use the notation of [1].

In the combination technique for bilinear elements we compute a two-scale finite element approximation $u^N_{\hat{N},\hat{N}}$ by

$$u^N_{\hat{N},\hat{N}} := u^N_{N,\hat{N}} + u^N_{\hat{N},N} - u^N_{\hat{N},\hat{N}}.$$

Later we will choose $\hat{N} = \sqrt{N}$. We proved (in our new notation)

$$\|u - u_{NN}\|_b \preceq N^{-1}(\ln N)^{3/2} + N^{-2}. \tag{21}$$

The question is whether or not $u^N_{\hat{N},\hat{N}}$ satisfies a similar estimate (in the case $\hat{N} = \sqrt{N}$).

And indeed our supercloseness result yields finally

$$\|u^N_{\hat{N},\hat{N}} - u_{NN}\|_b \preceq \varepsilon^{1/4}N^{-1/2} + N^{-1}\ln N. \tag{22}$$

That means so far we can only proof the desired estimate for the combination technique if $\varepsilon \preceq N^{-2}$.

4. A direct mixed method

The first balanced error estimate was presented by Lin and Stynes [3] using a first order system least squares (FOSLS) mixed method. For the variables $(u, \bar{q})$ with $-\bar{q} = \nabla u$ and its discretizations on a Shishkin mesh they proved

$$\varepsilon^{1/4}|\bar{q} - \bar{q}^N|_1 + \|u - u^N\|_0 \preceq N^{-1} \ln N. \tag{23}$$

Introducing $\bar{q} = -\nabla u$, a weak formulation of (1) reads:
Find $(u, \bar{q}) \in V \times W$ such that

$$\varepsilon(div\, \bar{q}, w) + c(u, w) = (f, w) \qquad \text{for all } w \in W, \tag{24a}$$
$$\varepsilon(\bar{q}, \bar{v}) - \varepsilon(div\, \bar{v}, u) = 0 \qquad \text{for all } \bar{v} \in V, \tag{24b}$$

with $V = H(div, \Omega)$, $W = L^2(\Omega)$.

For the discretization on a standard rectangular Shishkin mesh we use $(u^N, \bar{q}^N) \in V^N \times W^N$. Here W^N is the space of piecewise constants on our rectangular mesh and V^N the lowest order Raviart-Thomas space RT_0. That means, on each mesh rectangle elements of RT_0 are vectors of the form

$$(span(1, x), span(1, y))^T.$$

Our discrete problem reads: Find $(u^N, \bar{q}^N) \in V^N \times W^N$ such that

$$\varepsilon(div\, \bar{q}^N, w) + c(u^N, w) = (f, w) \qquad \text{for all } w \in W^N, \tag{25a}$$
$$\varepsilon(\bar{q}^N, \bar{v}) - \varepsilon(div\, \bar{v}, u^N) = 0 \qquad \text{for all } \bar{v} \in V^N. \tag{25b}$$

For the error estimation we introduce projections $\Pi : V \mapsto V^N$ and $P : W \mapsto W^N$. As usual, instead of $u - u^N$ and $\bar{q} - \bar{q}^N$ we estimate $Pu - u^N$ and $\Pi\bar{q} - \bar{q}^N$, assuming that we can estimate the projection errors. And indeed we can finally prove

$$\varepsilon^{1/4}\|\Pi\bar{q} - \bar{q}^N\|_0 \preceq N^{-1} \ln N, \qquad \varepsilon^{1/4}\|\nabla u - \bar{q}^N\|_0 \preceq N^{-1} \ln N. \tag{26}$$

References

[1] Franz S., Liu F., Roos H.-G., Stynes M., Zhou A., “The combination technique for a two-dimensional convection-diffusion problem with exponential layers”, *Appl. Math.*, **54(3)** (2009), 203–223.

[2] Franz S., Roos H.-G., “Error estimates in a balanced norm for a convection-diffusion problem with two different boundary layers”, *Calcolo*, **51** (2014), 423–440.

[3] Lin R., Stynes M., “A balanced finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems”, *SINUM*, **50** (2012), 2729–2743.

[4] Oswald P., “L_∞-bounds for the L_2-projection onto linear spline spaces”, *Recent advances in Harmonic Analysis and Applications*, Springer, New York, 2013, 303–316.

[5] Roos H.-G., Schopf M., “Convergence and stability in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems”, *ZAMM*, **95(6)** (2015), 551–565.

Ханс-Гёрг Роос, "Оценки погрешности в сбалансированных нормах методов конечных элементов на сетках Шишкина для задач реакции-диффузии", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 357–363.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-357-363

Аннотация. Оценки погрешности методов конечных элементов для задач реакции-диффузии часто производятся в соответствующей энергетической норме. Однако для сингулярно-возмущённого случая такая норма не является адекватной. Перемасштабирование H^1-полунормы приводит к сбалансированной норме, которая правильно отражает поведение переходного слоя.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, суперблизость, метод сочетания, сбалансированные нормы

Об авторе:
Ханс-Гёрг Роос, Институт вычислительной математики, Технический Университет Дрездена, 01062 Дрезден, Германия, e-mail: hans-goerg.roos@tu-dresden.de

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 364–369
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 364–369

©Franz S., Roos H.-G., 2016
DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-364-369
UDC 519.6

Robust Error Estimation for Singularly Perturbed Fourth Order Problems

Franz S., Roos H.-G.

Received May 20, 2016

Abstract.
We consider two-dimensional singularly perturbed fourth order problems and estimate on properly constructed layer-adapted errors of a mixed method in the associated energy norms and balanced norms. This paper is a shortened version of [4].

Keywords: singular perturbation, fourth order problem, mixed method, boundary layers, layer-adapted meshes, balanced norms

For citation: Franz S., Roos H.-G., "Robust error estimation for singularly perturbed fourth order problems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 364–369.

On the authors:
Sebastian Franz, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden,
01062 Dresden, Deutschland, e-mail: sebastian.franz@tu-dresden.de

Hans-Gorg Roos, Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden,
01062 Dresden, Deutschland, e-mail: hans-goerg.roos@tu-dresden.de

Introduction

Let us consider the singularly perturbed plate bending problem given by the fourth-order differential equation

$$\varepsilon^2\Delta^2 u - b\Delta u + (c\cdot\nabla)u + du = f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2, \tag{1a}$$

where $b \geq b_0 > 1$, $d - \frac{1}{2}(\operatorname{div} c + \Delta b) \geq \delta > 0$ and $f \in L^2(\Omega)$ are smooth functions, with the boundary conditions

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma := \partial\Omega. \tag{1b}$$

The solution of this problem lies in H_0^2 which means, a conforming finite element discretisation requires C^1-elements. They are not very popular in 2d or 3d, which leads to the widely usage of mixed or non-conforming methods. In this paper we want to study mixed finite element methods of order p. For non-singularly perturbed problems ($\varepsilon = 1$) and p-th order finite-element approximation for u and $w = \Delta u$, the classical error estimate

$$\|u - u_h\|_1 + h\|w - w_h\|_0 \leq Ch^p\|u\|_{p+1} \tag{2}$$

for the discrete solutions u_h and w_h on a standard shape-regular mesh with $p \geq 2$, is known, see [3, 11].

Here we want to consider the singularly perturbed case and estimation in energy and balanced norms. We use standard notation for Sobolev spaces, where $\|\cdot\|_0$ is the L^2-norm, $|\cdot|_k$ the seminorm in H^k and $\|\cdot\|_k$ the full H^k-norm. Furthermore, we denote by $\langle u, v\rangle_D$ the L^2-scalar product over a domain $D \subset \Omega$, a subscript we drop if $D = \Omega$.

1. Solution decomposition and meshes

For our numerical analysis to work we assume a decomposition of the solution u of problem (1a)+(1b) into a smooth part, boundary layers and corner layers:

$$u = S + \sum_{k\in\mathcal{I}} E_k, \quad \text{where} \quad \mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 12, 23, 34, 41\}.$$

Here S stands for the smooth part, E_k with $k = 1, 2, 3, 4$ for a boundary layer and E_k with $k = 12, 23, 34, 41$ for a corner layer. More precisely, we assume

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i\partial_y^j S\|_0 &\leq C, & |\partial_x^i\partial_y^j E_1(x,y)| &\leq C\varepsilon^{1-i}\mathrm{e}^{-x/\varepsilon},\\ |\partial_x^i\partial_y^j E_2(x,y)| &\leq C\varepsilon^{1-j}\mathrm{e}^{-y/\varepsilon}, & |\partial_x^i\partial_y^j E_{12}(x,y)| &\leq C\varepsilon^{1-i-j}\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}\mathrm{e}^{-y/\varepsilon}, \end{aligned}$$

and similarly for the other components of the decomposition. These assumptions are reasonable, see e.g in 1d in [12] or for smooth domains in [2, §12.4.3].

Using the information on the layers we generate a layer-adapted Shishkin mesh [15]. With the transition points $\lambda = \sigma\varepsilon \ln N < \frac{1}{4}$ the interval $[0, 1]$ is now partitioned with a piecewise equidistant mesh, that is constructed by equidistantly dividing $[0, \lambda]$ into $N/4$ subintervals, $[\lambda, 1 - \lambda]$ into $N/2$ and $[1 - \lambda, 1]$ into $N/4$ subintervals again. The tensor product of two such one-dimensional meshes gives the Shishkin mesh.

With above assumption on the solution decompositions we have $|E_1(\lambda, y)| \leq C\varepsilon N^{-\sigma}$. These layers are therefore *weak layers* as their influence vanishes with decreasing ε in a pointwise sense. Note also that the small and the large meshwidths satisfy

$$h = \frac{4\lambda}{N} \leq C\varepsilon N^{-1}\ln N \quad \text{and} \quad H = 2\frac{1-2\lambda}{N} \leq CN^{-1}.$$

2. Numerical method and analysis

Using $w = \varepsilon\Delta u \in H^2(\Omega)$, we rewrite the fourth-order problem as a system and obtain a weak formulation:

Find $(u, w) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ such that for all $(\varphi, \psi) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \varepsilon\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle + \langle w, \varphi\rangle &= 0,\\ \langle b\nabla u, \nabla\psi\rangle + \langle(\mathbf{c}\cdot\nabla)u + du, \psi\rangle - \varepsilon\langle\nabla w, \nabla\psi\rangle &= \langle f, \psi\rangle, \end{aligned}$$

where $\mathbf{c} = c + \nabla b$. The associated bilinear form is given by $a : (H_0^1 \times H^1)^2 \mapsto \mathbb{R}$ with

$$a((u, w), (\psi, \varphi)) = \varepsilon\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle + \langle w, \varphi\rangle + \langle b\nabla u, \nabla\psi\rangle + \langle\mathbf{c}\cdot\nabla u + du, \psi\rangle - \varepsilon\langle\nabla w, \nabla\psi\rangle.$$

and a corresponding energy norm by

$$|||(u,w)|||^2 := \|w\|_0^2 + b_0\|\nabla u\|_0^2 + \delta\|u\|_0^2.$$

By a direct calculation we have coercivity of the bilinear form w.r.t. the energy norm

$$a((u,w),(u,w)) \geq |||(u,w)|||^2 .$$

Therefore, above mixed formulation has a unique solution. Now let us define the discrete space on a rectangularly divided mesh T_N. We use

$$V := \{v \in H^1(\Omega) :\ v|_\tau \in \mathcal{Q}_p(\tau)\,\forall \tau \in T_N\}, \quad V_0 := V \cap H_0^1(\Omega).$$

Here $\mathcal{Q}_p(\tau)$ is the polynomial space on τ, with polynomial degrees at most p in each coordinate direction. The discrete problem now reads: Find $(u_h, w_h) \in V_0 \times V$ such that

$$a((u_h,w_h),(\psi,\varphi)) = \langle f,\psi\rangle \quad \text{for all } \varphi \in V,\ \psi \in V_0. \tag{3}$$

2.1. Estimation in the energy norm

The analysis of our method works, as usual, with the help of suitable interpolation operators and their error estimates. Let us define the interpolation operators $I : C(\Omega) \to V_0(\Omega)$ and $J : C(\Omega) \to V(\Omega)$ in the sense of [5, p. 108] and [8]. For these interpolation operators hold the anisotropic interpolation-error estimates by [1, 10]. Using these, standard techniques and the definition of the mesh, see i.e. [14, Section III.3.5], we obtain the following interpolation-error estimates.

Lemma 1. *We have for $\sigma \geq p+1$*

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_0 &\leq C(N^{-1}\ln N)^{p+1}, & \|\nabla(u - Iu)\|_0 &\leq C(N^{-1}\ln N)^p,\\ \|w - Jw\|_0 &\leq C(N^{-1}\ln N)^{p+1}, & \|\nabla(w - Jw)\|_0 &\leq C\varepsilon^{-1/2}(N^{-1}\ln N)^p. \end{aligned}$$

We can also use supercloseness estimates based on integral identities from [7, 6, 17, 16]. They yield on each cell τ

$$|\langle (Iv - v)_x, \chi_x\rangle_\tau| \leq Ck_\tau^{p+1}\|v_{xy^{p+1}}\|_{0,\tau}\|\chi_x\|_{0,\tau}. \tag{4a}$$

Let us now consider a rectangular domain $T = \bigcup\{\tau\}$ with $\ell_{1,T}$ and $\ell_{2,T}$ being its left and right boundary. With inverse and Holder inequalities we conclude also the estimates

$$\begin{aligned} |\langle (Iv - v)_x, \chi_x\rangle_T| \leq{}& C\sum_{\tau\subset T} k_\tau^{p+1}\left(\frac{k_\tau}{h_\tau}\|v_{xy^{p+2}}\|_{0,\tau} + \|v_{x^2y^{p+1}}\|_{0,\tau}\right)\|\chi\|_{0,\tau}\\ &+ C\sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{\tau\subset T\\ \tau\cap\ell_{i,T}\neq\emptyset}} k_\tau^{p+1}\left(\frac{k_\tau}{h_\tau}\right)^{1/2}\|v_{xy^{p+1}}\|_{L^\infty(\partial\tau\cap\ell_{i,T})}\|\chi\|_{0,\tau}. \end{aligned} \tag{4b}$$

If $v_x = 0$ or $\chi = 0$ on $\ell_{i,T}$ for $i = 1$ or $i = 2$, then the sum containing i in (4b) can be omitted. The proof of the following theorem is based purely on interpolation-error estimates, supercloseness estimates and standard techniques for singularly perturbed problems.

Theorem 2. *Let $(u_h, w_h) \in V_0 \times V$. Then it holds for the discrete error on a Shishkin mesh with $\sigma \geq p+2$ the supercloseness result*

$$|||(Iu - u_h, Jw - w_h)||| \leq C(N^{-1} \ln N)^{p+1}.$$

Having these discrete-error and interpolation-error estimates, it is easy to conclude the following error estimates.

Theorem 3. *On a Shishkin mesh with $\sigma \geq p+2$ holds for the exact solution (u, w) and the discrete solution $(u_h, w_h) \in V_0 \times V$*

$$|||(u - u_h, w - w_h)||| \leq C(N^{-1} \ln N)^p.$$

2.2. Estimation in a balanced norm

For a typical layer function E_1 and a non-layer function S the energy-norm yields

$$|||(E_1, \varepsilon\Delta E_1)|||^2 = \varepsilon^2 \|\Delta E_1\|_0^2 + b_0 \|\nabla E_1\|_0^2 + \delta \|E_1\|_0^2 \leq C\varepsilon \text{ and } |||(S, \varepsilon\Delta S)|||^2 \leq C$$

and the the layer is not seen for $\varepsilon \to 0$ in the energy norm. Introducing a balanced norm

$$|||(u, w)|||_b^2 := \varepsilon^{-1} \|w\|_0^2 + b_0 \|\nabla u\|_0^2 + \delta \|u\|_0^2$$

with

$$|||(E_1, \varepsilon\Delta E_1)|||_b^2 = \varepsilon \|\Delta E_1\|_0^2 + b_0 \|\nabla E_1\|_0^2 + \delta \|E_1\|_0^2 \leq C \quad \text{and} \quad |||(S, \varepsilon\Delta S)|||_b^2 \leq C,$$

the layer is seen in this balanced norm. Unfortunately, our method is not coercive with respect to this norm. In order to prove error estimates we have to combine some more ideas. In [9] a special interpolation operator is constructed which uses different interpolants for a decomposition of $w = \varepsilon\Delta u$ into smooth and layer components and is for layer components zero in the subdomain where the layer components are small enough. In [13] the idea of using suitable projections in estimating balanced norms is introduced. For this purpose we define the Ritz-projection $\pi u \in V_0$ by

$$\langle b\nabla(\pi u - u), \nabla\psi\rangle + \langle \mathbf{c} \cdot \nabla(\pi u - u), \psi\rangle + \langle d(\pi u - u), \psi\rangle = 0$$

for all $\psi \in V_0$. Then we have for $\psi = \pi u - u_h \in V_0$ and $\varphi = \bar{J}w - w_h \in V$.

$$\left|\left|\left|(\pi u - u_h, \bar{J}w - w_h)\right|\right|\right|^2 \leq \varepsilon\langle\nabla(\pi u - u), \nabla\varphi\rangle + \langle \bar{J}w - w, \varphi\rangle - \varepsilon\langle\nabla(\bar{J}w - w), \nabla\psi\rangle.$$

Using these ideas we can prove error estimates in the stronger balanced norm.

Theorem 4. *It holds for the error of the discrete solution $(u_h, w_h) \in V_0 \times V$ in the balanced norm*

$$|||(u - u_h, w - w_h)|||_b \leq C(N^{-1} \ln N)^{p-1}.$$

Remark 5. *Comparing the results of the Theorems 3 and 4 we observe a reduction of the convergence order by one when measuring in the stronger norm. Numerically, there is no reduction visible.*

Moreover, combining Theorems 3 and 4 we obtain

$$\|u - u_h\|_1 + (N^{-1} \ln N)\varepsilon^{-1/2} \|w - w_h\|_0 \leq C(N^{-1} \ln N)^p$$

which is the corresponding uniform result on Shishkin meshes to the classical estimate (2) *for $\varepsilon = 1$.*

2.3. Further problems

The techniques used for the error estimates presented here can also be used for related problems. One of these examples is

$$\varepsilon^2\Delta^2\tilde{u} - b\Delta\tilde{u} + (c\cdot\nabla)\tilde{u} + d\tilde{u} = f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2,$$
$$\tilde{u} = \Delta\tilde{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

These boundary conditions introduce even weaker boundary layers, but above analysis can be adapted for this case too, and the same results in the energy norm hold. This norm is again not balanced, but can be made stronger by properly defining the weights in its definition. In this stronger norm an error estimate of the same order as in the energy norm holds in the case of constant b.

The extension to problems of type

$$\varepsilon^2\Delta^2\hat{u} + d\hat{u} = f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2,$$

with either of the boundary conditions considered above, can also be done. Here the boundary layers are stronger than the ones considered so far. Still the analysis can be applied.

Further information, the full proofs and numerical results can be found in [4].

References

[1] Apel T., *Anisotropic finite elements: local estimates and applications*, Advances in Numerical Mathematics, B. G. Teubner, Stuttgart, 1999.

[2] E. M. de Jager, Jiang Furu, *The Theory of Singular Perturbation*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[3] Falk R. S., Osborn J. E., "Error estimates for mixed methods", *RAIRO Anal. Numér.*, **14**:3 (1980), 249–277.

[4] Franz S., Roos H.-G., "Robust error estimation in energy and balanced norms for singularly perturbed fourth order problems", *Comput. Math. Appl.*, 2016, accepted for publication.

[5] Girault V., Raviart P.-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations: Theory and Algorithms*, Springer series in computational mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[6] Li J., "Full-Order Convergence of a Mixed Finite Element Method for Fourth-Order Elliptic Equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **230**:2 (1999), 329–349.

[7] Q. Lin, "A rectangle test for finite element analysis", *Proc. Syst. Sci. Eng.*, Great Wall (H.K.) Culture Publish Co., 1991, 213–216.

[8] Lin Q., Yan N., Zhou A., "A rectangle test for interpolated element analysis", *Proc. Syst. Sci. Eng.*, Great Wall (H.K.) Culture Publish Co., 1991, 217–229.

[9] Lin R., Stynes M., "A balanced finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems", *SIAM J. Numerical Analysis*, **50**:5 (2012), 2729–2743.

[10] Matthies G., "Local projection stabilisation for higher order discretisations of convection-diffusion problems on Shishkin meshes", *Adv. Comput. Math.*, **30**:4 (2009), 315–337.

[11] Monk P., "A mixed finite element method for the biharmonic equation", *SIAM J. Numer. Anal.*, **24**:4 (1987), 737–749.

[12] R. E. O'Malley Jr., *Introduction to singular perturbations*, Applied Mathematics and Mechanics, **14**, Academic Press, New York-London, 1974.

[13] Roos H.-G., Schopf M., “Convergence and stability in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems”, *ZAMM*, **95**:6 (2015), 551–565.

[14] Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L., *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, Springer Series in Computational Mathematics, **24**, Second, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[15] Shishkin G. I., *Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Russian Academy of Sciences, Ural Section, Ekaterinburg, 1992, (in Russian).

[16] Yan N., *Superconvergence analysis and a posteriori error estimation in finite element methods*, Series in Information and Computational Science, **40**, Science Press, Beijing, 2008.

[17] Zhang Zh., “Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-d convection-diffusion problems”, *Math. Comp.*, **72**:243 (2003), 1147–1177.

Франц С., Роос Х.-Г., "Робастная оценка погрешности в сингулярно возмущённых задачах четвертого порядка", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 364–369.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-364-369

Аннотация. Рассматриваются двумерные сингулярно возмущённые задачи четвертого порядка и оцениваются должным образом построенные адаптированные к слою погрешности смешанного метода в соответствующих энергетических нормах и сбалансированных нормах. Данная работа является сокращенной версией [4].

Ключевые слова: сингулярные возмущения, задача четвертого порядка, смешанный метод, пограничные слои, адаптированные к слою сетки, сбалансированные нормы

Об авторах:
Себастиан Франц, Институт вычислительной математики, Технический Университет Дрездена, 01062 Дрезден, Германия, e-mail: sebastian.franz@tu-dresden.de

Ханс-Гёрг Роос, Институт вычислительной математики, Технический Университет Дрездена, 01062 Дрезден, Германия, e-mail: hans-goerg.roos@tu-dresden.de

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 370–376
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 370–376

©Stynes M., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-370-376

UDC 517.9

A Caputo Two-Point Boundary Value Problem: Existence, Uniqueness and Regularity of a Solution

Stynes M.

Received May 19, 2016

Abstract.
A two-point boundary value problem on the interval $[0, 1]$ is considered, where the highest-order derivative is a Caputo fractional derivative of order $2 - \delta$ with $0 < \delta < 1$. A necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of a solution u is derived. For this solution the derivative u' is absolutely continuous on $[0, 1]$. It is shown that if one assumes more regularity — that u lies in $C^2[0, 1]$ — then this places a subtle restriction on the data of the problem.

Keywords: fractional derivative, boundary value problem, existence, uniqueness, regularity

For citation: Stynes M., "A Caputo two-point boundary value problem: existence, uniqueness and regularity of a solution", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 370–376.

On the authors:
Stynes M., Beijing Computational Science Research Center, Haidian District,
Beijing 100193, China, e-mail m.stynes@csrc.ac.cn

Introduction

Fractional derivatives are very fashionable at present: they are used in many recent models to give results that seem to be unattainable by classical integer-order derivatives. Consequently there is a huge amount of current research activity in the area of numerical methods for the solution of differential equations that involve fractional-order derivatives. Unfortunately, many papers analysing numerical methods for fractional-derivative problems neglect to discuss existence, uniqueness and regularity of the the solution to the problem they are solving — these fundamental and crucial properties are simply assumed to be true!

In the present paper, which is partly based on [5], we consider a Caputo two-point boundary value that is defined in Section 1.. This problem models superdiffusion of particle motion when convection is present; see [3, Section 1] and its references. In Section 2. we shall derive a necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of a solution to this problem in a certain space of functions that lies between $C^1[0, 1]$ and $C^2[0, 1]$. Then in Section 3. we show that if one assumes more regularity of the solution — then this places a subtle restriction on the data of the problem.

Notation. All functions are real valued. $C(I)$ comprises those functions that are continuous on an interval I, and $C^k(I)$ denotes the space of functions defined on I whose derivatives up to order k lie in $C(I)$, for $k = 1, 2, \ldots$ We follow the convention that $C^0(I) = C(I)$. Denote by $L_1[0,1]$ the standard Lebesgue space of integrable functions defined almost everywhere on $[0,1]$.

1. The Caputo two-point boundary value problem

The following definitions are needed to describe our boundary value problem.

For $r \in \mathbb{R}$ with $r > 0$, and all $g \in L_1[0,1]$, the *Riemann-Liouville fractional integral operator* J^r of order r is defined by

$$(J^r g)(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{t=0}^{x}(x-t)^{r-1}g(t)\,dt\right] \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Let the parameter δ satisfy $0 < \delta < 1$. Let $g \in C^1[0,1]$ with g' absolutely continuous on $[0,1]$. Then the *Caputo fractional derivative* $D_*^{2-\delta}g$ of order $2-\delta$ is defined for almost all $x \in (0,1)$ (see, e.g., [4, Theorem 2.1]) by

$$D_*^{2-\delta}g(x) := (J^\delta g'')(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{t=0}^{x}(x-t)^{\delta-1}g''(t)\,dt \quad \text{for} \quad 0 < x \le 1. \tag{2}$$

Since the integral in $D_*^{2-\delta}g(x)$ is associated with the point $x = 0$, many authors write instead $D_{*0}^{2-\delta}g(x)$, but for simplicity of notation we omit the subscript 0.

We shall consider the *two-point boundary value problem*

$$-D_*^{2-\delta}u(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{for } x \in (0,1), \tag{3a}$$

subject to the boundary conditions

$$u(0) - \alpha_0 u'(0) = \gamma_0, \tag{3b}$$
$$u(1) + \alpha_1 u'(1) = \gamma_1, \tag{3c}$$

where the constants $\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1$ and the functions b, c and f are given. We assume that $b, c, f \in C^q[0,1]$ for some integer $q \ge 1$.

Remark 1. *If one also assumes that $c \ge 0$ on $[0,1]$, $\alpha_0 \ge 1/(1-\delta)$ and $\alpha_1 \ge 0$, then (3) satisfies a comparison/maximum principle, from which existence and uniqueness of the solution u of (3) follows; see [7]. But if the Robin boundary condition at $x = 0$ is replaced by a Dirichlet boundary condition, then the comparison/maximum principle may no longer be true: a counterexample is given in [7, Example 2.4].*

A more general class of boundary value problems is considered in [6]. Numerical methods for the solution of (3) are presented and analysed rigorously in, for instance, [3, 5, 6, 7].

The present paper will discuss some theoretical aspects of (3): existence, uniqueness and regularity of solutions. Existence and uniqueness of a solution using the space

$C^{q,\delta}(0,1]$ defined below was proved in [5] by means of a reformulation in terms of Volterra integral equations of the second kind, under the additional hypotheses that

$$c \geq 0, \ \ \alpha_0 \geq 0 \quad \text{and} \quad \alpha_1 \geq 0. \tag{4}$$

We shall use the same Volterra reformulation here but interpret its conclusions in a more general way that yields conditions on the data that are necessary and sufficient for existence and uniqueness of a solution to (3).

When discussing solutions of (3), the following setting is natural [1, 8]. Let $C^{q,\delta}(0,1]$ be the space of all functions $y \in C[0,1] \cap C^q(0,1]$ such that

$$\|y\|_{q,\delta} := \sup_{0<x\leq 1} |y(x)| + \sum_{k=1}^{q} \sup_{0<x\leq 1} \left[x^{k-(1-\delta)}\, |y^{(k)}(x)|\right] < \infty.$$

That is, one has $|y(x)| \leq C$ and $|y^{(k)}(x)| \leq Cx^{(1-\delta)-k}$ for $k = 1, \dots, q$. By [8], $C^{q,\delta}(0,1]$ is a Banach space. Note that $C^q[0,1] \subset C^{q,\delta}(0,1]$.

Define the space of functions

$$C_1^{q,\delta}(0,1] := \left\{y \in C^1[0,1] \cap C^{q+1}(0,1] : y' \in C^{q,\delta}(0,1]\right\}.$$

We are interested only in those solutions u of (3) that lie in $C_1^{q,\delta}(0,1]$. This is a reasonable class of candidates for solutions of (3), since then $D_*^{2-\delta}u$ is defined everywhere in $(0,1]$ by Lemma 1 below, and as we shall see in Section 3., imposing more regularity on u'' by requiring $u \in C^2[0,1]$ would lead to certain difficulties.

Lemma 1. *Let $y \in C_1^{q,\delta}(0,1]$. Then $D_*^{2-\delta}y(x)$ is defined for all $x \in (0,1]$.*

Proof. Let $x \in (0,1]$. Then $D_*^{2-\delta}y(x) = (1/\Gamma(\delta)) \int_{t=0}^{x} (x-t)^{\delta-1} y''(t)\, dt$, provided this integral exists. Invoking the hypothesis that $y \in C_1^{q,\delta}(0,1]$, one has

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{t=0}^{x} \left|(x-t)^{\delta-1} y''(t)\right|\, dt \leq \frac{C}{\Gamma(\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{\delta-1} t^{-\delta}\, dt = C\,\Gamma(1-\delta)$$

by a standard formula for Euler's Beta function [2, Theorem D.6]. Hence the integral exists in the Lebesgue sense, i.e., $D_*^{2-\delta}y(x)$ is defined. $\square$

Example 1. *Consider the simple problem $D_*^{2-\delta}u = \Gamma(3-\delta)$ on $(0,1)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. From [2, pages 55 and 193] it is easy to see that the unique solution u of this problem is $u(x) = x^{2-\delta}$. Hence $u \in C_1^{m,\delta}(0,1]$ for any positive integer m, but $u \notin C^2[0,1]$.*

The regularity of the solution of Example 1 is typical of solutions to the general boundary value problem (3).

2. Existence and uniqueness of a solution

Define the Volterra operator L by

$$Lz(x) = z(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{-\delta} \left[b(t)z(t) + c(t)\int_0^t z(s)\, ds\right] dt \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

It is shown in the proof of [5, Lemma 2.1] that $L : C^{q,\delta}(0,1] \to C^{q,\delta}(0,1]$ is a compact operator.

Consider now two Volterra integral equations of the second kind: for $0 \le x \le 1$,

$$Lv(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{-\delta}[b(t) + (t+\alpha_0)c(t)]\, dt \tag{5}$$

and

$$Lw(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{-\delta}[\gamma_0 c(t) - f(t)]\, dt. \tag{6}$$

From [5, Lemma 4.1], the solutions v and w are well defined and lie in $C^{q,\delta}(0,1]$.

Theorem 1 (Existence and uniqueness of a solution to (3)). *Set*

$$\theta = \alpha_0 + \alpha_1[1 + v(1)] + \int_0^1 [1+v].$$

1. *If $\theta \neq 0$, then (3) has a unique solution*

$$u(x) = \gamma_0 + \mu\alpha_0 + \int_{t=0}^{x} [\mu(1+v(t)) + w(t)]\ dt$$

with $u \in C_1^{q,\delta}(0,1]$, where

$$\mu = \frac{\gamma_1 - \gamma_0 - \alpha_1 w(1) - \int_0^1 w}{\theta}. \tag{7}$$

2. *If $\theta = 0$, then (3) has either no solution or infinitely many solutions in $C_1^{q,\delta}(0,1]$.*

Proof. The analysis of [5] shows that for any $\mu \in \mathbb{R}$ the function

$$u(x) = u(0) + \mu x + \int_0^x (\mu v + w)(t)\, dt \tag{8}$$

lies in $C_1^{q,\delta}(0,1]$ and will satisfy the differential equation (3a) and the boundary condition (3b); it is also shown in [5] that if a function $u \in C_1^{q,\delta}(0,1]$ satisfies (3a) and (3b), then u satisfies (8). Thus it remains only to choose μ in (8) such that u satisfies the boundary condition (3c): $u(1) + \alpha_1 u'(1) = \gamma_1$.

Using (8) and eliminating $u(0)$ by means of (3b), one has

$$\begin{aligned} u(1) + \alpha_1 u'(1) &= u(0) + \mu + \alpha_1[\mu + \mu v(1) + w(1)] + \int_0^1 (\mu v + w) \\ &= \gamma_0 + \alpha_0\mu + u(0) + \mu + \alpha_1[\mu + \mu v(1) + w(1)] + \int_0^1 (\mu v + w) \\ &= \gamma_0 + \mu\theta + \alpha_1 w(1) + \int_0^1 w. \end{aligned}$$

If $\theta \neq 0$, then the unique choice of μ given by (7) yields $u(1) + \alpha_1 u'(1) = \gamma_1$ and the solution of (3) is then specified by (8).

If $\theta = 0$, there are two possibilities: if $\gamma_0 + \alpha_1 w(1) + \int_0^1 w \neq \gamma_1$ then the boundary condition (3c) cannot be satisfied and (3) has no solution, while if $\gamma_0+\alpha_1 w(1)+\int_0^1 w = \gamma_1$, then the boundary condition (3c) is satisfied for any choice of μ and we have infinitely many solutions given by (8) where $\mu \in \mathbb{R}$ is arbitrary. □

In [5, Theorem 4.1] it was shown that when (4) is satisfied, one then has $\theta > 0$ and consequently (3) has a unique solution, but the more general situation described in Theorem 1 was not discussed.

3. Effect of assuming that $u \in C^2[0, 1]$

In Sections 1. and 2., solutions of (3) lying in the space $C_1^{q,\delta}(0, 1]$ were considered. These solutions are smooth on $(0, 1]$ but typically much less smooth on the *closed* interval $[0, 1]$. The present section examines the effect of assuming that the solution u lies not just in $C_1^{q,\delta}(0, 1]$ but in the space $C^2[0, 1]$ for which u'' is bounded on $[0, 1]$. We show that with this assumption, the class of problems under consideration is restricted more severely than one would expect.

Higher regularity of solutions on the *closed* interval $[0, 1]$ is commonly assumed in numerical analyses of fractional-derivative problems, but many researchers seem unaware of the consequences of this assumption. We describe here what $u \in C^2[0, 1]$ implies for our problem (3); our results can easily be generalised to Caputo differential equations (boundary value problems and initial-value problems) of any order.

The crucial observation is the following result (see, e.g., [2, Lemma 3.11]), whose short elementary proof we include for completeness.

Lemma 2. *Let $g \in C^2[0, 1]$. Then*

$$\lim_{x\to 0^+} D_*^{2-\delta} g(x) = 0.$$

Proof. For any $x \in (0, 1)$,

$$D_*^{2-\delta} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{t=0}^{x} (x - t)^{\delta-1} g''(t)\, dt.$$

But $g \in C^2[0, 1]$ implies that $|g''(t)| \le C$ for $0 \le t \le 1$ and some constant C. Hence

$$\left|D_*^{2-\delta} g(x)\right| \le \frac{C}{\Gamma(\delta)} \int_{t=0}^{x} (x - t)^{\delta-1}\, dt = \frac{Cx^\delta}{\Gamma(\delta + 1)} \to 0 \text{ as } x \to 0^+.$$

□

Remark 2. *The converse of Lemma 2 is false. For suppose $g(x) = x^{2-\beta}$ with $0 < \beta < \delta$. Then $g \in C_1^{q,\delta}(0, 1]$ but $g \notin C^2[0, 1]$, and*

$$D_*^{2-\delta} g(x) = \frac{(2 - \beta)(1 - \beta)}{\Gamma(\delta)} \int_{t=0}^{x} (x - t)^{\delta-1} t^{-\beta}\, dt = \frac{\Gamma(3 - \beta)}{\Gamma(1 + \delta - \beta)} x^{\delta-\beta} \to 0 \text{ as } x \to 0^+,$$

where we used the standard formula for Euler's Beta function [2, Theorem D.6] to evaluate the integral.

Remark 3. *By imitating the calculation of Remark 2, one can replace the hypothesis* $g \in C^2[0,1]$ *of Lemma 2 by the weaker assumption that* $g \in C_1^{2,\beta}(0,1]$ *for some* $\beta \in (0,\delta)$.

Assume now that (3) has a solution $u \in C^2[0,1]$. Then by Lemma 2 we can apply $\lim_{x\to 0^+}$ to (3a), obtaining

$$b(0)u'(0) + c(0)u(0) = f(0). \tag{9}$$

One also has the boundary condition (3b); combining this with (9) yields

$$f(0) = [b(0) + \alpha_0 c(0)]u'(0) + \gamma_0 c(0). \tag{10}$$

Assume that u is the unique solution of (3), i.e., assume that $\theta \neq 0$ in Theorem 1. Then the value of $u'(0)$ is given by (7). Thus f must satisfy the equation

$$f(0) = \frac{[b(0) + \alpha_0 c(0)][\gamma_1 - \gamma_0 - \alpha_1 w(1) - \int_0^1 w]}{\alpha_0 + \alpha_1[1 + v(1)] + \int_0^1 [1+v]} + \gamma_0 c(0). \tag{11}$$

As w depends on f by (6), the necessary condition (11) places a difficult-to-verify restriction on f that is completely unnatural, and is due entirely to the arbitrary assumption that $u \in C^2[0,1]$.

Remark 4. *In the special case where* $b \equiv 0$ *and* $\alpha_0 = 0$, *the problem* (3) *becomes*

$$-D_*^{2-\delta}u + cu = f \ \text{ on } (0,1), \ \text{ with } u(0) = \gamma_0, \ u(1) + \alpha_1 u'(1) = \gamma_1.$$

If $u \in C^2[0,1]$ *here, we can work directly from Lemma 2 without appealing to [5]: taking the limit of the differential equation as* $x \to 0^+$ *shows that*

$$f(0) = c(0)u(0) = c(0)\gamma_0$$

is a necessary condition for a solution u *in* $C^2[0,1]$.

The analysis of this section shows that making excessive regularity assumptions on the solution to a fractional-derivative is not only unjustified (recall Example 1) but also restricts the class of problems under consideration by imposing a condition (11) on the data that may be difficult to check in any concrete example.

References

[1] Brunner Hermann, Pedas Arvet, Vainikko Gennadi, "Piecewise polynomial collocation methods for linear Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels", *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**:3 (2001), 957–982, electronic.

[2] Diethelm Kai, *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Lecture Notes in Mathematics, **2004**, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[3] Jin Bangti, Lazarov Raytcho, Pasciak Joseph, Rundell William, "Variational formulation of problems involving fractional order differential operators", *Math. Comp.*, **84**:296 (2015), 2665–2700.

[4] Kilbas Anatoly A., Srivastava Hari M., Trujillo Juan J., *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[5] Kopteva Natalia, Stynes Martin, "An efficient collocation method for a Caputo two-point boundary value problem", *BIT*, **55**:4 (2015), 1105–1123.

[6] Pedas Arvet, Tamme Enn, "Piecewise polynomial collocation for linear boundary value problems of fractional differential equations", *J. Comput. Appl. Math.*, **236**:13 (2012), 3349–3359.

[7] Stynes Martin, Gracia José Luis, "A finite difference method for a two-point boundary value problem with a Caputo fractional derivative", *IMA J. Numer. Anal.*, **35**:2 (2015), 698–721.

[8] Vainikko Gennadi, *Multidimensional weakly singular integral equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1549**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Стайнс М., "Двухточечная краевая задача Капуто: существование, единственность и регулярность решения", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 370–376.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-370-376

Аннотация. Рассматривается двухточечная краевая задача на промежутке $[0,1]$, в которой старшая производная является дробной производной Капуто порядка $2-\delta$ при $0<\delta<1$. Получено необходимое и достаточное условие существования и единственности решения u. Производная u' этого решения оказывается абсолютно непрерывной на $[0,1]$. Показано, что предположение о большей регулярности — что u принадлежит $C^2[0,1]$ — накладывает довольно тонкое ограничение на данные задачи.

Ключевые слова: дробная производная, краевая задача, существование, единственность, регулярность

Об авторах:
Мартин Стайнс, Пекинский Исследовательский Центр Вычислительных Наук, район Хайдянь,
Пекин 100193, Китай, e-mail: m.stynes@csrc.ac.cn

Моделирование и анализ информационых систем. Т. 23, № 3 (2016), с. 377–384
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 377–384

©Zadorin A. I., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-377-384

UDC 519.65

Interpolation Formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application

Zadorin A. I.

Received May 20, 2016

Abstract. Interpolation of functions on the basis of Lagrange's polynomials is widely used. However in the case when the function has areas of large gradients, application of polynomials of Lagrange leads to essential errors. It is supposed that the function of one variable has the representation as a sum of regular and boundary layer components. It is supposed that derivatives of a regular component are bounded to a certain order, and the boundary layer component is a function, known within a multiplier; its derivatives are not uniformly bounded. A solution of a singularly perturbed boundary value problem has such a representation. Interpolation formulas, which are exact on a boundary layer component, are constructed. Interpolation error estimates, uniform in a boundary layer component and its derivatives are obtained. Application of the constructed interpolation formulas to creation of formulas of the numerical differentiation and integration of such functions is investigated.

Keywords: function of one variable, boundary layer component, nonpolynomial interpolation, quadrature formulas, formulas of numerical differentiation, error estimate.

For citation: Zadorin A. I., "Interpolation Formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 377–384.

On the authors:
Zadorin A.I., professor, orcid.ord/0000-0002-2577-1181, Sobolev Mathematics Institute SB RAS,
Omsk department, 13 Pevtsova, 644043, Omsk, Russia

Acknowledgments:
This work (sections 2, 3) was supported by Russian Foundation for Basic Research under Grants 15-01-06584, 16-01-00727.

Introduction

Lagrange polynomials for interpolation of functions are widely used. However, according to [1], application of Lagrange polynomials for interpolation of functions with large gradients can lead to large interpolation errors. We suppose that the function under interpolation has the representation as the sum of regular and boundary layer components. Derivatives of the regular component are bounded up to some order. The boundary layer component is known to within a multiplier and has large gradients. It is known that the solution of a singularly perturbed boundary value problem has such representation [2]. We construct the interpolation formula which is exact on the boundary layer component. Then we use the constructed interpolation formula for the creation of formulas of numerical differentiation and integration of functions with the boundary layer component.

Through the paper C and C_j denote generic positive constants independent of ε and mesh size.

1. Interpolation formula and its properties

We suppose that function $u(x)$ has a form:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x),\ \ x \in [a, b], \tag{1}$$

where the function $u(x)$ is smooth enough, the boundary layer component $\Phi(x)$ is known, but its derivatives are not uniformly bounded. Regular component $p(x)$ and its derivatives are uniformly bounded up to some order, the constant γ is not known.

The solution of the following singular perturbed problem has the representation (1):

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x),\quad u(0) = A,\ \ u(1) = B, \tag{2}$$

where $a_1(x) \geq \alpha > 0,\ \ a_2(x) \geq 0,\ \ \varepsilon \in (0, 1]$, functions $a_1(x), a_2(x), f(x)$ are smooth enough, the constant α is separated from zero. According to [2, 3], the solution of problem (2) has exponential boundary layer near point $x = 0$ and can be written in the form (1).

For example, we will define

$$\Phi(x) = \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x),\ \ a_0 = a_1(0),\ \ \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0.$$

Then for some C_0 $|p'(x)| \leq C_0$, $|\gamma| \leq C_0$. Derivatives of function $\Phi(x)$ are not ε-uniformly bounded.

Let us Ω^h be an uniform grid of interval $[a, b]$:

$$\Omega^h = \{x_n :\ x_n = a + (n-1)h,\ x_1 = a,\ x_k = b,\ n = 1, 2, \ldots, k\}.$$

We suppose that the function $u(x)$ with the representation (1) is given at mesh nodes, $u_n = u(x_n)$.

Let $L_n(u, x)$ is Lagrange polynomial for function $u(x)$ with interpolation conditions at nodes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Now we will show that application of a polynomial of Lagrange for interpolation of function (1) can lead to considerable errors. We define $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Then for $\varepsilon \ll h$ $\ L_2(u, h/2) - u(h/2) \approx 1/2$. The accuracy of the interpolation doesn't increase with decrease of a step h.

In [4] for the interpolation of function of a form (1) the following interpolation formula was constructed:

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_{k-1}(u, x) + \frac{[x_1, \ldots, x_k]u}{[x_1, \ldots, x_k]\Phi}\Big[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)\Big], \tag{3}$$

where $[x_1, \ldots, x_k]u$ is the divided difference for a function $u(x)$ [5, p. 43].

It is possible to verify that the formula (3) is interpolation at nodes of x_1, x_2, $\ldots, x_k$, which is exact for polynomials of degree of $(k-2)$ and for component $\gamma\Phi(x)$. This formula is correctly defined if $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0,\ \ x \in (a, b)$. In [4] the following lemma was proved.

Lemma 1. *Let*

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)}. \tag{4}$$

Then

$$\Big|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\Big| \le \max_s |p^{(k-1)}(s)| \Big[|M_k(\Phi, x)| + 1\Big] h^{k-1}. \tag{5}$$

According to estimate (5), the constructed interpolation formula (3) has the error of order $O(h^{k-1})$ uniformly in $\Phi(x)$ if the function $M_k(\Phi, x)$ is bounded. We proved in [6] that $|M_2(\Phi, x)| \le 1$ if $\Phi'(x) \ne 0, x \in (a, b)$.

Lemma 2. *Let*

$$\Phi^{(k-1)}(x) > 0,\ \Phi^{(k)}(x) \ge 0 \quad \textit{or} \quad \Phi^{(k-1)}(x) < 0,\ \Phi^{(k)}(x) \le 0, \quad x \in (a, b). \tag{6}$$

Then

$$|M_k(\Phi, x)| \le 1. \tag{7}$$

Proof. Consider the first case in conditions (6). According to [5, p. 44]

$$\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x) = r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi,\ \ r_{k-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{k-1}).$$

Therefore, from (4) we obtain

$$M_k(\Phi, x) = \frac{r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi}{r_{k-1}(x_k)[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k]\Phi}. \tag{8}$$

According to [5] for some $s \in (a, b)$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi = \Phi^{(k-1)}(s)/(k-1)!. \tag{9}$$

Considering the condition $\Phi^{(k-1)}(x) > 0$, we obtain $z(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi > 0$. According to [5, p. 79] $z'(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x]\Phi$. We use the condition $\Phi^{(k)}(x) \ge 0$ and (9) to obtain $z'(x) \ge 0,\ x \in [a, b]$. So, the function $z(x)$ is positive and increasing on the interval $[a, b]$. Using the inequality $|r_{k-1}(x)| \le r_{k-1}(x_k)$ we obtain (7) from (8). The lemma is proved.

Conditions (6) are satisfied in a case of function $\Phi(x) = e^{(x-1)/\varepsilon}$, corresponding to exponential boundary layer [3].

Using the relation [5, p. 45]

$$L_k(u, x) - L_{k-1}(u, x) = r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \ldots, x_k]u,$$

the interpolation formula (3) can be written in a form

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_k(u, x) + \frac{[x_1, \ldots, x_k]u}{[x_1, \ldots, x_k]\Phi}\Big[\Phi(x) - L_k(\Phi, x)\Big]. \tag{10}$$

From (10) obviously follows that $L_{\Phi,k}(u, x)$ is interpolation, which is exact for $\Phi(x)$. We will notice that the formula (10) uses Lagrange's polynomials of bigger degree in comparison with the formula (3).

2. Formulas of numerical differentiation

Classical difference formulas for approximate calculation of derivatives are based on polynomials of Lagrange. However, in the case of the function with large gradients the interpolation error of this polynomials can be considerable that affects the accuracy of difference formulas. For such functions it is offered to build formulas of numerical differentiation on the basis of the constructed interpolant (3).

Differentiating the interpolant (3), we obtain

$$u^{(j)}(x) \approx L^{(j)}_{\Phi,k}(u,x) = L^{(j)}_{k-1}(u,x) + \frac{[x_1,\dots,x_k]u}{[x_1,\dots,x_k]\Phi}\Big[\Phi^{(j)}(x) - L^{(j)}_{k-1}(\Phi,x)\Big], \ j \geq 0. \quad (11)$$

The formula (11) is exact for function $\Phi(x)$. The analysis of accuracy of the formula (11) is of interest.

We investigate the accuracy of calculation of the first derivative of function $u(x)$, when the difference formula uses two nodes of any grid interval $[x_{n-1}, x_n]$.

The classical formula for a derivative has the form

$$u'(x) \approx L'_2(u,x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n. \quad (12)$$

Let $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Then $\varepsilon|(u_1 - u_0)/h - u'(0)| = e^{-1}$ if $\varepsilon = h$. So, the relative error of formula (12) doesn't decrease at decrease of a step h.

Now we consider the formula (11) with $j = 1, k = 2:$

$$u'(x) \approx L'_{\Phi,2}(u,x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi'(x), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n. \quad (13)$$

Lemma 3. *Suppose that the function $u(x)$ has the representation (1) on the interval $[0,1]$, where*

$$|p'(x)| \leq C_1, |p''(x)| \leq C_1/\varepsilon, \Phi(x) = e^{-a_0 x/\varepsilon} \ \text{or} \ \Phi(x) = e^{a_0(x-1)/\varepsilon}, \ \varepsilon, a_0 > 0.$$

Then for some constant C

$$\varepsilon|L'_{\Phi,2}(u,x) - u'(x)| \leq Ch, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n. \quad (14)$$

Proof. We consider the case $\Phi(x) = e^{-a_0 x/\varepsilon}$. We take into account that the formula (13) is exact for $\gamma\Phi(x)$ and obtain

$$\varepsilon|L'_{\Phi,2}(u,x) - u'(x)| = \varepsilon|L'_{\Phi,2}(p,x) - p'(x)| \leq \varepsilon|L'_{\Phi,2}(p,x) - L'_2(p,x)| + \varepsilon|L'_2(p,x) - p'(x)|.$$

For the second module we have

$$\varepsilon|L'_2(p,x) - p'(x)| \leq \varepsilon h \max_s |p''(s)| \leq C_1 h. \quad (15)$$

Now we estimate first module. We use the inequality $|p'(x)| \leq C_1$ and obtain

$$\varepsilon|L'_{\Phi,2}(p,x) - L'_2(p,x)| \leq C_1 h|F(x)|, \quad (16)$$

where
$$F(x) = -a_0 e^{-a_0 x/\varepsilon} \Big/ \Big[e^{-a_0 x_n/\varepsilon} - e^{-a_0 x_{n-1}/\varepsilon} \Big] - \frac{\varepsilon}{h}.$$

It is obvious that function $F(x)$ decreases on the interval $[x_{n-1}, x_n]$. We will show that this function is uniformly bounded at the ends of the interval. Let $\tau = a_0 h/\varepsilon$. Then
$$F(x_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{h} \Big[\frac{\tau}{1 - e^{-\tau}} - 1 \Big], \quad 0 < \tau < \infty.$$
Considering separately cases $\tau \geq 1$ and $\tau < 1$, we prove that $|F(x_{n-1})| \leq 2a_0$.

The similar estimate is correct for $|F(x_n)|$. Therefore, $|F(x)| \leq 2a_0$. We obtain (14) from (15), (16). The lemma is proved.

Thus, in the case of exponential boundary layer the advantage in accuracy of the offered formula (13) over classical formula (12) is proved.

3. Construction of the quadrature formula

Now we consider a question of creation of the quadrature formula for the integral
$$I(u) = \int\limits_a^b u(x)\, dx \tag{17}$$
in the case of the function $u(x)$, having the form (1).

We show that application of formulas of Newton-Cotes can lead to the essential errors. For this purpose we consider the composite Simpson's formula
$$S_3^c(u) = \frac{h}{3} \sum_{n=1,2}^{N-1} \Big(u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1} \Big), \quad x_0 = a, x_N = b, Nh = b - a, \;\; a = 0, b = 1.$$
It is known that the composite formula of Simpson has the error about $O(h^4)$ if the derivative $u^{(4)}(x)$ is uniformly bounded.

We consider function $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$. Derivatives of this function are large for small ε. We write the error of Simpson's formula for the interval $[0, 2h]$
$$\Delta = \int\limits_0^{2h} \exp(-\varepsilon^{-1}x)\, dx - \frac{h}{3}(1 + 4\exp(-\varepsilon^{-1}h) + \exp(-2\varepsilon^{-1}h)).$$
It follows that $\Delta = O(h^5)$ if $\varepsilon \approx 1$ and $\Delta = O(h)$ if $\varepsilon \leq h$. So, in the presence of a boundary layer component the error of Simpson's formula can increase to the quantity about $O(h)$.

In [7] is offered to build quadrature formulas for functions of the form (1) which are exact on the boundary layer component $\Phi(x)$. For this purpose the function under the integral was replaced by interpolant (3), as a result the quadrature formula was constructed. Quadrature formulas with two and three nodes have been constructed. In [8, 9] has been similarly constructed quadrature formulas with four and five nodes. In these works it is proved that the constructed composite formulas have the error of order

$O(h^{k-1})$, where k is the number of nodes of the quadrature formula. There was only restriction $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$.

In [10] the quadrature formula with k nodes, which is exact on a boundary layer component, was constructed.

Substitution of the interpolant (10) into integral (17) leads to a quadrature formula:

$$S_{\Phi,k}(u) = S_k(u) + \frac{[x_1,x_2,\dots,x_k]u}{[x_1,x_2,\dots,x_k]\Phi}\Big[\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx - S_k(\Phi)\Big],\quad S_k(u) = \int\limits_a^b L_k(u,x)\,dx, \quad (18)$$

where $S_k(u)$ is closed Newton-Cotes formula with k nodes. It is obvious that the quadrature formula (18) is exact for the function $\Phi(x)$.

In [10] the estimate of the error of formula (18) is proved.

Lemma 4. *Suppose that the function $u(x)$ has the form (1) and the derivative $p^{(k-1)}(x)$ is uniformly bounded on $[a,b]$,*

$$\Phi^{(k-1)}(x) > 0,\ x \in (a,b),\quad \bar{S}_{k-1}(\Phi) \le I(\Phi) \le S_k(\Phi)$$

or

$$\Phi^{(k-1)}(x) < 0,\ x \in (a,b),\quad S_k(\Phi) \le I(\Phi) \le \bar{S}_{k-1}(\Phi).$$

Then

$$|S_{\Phi,k}(u) - I(u)| \le \frac{2}{(k-1)^{k-1}} \max_s |p^{(k-1)}(s)|(b-a)^k. \quad (19)$$

The error estimate (19) does not depend on the boundary layer component $\Phi(x)$ and its derivatives. The composite quadrature formula, based on a formula (18), has the error of order $O(h^{k-1})$.

As it was told above, in the most usable cases $2 \le k \le 5$ the estimate (19) is fullfiled under one condition $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0,\ a < x < b$.

If at creation of a quadrature formula to use the interpolation formula (3), then we will receive simpler quadrature formula. In particular, at odd k Newton-Cotes's formula in (18) changes on a quadrature formula of open type with smaller number of nodes.

4. Numerical results

Consider the function $u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\varepsilon^{-1}(x+x^2/2)},\ x \in [0,1],\ \varepsilon > 0$.

Table 1 contains the maximum error of piecewise polynomial interpolation in the case $k = 4$, computed at the midpoints between the nodes. At small values of ε the accuracy does not increase with decreasing of step h.

Table. 2 contains the interpolation error and the computed order of accuracy of the interpolation (3) with $k = 4$, which is used in subintervals of the length $3h$. At small ε the order of accuracy becomes third, which corresponds to the estimate (5).

Table 1. The error of piecewise-polynomial interpolation with $k = 4$

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$4.43e-7$	$2.89e-8$	$1.84e-9$	$1.16e-10$	$7.31e-12$	$4.58e-13$
10^{-1}	$4.04e-4$	$2.85e-5$	$1.88e-6$	$1.21e-7$	$7.64e-9$	$4.80e-10$
10^{-2}	$2.03e-1$	$7.14e-2$	$1.28e-2$	$1.44e-3$	$1.23e-4$	$8.99e-6$
10^{-3}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.07e-1$	$2.44e-1$	$1.08e-1$	$2.41e-2$
10^{-4}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.11e-1$
10^{-5}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$

Table 2. The error and the order of accuracy of interpolation formula (3) with $k = 4$

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$1.20e-5$	$7.55e-7$	$4.71e-8$	$2.94e-9$	$1.84e-10$	$1.15e-11$
	3.99	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
10^{-1}	$4.12e-5$	$2.50e-6$	$1.52e-7$	$9.44e-9$	$5.87e-10$	$3.66e-11$
	4.04	4.04	4.01	4.01	4.00	4.01
10^{-2}	$4.68e-4$	$2.99e-5$	$1.70e-6$	$9.81e-8$	$5.86e-9$	$3.57e-10$
	3.97	4.14	4.12	4.07	4.04	4.01
10^{-3}	$6.89e-4$	$8.72e-5$	$1.08e-5$	$1.08e-6$	$7.46e-8$	$4.28e-9$
	2.98	3.01	3.32	3.86	4.12	4.12
10^{-4}	$6.89e-4$	$8.72e-5$	$1.09e-5$	$1.37e-6$	$1.71e-7$	$2.13e-8$
	2.98	3.00	2.99	3.00	3.01	3.17
10^{-5}	$6.89e-4$	$8.72e-5$	$1.09e-5$	$1.37e-6$	$1.71e-7$	$2.14e-8$
	2.98	3.00	2.99	3.00	3.01	3.00

References

[1] Zadorin A. I., "Method of interpolation for a boundary layer problem", *Suberian journal of numerical mathematics*, **10**:3 (2007), 267–275, (in Russian).

[2] Shishkin G. I., *Discrete Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Russian Academy of Sciences, Ural Branch, Ekaterinburg, 1992, (in Russian).

[3] Miller J. J. H., O'Riordan E., Shishkin G.I., *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions*, Revised Edition, World Scientific, Singapore, 2012.

[4] Zadorin A. I., Zadorin N. A., "Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **9** (2012), 445–455.

[5] Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M., *Numerical Methods*, Nauka, Moskow, 1987, (in Russian).

[6] Zadorin A. I., Zadorin N. A., "Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:2 (2010), 211–223.

[7] Zadorin A. I., Zadorin N. A., "Quadrature formulas for functions with a boundary-layer component", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **51**:11 (2011), 1837–1846.

[8] Zadorin A. I., Zadorin N. A., "An analogue of the four-point Newton-Cotes formula for a function with a boundary-Layer Component", *Numerical Analysis and Applications*, **6**:4 (2013), 268–278.

[9] Zadorin A., Zadorin N., "Quadrature formula with five nodes for functions with a boundary layer component", *Lect. Notes in Comput. Sci.*, **8236** (2013), 540–546.

[10] Zadorin A. I., Zadorin N. A., "Analogue of Newton-Cotes formulas for numerical integration of functions with a boundary-layer component", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:3 (2016), 358–366.

Задорин А. И., "Интерполяционные формулы для функций с большими градиентами в пограничном слое и их применение", *Моделирование и анализ информационых систем*, **23**:3 (2016), 377–384.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-377-384

Аннотация. Интерполяция функций на основе многочленов Лагранжа получила широкое применение. Однако в случае, когда интерполируемая функция имеет области больших градиентов, применение многочленов Лагранжа приводит к существенным погрешностям. В работе предполагается, что интерполируемая функция одной переменной представима в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих. Предполагается, что производные регулярной составляющей до определенного порядка ограничены, а погранслойная составляющая является функцией общего вида, известная с точностью до множителя, ее производные не являются равномерно ограниченными. Такое представление имеет решение сингулярно возмущенной краевой задачи. Строятся интерполяционные формулы, точные на погранслойной составляющей, получены оценки погрешности интерполяции, равномерные по погранслойной составляющей и ее производным. Исследовано применение построенных интерполяционных формул к построению формул численного дифференцирования и интегрирования функций рассматриваемого вида.

Ключевые слова: функция одной переменной, погранслойная составляющая, неполиномиальная интерполяция, квадратурные формулы, формулы численного дифференцирования

Об авторе:
Задорин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
orcid.org/0000-0002-2577-1181, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал),
ул. Певцова, 13, г. Омск, 644046, Россия

Благодарности:
Работа (разделы 2, 3) поддержана РФФИ, проекты 15-01-06584, 16-01-00727.