ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 23 № 5(65) 2016

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №5. 2016

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ №ФС77-49724 от 11.05.2012 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 22.10.2016. Дата выхода в свет 31.10.2016. Формат $60\text{x}84^1/_8$. Усл. печ. л. 18,4. Уч.-изд. л. 16,0. Объем 158 с. Тираж 50 экз. Свободная цена. Заказ 068/016. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 23 No 5(65) 2016

Founded in 1999
6 issues per year

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5. 2016

От редактора специального выпуска

С. Д. Глызин

В данном выпуске журнала продолжена публикация статей, подготовленных на основе докладов Тринадцатого ежегодного семинара **«Численные методы решения задач с погранслоем» (13th Annual Workshop on Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena),** посвященного девяностолетию Аделаиды Борисовны Васильевой. Семинар был организован и проведен с 6 по 9 апреля 2016 года кафедрой математики Физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. В настоящий выпуск журнала включены восемь статей, подготовленных по итогам семинара.

В статье В. Ф. Бутузова и В. А. Белошапко для сингулярно возмущенной эллиптической задачи с граничными условиями Дирихле и кратными корнями вырожденного уравнения построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения задачи, которое качественно отличается от известного разложения в случае, когда корень вырожденного уравнения простой.

Статья А. А. Белова и Н. Н. Калиткина посвящена современным численным методам, предназначенным для эффективного моделирования задач с контрастными структурами. Исследованы границы применимости предлагаемых методов.

В работе Ж. О. Домбровской численно решается система вихревых уравнений Максвелла для кусочно-однородной диэлектрической среды в одномерном случае. Построена кусочная квазиравномерная сетка, передающая все характерные участки решения этой задачи (регулярную область, пограничный слой и переходную зону между ними).

Асимптотический анализ взаимодействия пары разнонаправленных волн в модели Ферми – Паста – Улама выполнен в статье С.Д. Глызина, С.А. Кащенко и А.О. Толбей. Авторами описано влияние волн друг на друга и показано, что оно асимптотически мало и не меняет форму волн, внося вклад только в их скоростной сдвиг, который не меняется по времени.

В работе А.А. Мельниковой и Р.Л. Аргуна рассматривается применение теории контрастных структур к исследованию моделей активных сред и построена асимптотика стационарного решения с внутренним переходным слоем для системы типа ФитцХью–Нагумо.

Численное исследование начально-краевой задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения обсуждается в статье Л. П. Шишкиной. Для получения корректных результатов используется специальная разностная схема, сгущающаяся в окрестностях пограничных слоев и равномерная по времени.

В статье Г. И. Шишкина для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с параметром при старшей производной рассматривается начально-краевая задача Дирихле. Найдены условия на допустимые компьютерные возмущения, при которых точность возмущенного численного решения по порядку такая же, как у решения невозмущенной разностной схемы.

Работа М. А. Терентьева посвящена изучению одного класса сингулярно возмущённых задач, имеющих пересечения корней вырожденного уравнения. В ней обосновывается ряд результатов об отсутствии и разрушении решений в задачах со сменой устойчивости.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 515–528
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 515–528

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

УДК 519.632.34

Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф., Белошапко В. А.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная эллиптическая задача с граничными условиями Дирихле в случае кратного корня вырожденного уравнения. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения задачи. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда корень вырожденного уравнения – простой: асимптотическое разложение решения ведется по дробным степеням малого параметра, погранслойные переменные имеют другой масштаб, погранслойный ряд строится с помощью нестандартного алгоритма, пограничный слой вблизи границы области состоит из трех зон с различным поведением решения в разных зонах.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное эллиптическое уравнение, случай кратного корня вырожденного уравнения, асимптотическое разложение решения погранслойного типа, трехзонный пограничный слой

Для цитирования: Бутузов В. Ф., Белошапко В. А., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 515–528.

Об авторах:
Бутузов Валентин Федорович, orcid.org/0000-0002-8715-5720, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики физического факультета,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: butuzov@phys.msu.ru;

Белошапко Вера Александровна, orcid.org/0000-0002-7847-4113, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: postvab@rambler.ru.

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = u^0(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}$ – оператор Лапласа, Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Известно [1], [2], что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0 \tag{3}$$

имеет корень $u = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}$, причем

$$f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, x \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

функции f, $u^0(x)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие, $u^0(x)$ принадлежит области притяжения корня $\varphi(x)$, то задача (1), (2) для достаточно малых ε имеет решение $u(x, \varepsilon)$ с асимптотическим представлением

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \bar{u}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \Pi_i(\rho, l) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{5}$$

где $\bar{u}_i(x)$ – коэффициенты регулярной части асимптотики, $\rho = r/\varepsilon$ – погранслойная переменная, (r, l) – локальные координаты точки в окрестности $\partial\Omega$, r – расстояние от точки до $\partial\Omega$ вдоль нормали к $\partial\Omega$, l – переменная, определяющая положение точки на границе $\partial\Omega$, $\Pi_i(\rho, l)$ – пограничные функции, играющие существенную роль вблизи границы $\partial\Omega$ и экспоненциально стремящиеся к нулю при $\rho \to \infty$. Отметим, что в этом случае корень $\varphi(x)$ вырожденного уравнения является простым (однократным) в силу (4).

В данной работе задача (1), (2) исследуется при условии, что вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет двукратный корень. В связи с этим введем следующее условие.

Условие A1. *Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид*

$$f(u, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \tag{6}$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции, и пусть

$$h(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{7}$$

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить; поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать указанные функции бесконечно дифференцируемыми.

При условии A1 корень $u = \varphi(x)$ уравнения (3) является двукратным и, так же, как в работах [3] – [5], это приводит к качественному изменению асимптотики (при малых ε) решения задачи (1), (2) по сравнению со случаем простого корня: изменяется масштаб погранслойных переменных, а регулярный и погранслойный ряды становятся рядами не по целым, а по дробным степеням ε. Кроме того, существенное влияние на вид асимптотики решения оказывает теперь член порядка ε, входящий в правую часть (6), а именно функция $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$. В отличие от эллиптической задачи с граничными условиями Неймана [3], [4], пограничные функции в задаче (1), (2) появляются уже в нулевом приближении (будет показано ниже).

Условие А2. *Пусть* $\bar{f}_1(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}$.

Условие А3. *Пусть* $\Pi^0(l) := [u^0(x) - \varphi(x)]_{x\in\partial\Omega} > 0$.

2. Построение асимптотики решения

Как и в случае простого корня вырожденного уравнения, асимптотика решения задачи (1), (2) при условиях А1 – А3 будет состоять из регулярной $\bar{u}(x,\varepsilon)$ и погранслойной $\Pi(\rho, l, \varepsilon)$ частей, причем регулярная часть будет теперь рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε), пограничный слой будет иметь теперь трехзонный характер, и наряду с $\rho = r/\varepsilon$ появится новая погранслойная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$.

2.1. Регулярная часть асимптотики решения

Регулярную часть $\bar{u}(x,\varepsilon)$ асимптотики решения будем строить в виде

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x). \tag{8}$$

Уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x)$ этого ряда получаются стандартным способом, т. е. путем подстановки ряда (8) в уравнение (1) вместо u и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства. В результате получаем: $\bar{u}_0 = \varphi(x)$, а функция $\bar{u}_1(x)$ является решением уравнения

$$h(x)\bar{u}_1^2 - \bar{f}_1(x) = 0.$$

В силу условий А1 и А2 это уравнение имеет два вещественных корня. В качестве $\bar{u}_1(x)$ выберем положительный корень (такой выбор будет оправдан ниже):

$$\bar{u}_1(x) = \left[h^{-1}(x)\,\bar{f}_1(x)\right]^{1/2} > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{9}$$

Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$ ряда (8) последовательно определяются как решения линейных алгебраических уравнений

$$[2h(x)\bar{u}_1(x)]\,\bar{u}_i(x) = F_i(x), \quad i \geq 2, \tag{10}$$

где $F_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x), j < i$, а коэффициент при $\bar{u}_i(x)$ отличен от нуля в силу (7) и (9).

Отметим, что уравнение (10) получается в результате приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{(i+1)/2}$, поэтому частичная сумма $\overset{(n)}{\bar{u}} = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x)$ ряда (8) при подстановке в уравнение (1) дает невязку порядка $O(\varepsilon^{n/2+1})$, т. е.

$$L_\varepsilon \overset{(n)}{\bar{u}} := \varepsilon^2\Delta\overset{(n)}{\bar{u}} - f(\overset{(n)}{\bar{u}}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{11}$$

2.2. Погранслойная часть асимптотики

Для построения погранслойной части асимптотики перейдем в окрестности границы $\partial\Omega$ к новым (локальным) координатам. Пусть уравнения границы $\partial\Omega$ имеют вид

$$x_1 = \psi_1(l), \quad x_2 = \psi_2(l), \quad 0 \le l \le l_0,$$

где $\psi_1(l)$ и $\psi_2(l)$ – бесконечно дифференцируемые функции и ${\psi'}^2_1(l) + {\psi'}^2_2(l) \neq 0$. В достаточно малой окрестности $\partial\Omega$ (в которой нормали к $\partial\Omega$ не пересекаются) введем локальные координаты (r, l), где r – расстояние от точки до $\partial\Omega$ вдоль нормали, l – переменная, определяющая положение точки на границе $\partial\Omega$. Координаты (x_1, x_2) точки связаны с координатами (r, l) равенствами

$$x_1 = \psi_1(l) - r\frac{{\psi'}_2(l)}{\sqrt{{\psi'}_1^2(l) + {\psi'}_2^2(l)}}, \quad x_2 = \psi_2(l) + r\frac{{\psi'}_1(l)}{\sqrt{{\psi'}_1^2(l) + {\psi'}_2^2(l)}}.$$

В переменных (r, l) оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(r,l)\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \beta(r,l)\frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r,l)\frac{\partial}{\partial l},$$

где

$$\alpha(r,l) = \left(\frac{\partial l}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)^2, \quad \beta(r,l) = \frac{\partial^2 r}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial {x_2}^2}, \quad \gamma(r,l) = \frac{\partial^2 l}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial {x_2}^2}.$$

Произведем растяжение переменной r, причем коэффициент растяжения возьмем равным ε, т. е. введем погранслойную переменную $\rho = r/\varepsilon$. Наряду с погранслойной переменной ρ введем погранслойную переменную $\zeta = r/\varepsilon^{3/4} = \varepsilon^{1/4}\rho$ (отметим, что в случае [3] возникала только одна погранслойная переменная $\rho = r/\varepsilon^{3/4}$, а в случае [4] две погранслойные переменные $\rho = r/\varepsilon^{2/3}$ и $\zeta = r/\varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/6}\rho$) и запишем оператор $\varepsilon^2\Delta$ в виде

$$\varepsilon^2\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon^2\alpha(\varepsilon^{3/4}\zeta, l)\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \varepsilon\beta(\varepsilon^{3/4}\zeta, l)\frac{\partial}{\partial \rho} + \varepsilon^2\gamma(\varepsilon^{3/4}\zeta, l)\frac{\partial}{\partial l}.$$

Разложив коэффициенты α, β и γ в ряды по степеням $\varepsilon^{3/4}$ и сгруппировав слагаемые одного порядка относительно ε, получим разложение $\varepsilon^2\Delta$ по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\varepsilon^2\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j\right), \tag{12}$$

где L_j – линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ζ, l, содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$, в частности, $L_4 = \beta(0,l)\frac{\partial}{\partial\rho}$.

Погранслойную часть асимптотики $\Pi(\rho, l, \varepsilon)$ будем строить в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\Pi(\rho, l, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}\Pi_i(\rho, l). \tag{13}$$

Отметим, что в отличие от случая граничных условий Неймана [3], [4] слагаемые погранслойной части асимптотики возникают уже в нулевом приближении $(\Pi_0\,(\rho, l))$.

Граничные условия для функций $\Pi_i(\rho, l)$ при $\rho = 0$ обусловлены тем, что погранслойная часть асимптотики совместно с регулярной частью должны удовлетворять заданному граничному условию (2), т. е.

$$\bar{u}(0, l, \varepsilon) + \Pi(0, l, \varepsilon) = u^0(l), \quad 0 \le l \le l_0. \tag{14}$$

Здесь и далее используется обозначение $\bar{u}(r, l, \varepsilon) = \bar{u}\,(x(r, l), \varepsilon)$ и аналогичные обозначения для других функций.

Кроме того, потребуем, чтобы члены погранслойного ряда удовлетворяли стандартному условию при $\rho \to \infty$:

$$\Pi_i\,(\infty, l) = 0. \tag{15}$$

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho, l)$ ряда (13) будем извлекать из стандартного для метода пограничных функций равенства (см. [1])

$$\varepsilon^2 \Delta \Pi = \Pi f, \tag{16}$$

где в силу (12) и (13)

$$\varepsilon^2 \Delta \Pi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{j=4}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{4}} L_j \right) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i\,(\rho, l)\,,$$

$$\begin{gathered} \Pi f = \left[f\left(\bar{u}(r, l, \varepsilon) + \Pi(\rho, l, \varepsilon), r, l, \varepsilon\right) - f\left(\bar{u}(r, l, \varepsilon), r, l, \varepsilon\right)\right]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta} = \\ = \left[h(r, l) \cdot \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i\,(\rho, l) \right\}^2 - \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) \right\}^2 \right) - \right. \\ \left. - \varepsilon \left\{ f_1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i\,(\rho, l)\,, r, l, \varepsilon \right) - f_1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(r, l), r, l, \varepsilon \right) \right\} \right]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta} \end{gathered} \tag{17}$$

Если извлекать уравнения для функций $\Pi_i(\rho, l)$ стандартным образом [1], т. е. приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложениях левой и правой частей равенства (16), то для $\Pi_0(\rho, l)$ получаем задачу (l входит, как параметр, $0 \le l \le l_0$):

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \rho^2} = h(0, l) {\Pi_0}^2, \quad \rho > 0, \tag{18}$$

$$\Pi_0(0, l) = \Pi^0(l), \tag{19}$$

$$\Pi_0(\infty, l) = 0. \tag{20}$$

Решение этой задачи

$$\Pi_0(\rho, l) = \frac{\Pi^0}{\left(\sqrt{\frac{1}{6} h(0, l) \Pi^0} \cdot \rho + 1 \right)^2} \tag{21}$$

убывает при $\rho \to \infty$ степенным образом: $\Pi_0(\rho, l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right)$.

Однако анализ задачи (1), (2) показывает, что ее решение в пограничном слое ведет себя более сложным образом, чем это описывается функцией (21). Пограничный слой разделяется на три зоны. Степенное убывание пограничных функций имеет место только в первой зоне пограничного слоя. Вторая зона является переходной, а в третьей зоне пограничные функции убывают экспоненциально с ростом погранслойной переменной $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$. Ниже уточним границы этих зон.

Для корректного описания поведения решения в пограничном слое необходимо изменить стандартные уравнения для $\Pi_0(\rho, l)$ и следующих слагаемых погранслойного ряда. В правую часть уравнения (18) добавим слагаемое $2h(0,l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0$, которое содержится в разложении Πf (см. (17)). Таким образом, функция $\Pi_0(\rho, l)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \rho^2} = h(0,l)\left({\Pi_0}^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0\right), \quad \rho > 0, \tag{22}$$

с граничными условиями (19), (20).

Заметим, что функция Π_0 и также следующие коэффициенты Π_i ряда (13) будут зависеть не только от ρ и l, но также и от ε, но с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $\Pi_i(\rho, l)$ вместо $\Pi_i(\rho, l, \varepsilon)$.

Задача (22), (19), (20) стандартным образом сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} = -\sqrt{h(0,l)\left(\frac{2}{3}{\Pi_0}^3 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l){\Pi_0}^2\right)}, \quad \rho > 0, \tag{23}$$

с начальным условием (19).

Так как $\Pi^0(l) > 0$ (условие A3), $h(0,l) > 0$ (см. (7)), $\bar{u}_1(0,l) > 0$ (см. (9)), то $\Pi_0(\rho, l) > 0$ при $\rho \geq 0$ и $\Pi_0(\rho, l)$ монотонно стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Решение находится в явном виде

$$\Pi_0(\rho, l) = 12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\frac{c \cdot exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho)}{\left(1 - c \cdot exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho)\right)^2}, \tag{24}$$

где $c := 1 - \sqrt{12\bar{u}_1(0,l)(\Pi^0)^{-1}}\varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{1/2})$, $k_0 := \sqrt{2h(0,l)\bar{u}_1(0,l)} > 0$.

Анализ выражения (24) выявляет различный характер поведения $\Pi_0(\rho, l)$ в каждой из трех зон.

В первой зоне, где $0 \leq \rho \leq \varepsilon^{-\gamma}$, γ – любое число из промежутка $0 \leq \gamma < 1/4$, т.е. $0 \leq r \leq \varepsilon^{1-\gamma}$, функция $\Pi_0(\rho, l)$ убывает степенным образом:

$$\Pi_0(\rho, l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right).$$

Вторая зона, где $\varepsilon^{-\gamma} \le \rho \le \varepsilon^{-1/4}$, т.е. $\varepsilon^{1-\gamma} \le r \le \varepsilon^{3/4}$, является переходной, в ней происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции $\Pi_0(\rho, l)$.

И, наконец, в третьей зоне, где $\rho \ge \varepsilon^{-1/4}$, т. е. $r \ge \varepsilon^{3/4}$, возникает новая погранслойная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$, и функция Π_0 убывает экспоненциально с ростом ζ:

$$\Pi_0 = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\exp(-k_0\zeta).$$

При этом функция $\Pi_0(\rho, l)$, являющаяся решением задачи (22), (19), (20) описывает поведение решения во всех трех зонах пограничного слоя. Следующие члены пограничного ряда (13) имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(\rho, l)$, как мы увидим в дальнейшем.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho, l)$ погранслойного ряда так же, как и для $\Pi_0(\rho, l)$, получим не стандартным образом, а с определенными модификациями стандартного способа. Прежде всего, в правую часть уравнения для $\Pi_i(\rho, l)$ войдет слагаемое $2h(0,l)\Pi_0(\rho, l)\Pi_i$, а также слагаемое $2h(0,l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_i$, соответствующее слагаемому $2h(0,l)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0$ в уравнении (22). Поэтому уравнение для $\Pi_i(\rho, l), \quad i = 1, 2...$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \rho^2} = 2h(0,l)\left[\Pi_0(\rho, l) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]\Pi_i + \pi_i(\rho, l, \varepsilon), \quad \rho > 0, \tag{25}$$

где функция $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ выражается через $\Pi_j(\rho, l), \quad j < i$, и формируется следующим образом. При разложении правой части (16) по степеням $\varepsilon^{1/4}$ обозначим коэффициент при $\left(\varepsilon^{1/4}\right)^i$ через $q_i(\Pi_0, ..., \Pi_{i-1}, \zeta, l)$. В этот коэффициент мы не включаем слагаемые $2h(0,l)\Pi_0(\rho, l)\Pi_i(\rho, l)$ и $2h(0,l)\bar{u}_1(0,l)\Pi_{i-2}(\rho, l)$, первое из которых уже вошло в правую часть (25), а второе – в правую часть уравнения для $\Pi_{i-2}(\rho, l)$. Если какое-то слагаемое (обозначим его $\tilde{q}_i(\Pi_0, ..., \Pi_{i-1}, \zeta, l)$), входящее в коэффициент q_i, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей из набора $|\Pi_0(\rho, l)|, ..., |\Pi_{i-1}(\rho, l)|$, то есть

$$|\tilde{q}_i| \le p_i(\zeta, l)\,|\Pi_j(\rho, l)|\,|\Pi_k(\rho, l)|, \quad j \le i-1, \quad k \le i-1,$$

где $p_i(\zeta, l)$ – неотрицательная функция, то это слагаемое, заменив ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$, включаем в $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$. Если же оценка по модулю для $\tilde{q}_i$ содержит только один сомножитель указанного вида, то это слагаемое, умноженное на $\varepsilon^{1/2}$, включаем в $\pi_{i-2}(\rho, l, \varepsilon)$, заменив, как и в первом случае, ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$.

Кроме того, при $i \ge 2$ в состав $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ включаем со знаком минус слагаемые $\varepsilon^{1/2} \sum\limits_{j+k=i+2} L_j \Pi_k(\rho, l)$, где $j \ge 4, \quad k \ge 0$, заменив ζ на $\varepsilon^{1/4}\rho$ в выражениях для коэффициентов операторов L_j (эти слагаемые берутся из левой части (16)). Обоснование указанного способа формирования функций $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$ будет дано ниже. В качестве примера выпишем выражения для $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$, сформированные по указанному принципу:

$$\begin{gathered}
\pi_1(\rho,l,\varepsilon)=0,\\
\pi_2(\rho,l,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\left[2h(0,l)\bar{u}_2(0,l)\Pi_0(\rho,l)-\beta(0,l)\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho}(\rho,l)-\Pi_0 f_1\right],\\
\Pi_0 f_1:=f_1\left(\bar{u}_0(0,l)+\Pi_0(\rho,l),0,l,0\right)-f_1\left(\bar{u}_0(0,l),0,l,0\right),\\
\pi_3(\rho,l,\varepsilon)=\left[\frac{\partial}{\partial r}h(r,l)\right]_{r=0}\cdot\left(\varepsilon^{1/4}\rho\right)\Pi_0{}^2(\rho,l)+\\
+\varepsilon^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{2h(r,l)\bar{u}_1(r,l)\right\}\right]_{r=0}\cdot\left(\varepsilon^{1/4}\rho\right)\Pi_0(\rho,l)-\varepsilon^{1/2}\beta(0,l)\frac{\partial\Pi_1}{\partial\rho}(\rho,l).
\end{gathered}\tag{26}$$

Граничные условия для пограничных функций $\Pi_i(\rho,l)$, $i=1,2,\ldots$ следуют из (14), (15) и имеют вид:

$$\Pi_i(0,l)=\begin{cases}-\bar{u}_{i/2}(0,l), & \text{если } i \text{ -- четное число},\\ 0, & \text{если } i \text{ -- нечетное число}.\end{cases}\qquad \Pi_i(\infty,l)=0.\tag{27}$$

Учитывая, что $\pi_1(\rho,l,\varepsilon)=0$, а также (27) при $i=1$, находим

$$\Pi_1(\rho,l)\equiv 0.\tag{28}$$

Этот факт будет использоваться при обосновании асимптотики.

Решение задачи (25), (27) можно записать в явном виде, что позволяет получить для всех функций $\Pi_i(\rho,l)$ единообразную оценку. Это будет сделано в следующем пункте.

2.3. Оценки пограничных функций

Введем эталонную функцию

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\frac{c\cdot exp(-\varepsilon^{1/4}\varkappa\rho)}{\left(1-c\cdot exp(-\varepsilon^{1/4}k_0\rho)\right)^2},\tag{29}$$

где c и k_0 – те же самые функции, что и в (24), а $\varkappa$ – число из интервала $0<\varkappa<\min\limits_{l\in[0;l_0]}k_0(l)$. Функция $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ имеет такой же вид, как $\Pi_0(\rho,l)$ (см. (24)), с тем лишь отличием, что в показателе экспоненты в числителе дроби стоит число $\varkappa$ вместо $k_0(l)$. Поэтому справедлива оценка

$$\Pi_0(\rho,l)\le\Pi_\varkappa(\rho,l),\quad \rho\ge 0,\quad 0\le l\le l_0.\tag{30}$$

Аналогичную оценку будут иметь функции $\Pi_i(\rho,l)$, $\quad i=1,2,\ldots$

$$|\Pi_i(\rho,l)|\le c\Pi_\varkappa(\rho,l),\quad \rho\ge 0,\quad 0\le l\le l_0,\tag{31}$$

с различными числами c и $\varkappa$ (не зависящими от ε) для разных i.

Для доказательства оценки (31) сформулируем лемму

Лемма 1. *Рассмотрим задачу для функции* $\nu(\rho, l)$:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} = 2h(0,l)\left[\Pi_0(\rho,l) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]\nu + g(\rho,l,\varepsilon), \quad \rho > 0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \nu(0,l) &= \nu^0, \\ \nu(\infty,l) &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Если функция $g(\rho,l,\varepsilon)$ *имеет оценку*

$$|g(\rho,l,\varepsilon)| \le c\left[{\Pi_\varkappa}^2(\rho,l) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(\rho,l)\right], \tag{34}$$

то для функции $\nu(\rho,l)$ *справедливо неравенство*

$$|\nu(\rho,l)| \le c\Pi_\varkappa(\rho,l). \tag{35}$$

Здесь и далее в различных оценках типа (34), (35) используются разные числа c и $\varkappa$, но в целях упрощения записи будем обозначать их одними и теми же буквами c и $\varkappa$.

Доказательство Леммы 1 проводится аналогично тому, как это сделано в статье [4].

Для доказательства оценки (31) для любой функции $\Pi_i(\rho,l)$ будем использовать Лемму 1. Но, чтобы применить Лемму 1, необходимо доказать, что функции $\pi_i(\rho,l,\varepsilon)$, входящие в правую часть уравнения (25), удовлетворяют требованию (34). В силу способа формирования функций $\pi_i(\rho,l,\varepsilon)$ в их состав войдут не только члены погранслойного ряда $\Pi_j(\rho,l)$, но и их частные производные $\frac{\partial}{\partial\rho}\Pi_j(\rho,l)$, $\frac{\partial}{\partial l}\Pi_j(\rho,l)$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}\Pi_j(\rho,l)$, $\quad j < i$. Следовательно, оценку типа (35) нужно обосновать не только для функций $\Pi_i(\rho,l)$, но и для их частных производных:

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial\rho^m\partial l^n}\Pi_i(\rho,l)\right| \le c\Pi_\varkappa(\rho,l), \quad i = 0,1,...; \quad m = 0,1; \quad m+n = 0,1,2. \tag{36}$$

Задача для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial l}(\rho,l)$ получается из задачи (22), (19), (20) дифференцированием по параметру l :

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial l}\right) = 2h(0,l)\left[\Pi_0(\rho,l) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial l}\right) + q(\rho,l,\varepsilon), \quad \rho > 0, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi_0}{\partial l}(0,l) &= \frac{d\Pi^0(l)}{dl}, \\ \frac{\partial\Pi_0}{\partial l}(\infty,l) &= 0, \end{aligned} \tag{38}$$

где $q(\rho,l,\varepsilon) := \frac{\partial h}{\partial l}(0,l){\Pi_0}^2(\rho,l) + 2\sqrt{\varepsilon}\left(h(0,l)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial l}(0,l) + \bar{u}_1(0,l)\frac{\partial h}{\partial l}(0,l)\right)\Pi_0(\rho,l)$. Очевидно, для $q(\rho,l,\varepsilon)$ имеем оценку типа (34)

$$|q(\rho,l,\varepsilon)| \le c\left[{\Pi_\varkappa}^2(\rho,l) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(\rho,l)\right].$$

Тогда, согласно Лемме 1, функция $\frac{\partial \Pi_0}{\partial l}(\rho, l)$ удовлетворяет неравенству типа (36).

Аналогично доказывается оценка типа (36) для производной любого порядка функции $\Pi_0(\rho, l)$.

Доказательство справедливости оценок (31) и (36) для функций $\Pi_i(\rho, l),\ \ i \geq 1$ проведем по индукции. Предположим, что неравенство (36) выполнено для функций $\Pi_j(\rho, l)$ с номерами $j = 0, 1, ..., i-1$. Для функции $\Pi_i(\rho, l)$ имеем задачу (25), (27). Согласно описанному алгоритму формирования функции $\pi_i(\rho, l, \varepsilon)$, входящей в правую часть уравнения (25), для нее справедлива оценка типа (34). Поэтому, согласно Лемме 1, функция $\Pi_i(\rho, l)$ имеет оценку (31).

Как и в случае $\Pi_0(\rho, l)$, аналогичными рассуждениями доказывается оценка (36) для производной функций $\Pi_0(\rho, l)$ произвольного порядка.

Итак, оценки (31) и (36) доказаны для любой функции $\Pi_i(\rho, l),\ \ i = 0, 1, 2, \ldots$. Оценка (31) показывает, что все эти функции имеют одинаковый (трехзонный) характер убывания с ростом ρ, как и функции $\Pi_0(\rho, l)$ и $\Pi_\varkappa(\rho, l)$ (см. (31)).

Таким образом, в рассматриваемой задаче функция $\Pi_\varkappa(\rho, l)$ является эталонной (оценочной) функцией для всех пограничных функций $\Pi_i(\rho, l)$ подобно тому, как в случае простого корня вырожденного уравнения (см. [1]) и также в случае двукратного корня вырожденного уравнения задачи Неймана при условии $\bar{f}_1(x) > 0$ (см. [3]) в роли эталонной выступала функция $\exp(-\varkappa\rho)$.

Обозначим через $\overset{(m)}{\Pi}$ частичную сумму ряда (13):

$$\overset{(m)}{\Pi} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\rho, l).$$

Как следует из алгоритма формирования уравнений для функций $\Pi_i(\rho, l)$, функция $\overset{(m)}{\Pi}$ удовлетворяет равенству (16) с точностью $O(\varepsilon^{(m+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho, l)$, т. е.

$$\varepsilon^2 \Delta \overset{(m)}{\Pi} - \overset{(m)}{\Pi} f = O(\varepsilon^{\frac{m+1}{2}})\Pi_\varkappa(\rho, l). \tag{39}$$

Заметим, что хотя функции $\Pi_i(\rho, l)$ определены при $\rho \geq 0$, фактически они имеют смысл только при $0 \leq \rho \leq \delta/\varepsilon$, т. е. в той (достаточно малой) δ – окрестности границы $\partial\Omega$, где введены локальные координаты (r, l). Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{\Omega}$ применим стандартную процедуру (см. [1]): умножим каждую функцию $\Pi_i(\rho, l)$ на бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице в $\delta/2$ – окрестности границы $\partial\Omega$ и нулю вне δ – окрестности $\partial\Omega$. Это никак не повлияет на построенную асимптотику, поскольку $\Pi_i(\rho, l) = O\left(exp\left(-\frac{\varkappa\delta}{2\varepsilon^{1/4}}\right)\right) = o\left(\varepsilon^N\right)$ для любого N при $\rho \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ (т. е. при $r \geq \frac{\delta}{2}$). Для регуляризованных таким образом функций $\Pi_i(\rho, l)$ сохраним старые обозначения.

3. Обоснование асимптотики

Итак, мы построили регулярный (8) и погранслойный (13) ряды. Для суммы этих рядов обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичную сумму следующего вида:

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4}\Pi_i(\rho,l). \tag{40}$$

Теорема 1. *При условиях A1–A3 для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, для которого функция (40) является равномерным в $\bar{\Omega}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, т. е. для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{41}$$

Доказательство. Докажем теорему с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т. е. путем построения подходящих нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) с использованием суммы (40).

Напомним, что функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и$\bar{U}(x,\varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи (1), (2), если они удовлетворяют условиям [6]:

$$\begin{aligned}
&1. L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon^2 \Delta \underline{U} - f\left(\underline{U}, x, \varepsilon\right) \ge 0 \ge L_\varepsilon \bar{U}, \quad x \in \Omega;\\
&2. \underline{U}(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \bar{U}(x,\varepsilon), \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если $\underline{U}(x,\varepsilon) \le \bar{U}(x,\varepsilon)$, $x \in \bar{\Omega}$.

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам [6]:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \bar{U}(x,\varepsilon), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{42}$$

Нижнее решение задачи (1), (2) возьмем в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2},$$

где функция $U_n(x,\varepsilon)$ определена формулой (40), M – положительное число, не зависящее от ε, $n \ge 1$.

В силу (19), (27) функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ удовлетворяет при любом M условию 2 для нижнего решения:

$$\underline{U}\Big|_{\partial\Omega} = U_n(0,l,\varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2} = u^0(l) - M\varepsilon^{(n+1)/2} < u^0(l).$$

Покажем, что при достаточно большом M и достаточно малых ε функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ будет удовлетворять условию 1 для нижнего решения.

Согласно (11) и (39) для $U_n(x,\varepsilon)$ справедливо равенство:

$$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l).$$

Поэтому

$$\begin{gathered} L_\varepsilon \underline{U} = L_\varepsilon U_n + f(U_n,x,\varepsilon) - f(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2},x,\varepsilon) = \\ = O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l) - h(x)\left[\left(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2} - \varphi(x)\right)^2 - (U_n-\varphi(x))^2\right] + \\ +\varepsilon[f_1(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2},x,\varepsilon) - f_1(U_n,x,\varepsilon)] = O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l) - \\ -h(x)\left[\left(U_n - M\varepsilon^{(n+1)/2} - \varphi(x)\right)^2 - (U_n-\varphi(x))^2\right] - \varepsilon {f^*}_{1u}\cdot M\varepsilon^{(n+1)/2}, \end{gathered}$$

где производная ${f^*}_{1u}$ берется в некоторой промежуточной точке. Учтем, что $h(x) \geq h_0 = const > 0$ в силу (7), $\Pi_1(\rho,l) \equiv 0$ (см. (28)), $U_n - \varphi(x) = \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 + O(\varepsilon^{3/4})$, и так как $n \geq 1$, то $\varepsilon^{(n+1)/2} = o(\sqrt{\varepsilon})$. В результате получим:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon \underline{U} \geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l) + \\ +2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}(\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 + O(\varepsilon^{3/4}) - (M/2)\varepsilon^{(n+1)/2}) \geq \\ \geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l) + \\ +2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}\left[\sqrt{\varepsilon}\bar{u}(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon})\right]. \end{gathered} \tag{43}$$

Остановимся на детальном рассмотрении третьего слагаемого в правой части выражения (43). Учтем, что $\bar{u}_1(x) \geq c_0 > 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Тогда

$$\begin{gathered} 2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}\left[\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon})\right] \geq \\ \geq h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}\left\{(c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho,l)) + \left[c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho,l) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_2(\rho,l) - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon})\right]\right\}. \end{gathered} \tag{44}$$

Заметим, что для любого M выражение в квадратных скобках положительно для достаточно малых ε. В самом деле, возьмем число ρ_0 столь большим (и не зависящим от ε), что

$$|\Pi_2(\rho,l)| < \frac{1}{2}c_0, \quad \rho \geq \rho_0. \tag{45}$$

Такое ρ_0 найдется, поскольку в первой зоне пограничного слоя $\Pi_2(\rho,l) = O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right)$. Тогда при $0 \leq \rho \leq \rho_0$ для достаточно малых ε $c_0\sqrt{\varepsilon} - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon}) > 0$, и $\Pi_0(\rho,l) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_2(\rho,l) > 0$, поскольку $\Pi_0(\rho,l) > 0$, а при $\rho \geq \rho_0$ в силу (45) выполняется неравенство $c_0\sqrt{\varepsilon} + 2\Pi_2(\rho,l)\sqrt{\varepsilon} - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon}) > 0$, и, следовательно, выражение в квадратных скобках положительно. Поэтому из (44) следует неравенство

$$2h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}\left[\sqrt{\varepsilon}\bar{u}(x) + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_2 - M\cdot o(\sqrt{\varepsilon})\right] \geq h_0M\varepsilon^{(n+1)/2}(c_0\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(\rho,l)), x \in \Omega.$$

Используя эту оценку, из (43) получаем

$$L_\varepsilon \underline{U} \geq O(\varepsilon^{(n+2)/2}) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})\Pi_\varkappa(\rho,l) + h_0c_0M\varepsilon^{(n+2)/2} + h_0\Pi_0(\rho,l)M\varepsilon^{(n+1)/2}, \quad x \in \Omega. \tag{46}$$

Так как

$$\Pi_\varkappa(\rho,l) = \Pi_0(\rho,l)\exp\left(\varepsilon^{1/4}(k_0 - \varkappa)\rho\right),$$

то при $0 \le \rho \le \varepsilon^{-1/4}$ выполняется неравенство

$$\Pi_{\varkappa}(\rho, l) \le c\Pi_0(\rho, l),$$

где $c = \exp\left(k_0 - \varkappa\right)$. Поэтому при $0 \le \rho \le \varepsilon^{-1/4}$ сумма второго и четвертого слагаемых, а также сумма первого и третьего слагаемых в правой части (46) больше нуля для достаточно большого M и достаточно малых ε.

Итак,

$$L_\varepsilon \underline{U} \ge 0, \quad 0 \le \rho \le \varepsilon^{-1/4}.$$

При $\rho \ge \varepsilon^{-1/4}$, функция $\Pi_{\varkappa}(\rho, l)$ имеет порядок $O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ (см. (29)), поэтому второе слагаемое в правой части (46) имеет порядок $O\left(\varepsilon^{(n+2)/2}\right)$, и, следовательно, правая часть (46) будет положительной за счет третьего слагаемого при достаточно большом Mи достаточно малых ε.

В результате для достаточно большого M и при достаточно малых ε приходим к неравенству

$$L_\varepsilon \underline{U} \ge 0, \quad x \in \Omega,$$

т. е. функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 1 для нижнего решения.

Итак, при достаточно большом M и достаточно малых ε функция $\underline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) - M\varepsilon^{(n+1)/2}$ является нижним решением задачи (1), (2).

Аналогично доказывается, что функция

$$\bar{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + M\varepsilon^{(n+1)/2}$$

при достаточно большом M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (2). Построенные нижнее и верхнее решения, очевидно, являются упорядоченными. Следовательно, существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам (42). Из этих неравенств и вида нижнего и верхнего решений следует равенство (41). Мы доказали его для $n \ge 1$. При $n = 1$ оно принимает вид

$$u(x, \varepsilon) = U_1(x, \varepsilon) + O(\varepsilon), \tag{47}$$

а поскольку $U_1(x, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon})$, то из (47) следует равенство:

$$u(x, \varepsilon) = U_0(x, \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

т. е. равенство (41) справедливо также для $n = 0$. Теорема 1 доказана.

Список литературы / References

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*, Moscow, 1990, (in Russian).]

[2] Paul C. Fife, “Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52** (1973), 205–232.

[3] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:8 (2013), 1291–1301; [Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “A singularly perturbed elliptic problem in the case of a multiple root of the degenerate equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:8 (2013), 1117–1127 .]

[4] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Асимптотика решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехзонным пограничным слоем”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:8 (2016), 1428–1440; [Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “Asymptotics of the solution of a singularly perturbed elliptic problem with three-band boundary layer”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:8 (2016), 1414–1425 .]

[5] Бутузов В. Ф., “Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; [Butuzov V. F., “On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70 .]

[6] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Butuzov V. F., Beloshapko V. A., "Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 515–528.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-515-528

Abstract. A singularly perturbed elliptic problem with Dirichlet boundary conditions is considered in the case of multiple roots of the degenerate equation. A complete asymptotic expansion of the solution is constructed and justified. It is qualitatively different from the known expansion in the case where the root of the degenerate equation is simple: the asymptotic expansion of the solution being in fractional powers of the small parameter, boundary-layer variables have a different scale, boundary-layer series is constructed using a non-standard algorithm, the boundary layer in the vicinity of the domain boundary consists of three zones with different behavior of the solution in different zones.

Keywords: singularly perturbed elliptic equation, case of multiple root of the degenerate equation, asymptotic expansion of boundary layer type solution, three-band boundary layer

On the authors:
Valentin F. Butuzov, Professor,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, 119991, Russia, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Vera A. Beloshapko, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, 119991, Russia, e-mail: postvab@rambler.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR under the Grant No 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 529–538
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 529–538

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-529-538
УДК 519.6

Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами

Белов А. А., Калиткин Н. Н.

получена 20 июня 2016

Аннотация. Изложены современные численные методы, позволяющие наиболее эффективно рассчитывать задачи с контрастными структурами. К ним относятся явно-неявные схемы Розенброка с комплексными коэффициентами и чисто неявные оптимальные обратные схемы Рунге–Кутты. В качестве аргумента целесообразно выбирать длину дуги интегральной кривой. Этот аргумент обеспечивает высокую надежность расчета и существенно снижает трудоемкость для систем уравнений невысокого порядка. Для повышения экономичности предложен алгоритм автоматического выбора шага по кривизне интегральной кривой. Этот алгоритм не уступает стандартным алгоритмам по экономичности, но существенно превосходит их по надежности. Показано, что при этом можно одновременно вычислять апостериорную асимптотически точную оценку погрешности методом Ричардсона. Стандартные алгоритмы автоматического выбора шага не могут дать таких оценок, а фактическая погрешность у них нередко на много порядков превышает заданную пользователем. Исследованы границы применимости численных методов. При решении задач сверхвысокой жесткости они могут не дать удовлетворительного ответа; в этих случаях следует переходить к приближенным аналитическим методам. Таким образом, численные и асимптотические методы являются взаимно дополняющими.

Ключевые слова: жесткая задача Коши, контрастная структура, автоматический выбор шага, кривизна в многомерном пространстве, оценки по методу Ричардсона, диагностика сингулярностей, разрушение решений.

Для цитирования: Белов А. А., Калиткин Н. Н., "Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 529–538.

Об авторах:
Белов Александр Александрович, orcid.org/0000-0002-0918-9263, аспирант
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: belov_25.04.1991@mail.ru

Калиткин Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-0861-1792,
член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, г. Москва, 125047 Россия, e-mail: kalitkin@imamod.ru

Благодарности:
Работа поддержана грантами РФФИ №14-01-00161, 16-31-00062

1. Введение

В практических приложениях часто возникают задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих сразу несколько процессов с сильно различающимися масштабами времени. Простейшим примером может служить система уравнений кинетики химических реакций, в которой скорости отдельных реакций отличаются на много порядков. Другой пример – широкополосные радиотехнические системы, в которых отношение границ частотного спектра превышает 10^8. Такие задачи получили название ***жестких***. Их теория и практика расчета начали разрабатываться в 1950-е годы, и достигнутые успехи описаны в [1]. Однако такие задачи по-прежнему остаются непростыми, а зачастую и очень трудными для расчета.

В простейших случаях решение таких задач содержит только начальный пограничный слой, после чего решение выходит на сравнительно медленно меняющийся регулярный участок. Заметно труднее задачи, в которых пограничные слои могут возникать в ходе расчетов в различные моменты времени. Внутренние пограничные слои называются ***контрастными структурами***.

Для решения подобных задач параллельно развивались аналитические методы, подробный обзор которых дан в [2]. Они основаны на разложении в асимптотические ряды по обратными степеням параметра жесткости. Поэтому они дают особенно хорошую точность в случае задач сверхвысокой жесткости. Однако при уменьшении жесткости требуется учитывать большее число членов ряда, и их реализация становится сложной. Кроме того, для систем большого числа уравнений их запись и реализация оказываются громоздкими.

Поэтому встает вопрос о разграничении областей эффективного применения аналитических и численных методов. Для этого надо выбрать наиболее эффективные численные методы и выяснить, при каких жесткостях и других особенностях задач они конкурентоспособны. Различные аспекты этой проблемы исследованы в данной работе.

2. Структура решения

Изложим общие идеи на примере конкретной задачи Коши для одного уравнения, содержащей все характерные особенности общего случая:

$$\frac{du}{dt} = -\lambda(t)\frac{\left(u^2-a^2\right)^2}{\left(u^2+a^2\right)}, \quad u(0)=u^0, \quad |u^0|<a. \tag{1}$$

Эта задача при соответствующем выборе u^0 имеет 2 стационарных решения $u = \pm a$. Эти решения являются корнями вырожденного уравнения кратности 2. Они устойчивы, если $|u^0| < a$, и неустойчивы при $|u^0| > a$.

Задача (1) решается в квадратурах, что делает ее очень удобным тестом для численных расчетов:

$$u(t) = -\frac{2\,\Lambda(t)\,a^2}{1+\sqrt{1+4a^2\Lambda(t)^2}}, \quad \Lambda(t) = \frac{u^0}{(u^0)^2-a^2} + \int_0^t \lambda(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Нетрудно выбрать такое $\lambda(t)$, чтобы квадратура точно вычислялась, а само решение передавало те или иные особенности. Например, возьмем $\lambda(t) = \lambda_0 \cos t$. Тогда

$$\Lambda(t) = \frac{u^0}{(u^0)^2-a^2} + \lambda_0 \sin t. \tag{3}$$

На рис. 1 показано решение этой задачи при различных λ_0. Видно, что при увеличении λ_0 решение стремится к ступенчатому. Это наглядная интерпретация контрастных структур, соответствующая высокой жесткости.

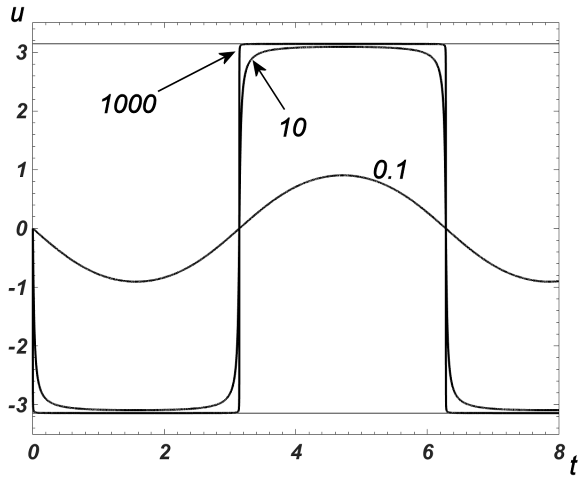

Рис. 1. Тест (1); жирные кривые – точное решение (2) – (3) при разных значениях λ_0 (указаны около кривых); тонкие прямые – стационары
Fig. 1. Test problem (1); solid curves are the exact solutions for different values of λ_0 (the latter are given near the curves); thin straight lines are stationary solutions

Обычно в структуре решения выделяют следующие характерные участки. Во-первых, это области плавного изменения решения, которые называются регулярными. Во-вторых, области очень быстрого изменения решения, называемые пограничными слоями.

Мы предлагаем выделить еще один тип характерных областей, расположенных между пограничными слоями и регулярными участками. В этих областях решение имеет большую кривизну, и мы называем их ***переходными зонами***. Кроме того, пограничный слой состоит из двух качественно разных участков (что ранее в литературе не отмечалось). Первая половина пограничного слоя, идущая от регулярного участка, соответствует плохой обусловленности задачи (1). За ней следует второй участок пограничного слоя, ведущий к регулярному решению. На нем задача является жесткой в узком смысле.

3. Классификация жесткости

Для практической помощи вычислителю дадим некоторую качественную классификацию, основанную на практике численных расчетов и не претендующую на математическую строгость.

Мягкими назовем задачи, решения которых на графике хорошо отличимы от стационаров (случай $\lambda_0 = 10^{-1}$ на рис. 1).

Жесткими назовем задачи, решения которых с графической точностью ложатся на стационары, но визуально ширина пограничного слоя ненулевая (случай $\lambda_0 = 10^1$ на рис. 1).

Сверхжесткими назовем задачи, в которых ширина пограничного слоя визуально пренебрежимо мала, так что решение имеет ступенчатый характер; при этом регулярные участки визуально сливаются с корнями вырожденного уравнения (случай $\lambda_0 = 10^3$ на рис. 1).

Ультражесткими назовем задачи, у которых регулярные участки решения в пределах ошибок компьютерного округления неотличимы от корней вырожденного уравнения (для данного примера это будет при $\lambda_0 = 10^5$ и более, если вычисления 64-битовые).

Категорию жесткости надо учитывать, выбирая метод решения задачи. Но по виду исходного уравнения априори определить категорию жесткости удается не всегда. Зачастую это приходится делать методом проб и ошибок.

4. Длина дуги

Численное решение упрощается, если в качестве новой независимой переменной выбрать длину дуги интегральной кривой $dl^2 = dt^2 + du^2 = (1 + u_t^2)dt^2$.

Тогда почти вертикальные участки кривой $u(t)$ превращаются в наклонные участки кривой $u(l)$ (см. рис. 2) с наклоном ± 1. Поэтому формально пограничные слои исчезают.

Однако это не означает, что задача перестает быть жесткой. Остаются только участки с большой кривизной интегральной кривой, которые по-прежнему трудны для расчета. При этом регулярные участки решения при достаточно больших λ по-прежнему могут совпадать с корнями вырожденного уравнения визуально и даже с точностью компьютерного округления. Поэтому понятия сверхжесткости и ультражесткости остаются в силе.

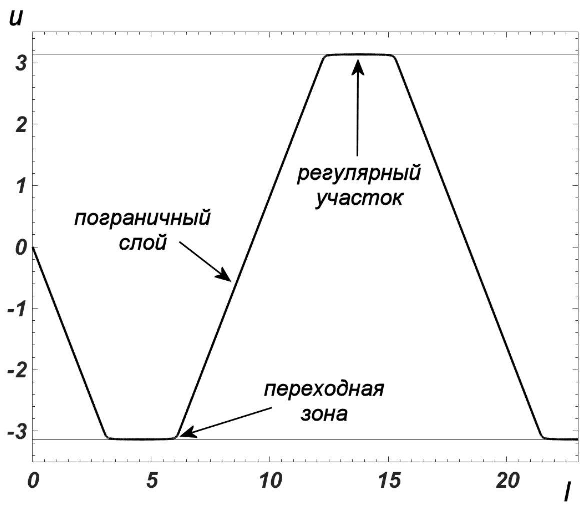

Рис. 2. Тест (1) при $\lambda_0 = 100$, аргумент – длина дуги; кривая – решение, тонкие прямые – стационары
Fig. 2. Test problem (1) with $\lambda_0 = 100$, arc length is chosen as integration argument; thin straight lines are stationary solutions

Тем не менее, переход к длине дуги существенно облегчает решение даже таких задач. Поэтому далее будем полагать, что он уже произведен. Напомним, что для этого нужно решать 2 уравнения для функций $u(l)$ и $t(l)$. Если решается система уравнений, то к ней добавляется только уравнение для $t(l)$, так что фактическая трудоемкость расчета увеличивается лишь незначительно, а его надежность повышается существенно.

5. Методы расчета

Мягкие задачи даже в переменной t можно решать явными схемами. При переходе к длине дуги то же относится к жестким задачам. В этих случаях целесообразно использовать либо классическую 4-стадийную схему Кутты точности $O(h^4)$, либо 7-стадийные схемы Бутчера или Хаммуда точности $O(h^6)$.

Однако для жестких задач даже в длине дуги существенно более надежны явно-неявные схемы. Наилучшие результаты дают схемы Розенброка с комплексными коэффициентами. В первую очередь рекомендуем использовать одностадийную комплексную схему CROS [3]. Запишем эту схему для аргумента l и произвольной системы с вектор-функциями $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$, где в качестве нулевой компоненты добавлены $u_0 \equiv t$, $f_0 \equiv 1$. Обозначая через $\hat{\mathbf{u}}$ решение на новом шаге, получим

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + h\,\mathrm{Re}\,\mathbf{w}, \quad \left(E - \frac{1+i}{2} h\,\mathbf{f}_{\mathbf{u}}\right)\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{4}$$

Эта схема имеет порядок точности $O(h^2)$ и L_2-устойчивость, обеспечивает хорошее качественное поведение численного решения и относится к очень надежным. Если желательно иметь более высокую точность, то можно использовать двустадийные схемы Ширкова [4] или Альшиных [5]. Они имеют точность $O(h^4)$ и L_4-устойчивость, но несколько менее надежны. Если эффекты нелинейности невелики, то комплексные схемы Розенброка успешно работают даже для сверхжестких задач.

В сверхжестких задачах со значительной нелинейностью схемы Розенброка оказываются ненадежными. Следует использовать чисто неявные схемы. Лучшими из них являются так называемые оптимальные обратные схемы Рунге–Кутты BORK [6] – [7]. Такие схемы построены для числа стадий $s \leqslant 4$, имеют точность $O(h^s)$ и L_s-устойчивость.

Простейшей из них является обратная схема Эйлера, соответствующая $s = 1$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + h\,\mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}). \tag{5}$$

Оптимальные схемы с $s > 1$ выражаются через рекурсивные функции и записываются более громоздко. Однако для $s = 2$ есть одна схема, близкая к оптимальной и записывающаяся наиболее просто:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \frac{1}{2} h\,\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} h\,\mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}})\right). \tag{6}$$

Эта схема практически не уступает оптимальным и благодаря простоте особенно удобна для прикладных расчетов.

Для ультражестких задач любые сеточные методы оказываются ненадежными. В них следует переходить к приближенным аналитическим методам.

6. Выбор шага по кривизне

Расчет жестких задач с равномерным шагом очень неэкономичен. Существуют традиционные автоматы выбора шага по вложенной схеме или по локальному сгущению шага. Они хорошо работают для мягких задач. Однако уже для жестких задач они становятся очень ненадежными. Во-первых, фактическая погрешность может на несколько порядков превышать запрошенную пользователем. Во-вторых, зачастую на регулярных участках возникают неоправданные срывы: шаг уменьшается на несколько порядков и потом медленно восстанавливается. Расчет становится неэкономичным.

В аргументе l решение состоит из сравнительно длинных почти прямолинейных участков, соединенных между собой короткими участками с очень большой кривизной (см. рис. 2). Почти прямолинейные участки можно численно интегрировать с большим шагом h. Однако на участках большой кривизны необходим очень малый шаг. Удачным оказался следующий эвристический алгоритм выбора шага [8]:

$$h_n = \frac{h_*}{1 + L^{1/2}(\varkappa, \varkappa)_n^{1/4}}, \tag{7}$$

где $\varkappa$ – вектор кривизны, L – полная длина дуги, h_* – шаг на прямолинейном участке.

В многомерном случае для $\varkappa$ построены конструктивные выражения при следующих выборах многомерного пространства: 1) фазовое пространство $\{\mathbf{u}\}$, 2) пространство $\{t, \mathbf{u}\}$, 3) пространство $\{l, t, \mathbf{u}\}$. Наиболее важен для практики второй случай. Для него вектор кривизны

$$\varkappa = \frac{\{-(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{tt}), \mathbf{u}_{tt}[1 + (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t)] - \mathbf{u}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{tt})\}}{[1 + (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t)]^2}. \tag{8}$$

Сюда входит матрица Якоби от правых частей. Ее вычисление трудоемко. Однако для расчетов по неявным схемам ее все равно приходится вычислять для нахождения $\hat{\mathbf{u}}$. Поэтому включение автоматического выбора шага не увеличивает трудоемкости расчетов.

Алгоритм (7) столь же экономичен, что и принятые в литературе автоматы выбора шага, но в отличие от них сохраняет надежность даже на сверхжестких задачах.

Для алгоритма (7) разработана процедура сгущения сеток, позволяющая вычислять апостериорную асимптотически точную оценку погрешности аналогично методу Ричардсона. Традиционные автоматы выбора шага не позволяют сделать такую оценку.

Процедура сгущения сеток проводится в два этапа. На первом этапе будем уменьшать h_* вдвое и строить последовательность сеток, адаптированных к кривизне. Это сгущение повторяется до тех пор, пока четные узлы новой сетки не станут достаточно близкими к узлам предыдущей сетки.

Далее переходим ко второму этапу. На нем узлы предыдущей сетки берутся в качестве четных узлов следующей сетки. Для этих узлов новой сетки внутренний шаг h_n дробится в отношении

$$\sqrt[4]{h_{n+1}/h_{n-1}}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N - 1. \tag{9}$$

Формулы для граничных шагов ($n = 0$ и $n = N$) выводятся из аналогичных соображений. Можно показать, что сетки второго этапа являются квазиравномерными. Поэтому к каждой паре сеток можно однократно применить метод Ричардсона, что дает апостериорную асимптотически точную оценку погрешности [9].

7. Сходимость

Покажем, как можно проводить расчеты контрастных структур с получением гарантированной оценки погрешности. Для этого, во-первых, выберем в качестве аргумента длину дуги. Во-вторых, возьмем надежную чисто неявную схему BORK4. Это позволяет единообразно рассчитывать задачи от мягких до сверхжестких. В-третьих, для получения ричардсоновской гарантированной оценки погрешности проведем расчет на последовательности сгущающихся сеток. В-четвертых, шаги этих сеток будем выбирать автоматически по кривизне интегральной кривой.

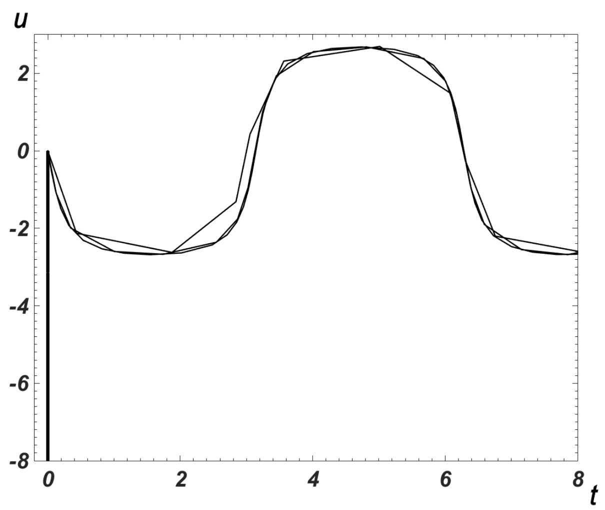

Рис. 3. Тонкие линии – решение теста (1) на сгущающихся сетках, $\lambda_0 = 10^{-1}$. Жирная линия – численное решение ультражесткой задачи с $\lambda_0 = 10^7$
Fig. 3. Thin lines are solutions of test problem (1) on thickening grids for $\lambda_0 = 10^{-1}$. Solid line is the numerical solution of ultra-stiff problem with $\lambda_0 = 10^7$

Проиллюстрируем результаты. На рис. 3 показаны профили решения на сгущающихся сетках для теста (1) с $\lambda_0 = 10^{-1}$. Для наглядности профили построены в координатах $u(t)$, хотя непосредственно рассчитывались $u(l)$ и $t(l)$. Хорошо видно, что при сгущении сеток профили стремятся к точному решению.

На рис. 3 показан также расчет ультражесткой задачи с $\lambda_0 = 10^7$. После прохождения пограничного слоя и переходной зоны кривая выходит на стационарное решение с точностью до ошибок округления. Но уже на ближайших шагах ошибки округления выводят кривую в область неустойчивости, после чего она быстро уходит от точного решения. Видно, что численные методы непригодны для задач столь большой жесткости. В этом случае надо пользоваться асимптотическими разложениями по малому параметру.

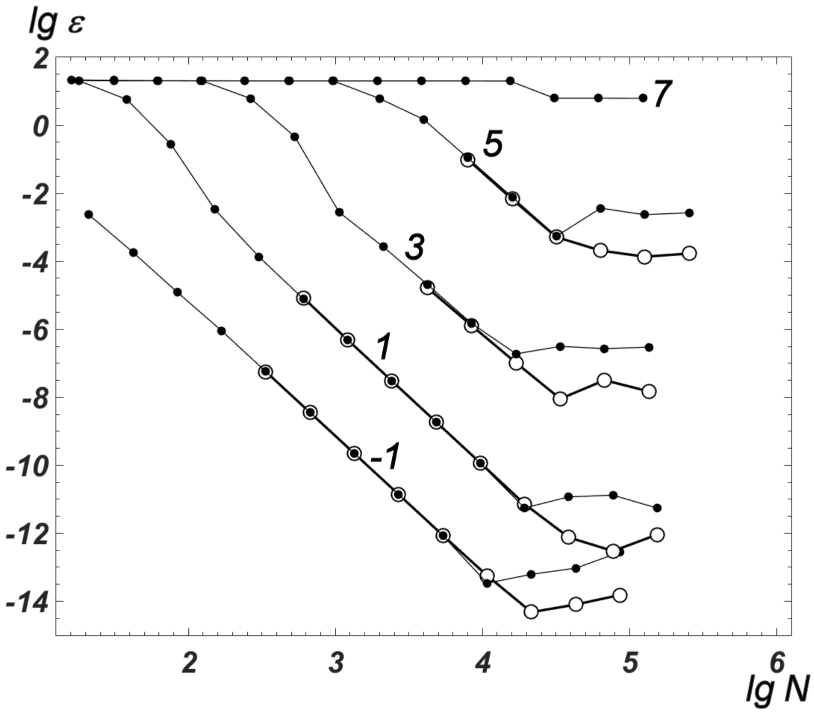

Рис. 4. Сходимость в тесте (1), у линий указаны $\lg \lambda_0$. • – погрешности, вычисленные сравнением с точным решением, ∘ – оценки по методу Ричардсона
Fig. 4. Convergence in test problem (1); numbers near curves are $\lg \lambda_0$; • – errors calculated by comparing the numerical solution with the exact one, ∘ – estimations via Richardson method

Оценку погрешности численного расчета можно получить по методу Ричардсона. На рис. 4 представлены кривые погрешности для различных жесткостей. Видно, что на мягких задачах ($\lambda_0 < 10$) эти кривые уже при небольшом N выходят на прямую линию с наклоном 4, что соответствует теоретическому порядку точности $O(h^4)$. Чем жестче задача, тем позднее происходит выход кривых погрешностей на этот прямолинейный участок.

На рис. 4 представлены два способа расчета погрешности: непосредственное вычисление по известному точному решению (точки) и ричардсоновская оценка по парам соседних сеток (кружки). Видно, что на прямолинейном участке с теоретическим наклоном оба способа дают одинаковый результат. Это относится даже к сверхжестким задачам. Это показывает, что и для задач с неизвестным точным решением можно уверенно пользоваться ричардсоновскими оценками, если кривая погрешности содержит указанный прямолинейный участок. Напомним, что в традиционных алгоритмах автоматического выбора шага по вложенным схемам или по локальному сгущению выдаваемая оценка погрешности не только не является асимптотически точной, но и может на много порядков превышать фактическую погрешность.

На данном рисунке показан также расчет для ультражесткой задачи с $\lambda_0 = 10^7$. Видно, что прямолинейный участок погрешности с теоретическим наклоном отсутствует, поэтому для таких задач ричардсоновскую оценку погрешности дать невозможно.

8. Диагностика сингулярностей

Задачи с сингулярностями (полюс и т.д.) также можно отнести к жестким. Нетривиальной является следующая проблема: определить только на основании численного решения, имеется ли сингулярность точного решения и каков ее вид и параметры. Впервые подход к решению этой проблемы был предложен в [10], [11]. В нем было использовано интегрирование по аргументу t по схеме CROS. Однако при этом момент сингулярности и ее вид определялись с невысокой точностью. В [12] использовано интегрирование по аргументу l. Это позволило использовать практически любые численные схемы и построить ричардсоновскую процедуру нахождения параметров (например, момента и порядка полюса) с апостериорной асимптотически точной оценкой погрешности. Конкретные формулы диагностики построены для особенностей типа степенного полюса, логарифмического полюса и произведения степенного полюса на логарифм.

Этот метод применим не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и к уравнениям в частных производных, поскольку они сводятся к системам ОДУ посредством метода прямых.

Список литературы / References

[1] Hairer E., Wanner G., *Solving ordinary differential equations. Stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tolyo, 1999.

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **4**:3 (1998), 799–851; [Vasileva A. B., Butuzov V. F., Nefedov N. N., “Kontrastnye struktury v singuliarno vozmushchennykh zadachakh”, *Fundamentalnaia i prikladnaia matematika*, **4**:3 (1998), 799–851, (in Russian).]

[3] Rosenbrock H. H., “Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations”, *Comput. J.*, **5**:4 (1963), 329–330.

[4] Ширков П. Д., “Оптимально затухающие схемы с комплексными коэффициентами для жестких систем ОДУ”, *Матем. моделирование*, **4**:8 (1992), 47–57; [Shirkov P. D., “Optimalno zatukhaiushchie skhemy s kompleksnymi koeffitsientami dlia zhestkikh ODU”, *Matem. Modelirovanie*, **4**:8 (1992), 47–57, (in Russian).]

[5] Альшин А. Б., Альшина Е. А., Лимонов А. Г., “Двухстадийные комплексные схемы Розенброка для жестких систем”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009, № 2, 270–287; English transl.: Al’shin A. B., Al’shina E. A., Limonov A. G., “Two-stage complex Rosenbrock schemes for stiff systems”, *Comp. Math. and Math. Phys.*, **49**:2 (2009), 261–278.

[6] Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П., “Обратные Ls-устойчивые схемы Рунге-Кутты”, *Доклады Академии Наук*, **442**:2 (2012), 175–180; English transl.: Kalitkin N. N., Poshivaylo I. P., “Inverse Ls-stable Runge-Kutta schemes”, *Doklady Math.*, **85**:1 (2012), 139–143.

[7] Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П., “Вычисления с использованием обратных схем Рунге–Кутты”, *Матем. моделирование*, **25**:10 (2013), 79–96; English transl.: Kalitkin N. N., Poshivaylo I. P., “Computations with inverse Runge–Kutta schemes”, *Math. Models and Comp. Simulations*, **6**:3 (2014), 272–285.

[8] Белов А. А., Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П., “Геометрически-адаптивные сетки для жестких задач Коши”, *Доклады Академии наук*, **466**:3 (2016), 276–281; English transl.: Belov A. A., Kalitkin N. N., Poshivaylo I. P., “Geometrically adaptive grids for stiff Cauchy problems”, *Doklady Math.*, **93**:1 (2016), 112–116.

[9] Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В., *Вычисления на квазиравномерных сетках*, Физматлит, М., 2005; [Kalitkin N. N, Alshin A. B., Alshina E. A., Rogov B. V., *Vychisleniia na kvaziravnomernykh setkakh*, Fizmatlit, M., 2005, (in Russian).]

[10] Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В., "Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток", *Доклады Академии наук*, **404**:3 (2005), 295–299; English transl.: Alshina E. A., Kalitkin N. N., Koryakin P. V., "Diagnosis of singularities of exact solutions by calculation on embedded grids", *Doklady Math.*, **72**:2 (2005), 697–701.

[11] Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В., "Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:10 (2005), 1837–1847; English transl.: Alshina E. A., Kalitkin N. N., Koryakin P. V., "Diagnostics of singularities of exact solutions in computations with error control", *Comp. Math. and Math. Phys.*, **45**:10 (2005), 1769–1779.

[12] Белов А. А., "Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений", *Доклады Академии наук*, **468**:1 (2016), 21–25; English transl.: Belov A. A., "Numerical Detection and Study of Singularities in Solutions of Differential Equations", *Doklady Mathematics*, **93**:3 (2016), 334–338.

Belov A. A., Kalitkin N. N., "Numerical Methods of Solving Cauchy Problems with Contrast Structures", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 529–538.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-529-538

Abstract. Modern numerical methods allowing to solve contrast structure problems in the most efficient way are described. These methods include explicit-implicit Rosenbrock schemes with complex coefficients and fully implicit backward optimal Runge–Kutta schemes. As an integration argument, it is recommended to choose the length of the integral curve arc. This argument provides high reliability of the calculation and sufficiently decreases the complexity of computations for low-order systems. In order to increase the efficiency, we propose an automatic step selection algorithm based on curvature of the integral curve. This algorithm is as efficient as standard algorithms and has sufficiently larger reliability. We show that along with such an automatic step selection it is possible to calculate a posteriori asymptotically precise error estimation. Standard algorithms do not provide such estimations and their actual error quite often exceeds the user-defined tolerance by several orders. The applicability limitations of numerical methods are investigated. In solving superstiff problems, they sometimes do not provide satisfactory results. In such cases, it is recommended to imply approximate analytical methods. Consequently, numerical and analytical methods are complementary.

Keywords: stiff Cauchy problem, contrast structure, automatic step selection, curvature in multidimensional space, Richardson method estimations, singularity diagnostics, solution blow-up

On the authors:
Alexander A. Belov, orcid.org/0000-0002-0918-9263, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
1–2 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: belov_25.04.1991@mail.ru

Nikolay N. Kalitkin, orcid.org/0000-0002-0861-1792, corresponding member RAS, Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor.
Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia, e-mail: kalitkin@imamod.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR grants, Projects №14-01-00161, 16-31-00062.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 539–547
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 539–547

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-539-547

УДК 519.63

Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред

Домбровская Ж. О.

получена 31 августа 2016

Аннотация. В данной статье рассматривается численное решение системы вихревых уравнений Максвелла для кусочно-однородной диэлектрической среды на примере одномерной задачи. Для обеспечения второго порядка точности необходимо поставить узел сетки электрического поля в точку разрыва диэлектрической проницаемости. Если скачок проницаемости велик, то задача становится сингулярно возмущенной и возникает контрастная структура. Построена кусочная квазиравномерная сетка, детально передающая все характерные участки решения этой задачи (регулярную область, пограничный слой и переходную зону между ними). Обсуждаются свойства этой сетки.

Ключевые слова: метод конечных разностей во временной области (FDTD), схема Йе, диэлектрические границы раздела, слоистые среды, квазиравномерные сетки

Для цитирования: Домбровская Ж. О., "Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 539–547.

Об авторах:
Домбровская Жанна Олеговна, orcid.org/0000-0003-0609-1065, аспирант
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-03524, № 16-31-00418).

Введение

Метод конечных разностей во временной области (FDTD – Finite-Difference Time-Domain) является сравнительно простым в реализации и при этом надежным алгоритмом для численного решения прикладных задач фотоники и плазмоники [1], [2]. В его основе лежит дискретизация уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме Йе [3]. В случае линейной однородной среды эта схема сходится со вторым порядком точности на прямоугольных равномерных и неравномерных сетках [4], [5] при выполнении условия Куранта.

Особую трудность для конечно-разностных методов представляют задачи в слоистых средах, когда один из материальных параметров (диэлектрическая проницаемость ε или магнитная восприимчивость μ) или оба являются кусочно-непрерывными. Если точка разрыва попадает внутрь шаблона разностной схемы, то добиться сходимости в норме C не удается. Имеет место лишь сходимость в норме L с дробным показателем, зависящим от априорного порядка точности.

В работах [6], [7] предпринимались попытки решения этой проблемы для метода FDTD. Например, в случае диэлектрической границы раздела второй порядок точности достигался с помощью переноса положения ближайшего к ней узла. Однако при большой величине скачка ε такая процедура является ненадежной. Шаг, примыкающий к границе раздела, становится настолько мелким, что аккуратное вычисление разностных производных требует повышенной разрядности. Кроме того, в [7] вблизи границы раздела требовалось вводить эффективное значение ε_{eff}, то есть изменять исходную задачу. Это может привести к физическим артефактам, например, изменению значений коэффициентов прохождения и отражения.

Диэлектрическая среда с большой относительной проницаемостью $\sim 10^2 \div 10^4$ ведет себя практически как идеальный проводник. Глубина проникновения высокочастотного электромагнитного поля в него невелика. Внутри скин-слоя решение резко изменяется, то есть возникает контрастная структура. При правильном выборе расположения узлов такие сингулярно возмущенные задачи можно решать на равномерных сетках, однако это крайне невыгодно из-за избыточно подробного шага в областях плавного изменения решения. Целесообразно использовать сетки, адаптированные к толщине скин-слоя.

Чаще всего применяются сетки из работ [8]– [12], сгущающиеся в пограничных слоях. Однако при численном решении важную роль играют не только регулярные и погранслойные участки. Совсем недавно в [13] было предложено выделять также переходные области, возникающие между ними и характеризующиеся большой кривизной решения. Последнее обстоятельство сильно осложняет расчеты. Была построена квазиравномерная сетка, содержащая в каждом из этих трех участков (регулярная часть, переходная область и пограничный слой) примерно одинаковое число узлов. Рассматривалась только стационарная задача, нестационарный случай не изучался.

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла с кусочно-постоянным коэффициентом, задающим границу раздела двух диэлектрических сред с сильно различающимися значениями проницаемости. Для ее численного решения методом FDTD предлагается использовать кусочную квазиравномерную сетку, являющуюся модификацией сетки из [13], [14]. В точку разрыва ε ставится узел сетки электрического поля; шаги выбираются так, чтобы детально передать все характерные участки решения. Значительное внимание уделяется обсуждению преимуществ использования такого подхода. Он удобен, единообразен, позволяет экономично решать задачи рассматриваемого типа и получать апостериорную асимптотически точную оценку погрешности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную задачу о нормальном падении электромагнитного импульса, возбужденного излучающей линией с заданной плотностью тока $\mathbf{J} = J_z(t)$ в координате $x_* < 0$, на границу «воздух – диэлектрик» (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость вещества ε является кусочно-постоянной величиной

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \text{const} \geq 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Электрическое и магнитное поля, $\mathbf{E} = E_z(x,t)$ и $\mathbf{H} = H_y(x,t)$, удовлетворяют вихревым уравнениям Максвелла (z-поляризованная TEM мода)

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} = -J_z, \quad (x,t) \in (-a;a) \times (0;T], \tag{2}$$

с нулевыми начальными условиями

$$E_z|_{t=0} = 0, \quad H_y|_{t=0} = 0, \quad x \in (-a;a). \tag{3}$$

Здесь $a > 0, T > 0$; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость вакуума. Неограниченность области имитируется с помощью поглощающих граничных условий

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t} - c_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \Big|_{x=-a} = 0, \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} + v \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = 0, \quad t \in (0;T], \tag{4}$$

где c_0 и v – скорости распространения света в вакууме и в веществе соответственно.

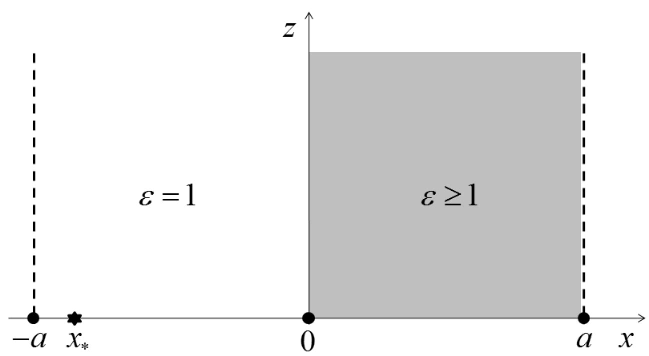

Рис. 1. Граница раздела диэлектрических сред; x_* – точка расположения источника поля
Fig. 1. Interface between dielectric media; x_* – field source point

В стационарном случае система (2)–(4) эквивалентна краевой задаче с условиями сопряжения для уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial x^2} + k_0^2 \tilde{E}_z = -i\omega \frac{\mu_0}{\varepsilon} \tilde{J}_z \delta(x - x_*), \quad x \in (-\infty; \infty). \tag{5}$$

В правой части (5) записана функция источника, символом δ обозначена δ-функция Дирака; $\tilde{E}_z$ и $\tilde{J}_z$ – z-компоненты напряженности электрического поля и поверхностной плотности тока, зависящие только от пространственной координаты, ω – круговая частота, $k_0 = \omega / c_0$ – волновое число в вакууме. На границе раздела $x = 0$

ставятся дополнительные условия

$$\tilde{E}_z\Big|_{x=-0} = \tilde{E}_z\Big|_{x=+0}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x}\bigg|_{x=-0} = \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x}\bigg|_{x=+0}. \tag{6}$$

Если в (1) при $x \geq 0$ величина $\varepsilon \gg 1$, то задачи (2)–(4) и (5)–(6) являются сингулярно возмущенными. Вблизи границы раздела $x = 0$ имеется пограничный слой, ширина которого составляет $\sim 1/(k_0\sqrt{\varepsilon})$. Слева и справа от него располагаются переходные зоны, а далее регулярные участки решения.

Многомерный аналог задачи (5)–(6) может быть решен с помощью прикладного пакета программ SuFaReC [15], позволяющего производить сверхбыстрые расчеты с гарантированной точностью в прямоугольной области на квазиравномерных сетках [16], [17].

2. Разностная схема

Будем решать нестационарную задачу (2)–(4) методом FDTD. Неизвестные значения компоненты электрического поля E_z вычисляются в полуцелых узлах сетки, магнитного поля H_y – в целых (рис. 2).

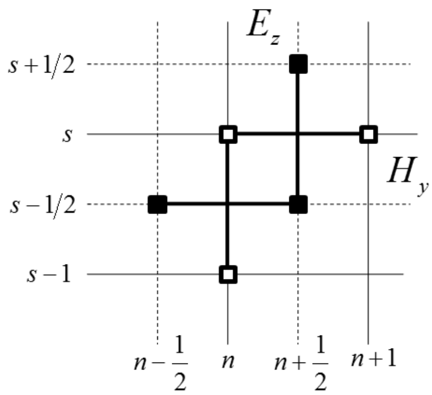

Рис. 2. Шаблон разностной схемы
Fig. 2. Difference scheme template

Схема Йе является консервативной, поэтому на границе раздела $x = 0$ не возникает нефизичных фиктивных источников излучения. В нашем случае диэлектрическую границу раздела необходимо поставить в узел E_z, то есть ε вычисляется в полуцелых узлах сетки. В противном случае аппроксимации в норме C не будет.

Выберем некоторую неравномерную сетку и аппроксимируем уравнения Максвелла (2) на шаблоне, представленном на рис. 2. Выбор сетки будет конкретизирован ниже. Получим одномерную разностную схему Йе

$$\mu_0 \frac{H_y|_n^{s+1} - H_y|_n^s}{\tau} + \frac{E_z|_{n+1/2}^{s-1/2} - E_z|_{n-1/2}^{s-1/2}}{h} = 0, \quad (n,s) \in [1;N]\times[1;S], \tag{7}$$

$$\varepsilon_0\, \varepsilon|_{n+1/2}^{s-1/2} \frac{E_z|_{n+1/2}^{s+1/2} - E_z|_{n+1/2}^{s-1/2}}{\tau} + \frac{H_y|_{n+1}^{s+1} - H_y|_n^{s+1}}{h} = -\, J_z|_{n+1/2}^{s-1/2},\ (n,s) \in [1; N-1] \times [1; S], \tag{8}$$

где h и τ – шаги по пространству и по времени. Начальные условия имеют вид

$$E_z|_{n-1/2}^{1/2} = 0, \quad H_y|_n^1 = 0, \quad n \in [1; N]. \tag{9}$$

Разностные граничные условия записываются следующим образом:

$$E_z|_{1/2}^{s+1/2} = E_z|_{3/2}^{s-1/2} + \frac{c_0\tau - h}{c_0\tau + h}\left(E_z|_{3/2}^{s+1/2} - E_z|_{1/2}^{s-1/2}\right), \quad s \in [1; S], \tag{10}$$

$$E_z|_{N-1/2}^{s+1/2} = E_z|_{N+1/2}^{s-1/2} + \frac{c_0\tau - h}{c_0\tau + h}\left(E_z|_{N+1/2}^{s+1/2} - E_z|_{N-1/2}^{s-1/2}\right), \quad s \in [1; S]. \tag{11}$$

Условия (10) и (11) соответствуют «открытым границам» в координатах $x = -a$ и $x = a$. Они называются условиями Мура первого порядка [18].

3. Квазиравномерная сетка

В методе FDTD вводятся три сетки: две пространственные для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и одна общая по времени. Электрическое и магнитное поле смещены по отношению друг к другу на половину шага дискретизации по пространству и по времени. Обычно эти сетки выбираются равномерными с мелким шагом или кусочно-равномерными (например, [5], [19], [20]).

Рассмотрим пространственную сетку для поля $\mathbf{E}$. В данной задаче положение внутреннего пограничного слоя известно, это граница раздела $x = 0$. Поэтому шаг сетки должен быть чрезвычайно мелким вблизи нее и постепенно увеличивается по мере удаления от этой точки. Подчеркнем, что во всех областях решения (регулярной, погранслойной, переходной) должно быть примерно одинаковое число узлов. Этого можно добиться, используя производящую функцию, предложенную А.А. Беловым и Н.Н. Калиткиным в [13], и задавая сетку кусочно следующим образом:

$$x(\xi) = \begin{cases} a\,(\mathrm{th}[c(\xi-1)(1+(\xi-1)^2)/3]+1)\,, & \xi \in [0;1], \\ a\,(\mathrm{th}[c(\xi+1)(1+(\xi+1)^2)/3]-1)\,, & \xi \in [-1;0]. \end{cases} \tag{12}$$

Управляющие параметры a и c подбираются так, чтобы $x(\pm1) = \pm a$, а значение производной на границе равнялось

$$x'(0) = \frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{-k_0^2 + 1/\sqrt{\varepsilon}}. \tag{13}$$

Условие (13) позволяет адаптировать шаг вблизи границы раздела к ширине погранслоя. Шаги сетки пропорциональны производной производящей функции. Поскольку поле $\mathbf{E}$ вычисляется в полуцелых точках, то эта производная должна браться в целых узлах: $h_n^E = x'(\xi_n)/N$.

Нетрудно убедиться, что сетка (12) действительно является квазиравномерной. Напомним, что для этого преобразование $x(\xi)$ должно быть 1) гладким, 2) строго монотонным и 3) должно переводить отрезок $\xi \in [-1;1]$ в заданный отрезок $x \in [-a;a]$. При этом разность двух соседних шагов должна быть величиной $O(N^{-2})$ (или, что то же самое, отношение соседних шагов должно стремиться к единице).

Расчеты на квазиравномерных сетках, как и на равномерных [21], можно проводить с многократным сгущением. Применяя при этом метод Ричардсона [22], можно получать апостериорную асимптотически точную оценку погрешности, исследовать фактический порядок точности и рекуррентно его повышать. Поэтому квазиравномерные сетки обладают значительными преимуществами по сравнению с кусочно-равномерными.

Сравнение предложенной сетки (12) с известными проведем на примере работы [11]. В ней предлагалась степенная квазиравномерная сетка вида

$$x(\xi) = A + (B + C\xi)^{1/\alpha}, \tag{14}$$

где α – управляющий параметр, а константы A, B, C подбираются так, чтобы обеспечить равномерную сходимость по малому параметру. Зависимость ξ от x для сеток (12) и (14) проиллюстрирована на рис. 3. Видно, что при одинаковом числе узлов сетка (12) гораздо лучше разрешает узкий пограничный слой и прилегающую к нему переходную зону. При этом в каждую из областей решения действительно попадает примерно одинаковое число узлов (на рисунке проведены касательные к участкам кривой, передающим эти области). В то же время сетка (14) дает избыточное число узлов в регулярной части решения. Поэтому для расчета задач с контрастными структурами она менее выгодна.

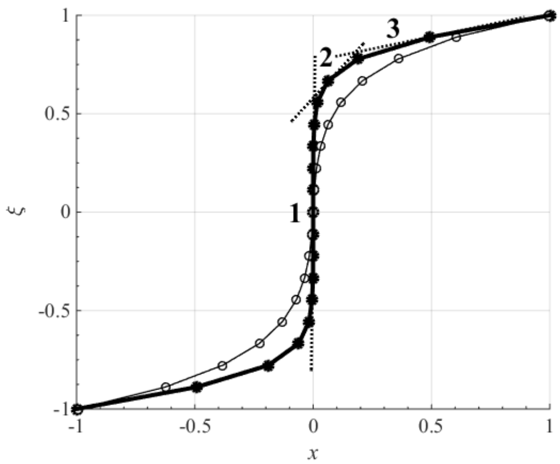

Рис. 3. Сравнение производящих функций сеток, $N = 10$; темные маркеры – (12), светлые – работа [11]; цифрами отмечены характерные участки решения: 1 – пограничный слой, 2 – переходная зона, 3 – регулярное решение
Fig. 3. Comparison between the generating grids functions, $N = 10$; dark markers – (12), bright – work [11]; characteristic zones of the solution are marked by numbers: 1 – boundary layer, 2 – transition region, 3 – regular solution

Производящую функцию пространственной сетки для поля **H** целесообразно выбрать такой же, как для поля **E**. Это упрощает процедуру сгущения. Заметим, что шаги сетки для **H** вычисляются через производную производящей функции в полуцелых узлах.

Поскольку схема явная, то шаги по времени должны удовлетворять условию Куранта $\tau \le h/c_0$. Поэтому необходимо использовать равномерную сетку, шаг которой пропорционален наименьшему шагу сетки по пространству $\tau = \min h/c_0$. В качестве итоговой сетки для задачи (2)-(4) выбирается декартово произведение пространственных сеток для **E**, **H** и сетки по времени.

4. Обобщения и замечания

В настоящей работе предложен подход, позволяющий аккуратно моделировать распространение электромагнитных полей методом FDTD при наличии границы раздела сред. Рассматривается одномерная задача для кусочно-равномерной среды с сильно отличающимися диэлектрическими проницаемостями. Полученные результаты без труда обобщаются на случай неидеальных диэлектриков. В этом случае точка разрыва удельной диэлектрической проводимости σ^e ставится в тот же узел, что и точка разрыва диэлектрической проницаемости ε.

Аналогичным образом можно поступать и в задачах с магнитными границами раздела, когда ε непрерывна, а магнитная восприимчивость μ и удельная магнитная проводимость σ^m являются кусочно-непрерывными. В этом случае в точки разрыва μ и σ^m нужно поставить узел сетки, относящейся к магнитному полю.

Однако к задачам, в которых ε и μ испытывают разрыв в одной точке, данный подход применить нельзя. В таких задачах не удается записать шаблон явной схемы FDTD так, чтобы внутрь него гарантированно не попали точки разрыва материальных параметров.

Наконец, предложенный метод можно непосредственно применять к многомерным задачам, так как многомерные сетки для полей строятся как декартово произведение одномерных.

Список литературы / References

[1] Taflove A., Hagness S. C., *Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., Artech House, 2005.

[2] Taflove A., Johnson S. G., Oskooi A., *Advances in FDTD Computational Electromagnetics: Photonics and Nanotechnology*, Artech House, 2013.

[3] Yee K. S., “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **14**:3 (1966), 302–307.

[4] Monk P., “Convergence analysis of Yee’s scheme on non-uniform grids”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **31**:2 (1994), 393–412.

[5] Li J., Shields S., “Superconvergence analysis of Yee scheme for metamaterial Maxwell’s equations on non-uniform rectangular meshes”, *Numer. Math.*, 2015, 1–41, http://dx.doi.org/10.1007/s00211-015-0788-4.

[6] Chu Q.X., Ding H., “Second-order accuarate FDTD equations at magnetic media interfaces”, *IEEE Trans. Magn.*, **27** (2006), 3141–3143.

[7] Chu Q.X., Ding H., “Second-order accuarate FDTD equations at dielectric interfaces”, *Microwave Opt. Techn. Lett.*, **49**:12 (2007), 3007–3011.

[8] Бахвалов Н.С., "К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9**:4 (1969), 841–859; [Bakhvalov N. S., "K optimizatsii metodov resheniia kraevykh zadach pri nalichii pogranichnogo sloia", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **9**:4 (1969), 841–859, (in Russian).]

[9] Шишкин Г.И., "Разностные аппроксимации сингулярно возмущенной краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся в уранение первого порядка", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **32**:4 (1992), 550–566; [Shishkin G.I., "Raznostnye approksimatsii singuliarno vozmushchennoi kraevoi zadachi dlia kvazilineinykh ellipticheskikh uravnenii, vyrozhdaushchikhsia v uravnenie pervogo poriadka", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **32**:4 (1992), 550–566, (in Russian).]

[10] Sun G., Stynes M., "Finite element methods on piecewise equidistant meshes for interior turning point problems", *Numer. Algorithms*, **8**:1 (1994), 111–129.

[11] Liseikin V.D., *Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems*, VSP BV, 2001.

[12] Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I., *Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions*, World Scientific, 1996.

[13] Белов А.А., Калиткин Н.Н., "Численное моделирование задач с пограничным слоем", *Математическое моделирование.*, **27**:1 (2015), 47–55; English transl.: Belov A.A, Kalitkin N.N., "Numerical simulations of boundary layer problems", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **8**:4 (2016), 341–347.

[14] Белов А.А., Калиткин Н.Н., "Сеточные методы решения задач с пограничным слоем", Серия физическая, **79**, 2015, 1655–1659; English transl.: Belov A.A, Kalitkin N.N., "Grid methods for boundary layer problem", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, **79**:12 (2015), 1448–1452.

[15] Белов А.А., "Программы SuFaReC для сверхбыстрого расчета эллиптических уравнений в прямоугольной области", *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2015, № 44, 1–12, http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-44; [Belov A. A., "Programmy SuFaReC dlia sverkhbystrogo rascheta ellipticheskikh uravnenii v priamougolnoi oblasti", *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2015, № 44, 1–12, http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-44, (in Russian).]

[16] Калиткин Н.Н., Белов А.А., "Аналог метода Ричардсона для логарифмически сходящегося счета на установление", *Доклады Академии наук*, **452**:3 (2013), 261–265; English transl.: Kalitkin N. N., Belov A. A., "Analogue of the richardson method for logarithmically converging time marching", *Doklady Mathematics*, **88**:2 (2013), 596–600.

[17] Белов А.А., Калиткин Н.Н., "Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление", *Математическое моделирование*, **26**:9 (2014), 47–64; English transl.: Belov A. A., Kalitkin N. N., "Evolutionary factorization and superfast relaxation count", *Mathematical Models and Computer Simulations*, **7**:2 (2015), 103–116.

[18] Mur G., "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation ot the time-domain electromagnetic-field equations", *IEEE Trans. Electromagn. Comp.*, **EMC-23**:4 (1981), 377–382.

[19] Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Дементьева Ю.С., "Исследование распространения электромагнитных импульсов через фотонные кристаллические структуры", Серия 3: Физика, астрономия, 2010, 3–8; English transl.: Bogolyubov A.N., Butkarev I.A., Dementieva Yu.S., "Research of propagation of electromagnetic pulses through photonic crystal structures", *Moscow University physics bulletin*, **65**:6 (2010), 425–431.

[20] Боголюбов А.Н., Белокопытов Г.В., Домбровская Ж.О., "Моделирование спектральных зависимостей для двумерных фотонно-кристаллических волноводных систем", Серия 3: Физика, астрономия, 2013, 8–13; English transl.: Bogolubov A. N., Belokopytov G. V., Dombrovskaya Z. O., "Modeling of spectral dependences for 2D photonic crystal waveguide systems", *Moscow University physics bulletin*, **68**:6 (2013), 344–350.

[21] Домбровская Ж.О., Боголюбов А.Н., "Анализ точности и сходимости одномерной схемы Йе методом сгущения сеток", *Ученые записки физического факультета*

МГУ, 2016, № 3, 163112-1–163112-3, http://uzmu.phys.msu.ru/file/2016/3/163112.pdf; [Dombrovskaya Zh. O, Bogolyubov A. N., "Analiz tochnosti i skhodimosti odnomernoi skhemy Yee metodom sguscheniia setok", *Uchnye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU*, 2016, № 3, 163112-1–163112-3, http://uzmu.phys.msu.ru/file/2016/3/163112.pdf, (in Russian).]

[22] Richardson L. F., Gaunt J. A., "The deferred approach to the limit", *Phil. Trans. A*, **226** (1927), 229–349.

Dombrovskaya Zh. O., "FDTD Method for Piecewise Homogeneous Dielectric Media", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 539–547.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-539-547

Abstract. In this paper, we consider a numerical solution of Maxwell's curl equations for piecewise uniform dielectric medium by the example of a one-dimensional problem. For obtaining the second order accuracy, the electric field grid node is placed into the permittivity discontinuity point of the medium. If the dielectric permittivity is large, the problem becomes singularly perturbed and a contrast structure appears. We propose a piecewise quasi-uniform mesh which resolves all characteristic solution parts of the problem (regular part, boundary layer and transition zone placed between them) in detail. The features of the mesh are discussed.

Keywords: finite-difference time-domain (FDTD) method, Yee's scheme, dielectric interfaces, layered media, quasi-uniform meshes

On the authors:
Zhanna O. Dombrovskaya, orcid.org/0000-0003-0609-1065, PhD student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Projects No 15-01-03524 and No 16-31-00418).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 548–558
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 548–558

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-548-558

УДК 517.9

Взаимодействие двух волн в модели Ферми – Паста – Улама

Глызин С.Д.[1]**, Кащенко С.А., Толбей А.О.**

получена 15 июня 2016

Аннотация. Работа посвящена исследованию динамических свойств решений краевых задач, связанных с классической системой Ферми – Паста – Улама (ФПУ). При исследовании локальной динамики этих задач может реализовываться критический случай бесконечной размерности. В этих условиях построено специальное нелинейное уравнение с частными производными, которое играет роль квазинормальной формы, т.е. определяет в главном поведение всех решений исходной краевой задачи с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия. В зависимости от значений параметров в качестве квазинормальных форм выступают модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (КДВ) и уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса (КДВБ). При некоторых дополнительных предположениях к полученным краевым задачам применена процедура повторной нормализации, приводящая к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описан способ сворачивания этой системы в краевую задачу – аналог нормальной формы. Построенные квазинормальные формы позволяют судить о динамике задачи ФПУ. Основной результат работы состоит в том, что аналитическими методами нелинейной динамики изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в разных направлениях, в задаче ФПУ. При рассмотрении так называемых регулярных решений описано влияние волн друг на друга, которое задается специальным интегральным соотношением. Показано, что это влияние является асимптотически малым и не меняет форму волн, внося вклад только в их скоростной сдвиг, который не меняется по времени.

Ключевые слова: модель Ферми – Паста – Улама, обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза, квазинормальная форма, краевая задача

Для цитирования: Глызин С.Д., Кащенко С.А., Толбей А.О., "Взаимодействие двух волн в модели Ферми – Паста – Улама", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 548–558.

Об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, ведущий научный сотрудник,
НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское шоссе, 31, г. Москва, 115409 Россия,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Толбей Анна Олеговна, orcid.org/0000-0001-5668-3929 канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: bekva@yandex.ru

Благодарности:
[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Постановка задачи

Рассматривается хорошо известная [1–6] модель Ферми – Паста – Улама (ФПУ), которая описывается системой уравнений

$$m\frac{d^2y_j}{dt^2} = F_{j,j+1} - F_{j-1,j}, \tag{1}$$

где

$$F_{j-1,j} = k(\triangle l) + \alpha(\triangle l)^2 + \beta(\triangle l)^3,\ \triangle l = y_j - y_{j-1} \qquad (k > 0).$$

Здесь $y_j = y_j(t)$ координата положения равновесия j-й массы. В классической задаче ФПУ имеем $\beta = 0$. Система уравнений с ненулевым коэффициентом β предложена в [7]. Пусть $y_j(t) = y(t, x_j)$ и расстояния между соседними точками x_j равны h. Считается, что значения x_j распределены на отрезке длины $2\pi L$ и выполнено условие периодичности $y(t, x_j + 2\pi L) = y(t, x_j)$. Удобно произвести нормировку пространственной переменной $x : x \to Lx$. В результате приходим к соотношению $x_{j+1} = x_j + \varepsilon$, где $\varepsilon = hL^{-1}$. Основное предположение состоит в том, что параметр ε является достаточно малым: $0 < \varepsilon \ll 1$. Следующее важное ограничение состоит в том, что рассматриваются так называемые регулярные решения системы (1), т.е. такие решения $y(t, x)$, которые можно раскладывать в асимптотические при $\varepsilon \to 0$ ряды

$$y(t, x \pm \varepsilon) = y(t, x) \pm \varepsilon\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \pm \ldots \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и произведем перенормировку времени $t \to (km^{-1})^{1/2}\varepsilon t$. Тогда с точностью до $O(\varepsilon^6)$ получим [6], краевую задачу

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\varepsilon^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^4\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + \alpha\varepsilon\left[2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right)\right)\right] +$$

$$+ \beta\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right)\right], \tag{3}$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \tag{4}$$

В работах [4], [8–14] изучались регулярные решения данной краевой задачи, полученной из модели ФПУ (1).

Ниже исследуется поведение решений краевой задачи (3) - (4).

2. Нормализация краевой задачи (3) – (4)

От уравнения (3) перейдем к системе вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= v,\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\varepsilon^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \alpha\varepsilon\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right)\right)\right] + \beta\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right)\right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где
$$u(t,x+2\pi)\equiv u(t,x),\ v(t,x+2\pi)\equiv v(t,x). \tag{6}$$

Решение линеаризованной системы $\dot w = Aw$, где $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0\end{pmatrix}$, $w=(u,v)^T$, можно разложить в формальный ряд Фурье по элементарным решениям $\xi_k\exp(ik(x+t))$ и $\eta_k\exp(ik(x-t))$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. Поэтому можно говорить, что при исследовании локальной динамики задачи (5), (6) реализуется критический (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) случай бесконечной размерности. Отметим, что такого типа критические случаи изучались в работах [15–19]. Методика исследования базируется на предположении о том, что решения $w(t,x,\varepsilon)$ в (5), (6) можно представить в виде формального выражения

$$\begin{gathered} w(t,x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\xi(\tau,x+t,\varepsilon)+\varepsilon\eta(\tau,x-t,\varepsilon)+\varepsilon^2w_2(t,x,\tau,\varepsilon)+\\ +\varepsilon^3w_3(t,x,\tau,\varepsilon)+..., \end{gathered} \tag{7}$$

где
$$\xi_{-k}(\tau,\varepsilon)=\bar\xi_k(\tau,\varepsilon),\quad \eta_{-k}(\tau,\varepsilon)=\bar\eta_k(\tau,\varepsilon),$$
$$\xi(\tau,z,\varepsilon)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}\exp(ikz),\quad \eta(\tau,z,\varepsilon)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}\exp(ikz),$$

$\tau=\varepsilon^2t$ — "медленное" время, $\xi_k(\tau,\varepsilon)$ и $\eta_k(\tau,\varepsilon)$ — неизвестные регулярно зависящие от ε амплитуды, а функции $w_j(t,x,\tau,\varepsilon)$ — 2π-периодичны по первым двум аргументам и тоже регулярно зависят от ε. Переход от исходной системы (5) к системе уравнений для определения амплитуд ξ_k и η_k будем называть нормализацией.

Подставим (7) в (5). Для определения функции
$$(U,V)^T=\varepsilon w_2(t,x,\tau,\varepsilon)+\varepsilon^2w_3(t,x,\tau,\varepsilon)$$
получаем систему вида
$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t}=V,\\ &\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+R_1(t,x,\tau,\varepsilon)+R_2(t,x,\tau,\varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$
в которой в функцию R_1 собраны все слагаемые, разложение которых в ряд Фурье производится только по системе функций $\exp(ik(x+t))$ или $\exp(ik(x-t))$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$, а в R_2 — остальные слагаемые. Отметим, что система (8) разрешима в указанном классе 2π-периодических по t и x функций при условии $R_1\equiv0$. Функция R_2 имеет вид
$$R_2=2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+O(\varepsilon),$$
поэтому для $w_2=(w_{21},w_{22})^T$ приходим к системе вида
$$\begin{aligned} &\frac{\partial w_{21}}{\partial t}=w_{22},\\ &\frac{\partial w_{22}}{\partial t}=\frac{\partial^2 w_{21}}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$w_2 = -\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(\xi\eta) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial t}(\xi\eta) \end{pmatrix}.$$

Учитывая это равенство в (8), заключаем, что условия разрешимости системы (8) относительно $w_3 = (w_{31}, w_{32})^T$ в указанном классе функций состоит в выполнении соотношений

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau\partial x} = \frac{1}{12}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^2\frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + 2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2\right] +$$
$$+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^3 + \left(3\beta - 2\alpha^2\right)M\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right], \tag{9}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau\partial x} = \frac{1}{12}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \frac{2}{6!}\varepsilon^2\frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + 2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right] +$$
$$+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3 + \left(3\beta - 2\alpha^2\right)M\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right], \tag{10}$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(\tau, x, \varepsilon), \eta(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \eta(\tau, x, \varepsilon). \tag{11}$$

Здесь принято обозначение $M(\varphi(x)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)dx$.

Сформулируем несколько выводов о взаимодействии волн $\xi(\tau, x+t, \varepsilon)$ и $\eta(\tau, x-t, \varepsilon)$, движущихся в разных направлениях. Во-первых, это взаимодействие осуществляется через слагаемые $\varepsilon^2(3\beta-2\alpha^2)M\left((\frac{\partial\eta}{\partial x})^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}$ и $\varepsilon^2(3\beta-2\alpha^2)M\left((\frac{\partial\xi}{\partial x})^2\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$ соответственно. Во-вторых, оно относительно слабое, так как имеет порядок ε^2. В-третьих, что самое важное, отмеченные слагаемые не влияют на форму волн, а вносят вклад только в их скоростной сдвиг, причем постоянный по времени. Это следует из того, что заменами $\tau \to \left(1 + \varepsilon^2 M\left((\frac{\partial\eta}{\partial x})^2\right)\right)\tau$ в (9) и заменой $\tau \to \left(1 + \varepsilon^2 M\left((\frac{\partial\xi}{\partial x})^2\right)\right)\tau$ в (10) соответствующие слагаемые, обеспечивающие связь уравнений (9) и (10), пропадают. Обратим внимание на то, что чем больше "среднее" одной волны, тем на большую величину происходит изменение скорости движения другой волны. Отметим, что явление, когда волны проходят друг через друга без изменений, а только с небольшим сдвигом по времени, хорошо известно в теории солитонов [20–23].

В уравнениях (9) и (10) произведем еще несколько преобразований. Учтем, что $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ в (9) и (10) выражаются через производную по пространственной переменной от некоторого выражения. Для регулярных решений тогда имеем соотношения:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{1}{24}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что

$$2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon)$$

и
$$2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon).$$

Эти уравнения позволяют записать краевые задачи (9), (11) и (10), (11) для функций
$$u = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{12}$$
в следующей форме:
$$2\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(u^2)}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\alpha}{24}u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha^2u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta u^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(v^2)u\right)\right], \tag{13}$$

$$2\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 v}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}v + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(v^2)}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\alpha}{24}v\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \alpha^2v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta v^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(u^2)v\right)\right]. \tag{14}$$

$$u(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv u(\tau, x, \varepsilon), \;\; v(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv v(\tau, x, \varepsilon), \tag{15}$$

Важно подчеркнуть, что можно вычислить явные значения выражений $M(u^2)$ и $M(v^2)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ через начальные условия решений исходной краевой задачи (3) и (4). Пусть $y(0, x) = a(x)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – некоторые (гладкие) 2π–периодические функции.

Тогда
$$M(u^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) + \frac{da}{dx}\right)^2\right), \quad M(v^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) - \frac{da}{dx}\right)^2\right).$$

Из (12) следует, что для функций u и v можно выписать условия
$$M(u) = M(v) = 0. \tag{16}$$

Отметим еще, что нулевым приближением краевых задач (13), (15), (16) и (14), (15), (16) является уравнение КДВ
$$\frac{\partial w}{\partial\tau} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha w\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(\tau, x + 2\pi) \equiv w(\tau, x). \tag{17}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $u(\tau,x)$ и $v(\tau,x)$ являются ограниченными при $\tau\to\infty$ вместе с производными по x до 5–го порядка включительно решениями краевой задачи (13)–(16). Тогда краевая задача (5),(6) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^5)$ решение $w(t,x,\varepsilon)$, для которого*

$$w(t,x,\varepsilon)=\varepsilon(\xi(\tau,x+t)+\eta(\tau,x-t))+\varepsilon^2 w_2(t,x,\tau,\varepsilon)+\varepsilon^3 w_3(t,x,\tau,\varepsilon),$$

где $\tau=\varepsilon^2 t$ и выполнены соотношения (12).

3. Повторная нормализация

Модифицированное уравнение КДВ и уравнение КДВБ изучались многими авторами [24–28]. Исследовались вопросы интегрируемости, построения (при определенных значениях коэффициентов) точных решений [29–31]. Здесь будем использовать методику работ [15–19, 32, 33], в которых разработан метод исследования локальной динамики для бесконечномерных критических случаев.

Сначала приведем результаты из [15] нормализации главной части краевой задачи (13)–(16), т. е. краевой задачи (17). Для этого введем следующее обозначение. Пусть $w(x)=\sum\limits_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} w_k\exp(ikx)$. Оператор J введем по правилу

$$J(w(x))=\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}(ik)^{-1}w_k exp(ikx). \tag{18}$$

Из (12) следует, что

$$\xi(\tau,x)=J(u(\tau,x)),\eta(\tau,x)=J(v(\tau,x)). \tag{19}$$

Для функции $W(x)$ из (18) определим вектор-функцию $R(W)$ по правилу

$$R(W)=(\ldots,W_{-1}\exp(-ix),0,W_1\exp(ix),W_2\exp(2ix),\ldots).$$

Ниже умножение векторов – покоординатное:

$$R^2(W)=(\ldots,W_{-1}^2\exp(-2ix),0,W_1^2\exp(2ix),W_2^2\exp(4ix),\ldots),$$

$$\text{а}\quad (R^2(W),\bar R(v))=\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} W_j^2 v_j\exp(ijx).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$2\frac{\partial W}{\partial\tau}=\frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 W}{\partial x^5}+A(W),\quad W(\tau,x+2\pi)=W(\tau,x),\quad M(W)=0, \tag{20}$$

где

$$A(W)=\frac{2}{3}\left[M(J^2(W))\frac{\partial W}{\partial x}+\Big(R^2(J(W)),\bar R\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)\Big)\right].$$

Основной результат состоит [15–17] в том, что краевая задача (20) играет роль укороченной нормальной формы для краевой задачи (13)–(16) или – повторной нормальной формы для краевой задачи (5), (6).

Представляет интерес произвести повторную нормализацию в краевой задаче (13)–(16) в случае, когда

$$\alpha = 0. \tag{21}$$

Учтем в (13) соотношение (16) и произведем замену $y = x + \frac{3}{8}\beta M((b(x) - \frac{da}{dx})^2)\tau$. В результате от (13), (15) приходим к краевой задаче

$$2\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \varepsilon^2\frac{1}{960}\frac{\partial^5 u}{\partial y^5} + \varepsilon^2\beta\frac{\partial}{\partial y}u^3, \tag{22}$$

$$u(\tau, y + 2\pi) \equiv u(\tau, y), \quad M(u) = 0. \tag{23}$$

Получающееся при $\varepsilon = 0$ уравнение имеет совокупность решений

$$W(\tau, y) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} W_k \exp(-iky + i(24)^{-1}k^3\tau). \tag{24}$$

Базируясь на этом представлении решений, введем формальный ряд

$$W(\tau, y, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} W_k(s) \exp(-iky + \frac{i}{24}k^3\tau) + \varepsilon^2 W_1(s, \tau, y) + \ldots, \tag{25}$$

где $s = \varepsilon^2\tau$, а функции $W_j(s, \tau, y)$ периодичны по τ и y. Подставим (25) в (22) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда из условия разрешимости получающегося уравнения относительно $W_j(s, \tau, y)$ получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $W_k(s) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$2\frac{\partial W_k}{\partial s} = \frac{1}{960}(-ik)^5 W_k + 3\beta(-ik)W_k\left(2\sum_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty}|W_j|^2 - |W_k|^2\right). \tag{26}$$

Положим $W(s, y) = \sum\limits_{j=-\infty, j\neq 0}^{\infty} W_k(s) \exp(-iky)$. Основной вывод состоит в том, что функция $W(s, y)$ с точностью до слагаемого порядка $O(\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$2\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{1}{960}\frac{\partial^5 W}{\partial y^5} + 6\beta M(W^2)\frac{\partial W}{\partial y} - 3\beta\frac{\partial(R^2(W), \bar{R}(W))}{\partial y}, \tag{27}$$

$$W(s, y + 2\pi) \equiv W(s, y), \quad M(W) = 0. \tag{28}$$

Процесс нормализации можно продолжить. Поставим задачу локального исследования в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (27), (28). Линейная часть этой краевой задачи имеет совокупность периодических решений

$z_k \exp(iky + i(2\cdot 960)^{-1}k^5 s)$ $\quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, поэтому и здесь реализуется критический, в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия, случай бесконечной размерности.

Положим

$$z(s,y) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} z_k(s)\exp(iky + i(2\cdot 960)^{-1}k^5 s) + z_1(s,y) + \ldots, \tag{29}$$

где $z_k(s)$ – медленно меняющиеся по s достаточно малые значения амплитуд, а $z_1(s,y), z_2(s,y)$ – квадратично, кубично и т. д. зависят от $z_j(s)$.

Подставим (29) в (27). Производя стандартные действия, приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $z_k(s)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Основной результат состоит в том, что для функции

$$Z(s,x) = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} z_k(s)\exp(iky) \tag{30}$$

эта бесконечная система уравнений с точностью до слагаемых порядка $O(|z|^5)$ может быть свернута в краевую задачу – аналог нормальной формы –

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = 3\beta M(z^2)\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{3}{2}\beta\frac{\partial(R^2(Z), \bar{R}(Z))}{\partial y}, \tag{31}$$

$$Z(s, y+2\pi) \equiv Z(s,y), \quad M(Z) = 0. \tag{32}$$

Остается отметить, что эта краевая задача интегрируется в явном виде. Все решения её являются, вообще говоря, бесконечномерными торами.

Таким образом, краевая задача (27), (28) играет роль нормальной формы для краевой задачи (5),(6) при условии (21).

Выводы

Исследованы специальные уравнения с частными производными, описывающие асимптотическое поведение так называемых регулярных решений в непрерывной модели ФПУ. Использовались и развивались методы локального – в окрестности состояния равновесия – анализа динамики решений. В основе этих методов лежит известный формализм метода нормализации.

Изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в различных направлениях. Показано, что, во-первых, это взаимодействие относительно слабое, т. к. описывается слагаемыми порядка ε^2. Во-вторых, взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовой скорости. Величина соответствующего сдвига явно определяется через некоторые интегральные характеристики от начальных условий.

Применены процедуры повторных нормализаций. В результате получены специальные эволюционные нелинейные уравнения, играющие роль нормальных форм для описания динамики исходного уравнения. Показано, в частности, что в главном приближении решениями являются бесконечномерные торы и найдена их асимптотика.

Список литературы / References

[1] Russel Scott J., "Report of waves", *Report of the 14-th. Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, 1844, 311–390.

[2] Fermi E., Pasta J. R., Ulam S., *Studies of Nonlinear Problems, Report LA-1940*, Alamos Scientific Laboratory, 1955.

[3] Porter M. A., Zabusky N. J., Hu B., Campbell D. K., "Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics", *American Scientist*, **97**:3 (2009), 214–221.

[4] Dauxois T., Peyrard M., Ruffo S., "The Fermi–Pasta–Ulam "numerical experiment": history and pedagogical perspectives", arXiv: nlin/0501053v2, 22 Mar 2005.

[5] Genta T., Giorgilli A., Paleari S., Penati T., "Packets of resonant modes in the Fermi-Pasta-Ulam system", *Physics Letters A*, **376** (2012), 2038–2044.

[6] Кудряшов Н. А., "Модель Ферми–Паста–Улама и нелинейные эволюционные уравнения", *Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ*, **5**:1 (2016), 3–22; [Kudryashov N. A., "Fermi–Pasta–Ulam Model and Higher-Order Nonlinear Evolution Equations", *Vestnik natsionalnogo issledovatelskogo yadernogo universiteta "MIFI"*, **5**:1 (2016), 3–22, (in Russian).]

[7] Кудряшов Н. А., *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 360 с.; [Kudryashov N. A., *Analytical theory of nonlinear differential equations*, Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk, 2004, 360 pp., (in Russian).]

[8] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.

[9] Ablowitz M. J., Clarkson P. A., *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge university press, 1991.

[10] Kudryashov N. A., "Refinement of the Korteweg – de Vries equation from the Fermi–Pasta–Ulam model", *Phys. Lett. A*, **279** (2015), 2610–2614.

[11] Kudryashov N. A., "From the Fermi–Pasta–Ulam model", Reports on mathematical Physics, 2015, in Press.

[12] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2011, 520 pp.

[13] Волков А. К., Кудряшов Н. А., "Нелинейные волны, описываемые уравнением пятого порядка, полученным из системы Ферми–Паста–Улама", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:4 (2016), 685–693; [Volkov A. K., Kudryashov N. A., "Nonlinear waves described by a fifth-order equation derived from the Fermi–Pasta–Ulam system", *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:4 (2016), 680–687].

[14] Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Sinelshchikov D. I., "Nonlinear waves in media with fifth order dispersion", *Phys. Lett. A*, **375** (2011), 2051–2055.

[15] Кащенко С. А., "Нормальная форма для уравнения Кортеверга – де Вриза – Бюргерса", *ДАН*, **468**:4 (2016), 383; [Kashchenko S. A., "Normal form for the KdV–Burgers Equation", *Doklady Mathematics.*, **93**:3 (2016), 331].

[16] Кащенко С.А., "О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией", *ДАН СССР*, **299**:5 (1988), 1049–1053; [Kashchenko S. A., "On the quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion", *Reports Academy of Sciences of the USSR*, **299** (1988), 1049–1053].

[17] Kaschenko S.A., "Normalization in the systems with small diffusion", *Int. J. of Bifurcations and chaos*, **6**:7 (1996), 1093–1109.

[18] Кащенко И.С., Кащенко С.А., "Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем", *ДАН*, **447**:4 (2012), 376–381; [Kashchenko I. S. and Kashchenko S. A., "Quasi-Normal Forms of Two-Component Singularly Perturbed Systems", *Doklady Mathematics.*, **86**:3 (2012), 865].

[19] Кащенко И.С., “Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией”, *ДАН*, **435**:2 (2010), 164–167; [Kashchenko I. S., “Multistability in Nonlinear Parabolic Systems with Low Diffusion”, *Doklady Mathematics.*, **82**:3 (2010), 878].

[20] Ablowitz M. J. and Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1981, 425 pp.

[21] Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations.*, Academic Press, London et al., 1982, 630 pp.

[22] Newell A. C., *Solitons in Mathematics and Physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1985, 260 pp.

[23] Zabusky N. J., Kruskal M. D., “Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states”, *Phys Rev. Lett.*, **15** (1965), 240–243.

[24] Кудряшов Н. А., *Методы нелинейной математической физики*, Издательский дом “Интеллект”, Долгопрудный, 2010, 360 с.; [Kudryashov N. A., *Methods of nonlinear mathematical physics*, Dolgoprudnyy, Izdatel’skiy dom “Intellekt”, 2010, 360 pp., (in Russian).]

[25] Korteweg D. J., de Vries G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new tipe of long stationary waves”, *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422–443.

[26] Burgers J.M., “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, **1** (1948), 171–199.

[27] Рабинович М.И., Трубецков Д.И., *Введение в теорию колебаний и волн*, РХД, Ижевск, 2000, 560 с.; [Rabinovich R. S., Trubetskov D. I., *Introduction in the Theory of Oscillations and Waves*, RCD, Izhevsk, 2000, 560 pp., (in Russian).]

[28] Kudryashov N. A., “On ”new travelling wave solutions” of the KdV and the KdV-Burgers equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **14(5)** (2009), 1891–1900.

[29] Kudryashov N. A., “Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **52**:3 (1988), 361–365.

[30] Kudryashov N. A., “One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical*, **17** (2012), 2248–2253.

[31] Kudryashov N. A., “Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg – de Vries equation with a source”, *Appl. Math. Lett.*, **41** (2015), 41–45.

[32] Глызин С. Д., Колесов А.Ю, Розов Н. Х., “Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Тр. МИАН, **285**, МАИК, М., 2014, 89–106; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Autowave processes in continual chains of unidirectionally coupled oscillators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **285** (2014), 81–98].

[33] Глызин С. Д., Колесов А.Ю, Розов Н. Х., “Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *ТМФ*, **181**:2 (2014), 254–275; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Buffering effect in continuous chains of unidirectionally coupled generators”, *Theoret. and Math. Phys.*, **181**:2 (2014), 1349–1366].

Glyzin S. D., Kashchenko S. A., Tolbey A.O., "Two Wave Interactions in a Fermi–Pasta–Ulam Model", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 548–558.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-548-558

Abstract. The work is devoted to the dynamic properties of the solutions of boundary value problems associated with the classical system of Fermi – Pasta – Ulam (FPU). We study this problem in infinite-dimensional case, when a countable number of roots of characteristic equations tend to an imaginary axis. Under these conditions, we built a special non-linear partial differential equation, which plays the role of a quasinormal form, i.e, it defines the dynamics of the original boundary value problem with the initial conditions in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium state. The modified Korteweg - de Vries (KdV) equation and the Korteweg - de Vries - Burgers (KdVB) one are quasinormal forms depending on the parameter values. Under some additional assumptions, we apply the procedure of renormalization to the obtained boundary value problems. This procedure leads to an infinite-dimensional system of ordinary differential equations. We describe a method of folding this system in the special boundary value problem, which is an analogue of the normal form. The main result is that the analytical methods of nonlinear dynamics explored the interaction of waves moving in different directions, in the problem of the FPU. It was shown that waves influence on each other is asymptotically small and does not change the shape of waves, contributing only a shift in their speed, which does not change over time.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam model, generalized KdV equation, quasinormal form, boundary value problem

On the authors:
Sergei D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Sergey A. Kashchenko, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoye shosse, Moscow 115409, Russia
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Anna O. Tolbey, orcid.org/0000-0001-5668-3929, PhD, Associate Professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: bekva@yandex.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. №14-21-00158).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 559–567
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 559–567

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-559-567

УДК 517.9

Асимптотика стационарного решения с внутренним переходным слоем для системы типа ФитцХью–Нагумо

Мельникова А.А., Аргун Р.Л.

получена 15 июня 2016

Аннотация. Важной частью развития современной биофизики является создание адекватных математических моделей процессов в живой природе. Процессы свертывания крови, распространения нервного импульса, сокращение сердечной мышцы, формирования структур в живой природе относятся к типу автоволновых. Для описания автоволновых процессов в активных средах часто применяется система уравнений ФитцХью–Нагумо. При решении соответствующей математической задачи стандартно используются численные методы. Но автоволновые решения с резкими градиентами требуют применения ресурсоемких алгоритмов. Задачи такого типа целесообразно исследовать аналитическими методами. В данной работе для получения приближенного решения сингулярно возмущенной системы типа ФитцХью-Нагумо применяется асимптотический метод теории контрастных структур. Метод позволяет редуцировать нелинейную систему уравнений к ряду задач, которые решаются аналитически или устойчивыми численными алгоритмами. В работе получено асимптотическое приближение стационарного автоволнового решения нелинейной системы и определена формула, задающая локализацию внутренних переходных слоев. Для оценки результатов проведено сравнение с численным решением. Описанное в работе применение теории контрастных структур к исследованию моделей активных сред может быть использовано для аналитического исследования других подобных систем, совершенствования имеющихся моделей и повышения эффективности численных расчетов.

Ключевые слова: асимптотика, малый параметр, сингулярные возмущения, внутренний переходный слой, система активатор–ингибитор

Для цитирования: Мельникова А.А., Аргун Р.Л., "Асимптотика стационарного решения с внутренним переходным слоем для системы типа ФитцХью–Нагумо", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 559–567.

Об авторах:
Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Аргун Рауль Ларикович, orcid.org/0000-0003-3749-1811, студент,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: raul96@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00437, 15-01-04619).

Введение

В работе рассматривается сингулярно возмущенная система типа ФитцХью–Нагумо [3]. Система используется в биофизике для моделирования автоволновых процессов, таких как распространение нервного импульса [3], сокращение сердечной мышцы [8], свертывание крови [7], формирование окраски шкур животных [4], формирование урбоэкосистем [2]. В случае формирования структур [2, 4] интерес представляют стационарные решения системы параболических уравнений.

В данной работе аналитическими методами исследованы стационарные решения системы типа ФитцХью–Нагумо с внутренними переходными слоями — так называемые контрастные структуры. Решения типа контрастных структур претерпевают резкое изменение в малой окрестности внутренней точки области определения — так называемой точки перехода. В терминологии численных методов задачи с такими решениями относятся к классу жестких и требуют применения специальных алгоритмов. Аналитическое исследование дает возможность получить априорную информацию о локализации точки перехода. Информация о положении переходного слоя позволяет строить квазиравномерные сетки и применять более эффективные численные алгоритмы. Примеры применения теории контрастных структур для построения асимптотических приближений решений и доказательства теорем существования в различных типах сингулярно возмущенных задач можно найти в работах [1, 5, 6].

В работе для системы уравнений, применяемой для моделирования урбоэкосистемы [2], определены условия существования решений типа контрастных структур, определены точки локализации внутренних слоев и получено асимптотическое приближение решения. Для оценки результата получено численное решение системы на равномерной сетке.

1. Постановка задачи

Рассматривается начально–краевая задача

$$\begin{cases} \varepsilon^4 D_u u_{xx} - \varepsilon^4 u_t = u\big(u-\alpha(x)\big)(u-1) + uv, \\ \varepsilon^2 D_v v_{xx} - \varepsilon^2 v_t = \gamma v - u, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0; T] \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0, \quad t \in [0; T], \\ u(x,0) = u^0(x), \quad v(x,0) = v^0(x), \quad x \in [0; L], \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in I_u \in \mathbb{R}^+$, $v \in I_v \in \mathbb{R}^+$ – неизвестные функции, $\varepsilon \in (0; 1)$ — малый параметр, $\gamma > 0$ – параметр системы, функция $\alpha(x) \in (0; 1)$ при $x \in [0; L]$. Система (1) применяется для моделирования экосистемы города [2]. В данной работе рассматриваются стационарные решения системы (1) с внутренними переходными слоями.

Краевая задача, соответствующая системе (1)

$$\begin{cases} \varepsilon^4 D_u u_{xx} = u\big(u-\alpha(x)\big)(u-1) + uv, \\ \varepsilon^2 D_v v_{xx} = \gamma v - u, \quad x \in (0, L), \\ u_x(0) = u_x(L) = 0, \quad v_x(0) = v_x(L) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В работе [1] доказана теорема существования решения с внутренним переходным слоем для задачи типа (2). Одним из условий существования решения типа контрастной структуры является наличие у системы (2) при $\varepsilon = 0$ двух устойчивых решений для каждой из компонент. Контрастная структура образуется как переход от одного устойчивого корня вырожденной системы к другому. Запишем вырожденную систему задачи (2)

$$f(u,v,x) := u(u-\alpha(x))(u-1) + uv = 0, \quad g(u,v,x) := \gamma v - u = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что параметр γ и значения функции $\alpha(x)$ таковы, что первое уравнение (3) имеет три решения:

$$\varphi_1(v,x) = 0, \quad \varphi_{2,3}(v,x) = 0.5\big(\alpha(x) + 1 \mp \sqrt{(\alpha(x)-1)^2 - 4v}\big).$$

Подставим устойчивые корни $\varphi_{1,3}(v,x)$ (для них выполнено условие $f_u(\varphi_{1,3}(v,x),v,x) > 0$) во второе уравнение (3) и разрешим полученные уравнения относительно переменной v:

$$v_1(x) = 0, \quad v_3(x) = 0.5\gamma^{-1}\left(\alpha(x) + 1 - \gamma^{-1} + \sqrt{(\alpha(x)+1-\gamma^{-1})^2 - 4\alpha(x)}\right).$$

Функция $v_3(x)$ определена, если выполнены неравенства

$$v_3(x) \ge 0.5\gamma^{-1}(\alpha(x)+1), \quad \big(\alpha(x)+1-\gamma^{-1}\big)^2 - 4\alpha(x) > 0.$$

Первое неравенство следует из уравнения $g(\varphi_3(v,x),v,x) = 0$, а второе – из требования неотрицательности выражения под радикалом у функции $v_3(x)$. Разрешим неравенства относительно функции $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) \le 1 + \gamma^{-1} - \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^{-1}+4}, \quad \alpha(x) \le 1 + \gamma^{-1} - 2\sqrt{\gamma^{-1}}. \tag{4}$$

На графике Рис. 1 римской цифрой I обозначена область параметров, в которой определены функции $v_1(x)$, $v_3(x)$, $\varphi_1(v,x)$ и $\varphi_3(v,x)$, $x \in [0;L]$, $v \in I_v$.

Система уравнений (2) рассматривается при параметрах из области I .

1.1. Метод решения

Асимптотическое приближение решения задачи (2) строится по методу Васильевой [1,9] отдельно слева и справа от предполагаемой точки перехода $x_0 \in (0;L)$:

$$u = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\xi) + M_0^{(-)}u(\sigma), & x \in [0;x_0]\,, \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) + Q_0^{(+)}u(\xi) + M_0^{(+)}u(\sigma), & x \in [x_0;L]\,; \end{cases} \tag{5}$$

$$v = \begin{cases} \bar{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\xi) + M_0^{(-)}v(\sigma), & x \in [0;x_0]\,, \\ \bar{v}_0^{(+)}(x) + Q_0^{(+)}v(\xi) + M_0^{(+)}v(\sigma), & x \in [x_0;L]\,. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ — регулярные члены асимптотики; $Q_0^{(\mp)}u(\xi)$, $Q_0^{(\mp)}v(\xi)$, $M_0^{(\mp)}u(\sigma)$, $M_0^{(\mp)}v(\sigma)$ — функции, описывающие решение в переходном слое, а $\xi = (x-x_0)/\varepsilon$, $\sigma = (x-x_0)/\varepsilon^2$ – растянутые переменные в окрестности x_0 . Функции переходного

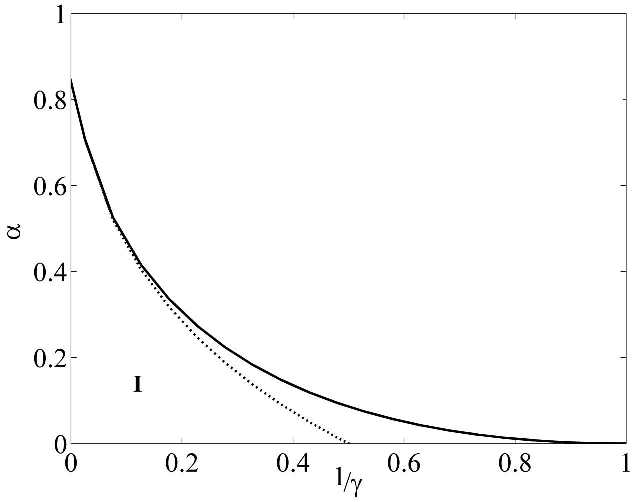

Рис. 1. Графическое решение неравенств (4). Сплошной линией отмечен график, соответствующий первому неравенству, пунктирной – второму
Fig. 1. Graphical solution of inequalities (4). The solid line shows a graph corresponding to the first inequality and the dotted line shows a graph corresponding to the second inequality

слоя удовлетворяют условию убывания к нулю при $\xi \to \mp\infty$, $\sigma \to \mp\infty$. Если решение имеет несколько переходных слоев, то для каждого из них вводятся отдельные функции переходного слоя.

Функции $u(x)$ и $v(x)$ сшиваются в точке x_0 непрерывно и гладко. Предположим, что в точке x_0 компоненты решения принимают значения:

$$v(x_0) = v_0, \quad u(x_0) = \varphi_2(v_0, x_0), \tag{7}$$

где величина $v_0 \in (v_1(x_0); v_3(x_0))$ будет определена ниже.

Искомые функции $u(x)$, $v(x)$ описывают решение задачи (2) с точностью $O(\varepsilon)$. При малых ε такая точность приемлема для использования в приложениях.

Согласно методу Васильевой [1, 9] уравнения для регулярной части и функций переходного слоя получаются подстановкой сумм (5), (6) в систему (2) и разделением ее специальным образом на части, зависящие от переменных x, ξ и σ. Уравнения для функций нулевого порядка асимптотики получаются выделением в системах коэффициентов при ε^0.

1.1.1. Регулярная часть асимптотики и функции пограничного слоя

Предполагается, что контрастная структура – слева от x_0 близка к решениям $v_1(x)$, $\varphi_1(v_1(x), x)$, а слева – к решениям $v_3(x)$, $\varphi_3(v_3(x), x)$ вырожденной системы. Система уравнений для функций $\bar{u}_0^{(\mp)}$, $\bar{v}_0^{(\mp)}$ регулярной части совпадает с вырожденной системой (3), поэтому

$$\bar{v}_0^{(-)}(x) = v_1(x) = 0, \qquad \bar{v}_0^{(+)}(x) = v_3(x), \tag{8}$$

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(v_1(x), x) = 0, \qquad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(v_3(x), x). \tag{9}$$

В общем случае асимптотическое представление решения включает функции пограничных слоев, которые в данном случае будут нулевым, поскольку регулярная часть удовлетворяет краевым условиям точно.

1.1.2. Функции переходного слоя

Функции $M_0^{(\mp)}v$ определяются из задач:

$$\frac{\partial^2 M_0^{(\mp)}v}{\partial\sigma} = 0, \quad M_0^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \tag{10}$$

Их решения $M_0^{(\mp)}v(\sigma) = 0$.

Введем обозначения:

$$\tilde{v}_1(\xi) := v_1(x_0) + Q_0^{(-)}v(\xi), \quad \tilde{v}_3(\xi) := v_3(x_0) + Q_0^{(+)}v(\xi). \tag{11}$$

Используя результаты работы [1], можно записать задачи для функций $\tilde{v}_{1,3}$:

$$\begin{gathered} D_v\frac{d^2\tilde{v}_1}{d\xi^2} = \gamma\tilde{v}_1, \quad \xi \le 0, \quad D_v\frac{d^2\tilde{v}_3}{d\xi^2} = \gamma\tilde{v}_3 - \varphi_3(\tilde{v}_3, x_0), \quad \xi \ge 0, \\ \tilde{v}_1(0) = v_0, \quad \tilde{v}_3(0) = v_0, \\ \tilde{v}_1(\xi) \to v_1(x_0) \text{ при } \xi \to -\infty, \quad \tilde{v}_3(\xi) \to v_3(x_0) \text{ при } \xi \to +\infty. \end{gathered} \tag{12}$$

Условия при $\xi = 0$ следуют из условия непрерывности (7), а при $\xi \to \mp\infty$ из условия убывания функций переходного слоя на бесконечности.

Решение первого уравнения (12) записывается в явном виде:

$$\tilde{v}_1(\xi) = v_0 \exp\left(\sqrt{\gamma D_v{}^{-1}}\xi\right).$$

В отношении второго уравнения (12) можно применить стандартный метод понижения порядка дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{v}_3}{d\xi} = \left(\int_{v_3(x_0)}^{\tilde{v}_3}\left(\gamma v - 0.5\left(\alpha(x) - 1 + \sqrt{(\alpha(x)-1)^2 - 4v}\right)\right)dv\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Условие непрерывности первой производной функции $v(x)$ при $x = x_0$ в нулевом порядке по малому параметру можно записать как

$$\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi}(0) = \frac{d\tilde{v}_3}{d\xi}(0). \tag{14}$$

Подставим в условие (14) выражение для $\tilde{v}_1(\xi)$ и первой производной $\tilde{v}_3(\xi)$ (13) и получим равенство, связывающее величины v_0 и x_0:

$$\begin{aligned} 6\gamma(v_3(x_0))^2 - 6(\alpha(x_0)+1)(v_3(x_0) - v_0) + \Big((\alpha(x_0)-1)^2 - 4v_3(x_0)\Big)^{3/2} - \\ - \Big((\alpha(x_0)-1)^2 - 4v_0\Big)^{3/2} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Функции $Q_0^{(\mp)}u$ определяются из уравнений

$$f(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v, x_0) = 0.$$

Используя равенства (11) и обозначения (11) можно записать решения:

$$Q_0^{(-)}u(\xi) = 0, \quad \xi \le 0, \quad Q_0^{(+)}u(\xi) = \varphi_3\left(\tilde{v}_3(\xi), x_0\right) - \varphi_3\left(v_3(x_0), x_0\right), \quad \xi \ge 0. \tag{16}$$

Введем обозначения:

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(v_0, x_0) + M_0^{(-)}u(\sigma), & \sigma \le 0, \\ \varphi_3(v_0, x_0) + M_0^{(+)}u(\sigma), & \sigma \ge 0. \end{cases} \tag{17}$$

Используя результаты работы [1], можно записать задачу для функции $\tilde{u}$:

$$\begin{gathered} D_u \frac{d^2\tilde{u}}{d\sigma^2} = \tilde{u}\left(\tilde{u} - \alpha\left(x_0\right)\right)\left(\tilde{u} - 1\right) + \tilde{u}v_0, \\ \tilde{u}\left(0\right) = \varphi_2\left(v_0, x_0\right), \quad \tilde{u}\left(-\infty\right) = \varphi_1\left(v_0, x_0\right), \quad \tilde{u}\left(+\infty\right) = \varphi_3\left(v_0, x_0\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Условия при $\sigma = 0$ следуют из условия непрерывности (7), а при $\sigma \to \mp\infty$ – из условия убывания функций переходного слоя на бесконечности.

Применим стандартный метод понижения порядка дифференциального уравнения для задачи (18)и получим уравнения первого порядка с дополнительным условием $\tilde{u}\left(0\right) = \varphi_2\left(v_0, x_0\right)$:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\tilde{u}}{d\sigma}(\sigma) &= \left(\int_{\varphi_1(v_0,x_0)}^{\tilde{u}(\sigma)} \left(u(u-\alpha(x_0))(u-1) + uv_0\right) du\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma \le 0, \\ \tfrac{d\tilde{u}}{d\sigma}(\sigma) &= \left(\int_{\varphi_3(v_0,x_0)}^{\tilde{u}(\sigma)} \left(u(u-\alpha(x_0))(u-1) + uv_0\right) du\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma \ge 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Условие непрерывности первой производной функции $u(x)$ при $x = x_0$ в нулевом порядке по малому параметру можно записать как

$$\frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(-0) = \frac{d\tilde{u}}{d\sigma}(+0). \tag{20}$$

Подставим выражения (19) в условие (20) и получим второе равенство, связывающее v_0 и x_0:

$$36v_0 = 9(\alpha(x_0) - 1)^2 - (\alpha(x_0) + 1)^2. \tag{21}$$

Из системы уравнений (15), (21) при заданном значении γ можно определить v_0 и $\alpha(x_0)$, а по известному виду функции $\alpha(x)$ найти точку перехода x_0.

Выпишем нулевой порядок асимптотического приближения решения задачи (2) с учетом $v_1(x) = 0$, $\varphi_1(v, x) = 0$:

$$v(x) = \begin{cases} v_0 \exp\left(\sqrt{\gamma D_v^{-1}}(x - x_0)/\varepsilon\right) + O(\varepsilon), & x \le x_0, \\ \tilde{v}_3((x - x_0)/\varepsilon) + O(\varepsilon), & x \ge x_0. \end{cases} \tag{22}$$

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}((x - x_0)/\varepsilon^2) + O(\varepsilon), & x \le x_0, \\ \tilde{u}((x - x_0)/\varepsilon^2) - \varphi_3(v_0, x_0) + \varphi_3\left(\tilde{v}_3((x - x_0)/\varepsilon), x_0\right) + O(\varepsilon), & x \ge x_0. \end{cases} \tag{23}$$

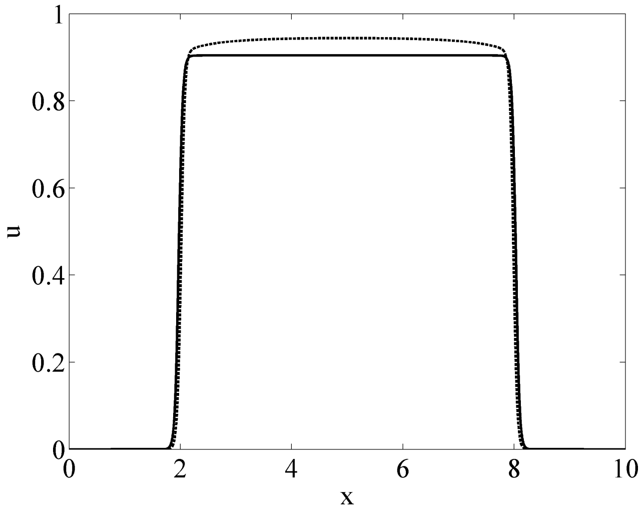

Рис. 2. График u–компоненты. Сплошная линия – график асимптотики нулевого порядка, штриховая линия – график численного решения
Fig. 2. u–component of the solution. The solid line shows a graph of zero order asymptotic approximation of the solution and the dotted line shows a graph of numerical solution

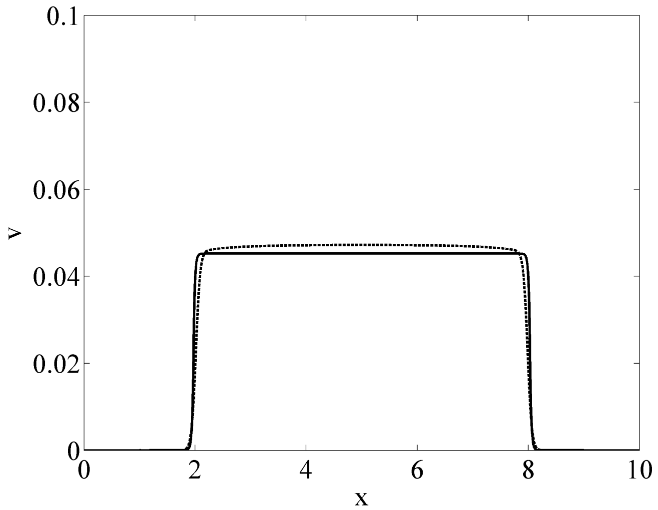

Рис. 3. График v–компоненты. Сплошная линия – график асимптотики нулевого порядка, штриховая линия – график численного решения
Fig. 3. v-component of the solution. The solid line shows a graph of zero order asymptotic approximation of the solution and the dotted line shows a graph of numerical solution

На Рис. 2 и Рис. 3 приведены графики функций $u(x)$ и $v(x)$ асимптотического приближения решения и графики численного решения для примера. Численный счет системы проводился по схеме Крэнка–Николсона методом счета на установление для параболической задачи (1) на равномерной сетке. Задачи для функций $\tilde{v}_3$, $\tilde{u}$ решались по схеме Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1) [10]. Параметры примера: $\varepsilon = 0.1$, $\gamma = 20$, $L = 10$, $D_v = 1$, $D_u = 5$, $\alpha = \alpha_0 \exp((x - x_{00})d^{-2})$,

$x_{00} = 5$, $d = 2.5$, $\alpha_0 = 0.1$. Параметры схемы Крэнка–Николсона: число узлов сетки по координате $N_x = 10^4$, шаг сетки $h_x = 10^{-3}$, число узлов сетки по времени $N_t = 1.5 \cdot 10^3$, шаг сетки $h_t = 4 \cdot 10^{-4}$. Решение системы уравнений (15), (21) дает следующие значения координат точек перехода для примера: $x_0 = 1.97$ для левого слоя и $x_0 = 8.02$ для правого слоя.

Оценим разницу численного решения и асимптотики нулевого порядка в области вне переходных слоев: для v–компоненты $\max|v_{as}(x) - v_{num}(x)| = 0,004 = O(\varepsilon)$, для u–компоненты $\max|u_{as}(x) - u_{num}(x)| = 0,04 = O(\varepsilon)$.

Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; [Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel'nikova A. A., "Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter", *Comput. Math. Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546]

[2] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., "Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред", *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; [Sidorova A. E., Levashova N. T., Mel'nikova A. A., Yakovenko L. V., "A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium", *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473]

[3] FitzHugh R., "Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane", *Biophys. J.*, **1**:1 (1961), 445–466.

[4] Murray J., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Ягремцев А. В., "Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:3 (2013), 365–376; [*Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:3 (2013), 273–283]

[6] Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R., "Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**:1 (2013), 90–103.

[7] Zarnitsina V. I., Ataullakhanov F. I., Lobanov A. I., Morozova O. L., "Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation", *Chaos*, **11**:1 (2001), 57–70.

[8] Aliev R. R., Panfilov A. V., "A simple two-variable model of cardiac excitation", *Chaos, Solitons and Fractals*, **7**:3 (1996), 293–301.

[9] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, Москва, 1990; [Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnikh vozmuchenii*, Vysh. shkola, Moscow, 1990, (in Russian)]

[10] Al'shin A. B., Al'shina E. A., Kalitkin N. N., Koryagina A. B., "Rosenbrock schemes with complex coefficients for stiff and differential algebraic systems", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:8 (2006), 1320–1340.

Melnikova A. A., Argun R.L., "Asymptotic Approximation of the Stationary Solution with Internal Layer for FitzHugh–Nagumo System", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 559–567.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-559-567

Abstract. Creating adequate mathematical models of processes in living nature is an important task of modern biophysics. Blood clotting, nerve impulse propagation, reduction of the heart muscle, the pattern-formation in nature are auto-wave processes. FitzHugh–Nagumo system of equations is used to describe the auto-wave processes in active media. Such math problems are usually solved by numerical methods. The use of resource-intensive algorithms is required in the case of auto-wave solutions with sharp gradients. Therefore, it is appropriate to use the analytical methods for this type of problems. In this paper, the asymptotic method of contrast structures theory is used to obtain an approximate solution of a singularly perturbed system of FitzHugh–Nagumo type. The method allows to reduce the non-linear system of equations to a number of problems that can be solved analytically or with a stable numerical algorithm. This study presents the asymptotic approximation of a stationary auto-wave solution of the considered system. Additionally, this paper provides a formula that specifies the location of internal transition layers. The results were compared with the numerical solution. The application of contrast structures theory to the study of active media models can be used for analytical studies of other such systems, improving existing models and increasing the efficiency of the numerical calculations.

Keywords: asymptotic approximation, small parameter, singular perturbation, inner transition layer, activator-inhibitor system

On the authors:
Alina A. Melnikova, orcid.org//0000-0001-9019-0263, PhD,
Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Raul L. Argun, orcid.org/0000-0003-3749-1811, undergraduate student,
Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
e-mail: raul96@mail.ru

Acknowledgments:
This study was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research projects No. 16-01-00437, 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 568–576
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 568–576

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-568-576

УДК 519.63

Численное исследование начально-краевой задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения

Шишкина Л. П.

получена 15 июня 2016

Аннотация. Для одномерного сингулярно возмущенного параболического уравнения с возмущающим параметром ε при старшей производной, $\varepsilon \in (0, 1]$, рассматривается начально-краевая задача на отрезке с условием Неймана на границе. В этой задаче, когда параметр ε стремится к нулю, в окрестностях боковой границы появляются пограничные слои.

В работе исследуется сходимость решения и его регулярной и сингулярной компонент. Показано, что стандартные разностные схемы на равномерных сетках, используемые для численного решения этой задачи, не сходятся ε-равномерно. Ошибка сеточного решения неограниченно растет, когда параметр $\varepsilon \to 0$. Использование специальной разностной схемы на сетке Шишкина — кусочно-равномерной по x сетке, сгущающейся в окрестностях пограничных слоев, и равномерной по t, построенных с использованием монотонных сеточных аппроксимаций дифференциальной задачи — позволяет найти численное решение этой задачи, сходящееся в равномерной норме ε-равномерно. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические результаты.

Ключевые слова: начально-краевая задача Неймана, сингулярно возмущенное параболическое уравнение, кусочно-равномерная сетка, равномерная норма, ε-равномерная сходимость

Для цитирования: Шишкина Л. П., "Численное исследование начально-краевой задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 568–576.

Об авторах:
Шишкина Лидия Павловна, orcid.org/0000-0002-8489-5432, математик 1-й категории,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия, e-mail: lida@convex.ru

Благодарности:
Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

Введение

Хорошо известно о вычислительных проблемах, которые возникают при численном решении сингулярно возмущенных задач. Стремление возмущающего параметра ε (т.е. параметра при старших производных, $\varepsilon \in (0, 1]$) к нулю приводит к появлению пограничных слоев, т.е. небольших зон в области определения решения, в которых решение резко меняется. Их ширина — величина того же порядка, что и параметр ε. В настоящей работе, на модельной краевой задаче Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения, мы изучаем природу ошибки в приближенном решении и его регулярной и сингулярной компонентах для стандартной (классической) разностной схемы на равномерных сетках и для специальной разностной схемы на сетке Шишкина — кусочно-равномерной по x сетке, сгущающейся в окрестностях пограничных слоев, и равномерной по t (см., например, [2]).

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти решение задачи Неймана для сингулярно возмущенного параболического уравнения диффузии[1]

$$L_{(1)}u(x,t) \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \tag{1a}$$

$$\ell_{(1)}u(x,t) \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial n}u(x,t) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in S^\ell, \tag{1b}$$

$$u(x,t) = \phi(x), \quad (x,t) \in S_0. \tag{1c}$$

Здесь диффузионный поток задается на границе области.

Область определения уравнения (1a):

$$G = D \times (0,T], \quad D = (0,1), \tag{2}$$

где S — граница области G, $S = \overline{G} \setminus G$, S^ℓ и S_0 — боковые и нижняя границы множества G, а $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, $\psi(x,t)$, $(x,t) \in S^\ell$, и $\phi(x)$, $x \in \overline{D}$ — заданные функции.

Для численных экспериментов мы определяем функции $f(x,t)$, $\psi(0,t)$, $\psi(1,t)$ и $\phi(x)$ следующим образом:

$$f(x,t) = -2t, \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{3}$$

$$\psi(0,t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\, t^{3/2}, \quad \psi(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad T = 1, \quad \phi(x) = \cos(\pi x), \quad x \in \overline{D}.$$

В этой задаче при $\varepsilon \to 0$ в окрестности боковой границы появляются пограничные слои. Таким образом, мы рассматриваем начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения диффузии (не содержащего реакционного и конвективного членов). Эта задача аппроксимируется монотонной разностной схемой (см., например, [1]) на сетках равномерной по t и равномерной либо кусочно-равномерной по x.

Цель исследования — для модельной сингулярно возмущенной задачи Неймана (1)–(3), с использованием декомпозиции решения дифференциальной задачи, исследовать влияние возмущающего параметра ε на поведение ошибок сеточного решения для регулярной и сингулярной компонент решения.

[1] Запись $D_{(i.j)}$ ($L_{(i.j)}$, $m_{(i.j)}$, $M_{(i.j)}$, $D_{h(i.j)}$)) означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле $(i.j)$.

2. Декомпозиция решения задачи (1)–(3)

Согласно теории (см., например, [2]), решение дифференциальной модельной задачи (1)–(3) может быть представлено в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}.$$

Здесь $U(x,t)$ и $V(x,t)$ — соответственно регулярная и сингулярная части решения.

Функция $U(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$L_{(1)}U(x,t) = -2t, \quad (x,t) \in G, \tag{4}$$

$$\ell_{(1)}U(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S^{\ell}, \quad U(x,t) = \cos(\pi\, x), \quad (x,t) \in S_0,$$

для которой известно следующее аналитическое решение:

$$U(x,t) = t^2 + \cos(\pi\, x)\, \exp(-\varepsilon^2\pi^2 t), \quad (x,t) \in \overline{G}.$$

Функция $V(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} L_{(1)}V(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in G, \\ \ell_{(1)}V(x,t) &= \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}\, t^{3/2}, & x = 0, \\ 0, & x = 1 \end{array} \right\}, \quad (x,t) \in S^{\ell}, \\ V(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in S_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Удобно представить функцию $V(x,t)$ в виде суммы функций

$$V(x,t) = W(x,t) + v(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G},$$

где $v(x,t)$ — остаточный член, а главный член разложения — функция $W(x,t)$ имеет вид:

$$W(x,t) = \left(\frac{x^4}{12\varepsilon^4} + \frac{x^2}{\varepsilon^2}t + t^2\right) erfc\left(\frac{x}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right) - \tag{6}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^3}{6\varepsilon^3}t^{1/2} + \frac{5x}{3\varepsilon}t^{3/2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon^2 t}\right), \quad 0 \le x < \infty, \; t \ge 0.$$

Для функции $v(x,t)$ и ее производной справедливы следующие оценки[2]:

$$\max_{\overline{G}} |v(x,t)|, \quad \max_{\overline{G}} \left|\frac{\partial}{\partial x} v(x,t)\right| \le M\, \varepsilon^n,$$

где целое число n может быть выбрано сколь угодно большим, константа M не зависит от x, t и ε. Таким образом, функция $V(x,t)$ приближает функцию $W(x,t)$ с точностью до $M\varepsilon^n$.

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

Аналогичные оценки имеем для функции $W(x,t)$

$$\Big|\,W(x,t)\,\Big|,\;\;\varepsilon\Big|\,\frac{\partial}{\partial x}W(x,t)\,\Big|\le M\,\varepsilon^n.$$

Когда ε уменьшается, функция $W(x,t)$ и произведение $\varepsilon\,(\partial/\partial x)W(x,t)$ стремятся к нулю при $x\ge x_0\ge m$, $0\le t\le 1$ быстрее любой степени параметра ε.

Таким образом, для решения задачи (1)–(3) — функции $u(x,t)$ — мы получаем представление

$$u(x,t)=U(x,t)+W(x,t)+v(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{7}$$

Есть явные аналитические представления для функций $U(x,t)$ и $W(x,t)$; функция $v(x,t)$ вместе со своими производными мала при малых значениях параметра.

Функция $W(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$L_{(1)}W(x,t)=0,\quad (x,t)\in G, \tag{8}$$

$$\ell_{(1)}W(x,t)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}, & x=0,\\ \varepsilon\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,W_{(6)}(1,t), & x=1\end{array}\right\},\quad (x,t)\in S^{\ell},$$
$$W(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_0.$$

Остаточный член сингулярной компоненты — функция $v(x,t)$ — решение задачи

$$L_{(1)}\,v(x,t)=0,\quad (x,t)\in G, \tag{9}$$

$$\ell_{(1)}\,v(x,t)=\left\{\begin{array}{ll}0, & x=0,\\ -\varepsilon\,\dfrac{\partial}{\partial x}W_{(6)}(1,t), & x=1\end{array}\right\},\quad (x,t)\in S^{\ell},$$
$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_0.$$

Здесь произведение $\varepsilon\,(\partial/\partial x)W(x,t)$ может быть выписано в явном виде в соответствии с формулой (6).

3. *Априорные* оценки

Задача Неймана для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения диффузии исследуется подобно задаче для параболического уравнения реакции-диффузии и конвекции-диффузии (см., например, [2]).

Справедлива следующая Теорема об *априорных* оценках.

Теорема 1. *Пусть данные начально-краевой задачи Неймана (1)–(3) для сингулярно возмущенного параболического уравнения на множестве $\overline{G}$, а также начальные и краевые условия соответственно на множествах $\overline{S}_0$ и S^{ℓ} являются достаточно гладкими и удовлетворяющими условию согласования на множестве угловых точек S^c, обеспечивающие включение $u\in C^{4,2}(\overline{G})$. Тогда для решения $u(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$*

и его регулярной и сингулярной компонент $U(x,t)$ *и* $V(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$ *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G},$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U(x,t)\right|| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x,t)\right|| \le M\varepsilon^{-k}\{\exp^{-m\varepsilon^{-1}x} + \exp^{-m\varepsilon^{-1}(d-x)}\}, \quad (x,t) \in \overline{G},\ k + 2k_0 \le 4.$$

4. Стандартная и специальная разностные схемы

Для численного решения краевой задачи (1)–(3) мы строим стандартную (классическую) и специальную разностные схемы.

На множестве $\overline{G}_{(2)}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{D}_h \times \overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \tag{11}$$

где $\overline{\omega}_1$ — сетка на $\overline{D} = [0,1]$ с произвольным распределением узлов и с их числом $N+1$; $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка на отрезке $[\,0, T\,]$ с шагом $h_0 = N_0^{-1}$ и числом узлов $N_0 + 1$.

Замечание 1. *Далее будем называть сетку* $\overline{G}_{h(11)}$

- *стандартной, если сетка* $\overline{\omega}_1$ *в (11) — равномерная;*
- *специальной, если сетка* $\overline{\omega}_1$ *в (11) — кусочно-равномерная сетка Шишкина, сгущающаяся в окрестностях пограничных слоев; для нее*

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h^{sp} = \overline{\omega}_1^{sp}\big[\,\sigma(\varepsilon,\, N,\, 0,\, 1,\, m),\ N_* = 4^{-1}N,\, N,\, 0,\, 1\,\big].$$

На произвольной сетке $\overline{G}_h$ задача аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x,t) \equiv \varepsilon^2 \delta_{x\,\overline{x}}\, z(x,t) - \delta_{\overline{t}}\, z(x,t) = f_{(3)}(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x,t) = \psi_{(3)}(x,t), \quad (x,t) \in S_h^{\ell}, \\ z(x,t) = \phi_{(3)}(x), \qquad (x,t) \in S_{0h}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h^{\ell} = S^{\ell} \cap \overline{G}_h$, $S_{0h} = S_0 \cap \overline{G}_h$,

$$\lambda_{(12)} z(x,t) = \begin{cases} -\varepsilon\, \delta_x\, z(x,t), & x = 0, \\ \varepsilon\, \delta_{\overline{x}}\, z(x,t), & x = 1, \end{cases}$$

$\delta_x\, z(x,t)$, $\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$ — первые вперед и назад разностные производные.

В соответствии с **Замечанием** 1, мы будем называть разностную схему (12), (11) стандартной схемой, если сетка (11) — равномерная, и специальной, если сетка

(11) — кусочно-равномерная сетка Шишкина, сгущающаяся в окрестностях пограничных слоев. Заметим, что сетка по t всегда равномерная.

Из теории разностных схем, с учетом априорных оценок 10, устанавливаем, что при достаточно гладких данных задачи (1)–(3) решение конечно-разностной схемы (12), (11) сходится к решению краевой задачи (1)–(3), когда N, $N_0 \to \infty$, с оценкой

$$\max_{\overline{G}_h} |\, u(x,t) - z(x,t)\,| \le Q(\varepsilon)[\, N^{-1} + N_0^{-1}\,]$$

при фиксированных значениях параметра ε на произвольной сетке $\overline{G}_h$ и со следующей ε-равномерной оценкой на специальной сетке $\overline{G}^{sp}$:

$$\max_{\overline{G}_h^{sp}} |u(x,t) - z(x,t)| \le M\,[\, N^{-1}\ln N + N_0^{-1}\,].$$

Для краевой задачи Неймана (1)– (3) нас интересует поведение величин $E(\varepsilon, N)$ и $\overline{E}(N)$, где

$$E(\varepsilon,N) = E(\varepsilon,N;u(\cdot)) \equiv E(\varepsilon,N,N), \quad \overline{E}(N) = \overline{E}(N;u(\cdot)) \equiv \overline{E}(N,N),$$

$$E(\varepsilon,N,N_0) = E(\varepsilon,N,N_0;u(\cdot)) = \max_{\overline{G}_h} |u(x,t;\varepsilon) - z(x,t;\varepsilon,N,N_0)|,$$

$$\overline{E}(N,N_0) = \overline{E}(N,N_0;u(\cdot)) = \max_{\varepsilon}\, E(\varepsilon,N,N_0),$$

$u(x,t) = u(x,t;\varepsilon)$ и $z(x,t) = z(x,t;\varepsilon,N,N_0)$ — решения задач (1)–(3) и (12), (11) соответственно. Кроме того, мы также заинтересованы в поведении ошибок $E(\varepsilon, N)$ и $\overline{E}(N)$ для каждой компоненты из представления (7) решения краевой задачи (1)–(3). Мы хотим проанализировать значения $E(\varepsilon,N;U(\cdot))$, $\overline{E}(N;U(\cdot))$, $E(\varepsilon,N;W(\cdot))$, $\overline{E}(N;W(\cdot))$, $E(\varepsilon,N;v(\cdot))$, $\overline{E}(N;v(\cdot))$. Для этого мы строим разностные схемы

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x,t) &= f(x,t), && (x,t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x,t) &= 0, && (x,t) \in S_h^{\ell}, \\ z(x,t) &= \phi(x), && (x,t) \in S_{0h}; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x,t) &= 0, && (x,t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x,t) &= \ell_{(1)} W(x,t), && (x,t) \in S_h^{\ell}, \\ z(x,t) &= 0, && (x,t) \in S_{0h}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{(12)} z(x,t) &= 0, && (x,t) \in G_h, \\ \lambda_{(12)} z(x,t) &= \ell_{(1)} v(x,t), && (x,t) \in S_h^{\ell}, \\ z(x,t) &= 0, && (x,t) \in S_{0h} \end{aligned} \tag{15}$$

для краевых задач (4), (8) и (9) для компонент U, W и v соответственно. Согласно (7), мы получаем сеточное решение для краевой задачи (12) в виде

$$z_{(12)}(x,t) = z_{(13)}(x,t) + z_{(14)}(x,t) + z_{(15)}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}_h.$$

5. Численные эксперименты

В представленных здесь таблицах приведены значения ошибок $E(\varepsilon, N)$ и $\overline{E}(N)$, вычисленные для различных значений ε и N при $N_0 = N$ для разностных схем (13), (14) и (15) — либо на стандартной сетке, либо на специальной — для задач (4), (8) и (9) соответственно.

Таблица 1. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (13) для задачи (4) для U

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	2.511e−1	6.265e−2	1.636e−2	4.259e−3	1.076e−3
2^{-2}	5.000e−1	1.175e−1	2.882e−2	7.168e−3	1.790e−3
2^{-4}	5.476e−1	9.389e−2	2.149e−2	5.264e−3	1.309e−3
2^{-6}	5.432e−1	8.282e−2	1.767e−2	4.284e−3	1.064e−3
2^{-8}	5.429e−1	8.179e−2	1.690e−2	4.034e−3	1.000e−3
2^{-10}	5.429e−1	8.172e−2	1.683e−2	3.986e−3	9.846e−4
2^{-12}	5.429e−1	8.171e−2	1.683e−2	3.982e−3	9.816e−4
$\overline{E}(N)$	5.476e−1	1.175e−1	2.882e−2	7.168e−3	1.790e−3
q		1.114	1.017	1.007	1.004

Из Таблицы 1 видно, что ошибка $E(\varepsilon, N)$ уменьшается при каждом фиксированном значении параметра ε, когда N увеличивается, и эта ошибка также уменьшается, либо стабилизируется при фиксированном значении N, когда ε уменьшается. То есть приближенное решение $z_{(13)}(x, t)$ сходится к функции $U(x, t)$ и при фиксированных значениях параметра ε, и ε-равномерно. Аналогичный результат мы получаем и на специальной схеме.

Таблица 2. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (14) для задачи (8) для W

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	4.736e−1	9.723e−2	2.332e−2	5.771e−3	1.439e−3
2^{-2}	1.098e+0	2.347e−1	5.581e−2	1.377e−2	3.431e−3
2^{-4}	5.213e+0	1.014e+0	2.114e−1	4.994e−2	1.230e−2
2^{-6}	2.312e+1	5.177e+0	9.935e−1	2.056e−1	4.848e−2
2^{-8}	9.530e+1	2.311e+1	5.169e+0	9.884e−1	2.041e−1
2^{-10}	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.167e+0	9.871e−1
2^{-12}	1.540e+3	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.166e+0
$\overline{E}(N)$	1.540e+3	3.842e+2	9.530e+1	2.311e+1	5.166e+0

Из Таблицы 2 видно, что ошибка $E(\varepsilon, N)$ уменьшается при каждом фиксированном значении параметра ε, когда N увеличивается, и возрастает при фиксированном значении N, когда ε уменьшается. Ошибка $E(\varepsilon, N)$ неограниченно возрастает, когда произведение $\varepsilon N \to 0$, например, $E(\varepsilon, N) \geq 1000$ (т.е. ошибка больше, чем в 1000 раз, максимального значения самого решения $W(x, t)$) при $\varepsilon N \leq 2^{-10} = 1/1024$. Таким образом, при $N_0 = N$ приближенное решение $z_{(14)}(x, t)$ не сходится к функции $W(x, t)$ ε-равномерно, когда N растет.

Совершенно иной результат мы видим в приводимой далее Таблице 3, где приводятся ошибки $E(\varepsilon, N)$ для задачи (8) для W на специальной схеме (14).

Таблица 3. Ошибки $E(\varepsilon, N)$ на специальной схеме (14) для задачи (8) для W

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024
1	4.736e−1	9.723e−2	2.332e−2	5.771e−3	1.439e−3
2^{-2}	1.098e+0	2.347e−1	5.581e−2	1.377e−2	3.431e−3
2^{-4}	3.367e+0	1.014e+0	2.114e−1	4.994e−2	1.230e−2
2^{-6}	3.221e+0	1.492e+0	4.650e−1	1.398e−1	4.196e−2
2^{-8}	3.184e+0	1.492e+0	4.650e−1	1.398e−1	4.196e−2
2^{-10}	3.175e+0	1.492e+0	4.650e−1	1.398e−1	4.196e−2
2^{-12}	3.172e+0	1.492e+0	4.650e−1	1.398e−1	4.196e−2
$\overline{E}(N)$	3.367e+0	1.492e+0	4.650e−1	1.398e−1	4.196e−2
q		0.589	0.844	0.870	0.871

Из Таблицы 3 видно, что с ростом N приближенное решение $z(x,t)$ сходится к функции $W(x,t)$ ε-равномерно.

Таблица 4. Ошибки $E_{1024,1024}(\varepsilon, N)$ на стандартной схеме (15) для задачи (9) для v

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256
1	1.260e−01	2.511e−02	5.713e−03	1.130e−03
2^{-2}	4.944e−04	1.043e−04	2.295e−05	4.485e−06
2^{-4}	1.565e−31	3.698e−32	7.664e−33	1.315e−33
2^{-6}	0.000e−00	0.000e−00	0.000e−00	0.000e−00
$E(N)$	1.260e−01	2.511e−02	5.713e−03	1.130e−03

Таблица на специальной схеме аналогична. Из Таблицы 4 видно, что с ростом N решение $z(x,t)$ сходится к функции $v(x,t)$ ε-равномерно.

Заметим, что мы не можем вычислить значения $E(\varepsilon, N, N_0; v(\cdot))$ и $\overline{E}(N, N_0; v(\cdot))$, потому что мы не имеем аналитического представления функции $v(x,t)$. В качестве точного решения мы используем непрерывную функцию $v_{N^*,N_0^*}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, построенную линейной интерполяцией по x и t из значений функции $z(x,t;\varepsilon,N^*,N_0^*)$, то есть решения задачи (15) на специальной сетке(11) при $N = N^*$, $N_0 = N_0^*$; значения N^*, N_0^* существенно превышают N, N_0. Здесь $N^* = N_0^* = 1024$.

6. Заключение

Как следует из анализа таблиц, при использовании стандартных разностных схем наибольшая ошибка в приближенном решении $z_{(12)}(x,t)$, т.е. решении задачи (12), (11), вводится ошибкой, связанной с сингулярной частью решения. Функция $z_{(12)}(x,t)$ сходится к решению краевой задачи (1)–(3) при фиксированных значениях параметра ε, когда N и N_0 растут. Однако функция $z_{(12)}(x,t)$ не сходится ε-равномерно. Более того, ошибка в приближенном решении может во много раз превышать максимальное значение точного решения. Ошибка в приближенном решении неограниченно растет, когда произведение εN (at $N_0 = N$) стремится к нулю. Таким образом, в случае стандартных разностных схем, из-за большой ошибки сингулярной компоненты, приближенное решение даже качественно не аппроксимирует неизвестное решение ε-равномерно.

Решения специальных разностных схем (13), (14) и (15) — на специальной сетке Шишкина, — используемых для решения задач (4), (8) и (9) соответственно, сходятся ε-равномерно в равномерной норме. Отсюда следует, что и решение разностной схемы (12) — функция $z_{(12)}(x,t)$ — на специальной сетке Шишкина (11) сходится к решению $u(x,t)$ краевой задачи (1)–(3) ε-равномерно в равномерной норме при N, $N_0 \to \infty$.

Список литературы / References

[1] Samarskii A. A., *Theory of Difference Schemes*, Nauka (in Russian), Moscow, 1989.

[2] Shishkin G. I., Shishkina L. P., *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*, CRC Press, Boca Raton, 2009.

Shishkina L. P., "Numerical Study of an Initial-Boundary Value Neumann Problem for a Singularly Perturbed Parabolic Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 568–576.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-568-576

Abstract. For a singularly perturbed one-dimensional parabolic equation with a perturbation parameter ε multiplying the highest-order derivative in the equation, $\varepsilon \in (0, 1]$, an initial-boundary value Neumann problem is considered on a segment. In this problem, when the parameter ε tends to zero, boundary layers appear in neighborhoods of the lateral boundary. In the paper, convergence of the problem solution and its regular and singular components are studied. It is shown that standard finite difference schemes on uniform grids used to numerically solve this problem do not converge ε-uniformly. The error in the grid solution grows unboundedly when the parameter $\varepsilon \to 0$. The use of a special difference scheme on Shishkin grid which is a piecewise-uniform mesh with respect to x condensing in neighborhoods of boundary layers and a uniform mesh in t, constructed by using monotone grid approximations of the differential problems, allows us to find a numerical solution of this problem convergent in the maximum norm ε-uniformly. The results of the numerical experiments confirm the theoretical results.

Keywords: initial-boundary value Neumann problem, singularly perturbed parabolic equation, piecewise-uniform grid, maximum norm, ε-uniform convergence

On the authors:
Lidia P. Shishkina, orcid.org/0000-0002-8489-5432,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg 620990, Russia, e-mail: lida@convex.ru

Acknowledgments:
This research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant № 16-01-00727.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 577–586
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 577–586

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-577-586

УДК 519.633

Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии при наличии компьютерных возмущений

Шишкин Г. И.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с возмущающим параметром ε^2, $\varepsilon \in (0, 1]$, при старшей производной рассматривается начально-краевая задача Дирихле. Для этой задачи исследуется стандартная разностная схема, построенная на основе монотонных сеточных аппроксимаций задачи на равномерных сетках, при наличии компьютерных возмущений. Исследуются возмущения сеточных решений, порождаемые компьютерными возмущениями, то есть вычислениями на компьютере. Получены условия, накладываемые на допустимые компьютерные возмущения, при которых точность возмущенного компьютерного решения по порядку такая же, как у решения невозмущенной разностной схемы, то есть стандартной схемы при отсутствии возмущений. Такого типа схемы с контролируемыми компьютерными возмущениями относятся к компьютерным разностным схемам, называемым также надежными разностными схемами.

Ключевые слова: начально-краевая задача, сингулярно возмущенное параболическое уравнение, уравнение реакции-диффузии, стандартная разностная схема, равномерная сетка, компьютерные возмущения, компьютерная разностная схема

Для цитирования: Шишкин Г. И., "Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии при наличии компьютерных возмущений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 577–586.

Об авторах:
Шишкин Григорий Иванович, orcid.org/0000-0002-6886-8979, доктор физ.-мат. наук,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990 Россия, e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Благодарности:
Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

Введение

При численном моделировании достаточно сложных процессов, характеризующихся наличием пограничных и/или переходных слоев, нередко используются сеточные аппроксимации на основе стандартных разностных схем на равномерных сетках [1].

Отметим, что стандартные разностные схемы на равномерных сетках для *сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии* в случае компьютерных возмущений изучались в работах [2], [3] и [4]. В [2] показано, что уже в случае сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии монотонные стандартные разностные схемы на равномерных сетках не являются ε-равномерно хорошо обусловленными и устойчивыми к возмущениям, в частности, к возмущениям, возникающим при компьютерных вычислениях, что делает их непригодными для практического использования. Подобная ситуация возникает в случае сингулярно возмущенных параболических уравнений конвекции-диффузии [2], [3] и [4]. Таким образом, в случае сингулярно возмущенных задач возникает интерес к разработке численных методов, *пригодных для компьютерных вычислений*, для других классов задач, в частности, реакции-диффузии. В работах [2], [3] и [4] построены *компьютерные разностные схемы* – стандартные разностные схемы на равномерных сетках в случае контролируемых компьютерных возмущений – сходящиеся в равномерной норме при фиксированных значениях ε, $\varepsilon \in (0,1]$ с такой же скоростью, как при отсутствии возмущений.

В настоящей работе для начально-краевой задачи для *сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии* изучается влияние компьютерных возмущений на точность решения стандартной разностной схемы и строится *компьютерная разностная схема*. Установлены условия, налагаемые на допустимые компьютерные возмущения, при которых *компьютерная разностная схема* сходится в равномерной норме со скоростью невозмущенной разностной схемы.

1. Постановка задачи. Цель исследования

На множестве

$$\overline{G} = G \bigcup S,\ G = D \times (0,T],\quad D = (0,d) \tag{1}$$

рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии[1]

$$L_{(2)} u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in G,\ u(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in S. \tag{2}$$

Здесь $L_{(2)} = \varepsilon^2\, a(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - c(x,t) - p(x,t)\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\quad (x,t) \in G,\ S = S^L \cup S_0, S^L = S_1 \cup S_2$, S_1 и S_2 — левая и правая части границы S^L, $S_0 = \{(x,t) : 0 \le x \le d,\ t = 0\}$ – нижняя часть границы S; функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$ и S соответственно, причем[2] $m \le a(x,t), p(x,t) \le M$, $0 \le c(x,t) \le M, |f(x,t)| \le M, (x,t) \in \overline{G}$, $|\varphi(x,t)| \le M, (x,t) \in S$; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. Считаем, что на множестве угловых точек S^c выполняются условия согласования, обеспечивающие требуемую гладкость

[1] Запись $L_{(k)}$ ($m_{(k)}$, $M_{(k)}$, $G_{h(k)}$)) означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле (k).

[2] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

решения задачи на множестве $\overline{G}$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества S^L появляется пограничный слой [5].

Стандартные схемы на равномерных сетках (см., например, [1]) сходятся, когда шаг сетки поперек слоя много меньше параметра ε.

Наша цель – для задачи (2), (1) исследовать влияние возмущений данных разностной схемы на точность решения сеточной задачи.

Задачу (2), (1) аппроксимируем стандартной разностной схемой на равномерной сетке $\overline{G}_h = \overline{G}_h^u \equiv \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0$ с шагами $h = d/N$ и $\tau = T/N_0$ по x и t, где $N+1$, N_0+1 — число узлов $x = x^i$, $t = t^k$ сетки $\overline{G}_h^u$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots, N_0$:

$$\Lambda z(x,t) = f(x,t,), \ (x,t) \in G_h, \quad z(x,t) = \varphi(x,t), \ (x,t) \in S_h. \tag{3}$$

Здесь $\Lambda_{(3)} \equiv \varepsilon^2\, a(x,t)\, \delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c(x,t) - p(x,t)\, \delta_{\overline{t}}$, $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h = S \cap \overline{G}_h$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\, z(x,t)$ — вторая центральная разностная производная, $\delta_x\, z(x,t)$ и $\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$, $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t)$ — первые (вперед и назад) разностные производные.

Для решения схемы (3) выполняется оценка [5]

$$\|u - z\|_{\overline{G}_h} \le M\,(\delta_1 + \delta_0), \quad \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, N) = \min\{\varepsilon^{-2}\, N^{-2}, 1\}, \quad \delta_0 = N_0^{-1}; \tag{4}$$

схема (3) сходится при условии $\delta_1,\ \delta_0 \to 0$.

Теорема 1. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи (2) выполняется оценка*

$$|\partial^{k+k_0}/\partial x^k \partial t^{k_0}\, u(x,t)| \le M\, \varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + 2k_0 \le K, \quad K = 4.$$

Тогда для решения разностной схемы (3) справедлива оценка (4).

Схема (3) не сходится ε-равномерно при $N, N_0 \to \infty$; для ее сходимости требуется использовать сетки по x при $N \gg \varepsilon^{-1}$.

2. Обусловленность разностной схемы (3)

Пусть $N+1$ компонентам функции $z(x,t)$ в узлах $x \in \overline{\omega}$ при $t = t^{k-1}$, $(x,t) \in \overline{G}_h$ отвечает $(N+1)$-мерный вектор $Y = Y_k, k = 1, \ldots, N_0+1$. Упорядочив элементы $z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, в схеме (3), приходим к системе

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Y} = \mathbf{F}. \tag{5a}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — $\{(N+1)(N_0+1)\} \times \{(N+1)(N_0+1)\}$-матрица, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}$ — $\{(N+1)(N_0+1)\}$-мерные вектора из нормированного пространства $R^{(N+1)(N_0+1)}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|$.

Матрица $\mathbf{A}$ — клеточная матрица с клетками (A_{kl}) размерности $(N+1)\times(N+1)$, где k и l — номер клеточных строки и столбца, содержащих элемент A_{kl}, $k,l = 1, \ldots, N_0+1$; лишь клетки A_{kk} и $A_{k,k-1}$ ненулевые, матрицы A_{kk}, $k \ge 2, \ldots, N_0+1$ — трехдиагональные, матрицы A_{11}, $A_{k,k-1}$ — диагональные. Векторы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}$ образованы клеточными векторами $Y = Y_k$, $F = F_k$, $k = 1, \ldots, N_0+1$.

Схеме (3) соответствует "клеточная" матричная запись

$$A_{kk} Y_k + A_{k,k-1} Y_{k-1} = F_k, \ k = 2, \ldots, N_0+1; \quad Y_k = F_k, \ k = 1. \tag{5b}$$

Компоненты матриц A_{kk}, $A_{k,k-1}$ и векторов Y_k и F_k, где $Y_k = (y_1^k, \dots, y_{N+1}^k)'$, $F_k = (f_1^k, \dots, f_{N+1}^k)'$, определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}^{kk} = 1, \;\; y_i^k = z(x_i, t_1), \;\; f_i^k = \varphi(x_i, t_1), \;\; i, j = 1, \dots, N+1 \;\; \textit{при } k = 1;\\
&a_{11}^{kk} = 1, \; a_{i,i-1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2} a(x_i, t_k), \; a_{i,i+1}^{kk} = a_{i,i-1}^{kk},\\
&a_{ii}^{kk} = 2\,\varepsilon^2 h^{-2}\, a(x_i, t_k) + c(x_i, t_k) + \tau^{-1} p(x_i, t_k),\\
&a_{N,N}^{kk} = 1, \;\; a_{ii}^{k,k-1} = -\tau^{-1} p(x_i, t_k), \;\; i = 2, \dots, N;\\
&y_i^k = z(x_i, t_k), \; i = 1, \dots, N+1; \quad f_1^k = \varphi(x_1, t_k),\\
&f_i^k = -f(x_i, t_k), \; i = 2, \dots, N, \;\; f_{N+1}^k = \varphi(x_{N+1}, t_k) \;\; \textit{при } k = 2, \dots, N_0 + 1.
\end{aligned}
$$

Здесь $x_{i\,(5)} = x^{i-1}$, $t_{k\,(5)} = t^{k-1}$, $(x^{i-1}, t^{k-1}) \in \overline{G}_h$, $i = 1, \dots, N+1$, $k = 1, \dots, N_0+1$.

Для нормы матрицы $\mathbf{A}_{(5)}$ и *числа обусловленности матрицы* $\text{æ}(\mathbf{A})$, где $\text{æ}(\mathbf{A}) = \text{æ}_M(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$, на сетке $\overline{G}_h^u$ получается оценка

$$\|\mathbf{A}(\overline{G}_h^u)\|, \; \text{æ}_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u) \;\le\; M\,\left[\left(1 + \varepsilon^2 N^2\right) + N_0\right]$$

в *примитивных* переменных ε, N, N_0 (см. [5], гл. 12, и [6, 7]). В *информативных* переменных ε, δ_1, δ_0 для матрицы $\mathbf{A}$ и ее числа обусловленности æ_M получается оценка

$$\|\,\mathbf{A}(\overline{G}_h^u)\,\|, \; \text{æ}_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u) \;\le\; M\,[\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}]. \tag{6}$$

Таким образом, матрица стандартной схемы является ε-равномерно хорошо обусловленной.

Теорема 2. *Для числа обусловленности* $\text{æ}_M(\mathbf{A};\, \overline{G}_h^u)$ *матрицы разностной схемы* (3) *справедлива оценка* (6).

Рассмотрим возмущенную задачу, соответствующую задаче (5)

$$\mathbf{A}^*\, \mathbf{Y}^* = \mathbf{F}^*. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ — возмущенная матрица, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} + \delta\mathbf{Y}$ и $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + \delta\mathbf{F}$ — возмущенные векторы. Возмущения коэффициента $a(x_i, t_k)$, входящего в компоненты a_{ij}^{kk}, $j = i-1, i, i+1$, $i = 2, \dots, N$ матрицы $A_{kk\,(5)}$, вообще говоря, различаются; обозначим эти возмущения коэффициента $a(x_i, t_k)$ в возмущенных компонентах $a_{ij}^{kk\,*}$ через $\delta a_i^{kk;j}$. Подобным образом возмущения коэффициента $c(x_i, t_k)$ в компонентах a_{ii}^{kk} обозначим через $\delta c_i^{kk;i}$; $i = 2, \dots, N$. Возмущения коэффициента $p(x_i, t_k)$ в компонентах a_{ii}^{kk} и $a_{ii}^{k,k-1}$ матриц $A_{kk\,(5)}$, $A_{k,k-1\,(5)}$ обозначим через $\delta p_i^{kk;i}$ и $\delta p_i^{k,k-1;i}$ соответственно.

Таким образом, в покомпонентной записи клеточных матриц δA_{kk}, $\delta A_{k,k-1}$ и векторов δF_k и δY_k имеем

$$\delta a_{ij}^{kk} = 0, \; \delta f_i^k = \delta\varphi_{i,1}, \; \delta y_i^k = \delta z(x_i, t_1), \; i, j = 1, \dots, N+1 \; \textit{при} \;\; k = 1; \tag{8}$$

$$\delta a_{11}^{kk} = 0, \quad \delta a_{i,i-1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i-1}, \quad \delta a_{ii}^{kk} = 2\,\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i} + \delta c_i^{kk;i} + \tau^{-1}\, \delta p_i^{kk;i},$$

$$\delta a_{i,i+1}^{kk} = -\varepsilon^2 h^{-2}\, \delta a_i^{kk;i+1}, \quad \delta a_{N+1,N+1}^{kk} = 0, \quad \delta a_{ii}^{k,k-1} = -\tau^{-1}\, \delta p_i^{k,k-1;i}, \quad i = 2, \dots, N;$$

$$\delta f_1^k = \delta\varphi_{1,k},\ \delta f_i^k = -\delta f_{i,k},\ i = 2,\dots,N,\ \delta f_{N+1}^k = \delta\varphi_{N+1,k};$$
$$\delta y_i^k = \delta z(x_i,t_k),\ i = 1,\dots,N+1\ \ \textit{при}\ \ k = 2,\dots,N+1,$$

где $\varphi_{ik} = \varphi(x_i,t_k)$, $f_{ik} = f(x_i,t_k)$.

Возмущенной матричной задаче (7) соответствует следующая возмущенная разностная схема

$$\begin{aligned} \Lambda^* z^*(x,t) \ &\equiv\ \left[\varepsilon^2 a^*(x,t)\,\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - c^*(x,t) - p^*(x,t)\,\delta_{\overline{t}}\right] z^*(x,t) = f^*(x,t),\ (x,t)\in G_h,\\ z^*(x,t) \ &=\ \varphi^*(x,t), \quad (x,t)\in S_h. \end{aligned} \tag{9}$$

Принимая во внимание соотношения (8), для возмущения сеточного решения $z^*(x,t) - z(x,t)$, где $z^*(x^i,t^k) - z(x^i,t^k) = \delta Y_{i+1}^{k+1}$, $(x^i,t^k)\in \overline{G}_h$, $i = 1,\dots,N+1$, $k = 1,\dots,N_0+1$, $z^*(x,t) = z^*_{(9)}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, получаем оценку

$$\|\ z^* - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\left[\varepsilon^2 N^2 \max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1}|\delta a_i^{kk;j}| + N_0 \max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{i,k}\widehat{\psi}_{ik}\right], \tag{10}$$

где $\max_{i,k}\widehat{\psi}_{ik} = \max\left[\max_{i,k}|\delta c_i^{kk;i}|,\ \max_{i,k}|\delta f_{ik}|,\ \max_{i,k}|\delta\varphi_{ik}|\right]$, $j = i-1,\ i,\ i+1$, $l = k-1,\ k$ и $i = 1,\dots,N+1$, $k = 1,\dots,N_0+1$.

С учетом оценки (10) имеем следующую оценку, неулучшаемую по вхождению величин ε, δ_1, δ_0:

$$\|\ z^* - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\left[\delta_1^{-1} \max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1}|\delta a_i^{kk;j}| + \delta_0^{-1}\max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik}\right], \tag{11}$$

где $\max_{ik}\widehat{\psi}_{ik} = \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik\,(10)}$, $\delta_1 = \delta_{1\,(4)}(\varepsilon, N)$, $\delta_0 = \delta_{0\,(4)}(N_0)$. Для числа обусловленности разностной схемы (3) получаем оценку $æ_P(\mathbf{A};\overline{G}_h) \le M\,(\,\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}\,)$, т.е. *схема* (3) *является ε-равномерно хорошо обусловленной.*

С учетом (10), (11) получаем *оценку ошибки решения возмущенной разностной схемы в информативных переменных*

$$\begin{aligned} \|u - z^*\|_{\overline{G}_h} \le M\,\Big[\,\delta_1 + \delta_0 + \delta_1^{-1} &\max_{i,j,k;i\ne 1,N+1,k\ne 1}|\delta a_i^{kk;j}| \\ &+\delta_0^{-1}\max_{i,k,l}|\delta p_i^{kl;i}| + \max_{ik}\widehat{\psi}_{ik}\,\Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи* (2) *выполняется условие Теоремы* 1. *Тогда для решения возмущенной разностной схемы* (9) *справедлива оценка* (12).

3. Компьютерная разностная схема

Через $\triangle$ обозначим возмущения, вносимые при компьютерных вычислениях. Пусть $z^*_\triangle(x,t)$ — решение возмущенной разностной схемы в матричной записи (7), (8) при условии

$$|\delta a_i^{kk;j}|,\ |\delta c_i^{kk;i}|,\ |\delta p_i^{kl;i}|,\ |\delta f_{ik}|,\ |\delta\varphi_{ik}| \le\triangle\ . \tag{13}$$

Тогда для функции $z^*_\triangle(x,t)$ получается оценка

$$\|\ z^*_\triangle - z\ \|_{\overline{G}_h} \le M\,(\,\delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}\,)\ \triangle,$$

эквивалентная оценке $\| \ z_\triangle^* - z \ \|_{\overline{G}_h} \leq \ M \, (\, \varepsilon^2 \, N^2 \ + N_0 \,) \ \triangle$. Ошибка компьютерного решения в переменных ε, δ_1, δ_0, $\triangle$, в силу (12), (13), является ε-равномерно ограниченной

$$\| \ u - z_\triangle^* \ \|_{\overline{G}_h} \leq M \, [\ \delta_1 + \delta_0 + (\ \delta_1^{-1} + \delta_0^{-1}) \ \triangle \ ]. \tag{14}$$

Теорема 4. *Пусть для решения $u(x,t)$ задачи (2) выполняется условие Теоремы 1 и пусть для компьютерных возмущений выполняется условие (13). Тогда для решения возмущенной разностной схемы (9) справедлива оценка (14).*

При фиксированных значениях компьютерного параметра $\triangle$ ошибка компьютерного решения неограниченно растет при $\delta_1, \ \delta_0 \to 0$. Нас интересуют условия, накладываемые на допустимые компьютерные возмущения и на величины N, N_0, при которых компьютерная разностная схема сходится при $N, N_0 \to \infty$.

Определение 1. *Вычислительную систему, а именно, совокупность стандартной разностной схемы (определяемой величинами N, N_0 и параметром ε) и "согласованного" компьютера (с компьютерными параметрами, определяемыми величинами N, N_0 и параметром $\triangle$ — допустимым компьютерным возмущением, $\triangle$=$\triangle$ $(\varepsilon, \, \delta_1, \, \delta_0)$), для которых точность компьютерного решения по порядку такая же, как у решения невозмущенной стандартной разностной схемы, назовем компьютерной разностной схемой.*

Согласно (14), при условии

$$\triangle \leq M \ \min[\, \delta_1^2, \ \delta_0^2], \tag{15}$$

эквивалентном условию $\triangle \leq \ M \ \min[\, \varepsilon^{-4} \, N^{-4}, N_0^{-2}]$, имеем оценку для $\| \ u - z_\triangle^* \ \|_{\overline{G}_h}$, подобную (4):

$$\| \ u - z_\triangle^* \ \|_{\overline{G}_h} \leq M \, (\delta_1 + \delta_0). \tag{16}$$

Таким образом, схема $\{(3), (13); (15)\}$ (т.е. схема (3) при условии (13) в случае дополнительного условия (15)) является компьютерной разностной схемой. Если же $\triangle \gg \delta_1^2$, либо $\triangle \gg \delta_0^2$, то $\|u - z_\triangle^*\|_{\overline{G}_h} \gg \delta_1$, либо $\|u - z_\triangle^*\|_{\overline{G}_h} \gg \delta_0$ соответственно, т.е. оценка (16) нарушается.

Теорема 5. *Решение $z_\triangle^*(x,t)$ компьютерной разностной схемы $\{(3), (13); (15)\}$ сходится с оценкой (16).*

4. Иллюстрации

Обсудим *качественное поведение* главной части ошибки $\|u - z_\triangle^*\|_{\overline{G}_h}$ компьютерного решения $z_\triangle^*$ и ее компонент $\|u - z\|_{\overline{G}_h}$, $\|z_\triangle^* - z\|_{\overline{G}_h}$.

Из явного вида компонент δ_0, δ_1 из оценки (4) следует, что компонента $\delta_0 = N_0^{-1}$ зависит лишь от N_0 и быстро убывает с ростом N_0, однако компонента $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, N_1)$, зависящая от ε и N_1, может принимать значения от малых до конечных. Таким образом, для простоты, при качественном анализе ошибок сеточного решения далее будем рассматривать лишь влияние величин ε, N_1, $\triangle$ на ошибки $\|u - z\|$, $\|z_\triangle^* - z\|$, $\|u - z_\triangle^*\|$, пренебрегая ошибками, зависящими от N_0.

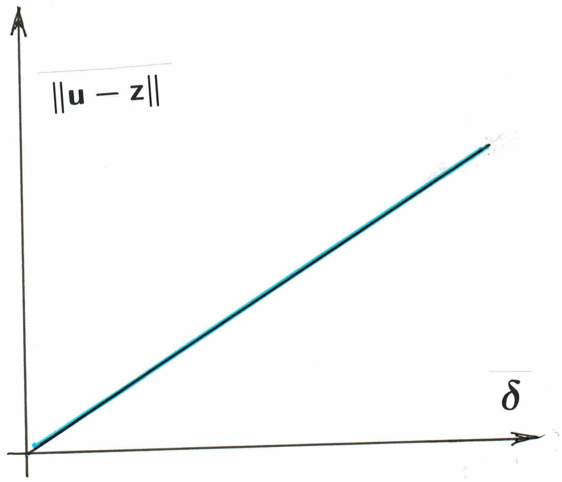

Рис. 1. Ошибка $\| \ u - z \ \|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z
Fig. 1. Error $\| \ u - z \ \|_{\overline{D}_h}$ of the unperturbed grid solution z

На Рис. 1 дается поведение ошибки $\|u-z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z в зависимости от значений величины δ; ошибка растет линейно с ростом параметра точности δ.

На Рис. 2 приводится поведение возмущения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z в случае фиксированных компьютерных возмущений (величины $\triangle$); с ростом параметра точности δ возмущения $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ убывают, стремясь к нулю.

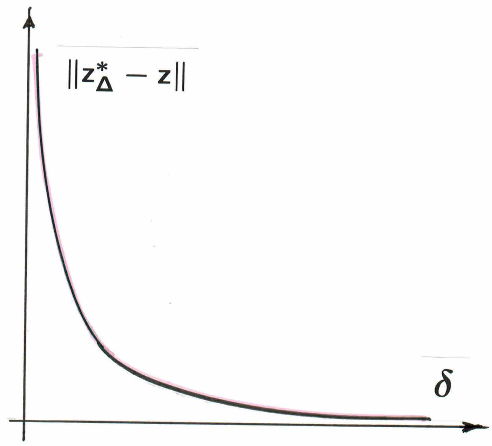

Рис. 2. Возмущение $\| \ z^*_\triangle - z \ \|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения z
Fig. 2. The perturbation $\| \ z^*_\triangle - z \ \|_{\overline{D}_h}$ of the grid solution z

На Рис. 3 приводится ошибка $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ (жирная линия) компьютерного решения $z^*_\triangle$ и ее компоненты $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ и $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ (пунктирные линии) в зависимости от величины δ.

На Рис. 4 даются ошибки $\|u - z^*_\triangle\|_{\overline{D}_h}$ компьютерного решения $z^*_\triangle$ для различ-

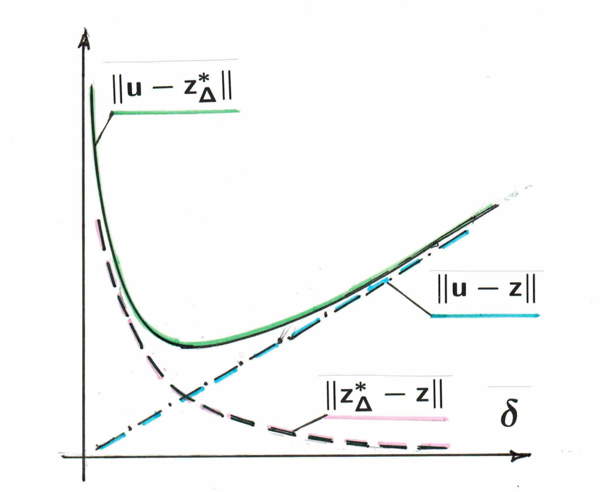

Рис. 3. Ошибки $\| u - z^*_\triangle \|_{\overline{D}_h}$ компьютерного решения $z^*_\triangle$
Fig. 3. Errors $\| u - z^*_\triangle \|_{\overline{D}_h}$ of the computer solution $z^*_\triangle$

ных значений величин $\triangle_1$ и $\triangle_2$ при $\triangle_1 < \triangle_2$ в зависимости от величины δ , а также компоненты $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$, $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ для $\triangle = \triangle_1$.

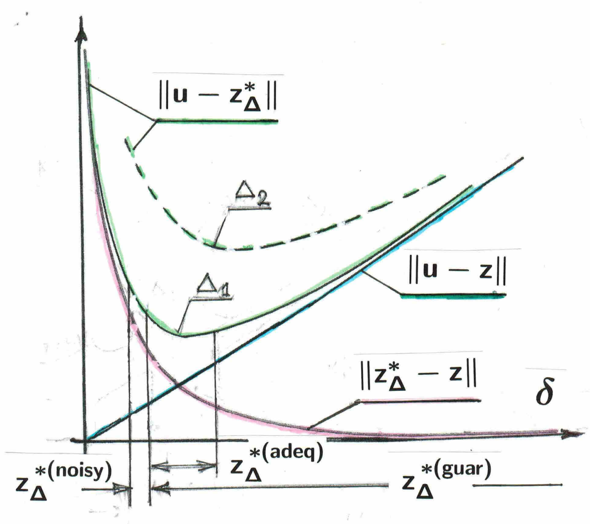

Рис. 4. Ошибка компьютерного решения $z^*_\triangle$ и ее компоненты
Fig. 4. Error of the computer solution $z^*_\triangle$ and its component

Для компьютерных решений удобно ввести классификацию в зависимости от соотношения между ошибкой невозмущенного сеточного решения и возмущением сеточного решения.

Компьютерное решение $z^*_\triangle(x),\ x \in \overline{D}_h$ относим к *адекватным* в том случае, когда ошибка $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z и возмущение $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения $z^*_\triangle$ — величины одного порядка (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(adeq)}_\triangle(x)$).

Компьютерное решение $z^*_\triangle(x), x \in \overline{D}_h$ относим к *гарантированным* в том случае, когда возмущение $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения $z^*_\triangle$ не превосходит по порядку ошибки $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(guar)}_\triangle(x)$).

Компьютерное решение $z^*_\triangle(x), x \in \overline{D}_h$ относим к *зашумленным* в том случае, когда возмущение $\|z^*_\triangle - z\|_{\overline{D}_h}$ сеточного решения $z^*_\triangle$ превосходит по порядку ошибку $\|u - z\|_{\overline{D}_h}$ невозмущенного сеточного решения z (такое компьютерное решение обозначаем $z^{*(noisy)}_\triangle(x)$).

Список литературы / References

[1] Samarskii A. A., *Theory of Difference Schemes*, Nauka (in Russian), Moscow, 1989.

[2] Шишкин Г. И., “Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **54**:8 (2014), 1256–1269; English transl.: Shishkin G. I., “Computer Difference Scheme for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **54**:8 (2014), 1221–1233.

[3] Шишкин Г. И., “Стандартная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии при компьютерных возмущениях”, *Доклады Академии наук*, **462**:1 (2015), 26–29; English transl.: Shishkin G. I., “Standard Scheme for a Singularly Perturbed Parabolic Convection-Diffusion Equation under Computer Perturbation”, *Doklady Mathematics*, **91**:3 (2015), 273–276.

[4] Шишкин Г. И., “Разностная схема для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии при наличии возмущений”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **55**:11 (2015), 74–90; English transl.: Shishkin G. I., “Difference Scheme for a Singularly Perturbed Parabolic Convection-Diffusion Equation in the Presence of Perturbations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:11 (2015), 1876–1892.

[5] Shishkin G. I., Shishkina L. P., *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*, CRC Press, Boca Raton, 2009.

[6] Шишкин Г. И., “Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений с конвективными членами при возмущении данных”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **41**:5 (2001), 692–707; English transl.: Shishkin G. I., “Grid approximation of singularly perturbed equations with convective terms under perturbation of data”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **41**:5 (2001), 649–664.

[7] Шишкин Г. И., “Обусловленность разностных схем для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **48**:5 (2008), 813–830; English transl.: Shishkin G. I., “Conditioning of finite difference schemes for a singularly perturbed convec-tion-diffusion parabolic equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **48**:5 (2008), 769–785.

Shishkin G. I., "Computer Difference Scheme for a Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Equation in the Presence of Perturbations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 577–586.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-577-586

Abstract. In this paper, for a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation with a perturbation parameter ε^2, $\varepsilon \in (0, 1]$, multiplying the highest-order derivative in the equation, an initial-boundary value Dirichlet problem is considered. For this problem, a standard difference scheme constructed by using monotone grid approximations of the differential problem on uniform grids, is studied in the presence of computer perturbations. Perturbations of grid solutions are studied, which are generated by computer perturbations, i.e., the computations on a computer. The conditions imposed on admissible computer perturbations are obtained under which the accuracy of the perturbed computer solution is the same by order as the solution of an unperturbed difference scheme, i.e., a standard scheme in the absence of perturbations. The schemes of this type with controlled computer perturbations belong to computer difference schemes, also named reliable difference schemes.

Keywords: initial–boundary value problem, singularly perturbed parabolic equation, reaction-diffusion equation, standard difference scheme, uniform grid, computer perturbations, computer difference scheme

On the authors:
Grigorii I. Shishkin, orcid.org/0000-0002-6886-8979, doctor of science,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg 620990, Russia, e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Acknowledgments:
This research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant № 16-01-00727.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 587–594
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 587–594

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-587-594

УДК 517.9

Об отсутствии и разрушении решений в некоторых сингулярно возмущённых задачах со сменой устойчивости

Терентьев М. А.

получена 15 марта 2016

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые сингулярно возмущённые задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения (этот случай называют также случаем «смены устойчивости»). Такие задачи нередко встречаются в качестве моделей химической кинетики. Имеется уже немало работ, в которых устанавливается существование и асимптотическое поведение решений задач рассматриваемого класса. Типичное решение вследствие смены устойчивости приближается к негладкому (но непрерывному) составному корню вырожденного уравнения по мере уменьшения параметра возмущения. При этом в ряде задач регулярная компонента возмущения доминирует над сингулярной, что требует дополнительного условия на регулярную компоненту, обеспечивающего устойчивость составного корня в окрестности точки пересечения. Замена этого условия на противоположное приводит к отсутствию или разрушению решения задачи при достаточно малом значении параметра возмущения. В работе доказываются некоторые результаты такого рода с применением метода нелинейной ёмкости и обсуждается их роль в разработке вычислительных алгоритмов для рассматриваемого класса задач.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, неизолированный корень, смена устойчивости, несуществование, разрушение, нелинейная ёмкость

Для цитирования: Терентьев М. А., "Об отсутствии и разрушении решений в некоторых сингулярно возмущённых задачах со сменой устойчивости", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 587–594.

Об авторах:
Терентьев Михаил Анатольевич, orcid.org/0000-0003-0006-4314, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

Введение

В работе [1] рассматривалась задача Неймана для сингулярно возмущённого эллиптического уравнения следующего вида:

$$\begin{gathered} \varepsilon^{2p}\Delta u = f(u,x,\varepsilon), \quad x\in\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,\varepsilon) = 0, \quad x\in\partial\Omega. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Правая часть $f(u, x, \varepsilon)$ и граница $\partial\Omega$ (при $N > 1$) предполагаются достаточно гладкими.

Целью работы являлось доказательство существования и изучение асимптотического поведения решения задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ в случае $p > 3/4$. Сформулируем условия, при которых проводилось исследование.

Условие A1. *Пусть вырожденное уравнение*

$$f(u, x, 0) = 0 \tag{2}$$

имеет непрерывный при $x \in \overline{\Omega}$ *корень* $u = \varphi(x)$, *причём существует множество* $\Gamma \subseteq \overline{\Omega}$, *такое, что*

$$f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, \quad x \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma,$$
$$f_u(\varphi(x), x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Ввиду непрерывности функции $f_u(\varphi(x), x, 0)$ множество Γ является замкнутым.

Условие A2. $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq L\, ||x - \xi||_N$ *при* $x, \xi \in \overline{\Omega}$ *для некоторой постоянной* $L > 0$, *что означает липшицевость* φ *(здесь* $||\cdot||_N$ *— евклидова длина в* $\mathbb{R}^N$*).*

Условие A3. $f_{uu}(\varphi(x), x, 0) > 0$ *при* $x \in \Gamma$.

Условие A4. $f_\epsilon(\varphi(x), x, 0) < 0$ *при* $x \in \Gamma$.

В работе [1] показано, что если выполнены условия A1–A4, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (1) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, для которого справедливо следующее асимптотическое представление:

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \Phi(x, \varepsilon), \tag{3}$$

где $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2})$ в некоторой окрестности Γ, $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\min(p,1)})$ в некоторой окрестности $\partial\Omega$, но вне окрестности Γ, $\Phi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ в остальной части $\overline{\Omega}$. Ранее аналогичный результат был получен в [2] для случая $N = 1$ и в [3] для случая $N = 2$ и множества Γ простой структуры типа замкнутой гладкой кривой без самопересечений. Известно также [4], что решение задач рассматриваемого типа может быть неединственным в асимптотически малой окрестности поверхности $u = \varphi(x)$.

Условие A1 означает, что вне некоторой окрестности Γ корень φ является изолированным. Внутри этой окрестности, как следует из условий A1 и A3, уравнение (2) имеет ещё один – и только один – корень, совпадающий с $\varphi(x)$ при $x \in \Gamma$ и меньший $\varphi(x)$ при остальных x. Например, такая ситуация возникает, когда уравнение (2) имеет два гладких пересекающихся корня. Это не исключает возможности $\Gamma = \overline{\Omega}$, когда φ является двукратным гладким корнем уравнения (2).

Случай пересечения корней вырожденного уравнения в теории сингулярных возмущений часто называют случаем смены устойчивости [2], так как при движении через множество (точку, кривую, поверхность, ...) пересечения каждый из корней меняет тип устойчивости (устойчивый корень становится неустойчивым и наоборот). Устойчивые ветви корней и образуют $\varphi(x)$. При этом условия типа A3 и A4 связаны с необходимостью обеспечить устойчивость корня $\varphi(x)$ в окрестности Γ, поскольку классическое условие устойчивости $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$ нарушается в этой окрестности.

1. Отсутствие решений эллиптической задачи

Условие A3 типично для квадратичной нелинейности, положительный знак f_{uu} выбран для определённости (в противном случае достаточно сделать замену $v = -u$). Более интересна роль условия A4. Если заменить A4 на противоположное ему

Условие A5. $f_\varepsilon(\varphi(x_0), x_0, 0) > 0$ *при некотором* $x_0 \in \Gamma \cap \Omega$,

то, как было показано в [2] на примере конкретного уравнения, решение (1) не может иметь асимптотику вида (3) в окрестности точки x_0, если вообще существует.

В общем случае существование решения (1), в частности, имеющего асимптотику вида (3), зависит от наличия других корней у вырожденного уравнения и поведения $f(u, x, \varepsilon)$ при $u \to \infty$. Остановимся на случае $N = 1$ и $\Omega = (0, 1)$.

Условие A6. *Пусть уравнение* $f(u, x_0, 0) = 0$ *имеет единственный корень* $u = \varphi(x_0)$ *и* $f(u, x, \varepsilon) \geq c_1(u - \varphi(x_0))^2 + c_2\varepsilon$ *при* $u \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| \leq c_3\varepsilon^{1/2}$ *и достаточно малых* ε, *где* $c_i > 0$ *— некоторые постоянные.*

Введённое условие согласовано с условиями A1–A3 и A5 в том смысле, что оно следует из них при $|u - \varphi(x_0)| \leq c_4$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$. Например, A6 выполнено для $f = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x)) + \varepsilon f_1(x)$, где $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ и $f_1(x_0) > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A1–A3, A5 и A6 и* $p > 3/4$, *тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *задача (1) не имеет решения.*

Требование достаточной малости ε существенно для факта отсутствия решения задачи (1). При этом результат имеет локальный характер и не зависит от типа применяемых граничных условий.

Доказательство теоремы о несуществовании решения основано на методе нелинейной ёмкости, развитом в [5] для исследования отсутствия и разрушения глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. В данной работе этот метод впервые применяется для сингулярно возмущенного уравнения в асимптотически малой окрестности точки (локально).

Допустим, что уравнение $\varepsilon^{2p} u_{xx} = f(u, x, \varepsilon)$ имеет классическое решение $u(x, \varepsilon)$. В силу A6 это решение при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon^{2p} u_{xx} \geq c_1(u - \varphi(x_0))^2 + c_2\varepsilon \text{ при } |x - x_0| \leq c_3\varepsilon^{1/2}.$$

Сделав замену $\xi = (x - x_0)/(c_3\varepsilon^{1/2})$ и $v(\xi, \varepsilon) = (u(x, \varepsilon) - \varphi(x_0))/\varepsilon^{1/2}$ в этом неравенстве, получим для функции v неравенство

$$c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2} v_{\xi\xi} \geq c_1 v^2 + c_2 \text{ при } |\xi| \leq 1. \tag{4}$$

Возьмём гладкую функцию $\psi(\xi)$, такую, что $\psi(\xi) > 0$ при $|\xi| < 1$ и $\psi^{(n)}(\pm 1) = 0$ при $n = 0, 1, 2, 3$. Например, возьмём $\psi(\xi) = (1 - \xi^2)^4$. Далее умножим обе части дифференциального неравенства (4) на ψ и проинтегрируем по $\xi \in [-1, 1]$, перебросив производные с v на ψ интегрированием по частям:

$$I_\varepsilon(v) := \int_{-1}^{1} c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2} v(\xi, \varepsilon)\psi''(\xi)\, d\xi \geq \int_{-1}^{1} c_1 v^2(\xi, \varepsilon)\psi(\xi)\, d\xi + \int_{-1}^{1} c_2\psi(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Оценим $I_\varepsilon(v)$ при помощи неравенства Юнга с параметром s:

$$ab \le \frac{s}{2}a^2 + \frac{1}{2s}b^2,$$

положив $a = v$, $b = c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\psi''$ и $s = 2c_1\psi$. Имеем

$$I_\varepsilon(v) \le \int\limits_{-1}^{1} c_1 v^2(\xi,\varepsilon)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{\varepsilon^{4p-3}}{4c_1c_3^4}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\psi''(\xi)]^2}{\psi(\xi)}\,d\xi,$$

откуда с учётом (5) получаем

$$\varepsilon^{4p-3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{[\psi''(\xi)]^2}{\psi(\xi)}\,d\xi \ge 4c_1c_2c_3^4\int\limits_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

В приведенных выкладках все подынтегральные выражения ограничены, так что интегралы определены. Однако неравенство (6) не выполнено при $p > 3/4$ и достаточно малых ε ввиду того, что входящие в (6) интегралы суть положительные константы. Получаем противоречие с предположением о существовании решения уравнения $\varepsilon^{2p}u_{xx} = f(u,x,\varepsilon)$. Следовательно, задача (1) не имеет решения. ■

Величина $\inf_\psi \int_{-1}^{1}[\psi''(\xi)]^2/\psi(\xi)\,d\xi$ при условии $\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi = 1$, $\psi(\xi) > 0$ на $(-1,1)$ и $\psi^{(n)}(\pm 1) = 0$ при $n = 0,1,2,3$, даёт наилучшую верхнюю оценку значений ε, при которых решение задачи (1) отсутствует. Эту величину естественно называть *нелинейной ёмкостью*, индуцированной данной нелинейной задачей (см. [5]).

Полученные достаточные условия отсутствия решения дают основание считать найденные ранее условия существования решения с асимптотикой вида (3) близкими к необходимым. При этом условия существования и отсутствия решения имеют следующий наглядный смысл.

При $p > 3/4$ регулярная часть возмущения $\varepsilon f_1 := f(u,x,\varepsilon) - f(u,x,0)$ в некотором смысле доминирует над сингулярной $\varepsilon^{2p}\Delta u$ в окрестности точки x_0. Это значит, что при отыскании начальных членов асимптотики решения (1) в этой окрестности вместо вырожденного уравнения (2) правильнее взять «полувырожденное» уравнение $f(u,x,\varepsilon) = 0$, т.е. оставить регулярную часть возмущения. Условия A1, A3, A4 являются достаточными для существования у этого уравнения двух гладких изолированных корней, один из которых устойчив и переходит в $\varphi(x)$ при $\varepsilon \to 0$, а другой определен по крайней мере в некоторой окрестности Γ, располагаясь ниже первого, но неустойчив и в рассмотрении не участвует. С другой стороны, из условий A1, A3, A5 и A6 следует, что в некоторой асимптотической окрестности точки $(\varphi(x_0), x_0, 0)$ уравнение $f(u,x,\varepsilon) = 0$ не имеет никаких (тем более устойчивых) корней.

2. Разрушение решения параболической задачи

Краевую задачу (1) можно рассматривать как стационарную для следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{gathered} -u_t + \varepsilon^{2p}\Delta u = f(u,x,\varepsilon), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,x,\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x,\varepsilon) = u^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \end{gathered} \tag{7}$$

В работе [6] для случая $N = 1$ получены достаточные условия на u^0, гарантирующие глобальное существование решения задачи (7) при условиях A1–A4 и предельный переход этого решения при $t \to +\infty$ к стационарному решению с асимптотикой (3). Представляет интерес исследовать поведение решения задачи (7) в случае, когда соответствующая ей стационарная задача не имеет решения. Как и в предыдущем разделе, остановимся на случае $N = 1$ и $\Omega = (0, 1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A1–A3, A5 и A6 и $p > 3/4$, тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (7) не имеет глобального решения; решение существует на промежутке $0 < t < T_\varepsilon$, где $T_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1/2})$ — время разрушения.*

Доказательство теоремы о разрушении решения основано на методе нелинейной параболической ёмкости [5].

Допустим, что уравнение $-u_t + \varepsilon^{2p} u_{xx} = f(u, x, \varepsilon)$ имеет глобальное классическое решение $u(t, x, \varepsilon)$. В силу A6 это решение при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$-u_t + \varepsilon^{2p} u_{xx} \geq c_1(u - \varphi(x_0))^2 + c_2\varepsilon \text{ при } |x - x_0| \leq c_3\varepsilon^{1/2} \text{ и } t > 0.$$

Сделав замену $\xi = (x - x_0)/(c_3\varepsilon^{1/2})$, $\tau = a\varepsilon^{1/2}t$ и $v(\tau, \xi, \varepsilon) = (u(t, x, \varepsilon) - \varphi(x_0))/\varepsilon^{1/2}$ в этом неравенстве с параметром $a > 0$, получим для функции v неравенство

$$-av_\tau + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2} v_{\xi\xi} \geq c_1 v^2 + c_2 \text{ при } |\xi| \leq 1 \text{ и } 0 < \tau \leq 1. \tag{8}$$

Умножим обе части дифференциального неравенства (8) на функцию $\chi(\tau)\psi(\xi)$, где $\chi(\tau) = \tau^2(1 - \tau)^2$ и $\psi(\xi) = (1 - \xi^2)^4$, и проинтегрируем по $(\tau, \xi) \in [0, 1] \times [-1, 1]$, перебросив производные с v на $\chi\psi$ интегрированием по частям:

$$\begin{gathered} J_\varepsilon(v) := \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 v(\tau, \xi, \varepsilon) \left[a\chi'(\tau)\psi(\xi) + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right] d\tau d\xi \geq \\ \geq \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 c_1 v^2(\tau, \xi, \varepsilon)\chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi + \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 c_2\chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi. \end{gathered} \tag{9}$$

Оценим $J_\varepsilon(v)$ при помощи неравенства Юнга с параметром s:

$$ab \leq \frac{s}{2}a^2 + \frac{1}{2s}b^2,$$

положив $a = v$, $b = a\chi'\psi + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi\psi''$ и $s = 2c_1\chi\psi$. Имеем

$$\begin{gathered} J_\varepsilon(v) \leq \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 c_1 v^2(\tau, \xi, \varepsilon)\chi(\tau)\psi(\xi)\, d\tau d\xi + \\ + \frac{1}{4c_1} \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 \frac{\left[a\chi'(\tau)\psi(\xi) + c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right]^2}{\chi(\tau)\psi(\xi)}\, d\tau d\xi, \end{gathered}$$

откуда с учётом (9) получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 \frac{\left[a\chi'(\tau)\psi(\xi)+c_3^{-2}\varepsilon^{2p-3/2}\chi(\tau)\psi''(\xi)\right]^2}{\chi(\tau)\psi(\xi)}\,d\tau d\xi \geq 4c_1c_2\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 \chi(\tau)\psi(\xi)\,d\tau d\xi$$

или

$$a^2C_1+\varepsilon^{4p-3}C_2 \geq C_3, \tag{10}$$

где $C_i>0$ — некоторые постоянные, зависящие только от χ, ψ и c_i.

Неравенство (10) не выполнено при достаточно малых ε и a в случае $p>3/4$. Это противоречит предположению о существовании решения уравнения $-u_t+\varepsilon^{2p}u_{xx}=f(u,x,\varepsilon)$ при $0<t\leq(a^2\varepsilon)^{-1/2}$, а уж тем более при всех $t>0$. При этом решение задачи (7) заведомо существует локально, а из полученного противоречия вытекает, что оно разрушается за время $T_\varepsilon=O(\varepsilon^{-1/2})$. ■

Покажем, что найденная асимптотическая оценка времени разрушения решения задачи (7) является неулучшаемой. Рассмотрим случай $f=u^2-x^2+2\varepsilon$ и $\Omega=(-1,1)$, зададим однородные граничные условия и возьмём $u^0(x)=1$. Согласно методу дифференциальных неравенств [7] решение данной задачи существует при $t\leq(8\varepsilon)^{-1/2}$, так как при этих значениях t функции $\alpha(t,x,\varepsilon)=-4\varepsilon t$ и $\beta(t,x,\varepsilon)=1$ являются для задачи (7) упорядоченными нижним и верхним решениями. В самом деле, при $-1\leq x\leq 1$ и $0\leq t\leq(8\varepsilon)^{-1/2}$ имеем:

$$\begin{gathered}
-\alpha_t+\varepsilon^{2p}\Delta\alpha-f(\alpha,x,\varepsilon)=4\varepsilon-16\varepsilon^2t^2+x^2-2\varepsilon\geq 0,\\
-\beta_t+\varepsilon^{2p}\Delta\beta-f(\beta,x,\varepsilon)=-1+x^2-2\varepsilon\leq 0,\\
\alpha_x(t,\pm1,\varepsilon)=\beta_x(t,\pm1,\varepsilon)=0,\quad \alpha(0,x,\varepsilon)\leq u^0(x)\leq\beta(0,x,\varepsilon).
\end{gathered}$$

Следует отметить, что решение задачи (7) существует асимптотически долгое время, несмотря на отсутствие решений соответствующей стационарной задачи. Численные расчёты показывают, что до момента разрушения решение задачи (7) большую часть времени оказывается близко к корню φ вырожденного уравнения. Такое «квазистационарное» поведение решения задачи (7) — новое явление в рассматриваемом классе задач, требующее отдельного изучения.

Заключение

Существование решения сингулярно возмущённой задачи в случае смены устойчивости зависит от определённого соотношения между регулярной и сингулярной составляющими возмущения. Это может приводить к неверным результатам численных расчётов, когда малое возмущение конкурирует с численной неустойчивостью, что следует учитывать при создании вычислительных алгоритмов для рассматриваемого класса задач. При этом верхнюю границу значений малого параметра, для которых гарантируется отсутствие решения, можно эффективно оценить при помощи нелинейной ёмкости.

Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., Терентьев М. А., "О сингулярно возмущенной эллиптической краевой задаче в случае неизолированного корня вырожденного уравнения", *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 26–36; [Butuzov V. F. & Terentev M. A., "Singular Perturbation Elliptic Boundary-Value Problems in the Case of a Nonisolated Root of the Degenerate Equation", *Math. Notes*, **78**:1 (2005), 23–32]

[2] Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., "Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости", *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354–362; [Butuzov V. F., Nefedov N. N., "A singularly perturbed boundary value problem for a second-order equation in the case of variation of stability", *Math. Notes*, **63**:3 (1998), 311–318].

[3] Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R., "Singularly Perturbed Elliptic Problems in the Case of Exchange of Stabilities", *Journal of Differential Equations*, **169**:2 (2001), 373–395.

[4] Karali G., Sourdis C., "Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities", *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, **29**:2 (2012), 131–170.

[5] Митидиери Э., Похожаев С. И., "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; [Mitidieri E., Pokhozhaev S. I., "A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362].

[6] Бутузов В. Ф., "Об устойчивости и области притяжения негладкого в пределе стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:3 (2006), 433–444; [Butuzov V. F., "On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:3 (2006), 413–424].

[7] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York/London, 1992.

Terentyev M. A., "Absence and Blow-Up of Solutions to Singular Perturbation Problems in the Case of Exchange of Stabilities", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 587–594.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-587-594

Abstract. We consider some singular perturbation problems in the case where a degenerate equation has intersecting roots (this case is also referred to as ' the exchange of stabilities'). Such problems often occur as models in chemical kinetics. There are lots of works that establish the existence and asymptotic behavior of solutions to such problems. Due to exchange of stabilities, a typical solution approaches the non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation as the perturbation parameter gets smaller. In a number of problems a regular part of the perturbative term dominates the singular one, so an additional condition on the regular part is needed to improve the stability of a composite root in the vicinity of the intersection point. Inversion of that condition results in a loss or a blow-up of the solution for sufficiently small values of the perturbation parameter. We prove some results of this kind by means of the nonlinear capacity argument and discuss their role in developing numerical algorithms for the problems under consideration.

Keywords: small parameter, singular perturbation, non-isolated root, exchange of stabilities, nonexistence, blow-up, nonlinear capacity

On the authors:
Mikhail A. Terentyev, orcid.org/0000-0003-0006-4314, PhD, senior researcher
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation,
e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No. 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 595–602
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 595–602

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-595-602

УДК 519.17

Полилогарифмы и асимптотика моментов сингулярной функции Лебега

Тимофеев Е.А.

получена 10 июля 2016

Аннотация.

Напомним, что сингулярная функция Лебега $L(t)$ определяется как единственное решение уравнения

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t-1),$$

где $p, q > 0$, $q = 1 - p$, $p \neq q$.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Основной результат настоящей работы

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(n)} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})\right),$$

где функция $\tau(x)$ является периодической от $\log_2 x$ с периодом 1 и задается как

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\ln p + \Gamma'(1)\log_2 p + \frac{1}{\ln 2}\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Li}_z\left(-\frac{q}{p}\right)\Big|_{z=1} + \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\neq 0}\Gamma(z_k)\,\mathrm{Li}_{z_k+1}\left(-\frac{q}{p}\right)x^{-z_k},$$

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0.$$

Доказательство основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Ключевые слова: моменты, самоподобие, функция Лебега, сингулярная функция, преобразование Меллина, полилогарифм, асимптотика

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Полилогарифмы и асимптотика моментов сингулярной функции Лебега", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 595–602.

Об авторах:
Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507, доктор физ.-мат. наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Напомним, что сингулярная функция Лебега $L(t)$ является единственным решением уравнения

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t-1), \tag{1}$$

где $p, q > 0$, $q = 1 - p$, $p \neq q$.

Заметим, что при $p = q$ функция $L(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$.

Эта функция была введена Ломницким и Уламом [2] в 1934 г. Де Рам [5] показал, что $L(t)$ является единственным непрерывным решением функционального уравнения

$$L(t) = \begin{cases} qL(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ q + pL(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

которое является эквивалентной формой уравнения (1). Примеры функций $L(t)$ для различных значений параметра показаны на рис. 1. Сингулярная функция Лебега $L(t)$ является функцией распределения случайной величины ξ:

$$L(t) = Prob\{\xi < t\}.$$

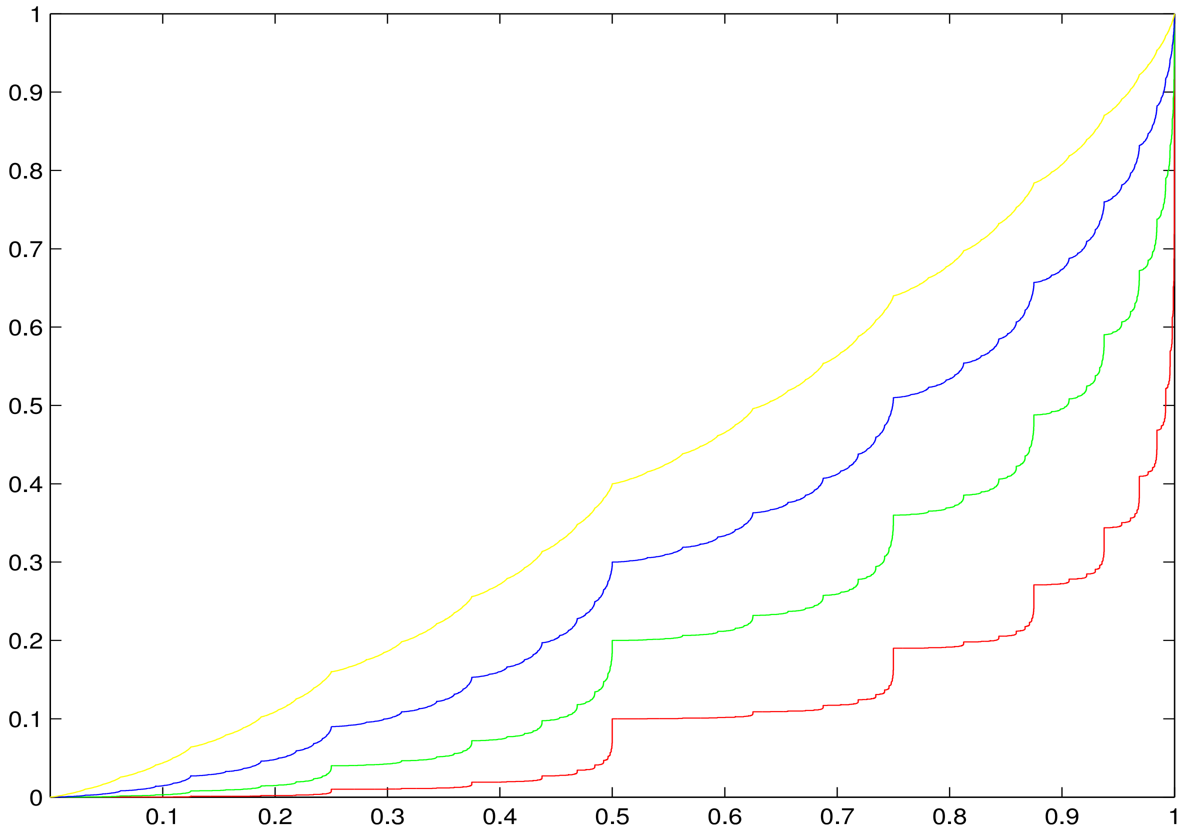

Рис. 1. Сингулярные функции Лебега для $q = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$
Fig. 1. Lebesgue's singular functions for $q = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$

Изучению различных свойств сингулярных распределений на отрезке $[0, 1]$ в последнее время посвящено большое число работ. Полученные результаты находят применение в теории чисел, теории динамических систем.

Моментами функции $L(t)$ будем называть величины

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \dots \tag{3}$$

В [11] показано, что величины M_n удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$M_n = q2^{-n} M_n + p2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4}$$

В [11] также найдена асимптотика моментов. В настоящей работе константы асимптотики найдены в явном виде через полилогарифмы.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(\log_2 n)} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})\right),$$

где

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\ln p + \Gamma'(1)\log_2 p + \frac{1}{\ln 2}\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z\left(-\frac{q}{p}\right)\bigg|_{z=1} +$$

$$+ \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\neq 0} \Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1}\left(-\frac{q}{p}\right) x^{-z_k}, \tag{5}$$

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы, которое основано на применении пуассонизации и преобразования Меллина.

Введем функцию $M(x)$, положив

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}. \tag{7}$$

Подставляя (4) в (7), получим

$$M(x) =$$

$$= q\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} M_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} + p\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k =$$

$$= qM(x/2)e^{-x/2} + pM(x/2). \tag{8}$$

Отсюда и из условия $M_0 = 1$, получаем

$$M(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p + qe^{-2^{-k}x}\right). \tag{9}$$

Отметим, что при $p = q$ имеем

$$M(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

Введем вспомогательную функцию $G(x)$, положив

$$G(x) = \ln M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(p + q e^{-2^{-k} x} \right). \tag{10}$$

Для нахождения функции $G(x)$ применим преобразование Меллина

$$\tilde{G}(z) = \int_0^{\infty} G(x) x^{z-1} dx, \tag{11}$$

в результате получим

$$\tilde{G}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kz} \int_0^{\infty} x^{z-1} \ln \left(p + q e^{-x} \right) dx.$$

В полосе

$$-1 < \Re z < 0$$

ряд сходится, а интеграл можно проинтегрировать по частям

$$\tilde{G}(z) = \frac{2^z}{1 - 2^z} \frac{q}{pz} \int_0^{\infty} \frac{x^z}{q/p + e^x} dx.$$

Последний интеграл вычисляется через гамма-функцию и полилогарифм $\mathrm{Li}_z(w)$, для которого справедливо интегральное представление [9]

$$\mathrm{Li}_z(w) = \frac{w}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - w} dx$$

в области $\Re z > 0$, $w \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty]$.

Поэтому в полосе $-1 < \Re z < 0$ имеем

$$\tilde{G}(z) = -\frac{2^z}{1 - 2^z} \Gamma(z) \, \mathrm{Li}_{z+1} \left(-\frac{q}{p} \right). \tag{12}$$

Функцию $\tilde{G}(z)$ можно продолжить на всю комплексную полуплоскость $\Re z > -1$, в которой она будет иметь полюса:

1) простые — в точках $z = z_k$, от функции $\frac{1}{1-2^z}$, где z_k определено в (6);

2) двойной — в точке $z = 0$, от функций $\Gamma(z)$ и $\frac{1}{1-2^z}$.

Отметим, что при $p = q$ точки z_k не являются полюсами, поскольку [8, 9.522.2]

$$\mathrm{Li}_{z+1}(-1) = (2^{-z} - 1)\zeta(z+1),$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана. Следовательно,

$$\tilde{G}(z) = -\Gamma(z)\zeta(z+1).$$

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{G}(z) x^{-z}\, dz, \tag{13}$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $G(x)$ по формуле (13) применим теорему о вычетах для правой полуплоскости $\Re z > -\sigma$, где $0 < \sigma < 1$. Отметим, что интеграл в (13) берется по часовой стрелке.

Поэтому

$$G(x) \approx -\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0\right) - \sum_{k\neq 0} \operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k\right).$$

Найдем вычеты функции $\tilde{G}(z)x^{-z}$.

Для функции $\dfrac{P(z)}{zQ(z)}$, $P(0) \neq 0$, $Q(0) = 0$, $Q'(0) \neq 0$, вычет в точке $z = 0$ находится по формуле

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{zQ(z)}, 0\right) = \frac{P'(0)}{Q'(0)} - \frac{P(0)Q''(0)}{2Q'(0)^2}.$$

Применим эту формулу с

$$P(z) = -2^z \Gamma(z+1) x^{-z} \operatorname{Li}_{z+1}\left(-\frac{q}{p}\right),$$

$$Q(z) = 1 - 2^z.$$

Поскольку $\operatorname{Li}_1(w) = -\ln(1-w)$ [3] имеем

$$P(0) = -\ln p,$$

$$P'(0) = \ln x \ln p - \ln 2 \ln p - \Gamma'(1)\ln p - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Li}_z\left(-\frac{q}{p}\right)\Big|_{z=1},$$

$$Q'(0) = -\ln 2, \quad Q''(0) = -\ln^2 2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0\right) = -\log_2 p \ln x + \frac{1}{2}\ln p + \Gamma'(1)\log_2 p + \frac{1}{\ln 2}\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Li}_z\left(-\frac{q}{p}\right)\Big|_{z=1}.$$

В остальных полюсах

$$\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k\right) = \frac{1}{\ln 2}\Gamma(z_k) \operatorname{Li}_{z_k+1}\left(-\frac{q}{p}\right) x^{-z_k}.$$

Гамма-функция экспоненциально быстро убывает при $\Im z \to \pm\infty$ [8]. Остальные функции имеют не более чем степенной рост на горизонтальных отрезках

$$\Im z = \frac{2\pi i k + \pi i}{\ln 2}, \quad \sigma \leq \Re z \leq \gamma;$$

между полюсами z_k. Поэтому можно применить теорему 4 и следствие 1 из работы [6], из которых получим асимптотику $G(x)$ при $x \to \infty$ в следующем виде

$$G(x) = -\operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, 0\right) - \sum_{k \neq 0} \operatorname{Res}\left(\tilde{G}(z)x^{-z}, z_k\right) + \mathcal{O}(x^{-\gamma}),$$

для любого $\gamma > 0$.

Подставляя найденные вычеты и применяя обозначение функции τ, определенной в (5), получим

$$G(x) = \log_2 p \ln x - \tau(x) + \mathcal{O}(x^{-\gamma}), \tag{14}$$

для любого $\gamma > 0$.

Из (14) и (10) получаем асимптотику функции $M(x)$ при $x \to \infty$

$$M(x) = x^{\log_2 p} e^{-\tau(x)} + \mathcal{O}(x^{-\gamma}),$$

где функция τ определена в (5).

Поскольку величина $M(x)$ получена усреднением величин M_n (пуассонизацией) и удовлетворяет рекуррентному уравнению (9), то для нахождения величин M_n можно применить теорему 10.5 из [7]. Условия этой теоремы состоят в нахождении числа β, для которого верны следующие два неравенства для достаточно больших по модулю чисел $z = x + iy$:

$$\left|p + qe^{-z/2}\right| 2^{-\beta} \leq 1 - \eta;$$

в конусе $S_\theta = \{z \ : \ |\Im z| \leq \theta \Re z\}$, где $0 < \eta < 1$, $0 < \theta$ – некоторые константы;

$$\left|p + qe^{-z/2}\right| e^{x/2} \leq e^{\alpha |z|/2};$$

вне конуса S_θ, где $\alpha < 1$ – некоторая константа.

Нетрудно видеть, что первое неравенство выполняется при любом $\beta > \log_2 p$ и любом $\theta > 0$. Второе неравенство выполняется при любом $\theta < 1$.

Следовательно, теорема 10.5 из [7] применима и выполняется оценка

$$M_n = M(n)\left(1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})\right)$$

при $\beta = \log_2 p + 0.01$. □

Список литературы / References

[1] Flajolet P., Sedgewick R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2008.

[2] Lomnicki Z., Ulam S. E., "Sur la theorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilites. I. Variables independantes", *Fundamenta Mathematicae*, **23**:1 (1934), 237–278.

[3] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, ed. Olver F.W.J., Cambridge University Press, 2010.

[4] Salem R., "On some singular monotonic functions which are strictly increasing,", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**:3 (1943), 427–439.

[5] De Rham G., "On Some Curves Defined by Functional Equations", *Classics on Fractals*, ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley, 1993, 285–298.

[6] Flajolet P., Gourdon X., Dumas P., "Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums", *Theoretical Computer Science*, **144**:1–2 (1995), 3–58.

[7] Szpankowski W., *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[8] Gradstein I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1994.

[9] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., *Integrals and Series*, More Special Functions, **3**, Gordon & Breach Sci., New York, 1990.

[10] Timofeev E. A., "Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures", *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.

[11] Тимофеев Е. А., "Асимптотика моментов сингулярной функции Лебега", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:5 (2015), 723–730; [Timofeev E. A., "Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:5 (2015), 723–730, (in Russian).]

Timofeev E. A., "Polylogarithms and the Asymptotic Formula for the Moments of Lebesgue's Singular Function", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 595–602.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-595-602

Abstract. Recall the Lebesgue's singular function. We define a Lebesgue's singular function $L(t)$ as the unique continuous solution of the functional equation

$$L(t) = qL(2t) + pL(2t-1),$$

where $p, q > 0$, $q = 1-p$, $p \neq q$. The moments of Lebesque' singular function are defined as

$$M_n = \int_0^1 t^n dL(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

The main result of this paper is

$$M_n = n^{\log_2 p} e^{-\tau(n)} \left(1 + \mathcal{O}(n^{-0.99})\right),$$

where

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\ln p + \Gamma'(1)\log_2 p + \frac{1}{\ln 2}\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Li}_z\left(-\frac{q}{p}\right)\bigg|_{z=1} + \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\neq 0}\Gamma(z_k)\,\mathrm{Li}_{z_k+1}\left(-\frac{q}{p}\right)x^{-z_k},$$

$$z_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}, \quad k \neq 0.$$

The proof is based on analytic techniques such as the poissonization and the Mellin transform.

Keywords: moments, self-similar, Lebesgue's function, singular, Mellin transform, polylogarithm, asymptotic

On the authors:
Evgeniy A. Timofeev, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 603–619
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 603–619

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-603-619

УДК 514.17+517.51+519.6

О числовых характеристиках симплекса и их оценках

Невский М. В. , Ухалов А. Ю.

получена 7 июля 2016

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$ — n-мерный единичный куб. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести S с коэффициентом гомотетии σ. В работе рассматриваются следующие числовые характеристики симплекса. Обозначим через $\xi(S)$ минимальное $\sigma > 0$, такое что $Q_n \subset \sigma S$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, при котором Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Пусть $d_i(S)$ — i-й осевой диаметр S, т. е. максимальная длина отрезка, принадлежащего S и параллельного i-й координатной оси. Применяются формулы для вычисления $\xi(S)$, $\alpha(S)$, $d_i(S)$, полученные ранее первым автором. В статье рассматривается случай $S \subset Q_n$.

Пусть $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. В работах первого автора была сформулирована гипотеза: если $\xi(S) = \xi_n$, то $\alpha(S) = \xi(S)$. Это утверждение было доказано им для $n = 2$ и случая, когда $n+1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$. Более сильным утверждением является следующая гипотеза: для любого n существует константа $\gamma \geq 1$, не зависящая от $S \subset Q_n$, с которой выполняется неравенство $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$. Минимальное γ с этим свойством обозначается через $\varkappa_n$. Если $n+1$ — число Адамара, то точное значение $\varkappa_n$ равно 1. Существование $\varkappa_n$ для других n было неясным. В работе с помощью компьютерных методов устанавливается, что

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\ldots$$

Доказывается новая оценка

$$\xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\ldots,$$

улучшающая прежний результат $\xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\ldots$ Высказывается предположение, что ξ_4 в точности равно $\frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Использование этого значения в компьютерных вычислениях даёт значение

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211\ldots$$

Пусть θ_n — минимальная величина нормы интерполяционного проектора на пространство линейных функций n переменных как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Известно, что при любом n

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2}\,(\theta_n - 1) + 1,$$

причём для $n = 1, 2, 3, 7$ в этом соотношении достигается равенство. Применение компьютера даёт результат $\theta_4 = \frac{7}{3}$. Отсюда следует, что минимальное значение n, при котором в последнем соотношении выполняется строгое неравенство, равно 4.

Ключевые слова: симплекс, куб, коэффициент гомотетии, осевой диаметр, линейная интерполяция, проектор, норма, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О числовых характеристиках симплекса и их оценках", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 603–619.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Введение

Сначала приведём основные обозначения. Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$.

Для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Под гомотетом выпуклого тела понимается результат его гомотетии с центром в некоторой точке. Под транслятом понимается результат параллельного переноса. Таким образом, транслят выпуклого тела C имеет вид $C' = C + x$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Если C — выпуклый многогранник, то $\mathrm{ver}(C)$ обозначает совокупность вершин C. Будем говорить, что n-мерный симплекс S описан вокруг выпуклого тела C, если $C \subset S$ и каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит точку C. Выпуклый многогранник вписан в C, если любая его вершина принадлежит границе C.

Для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $d_i(C)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i. Величину $d_i(C)$ будем называть *i-м осевым диаметром* C. Понятие осевого (или аксиального) диаметра было введено П. Скоттом [11], [12].

Для симплекса S и выпуклого тела C введём величину

$$\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Положим $\xi(S) := \xi(Q_n; S)$. Заметим, что равенство $\xi(C; S) = 1$ эквивалентно включению $C \subset S$. Для выпуклых тел $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\alpha(C_1; C_2)$ минимальное $\sigma > 0$, для которого C_1 принадлежит трансляту σC_2, т. е. гомотету с коэффициентом σ выпуклого тела C_2. Положим $\alpha(C) := \alpha(Q_n; C)$. В настоящей статье мы остановимся на вычислении величин $\xi(S)$ и $\alpha(S)$ для симплексов $S \subset Q_n$. Введём в рассмотрение величину

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Через $C(Q_n)$ обозначается совокупность непрерывных функций $f : C(Q_n) \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$. Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ понимается совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, или линейных функций, т. е. линейная оболочка $1, x_1, \ldots, x_n$.

Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, с которыми выполняется $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$.

Числовым характеристикам n-мерных выпуклых тел, и в первую очередь симплексов и параллелепипедов, а также приложениям этих характеристик к задачам полиномиальной интерполяции, посвящен цикл статей первого автора. Многие результаты систематизированы в его монографии [7], содержащей также доказательства основных утверждений и подробные ссылки.

1. Числовые характеристики n-мерного симплекса и линейная интерполяция

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$, и рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Delta := \det(\mathbf{A})$, тогда $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. В дальнейшем полагаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$.

Любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x).$$

Поэтому мы называем λ_j базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S. Взяв последовательно $p(x) = x_1, \ldots, x_n, 1$, получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)x^{(j)} = x, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Тем самым, числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Симплекс S задаётся каждой из систем неравенств $\lambda_j(x) \geq 0$ и $0 \leq \lambda_j(x) \leq 1$.

В [4] доказано, что для i-го осевого диаметра S выполняется равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1}$$

В S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i. Центр этого отрезка совпадает с точкой

$$y^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij}x^{(j)}, \quad m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Эти результаты обобщаются на макисмальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному вектору $v \neq 0$. В [8] получены формулы для длины и концов этого отрезка через координаты вершин симплекса S и вектора v. Указанное расположение максимального отрезка в S является его характеристическим свойством, эквивалентным формулам для концов отрезка.

Из (1) и свойств l_{ij} (см. [7; гл. 1]) вытекает, что величина $d_i(S)^{-1}$ равна сумме положительных элементов i-й строки $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этой строки.

Приведём формулы для вычисления введённых выше геометрических характеристик, связанных с гомотетией. Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. В [7; § 1.3] установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(C;S) = (n+1) \max_{1\leq k\leq n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_k(x)) + 1. \tag{2}$$

Соотношение

$$\max_{x\in C}\left(-\lambda_1(x)\right) = \ldots = \max_{x\in C}\left(-\lambda_{n+1}(x)\right) \tag{3}$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг C. В случае $C = Q_n$ равенство (2) приводится к виду

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1\leq k\leq n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_k(x)) + 1, \tag{4}$$

а (3) сводится к соотношению

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\left(-\lambda_1(x)\right) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\left(-\lambda_{n+1}(x)\right). \tag{5}$$

Для произвольного выпуклого тела C и невырожденного симплекса S из $\mathbb{R}^n$ в [7; п. 1.4] доказано равенство

$$\alpha(C;S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{6}$$

В случае $C = Q_n$ (6) эквивалентно соотношению

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{7}$$

Красивое равенство (7), связывающее $\alpha(S)$ с осевыми диаметрами S, впервые было получено в статье [6]. Оно имеет ряд интересных следствий. Приведём здесь формулу для вычисления $\alpha(S)$ через коэффициенты многочленов λ_j :

$$\alpha(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{8}$$

Из (8) и свойств коэффициентов l_{ij} вытекает, что величина $\alpha(S)$ равна сумме положительных элементов верхних n строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этих строк.

Пусть $x^{(j)} \in Q_n$ — вершины невырожденного симплекса S. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по системе узлов $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right),\ 1 \leq j \leq n+1$. Имеет место аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x).$$

Норма проектора P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ вычисляется по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Обозначим через θ_n минимальную величину $\|P\|$.

Пусть $1 \leq \mu \leq n$. Будем говорить, что точка $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ является μ-вершиной Q_n относительно симплекса $S \subset Q_n$, если для интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство $\|P\| = \sum\limits_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$ и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных. В [5] доказано, что для любого проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|-1\right)+1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1. \qquad (9)$$

Правое равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S. Если для некоторого μ имеется μ-вершина Q_n относительно S, то

$$\frac{n+1}{2\mu}\left(\|P\|-1\right)+1 \leq \xi(S).$$

Из (9) следует, что для любого n

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n-1\right)+1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1. \qquad (10)$$

По поводу анализа и обобщений соотношений (9), (10) см. [3], [5], [7]. Из приводимых ниже асимптотических соотношений для ξ_n и θ_n следует, что начиная с некоторого n правое неравенство в (10) является строгим. В [3] показано, что это имеет место хотя бы для $n \geq 57$. (Эта граница, по-видимому, сильно завышена.) Однако для $n = 1, 2, 3, 7$ правое неравенство в (10) обращается в равенство, т. е. для этих n

$$\xi_n = \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1.$$

Минимальное n, при котором справедливость этого равенства не ясна, было равно 4. Ниже мы приведём вычислительные аргументы, в соответствии с которыми при $n = 4$ правое неравенство в (10) является строгим.

Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \leq 1$. Применяя (7), имеем

$$\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n. \qquad (11)$$

Поэтому из (9) и (10) получается

$$\xi_n \geq n, \quad \theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}, \tag{12}$$

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} - 1\right) + 1. \tag{13}$$

Равенство в (13) достигается тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S и выполняется соотношение (5), эквивалентное тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n.

К 2009 г. первым автором было установлено, что

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\ldots, \quad \theta_3 = 2, \quad 2.2 \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3} = 2.33\ldots,$$
$$\frac{7}{3} = 2.33\ldots \leq \theta_5 \leq 2.6, \quad \frac{17}{7} = 2.42\ldots \leq \theta_6 \leq 3, \quad \theta_7 = 2.5;$$
$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\ldots, \quad \xi_3 = 3, \quad 4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\ldots,$$
$$5 \leq \xi_5 \leq 5.5, \quad 6 \leq \xi_6 \leq 6.6, \quad \xi_7 = 7.$$

Доказаны асимптотические соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$, $\xi_n \asymp n$. Из многочисленных оценок, систематизированных в [7], отметим следующие:

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1} \quad (n > 2); \tag{14}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}.$$

Если S — симплекс максимального объёма в Q_n, P — интерполяционный проектор с узлами в вершинах S, то $\|P\| \asymp \theta_n$, $\xi(S) \asymp \xi_n$.

Заметим, что верхняя граница в (15) получается из рассмотрения симплекса S^* с вершинами $(0,1,\ldots,1),(1,0,\ldots,1),\ldots,(1,1,\ldots,0),(0,0,\ldots,0)$ (см. [5], [7; § 3.2]). При $n > 2$ верно $\xi(S^*) = \frac{n^2-3}{n-1}$, откуда и следует правая оценка в (14). При $n \geq 3$ симплекс S^* обладает следующим свойством, отмеченным в [9; лемма 3.3]: замена любой вершины S^* на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. При $n = 2,3,4$ (и только в этих случаях) S^* является симплексом максимального объёма в Q_n. Если $n \geq 2$, то $d_i(S^*) = 1$, поэтому $\alpha(S^*) = n$. Таким образом, $\alpha(S^*) < \xi(S^*)$.

Если $n+1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$. Для таких (и только таких n) существует правильный симплекс S, вписанный в Q_n так, что его вершины находятся в вершинах Q_n ([9; теорема 4.5]). Как отмечено в [5], $\xi(S) = n$, поэтому из (11) получается $\alpha(S) = n$ и $d_i(S) = 1$. Последние равенства следуют также из того, что S имеет максимальный объём в Q_n, поскольку все осевые диаметры такого симплекса равны 1. Это интересное свойство симплексов максимального объёма в Q_n, установленное М. Лассаком [10], может быть выведено из (7). См. подробнее [6], [7].

2. Две гипотезы о величинах $\xi(S)$ и $\alpha(S)$

Приведём две гипотезы о числовых характеристиках симплекса, которые были сформулированы в [7; п. 3.10] (в эквивалентном виде эти гипотезы были высказаны в [5]).

(H1) *Пусть $S \subset Q_n$ — невырожденный n-мерный симплекс. Если $\xi(S) = \xi_n$, то* $\xi(S) = \alpha(S)$.

(H2) *Для любого n существует константа $\varkappa_n \geq 1$ такая, что если $S \subset Q_n$, то*

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \varkappa_n\big(\xi(S) - \xi_n\big). \tag{15}$$

Здесь и далее $\varkappa_n$ обозначает наименьшую константу ≥ 1, стоящую в (15).

Очевидно, для любого симплекса S верно $\xi(S) \geq \alpha(S)$. Равенство $\alpha(S) = \xi(S)$ выполняется тогда и только тогда, когда каждая $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n. Таким образом, предложение (H1) эквивалентно следующему: *если $S \subset Q_n$ и $\xi(S) = \xi_n$, то каждая $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n*. Далее, любые два невырожденных параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$ связаны аффинным преобразованием. Каждое такое преобразование переводит симплекс в симплекс. Поэтому последнее утверждение эквивалентно такому. *Пусть S — симплекс, D — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и для некоторого $\sigma > 0$ верны включения $S \subset D \subset \sigma S$. Предположим, что некоторая $(n-1)$-мерная грань σS не содержит вершин D. Тогда существует параллелепипед D', для которого $S \subset D' \subset \sigma S$ и каждая вершина которого является внутренней точкой симплекса σS.*

Для $n = 1, 2, 3$ в работах первого автора (см. [7; гл. 1]) было дано полное описание симплексов с условием $\xi(S) = \xi_n$. Для каждого из них выполняется $\xi(S) = \alpha(S)$. Если $n+1$ — число Адамара (сюда включаются случаи $n = 1$ и $n = 3$), то $\xi_n = n$. В силу соотношения (12) условие $\xi(S) = \xi_n = n$ сразу даёт $\xi(S) = \alpha(S)$. Поэтому утверждение гипотезы (H1) выполняется по крайней мере для $n = 2$ и случая, когда $n+1$ есть число Адамара. На взгляд авторов, представляют интерес уже двумерный и трёхмерный варианты (H1) в указанной эквивалентной формулировке.

Утверждение гипотезы (H2) равносильно свойству

$$\sup_{S \subset Q_n} \frac{\xi(S) - \alpha(S)}{\xi(S) - \xi_n} < \infty. \tag{16}$$

Точная верхняя грань в (16) берётся по совокупности невырожденных симплексов S, содержащихся в Q_n и таких, что $\xi(S) \neq \xi_n$.

Если $\xi(S) = \xi_n$, то из (15) сразу получаем $\xi(S) = \alpha(S)$. Поэтому для доказательства (H1) достаточно установить (H2). В ситуации, когда $n+1$ — число Адамара, для любого симплекса $S \subset Q_n$

$$\xi_n = n \leq \alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S),$$

следовательно, (15) выполняется с неулучшаемой константой $\varkappa_n = 1$. Равенство в (15) эквивалентно условию $\alpha(S) = n$, т. е. $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$.

Итак, $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 1$. Существуют ли отличные от 1 числа $\varkappa_n$? Ответ на этот вопрос следует искать, начиная со случая $n = 2$. Отметим, что в случае существования $\varkappa_2$ выполняется неравенство

$$\varkappa_2 \geq \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\ldots \tag{17}$$

Достаточно учесть, что $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$, и рассмотреть в качестве S треугольник с вершинами $(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (0, 0)$. Вычисления по формулам п. 2 дают $\xi(S) = 2.5$, $d_1(S) = d_2(S) = 1$, $\alpha(S) = 2$, откуда и следует (17).

В [5] было высказано предположение, что $\varkappa_2$ в точности равно правой части (17). Применение компьютера убеждает в том, что это действительно так. В следующем пункте мы опишем соответствующие вычислительные процедуры.

3. Оценка константы $\varkappa_2$

Функции $\alpha(S)$ и $\xi(S)$, входящие в неравенство (15), являются функциями вершин n-мерного симплекса. Каждая из этих функций зависит от $n(n+1)$ переменной. Выражения для $\alpha(S)$ и $\xi(S)$ через координаты симплекса могут быть получены по формулам, приведённым в первом пункте настоящей работы. Даже при небольших n эти выражения оказываются весьма громоздкими, что затрудняет их изучение аналитическими методами. Нами проведён ряд компьютерных экспериментов по проверке выполнения неравенства (15) в двумерном случае.

При анализе случая $n = 2$ мы будем рассматривать характеристики симплекса как функции координат его вершин. Для этого удобно ввести обозначения, отличающиеся от используемых в остальной части работы. Пусть $S \subset Q_2$ — двумерный симплекс с вершинами (s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3). Тогда $\alpha(S) = \alpha(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$, $\xi(S) = \xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$. Рассмотрим функцию

$$\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) = \frac{\xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) - \alpha(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)}{\xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) - \xi_2}. \tag{18}$$

Напомним, что $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\ldots$ Для выполнения (15) достаточно, чтобы функция $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ была ограничена сверху при условиях

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \xi(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) \neq \xi_2. \tag{19}$$

Знаменатель в правой части (18) может принимать сколь угодно малые значения. Наша гипотеза состояла в том, что при выполнении (19) справедливо неравенство

$$\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3) \leq \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.15737865166653\ldots \tag{20}$$

Проверка гипотезы проводилась с использованием системы компьютерной математики Wolfram Mathematica (версия 10.0) (см., например, [1]) и с помощью нескольких специально написанных программ на языке C++. Для выполнения вычислений с матрицами в программах на C++ использовалась библиотека с открытым исходным кодом Eigen (http://eigen.tuxfamily.org).

Были выполнены следующие численные эксперименты.

а) Перебор симплексов из Q_2.

С помощью программы, написанной на языке C++, был осуществлен перебор значений переменных $s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3$. Область изменения каждой переменной (отрезок $[0,1]$), разбивалась на m равных частей. Вычислялся максимум значений $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ в узлах разбиения. Случаи, когда знаменатель в правой части (19) был меньше, чем 10^{-6}, не рассматривались. Не рассматривались также симплексы, для которых $|\Delta| < 10^{-6}$ (см. п. 1).

б) Перебор симплексов с вершинами на границе квадрата.

Учитывая данные описанного эксперимента, можно предположить, что вершины экстремального симплекса всегда расположены на границе Q_2. При этом следует рассмотреть три случая расположения вершин: 1) три вершины симплекса расположены на трех различных сторонах квадрата, 2) две вершины симплекса расположены на одной из сторон квадрата, а третья — на соседней стороне, 3) две вершины симплекса расположены на одной из сторон, а третья вершина — на противоположной стороне.

Случаям 1), 2) и 3) соответствуют задачи об отыскании максимумов функций

$$\begin{aligned} &1)\ v_1(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, u_2, 0, 1, u_3),\\ &2)\ v_2(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, 0, u_2, u_3, 0),\\ &3)\ v_3(u_1, u_2, u_3) = \varkappa(0, u_1, 0, u_2, 1, u_3), \end{aligned} \tag{21}$$

при $0 \le u_i \le 1$ $(i = 1, 2, 3)$. С помощью специальной версии нашей программы на C++ был выполнен ряд тестов. Сторона квадрата разбивалась на m равных частей. Каждая из трех вершин пробегала все точки деления соответствующей стороны.

Как отмечалось, при допустимых значениях аргументов знаменатель дроби в (18) может принимать сколь угодно малые значения. Особый интерес представляет поведение функции $\varkappa$ при значениях переменных, близких к тем, которые соответствуют симплексам с условием $\xi(S) = \xi_2$. В [7; гл. 2] показано, что таким свойством обладает только симплекс S^{**} с вершинами $(0,0)$, $(1,\tau)$, $(\tau,1)$, где $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, и симплексы, приводящиеся к нему поворотами или отражениями. В наших обозначениях симплексу S^{**} соответствует точка $(0,0,1,\tau,\tau,1)$ из области определения функции $\varkappa$. Особо подробно была исследована окрестность этой точки. Функция $\varkappa$ имеет в ней разрыв, но того, что в окрестности этой точки $\varkappa$ принимает значения большие, чем $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$, обнаружено не было. Некоторое представление о поведении функции в окрестности этой точки дает график, приведённый на рис. 1. В этом примере показано, как ведёт себя функция $\varkappa$, если две вершины симплекса S^{**} фиксированы, а третья вершина пробегает свою сторону квадрата. Заметим, что функция $\varkappa$ вовсе не является кусочно-постоянной, как это может показаться.

в) Нахождение максимума функции $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ на границе Q_2 с использованием системы аналитических вычислений.

С помощью системы аналитических вычислений Wolfram Mathematica в некоторых случаях удаётся решить экстремальные задачи аналитически, без применения численных методов. Мы осуществили ряд попыток найти максимум функции шести переменных $\varkappa(s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3)$ с использованием функции Maximize. В разумное время результата достичь не удалось. Однако система успешно справилась с упрощённым вариантом задачи, а именно, с нахождением максимумов функций трех переменных (21). Были получены следующие результаты:

1) $\max\limits_{0\le u_i\le 1} v_1(u_1,u_2,u_3) = \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.157\ldots$ при $u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2},\ u_3=1$,

2) $\max\limits_{0\le u_i\le 1} v_2(u_1,u_2,u_3) = \frac{5+\sqrt{5}}{6} = 1.206\ldots$ при $u_1=1,\ u_2=0,\ u_3=1$,

3) $\max\limits_{0\le u_i\le 1} v_3(u_1,u_2,u_3) = \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.157\ldots$ при $u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=\frac{1}{2}$.

Результаты этого эксперимента также подтверждают нашу гипотезу о том, что наибольшее значение функции равно $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$.

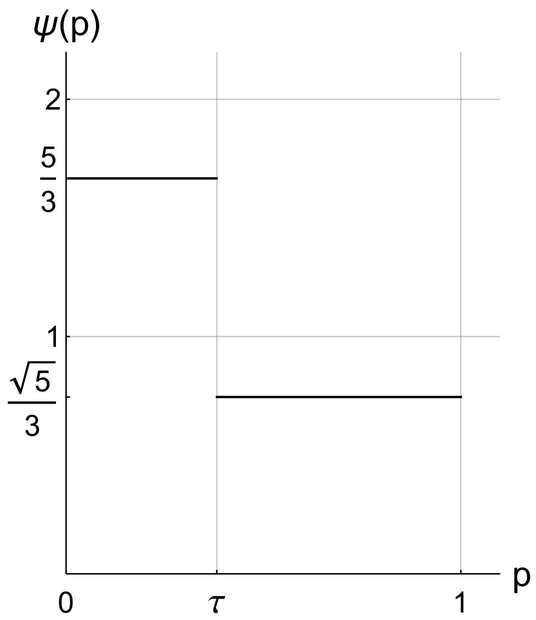

Рис. 1. График функции $\varkappa = \psi(p) = \varkappa(0,0,1,p,\tau,1)$
Fig. 1. Graph of the function $\varkappa = \psi(p) = \varkappa(0,0,1,p,\tau,1)$

г) Максимизация функции $\varkappa(s_1,t_1,s_2,t_2,s_3,t_3)$ стохастическими методами.

Была предпринята серия попыток найти максимум $\varkappa(s_1,t_1,s_2,t_2,s_3,t_3)$ при ограничениях (19) с помощью стохастических алгоритмов решения экстремальных задач, реализованных в системе Wolfram Mathematica. Значений функции, превышающих предполагаемый максимум, обнаружено не было. Наилучшее из полученных приближений содержало 150 верных знаков числа $\frac{5+2\sqrt{5}}{3}$ и было меньше этого числа.

На основании всех выполненных экспериментов можно с уверенностью утверждать, что при $n=2$ гипотеза (H2) верна и неравенство (15) выполняется с неулучшаемой (точной) константой

$$\varkappa_2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{3}.$$

Также можно констатировать, что функция $\varkappa(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)$ имеет глобальный максимум при значениях переменных, соответствующих симплексу с вершинами $(0,0)$, $(\frac{1}{2},1)$, $(1,0)$ и симплексам, полученным из него поворотами на углы $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$.

На рис. 2 и рис. 3 приведена зависимость функции $\varkappa$ от параметра t для некоторых частных случаев, а именно для симплексов с вершинами $(0,0)$, $(t,1)$, $(1,0)$

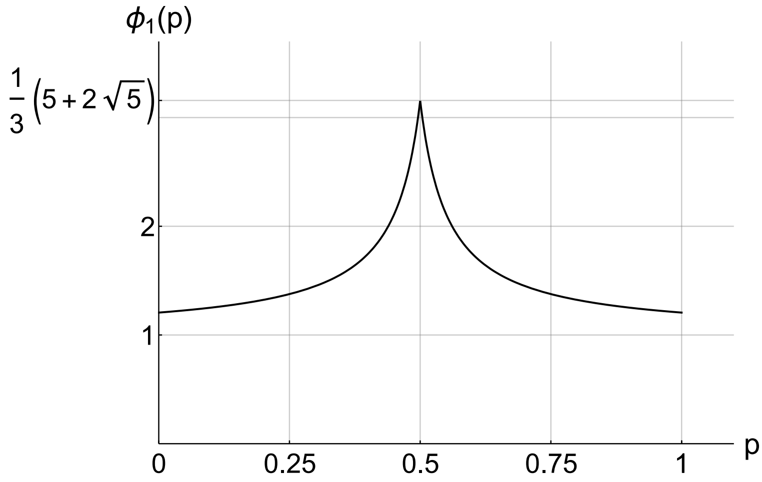

Рис. 2. График функции $\varkappa = \phi_1(p) = \varkappa(0,0,p,1,1,0)$
Fig. 2. Graph of the function $\varkappa = \phi_1(p) = \varkappa(0,0,p,1,1,0)$

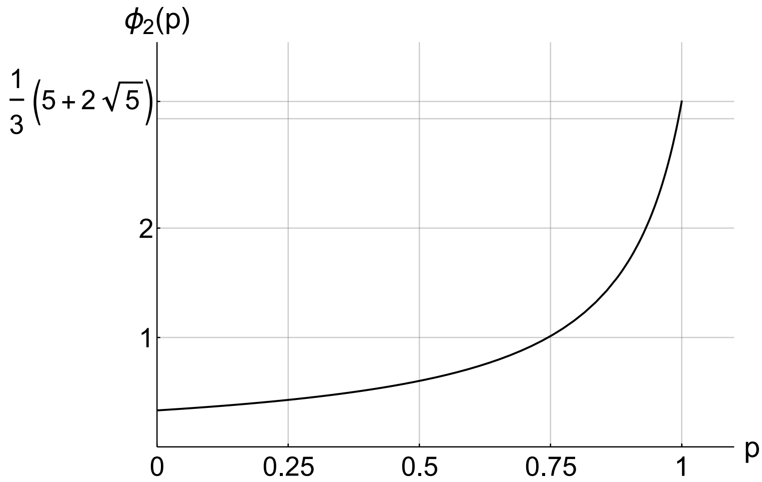

Рис. 3. График функции $\varkappa = \phi_2(p) = \varkappa(0,0,0.5,p,1,0)$
Fig. 3. Graph of the function $\varkappa = \phi_2(p) = \varkappa(0,0,0.5,p,1,0)$

и симплексов с вершинами $(0,0)$, $(\frac{1}{2},t)$, $(1,0)$ $(0 \le t \le 1)$. На этих рисунках представлены сечения графика функции шести переменных $\varkappa = \varkappa(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)$ некоторыми двумерными плоскостями. Экстремум имеет такой же выраженный характер и при сечении графика в окрестности точки максимума некоторыми другими плоскостями. Этот факт хорошо согласуется с данными наших численных экспериментов: достаточно небольшого смещения с точки, соответствующей экстремальному симплексу, чтобы значение функции значительно уменьшилось.

4. Новая оценка ξ_4

Напомним, что для констант ξ_1, ξ_2, ξ_3 известны точные значения (см. п. 1). Оценка $4 \le \xi_4 \le \frac{13}{3} = 4.33\ldots$ была получена из рассмотрения симплекса $S^* \subset Q_4$ с вершинами $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1,)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$, $(0,0,0,0)$, для которого $\xi(S^*) = \frac{13}{3}$.

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\xi_4 \le \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\ldots$$

Доказательство. Для уточнения верхней границы ξ_4 достаточно найти симплекс $T \subset Q_4$, для которого $\xi(T) < \frac{13}{3}$. Рассмотрим симплекс T с вершинами $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 0, 0\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 0, 1\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 1, 1\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1, 0\right)$. Для него матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{5-2\sqrt{13}}{18} & \dfrac{1+5\sqrt{13}}{36} & -\dfrac{11+\sqrt{13}}{18} & \dfrac{5-2\sqrt{13}}{18} & \dfrac{1+5\sqrt{13}}{36} \\ -\dfrac{1+5\sqrt{13}}{36} & \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{18} & \dfrac{11+\sqrt{13}}{18} & -\dfrac{1+5\sqrt{13}}{36} & \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{18} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{19+5\sqrt{13}}{36} & \dfrac{5-2\sqrt{13}}{18} & \dfrac{7-\sqrt{13}}{18} & \dfrac{-17+5\sqrt{13}}{36} & \dfrac{5-2\sqrt{13}}{18} \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующие T базисные многочлены Лагранжа:

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{36}\left((10-4\sqrt{13})x_1 - (1+5\sqrt{13})x_2 - 18x_3 - 18x_4 + 5\sqrt{13} + 19\right),$$
$$\lambda_2(x) = \frac{1}{36}\left((1+5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13}-10)x_2 - 18x_3 + 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10\right),$$
$$\lambda_3(x) = \frac{1}{18}\left(-(11+\sqrt{13})x_1 + (11+\sqrt{13})x_2 - \sqrt{13} + 7\right),$$
$$\lambda_4(x) = \frac{1}{36}\left((10-4\sqrt{13})x_1 - (1+5\sqrt{13})x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 5\sqrt{13} - 17\right),$$
$$\lambda_5(x) = \frac{1}{36}\left((1+5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13}-10)x_2 + 18x_3 - 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10\right).$$

Для вычисления $\xi(T)$ применим (4). По этой формуле находим

$$\xi(T) = 5 \max_{1\le k\le 5} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_4)} (-\lambda_k(x)) + 1 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}.$$

В последнем равенстве для $k=1$ максимум достигается на вершине куба $(1,1,1,1)$, для $k=2$ — на вершине $(0,0,1,0)$, для $k=3$ — на вершинах $(1,0,0,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,1,1)$, для $k=4$ — на вершине $(1,1,0,0)$ и для $k=5$ — на вершине $(0,0,0,1)$. Таким образом, для симплекса T выполнено условие (5):

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_4)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_4)} (-\lambda_5(x)).$$

Как отмечалось в п. 1, выполнение последнего условия эквивалентно тому, что симплекс $\xi(T)T$ описан вокруг Q_4. Это эквивалентно также выполнению для симплекса S равенства $\alpha(T)=\xi(T)$.

Итак, мы получаем оценку

$$\xi_4 \le \xi(T) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}.$$

Теорема доказана. □

Для доказательства теоремы подходящим является и симплекс R с вершинами $\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6},\frac{1}{2},1,1\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6},\frac{1}{2},0,1\right)$, $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Справедливо $\xi(R)=\xi(T)=\frac{19+5\sqrt{13}}{9}$.

Числовые характеристики симплексов T и R представлены в табл. 1. Для вычисления этих характеристик использовались формулы, приведенные в п. 1.

Отметим, что симплексы T и R имеют разные объемы и, следовательно, не являются эквивалентными, т. е. один из них не может быть переведен в другой с помощью ортогонального преобразования. По мнению авторов, найденное с помощью этих симплексов число $\xi(S)$ не только доставляет улучшенную верхнюю оценку ξ_4, а является и точным значением этой константы. Иначе говоря, $\xi(T)=\xi(R)=\xi_4$.

Как видно из табл. 1, у симплексов T и R совпадают все рассматриваемые числовые характеристики, за исключением объема, определителя матрицы и нормы интерполяционного проектора по вершинам симплекса.

Вычисления показывают, что вершины $(1,0,0,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,1,1)$ являются 2-вершинами Q_4 относительно T. Для любого $\mu\ne 2$ не существует μ-вершин Q_4 относительно T. В частности, не существует ни одной 1-вершины. Это также верно и для симплекса R. Отсюда следует, что правое неравенство в (9) для симплексов T и R выполняется строго. Например, для симплекса T двойное неравенство (9) имеет вид

$$\frac{73+5\sqrt{13}}{48} = 1.896\ldots < \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114\ldots < \frac{37+5\sqrt{13}}{12} = 4.585\ldots$$

Главные фигуранты этого пункта, симплексы T и R, были найдены с помощью компьютера. Для минимизации $\xi(S)$ использовались программы, написанные на языке Wolfram Language. После отыскания первых приближений точек минимума проводился дальнейший поиск в окрестности этих точек. Выражения, содержащие радикалы, были найдены при помощи функции распознавания чисел (number recognition) системы Wolfram Alpha (https://www.wolframalpha.com/).

Была проведена большая серия численных экспериментов по нахождению симплексов с меньшим значением $\xi(S)$, чем для T и R. Специально написанная на языке

Таблица 1. Числовые характеристики симплексов T и R
Table 1. Numerical characteristics of simplices T and R

S	T	R
$\det(\mathbf{A})$	$\frac{1-5\sqrt{13}}{9} = -1.891972\ldots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\ldots$
$\mathrm{vol}(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{216} = 0.078832\ldots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{432} = 0.039416\ldots$
$d_1(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\ldots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\ldots$
$d_2(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\ldots$	1
$d_3(S)$	1	1
$d_4(S)$	1	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\ldots$
$\alpha(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\ldots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\ldots$
$\xi(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\ldots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\ldots$
$\|P\|$	$\frac{11+\sqrt{13}}{6} = 2.434258\ldots$	3

Wolfram Language программа работала в общей сложности много часов, используя различные алгоритмы минимизации. Ни в одном из этих экспериментов не было найдено симплексов со свойством $\xi(S) < \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$.

В процессе этих поисков было найдено еще несколько симплексов, для которых $\xi(S) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$, но каждый из них оказался эквивалентным R. Эквивалентность была доказана путем явного построения ортогональных преобразований относительно центра куба Q_4, переводящих эти симплексы в R.

На основании численных экспериментов авторы предполагают, что $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$.

5. Гипотеза о значении θ_4

Напомним, что для минимального значения нормы интерполяционного проектора θ_4 известна оценка $2.2 \le \theta_4 \le \frac{7}{3}$. Проделанные нами численные эксперименты позволяют предположить, что верхняя граница есть точное значение θ_4, т. е. что $\theta_4 = \frac{7}{3}$. Это значение достигается для симплекса S с вершинами $(0,0,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$ и для эквивалентных ему симплексов. Приведем основные характеристики симплекса S: $\det(\mathbf{A}) = -3$, $\mathrm{vol}(S) = \frac{1}{8}$, $d_i(S) = 1$ $(i = 1,2,3,4)$, $\alpha(S) = 4$, $\xi(S) = \frac{13}{3}$, $\|P\| = \frac{7}{3}$.

Как отмечалось выше, для всех n выполняется неравенство

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n-1)+1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}(\theta_n-1)+1. \tag{22}$$

Если наши предположения относительно точных значений ξ_4 и θ_4 верны, то для $n=4$ имеем:

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n-1)+1=\frac{11}{6}, \quad \xi_n=\frac{19+5\sqrt{13}}{9}=4.114\ldots, \quad \frac{n+1}{2}(\theta_n-1)+1=\frac{13}{3}.$$

Неравенства (22) принимают вид $1.833\ldots < 4.114\ldots < 4.333\ldots$

При $n = 1,2,3$ правое неравенство в (22) обращается в равенство. Если наши гипотезы относительно точных значений ξ_4 и θ_4 верны, то наименьшее натуральное n, при котором правое неравенство в (22) является строгим, равно 4.

Таблица 2. Числовые характеристики симплексов S_1, S_2 и S_3
Table 2. Numerical characteristics of simplices S_1, S_2 and S_3

S	S_1	S_2	S_3
$\det(\mathbf{A})$	1	-2	-3
$\mathrm{vol}(S)$	$\frac{1}{24}=0.041\ldots$	$\frac{1}{12}=0.083\ldots$	$\frac{1}{8}=0.125$
$d_1(S)$	1	1	1
$d_2(S)$	1	1	1
$d_3(S)$	1	1	1
$d_4(S)$	1	1	1
$\alpha(S)$	4	4	4
$\xi(S)$	$\frac{13}{3}=4.333\ldots$	$\frac{13}{3}=4.333\ldots$	$\frac{13}{3}=4.333\ldots$
$\|P\|$	$\frac{10}{3}=3.333\ldots$	$\frac{8}{3}=2.666\ldots$	$\frac{7}{3}=2.333\ldots$

6. Гипотеза о значении $\varkappa_4$

В предположении, что $\xi_4=\frac{19+5\sqrt{13}}{9}$, авторы произвели численную проверку гипотезы (H2) для $n=4$. Полученные результаты можно обобщить следующим образом.

При $n = 4$ гипотеза (H2) верна. Неравенство (15) выполняется с неулучшаемой константой

$$\varkappa_4 = \frac{4+\sqrt{13}}{5} = 1.521110\ldots$$

Для любого невырожденного симплекса $S \subset Q_4$ выполняется соотношение

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \frac{4+\sqrt{13}}{5}\,\Big(\xi(S) - \xi_4\Big).$$

Наибольшее значение дроби в соотношении (16) достигается, в частности, для симплекса S_1 с вершинами $\left(\frac{1}{3},1,0,1\right)$, $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{3},1,1,1\right)$, симплекса S_2 с вершинами $\left(1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$, $\left(0,1,\frac{2}{3},1\right)$, $\left(0,0,\frac{2}{3},0\right)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,1)$ и симплекса S_3 с вершинами $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(1,1,1,1)$, см. табл. 2. Заметим, что S_1, S_2, S_3 попарно не эквивалентны, так как имеют попарно различные объёмы. Симплекс S_3 эквивалентен введённому в п. 1 симплексу S^*.

Список литературы / References

[1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]

[2] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15**:3 (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:3 (2008), 28–37, (in Russian).]

[3] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[4] Невский М. В., “Об одном свойстве n-мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n-dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[5] Невский М. В., “О геометрических характеристиках n-мерного симплекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18**:2 (2011), 52–64; [Nevskii M. V., “On geometric charasteristics of an n-dimensional simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **18**:2 (2011), 52–64, (in Russian).]

[6] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.

[7] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2012, 218 с.; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, 218 pp., (in Russian).]

[8] Невский М. В., “Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:2 (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., “Computation of the longest segment of a given direction in a simplex”, *Journal of Math. Sciences*, **203**:6 (2014), 851–854.

[9] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.

[10] Lassak M., "Parallelotopes of maximum volume in a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.

[11] Scott P. R., "Lattices and convex sets in space", *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.

[12] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On Numerical Characteristics of a Simplex and their Estimates", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-603-619

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$, and let $Q_n = [0,1]^n$ be the n-dimensional unit cube. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS we denote the homothetic image of S with the center of homothety in the center of gravity of S and the ratio of homothety σ. We apply the following numerical characteristics of the simplex. Denote by $\xi(S)$ the minimal $\sigma > 0$ with the property $Q_n \subset \sigma S$. By $\alpha(S)$ we denote the minimal $\sigma > 0$ such that Q_n is contained in a translate of a simplex σS. By $d_i(S)$ we mean the ith axial diameter of S, i. e. the maximum length of a segment contained in S and parallel to the ith coordinate axis. We apply the computational formulae for $\xi(S)$, $\alpha(S)$, $d_i(S)$ which have been proved by the first author. In the paper we discuss the case $S \subset Q_n$. Let $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Earlier the first author formulated the conjecture: *if* $\xi(S) = \xi_n$, *then* $\alpha(S) = \xi(S)$. He proved this statement for $n = 2$ and the case when $n+1$ is an Hadamard number, i. e. there exists an Hadamard matrix of order $n+1$. The following conjecture is a stronger proposition: *for each n, there exist* $\gamma \geq 1$, *not depending on* $S \subset Q_n$, *such that* $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$. By $\varkappa_n$ we denote the minimal γ with such a property. If $n+1$ is an Hadamard number, then the precise value of $\varkappa_n$ is 1. The existence of $\varkappa_n$ for other n was unclear. In this paper with the use of computer methods we obtain an equality

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\ldots$$

Also we prove a new estimate

$$\xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\ldots,$$

which improves the earlier result $\xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\ldots$ Our conjecture is that ξ_4 is precisely $\frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Applying this value in numerical computations we achive the value

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211\ldots$$

Denote by θ_n the minimal norm of interpolation projection on the space of linear functions of n variables as an operator from $C(Q_n)$ in $C(Q_n)$. It is known that, for each n,

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1,$$

and for $n = 1, 2, 3, 7$ here we have an equality. Using computer methods we obtain the result $\theta_4 = \frac{7}{3}$. Hence, the minimal n such that the above inequality has a strong form is equal to 4.

Keywords: simplex, cube, coefficient of homothety, axial diameter, linear interpolation, projection, norm, numerical methods

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0002-0007-1896-0951, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Yu. Ukhalov, orcid.org/0009-0203-2514-7755, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 620–634
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 620–634

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-620-634

UDC 512.71

Fibred Product of Commutative Algebras: Generators and Relations

Timofeeva N. V.

Received April 15, 2016

Abstract. The method of direct computation of the universal (fibred) product in the category of commutative associative algebras of finite type with unity over a field is given and proven. The field of coefficients is not supposed to be algebraically closed and can be of any characteristic. Formation of fibred product of commutative associative algebras is an algebraic counterpart of gluing algebraic schemes by means of some equivalence relation in algebraic geometry. If initial algebras are finite-dimensional vector spaces, the dimension of their product obeys a Grassmann-like formula. A finite-dimensional case means geometrically the strict version of adding two collections of points containing a common part.

The method involves description of algebras by generators and relations on input and returns similar description of the product algebra. It is "ready-to-eat" even for computer realization. The product algebra is well-defined: taking other descriptions of the same algebras leads to isomorphic product algebra. Also it is proven that the product algebra enjoys universal property, i.e. it is indeed a fibred product. The input data are a triple of algebras and a pair of homomorphisms $A_1 \stackrel{f_1}{\to} A_0 \stackrel{f_2}{\leftarrow} A_2$. Algebras and homomorphisms can be described in an arbitrary way. We prove that for computing the fibred product it is enough to restrict to the case when $f_i, i = 1, 2$ are surjective and describe how to reduce to the surjective case. Also the way of choosing generators and relations for input algebras is considered.

Paper is published in the author's wording.

Keywords: commutative algebras over a field, affine Grothendieck' schemes, universal product, amalgamated sum

For citation: Timofeeva N. V., "Fibred Product of Commutative Algebras: Generators and Relations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 620–634.

On the authors:
Nadezhda V. Timofeeva, orcid.org/0000-0003-4363-1331, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: ntimofeeva@list.ru

Acknowledgments:
This work was supported by the Federal targeted Program "Scientific and Scientific-pedagogical Personnel of Innovative Russia" under the Grant No 1.1875.2014 (No 2014/258)

Introduction

0.1. Motivation and General Problem

For a motivating example consider affine plane $\mathbb{A}^2$ over a field k and two non-proportional irreducible polynomials g_1, g_2 in two variables x, y over the same field. Let these polynomials have zero sets $Z(g_1) \subset \mathbb{A}^2 \supset Z(g_2)$ and a set of common zeros $Z(g_1, g_2) = Z(g_1) \cap Z(g_2)$. If k is algebraically closed $Z(g_i)$ are irreducible curves for any $g_i, i = 1, 2$, and $Z(g_1, g_2)$ is a discrete collection of points. A union of curves $Z(g_1) \cup Z(g_2)$ is given by zeros of the product polynomial g_1g_2, i.e. $Z(g_1) \cup Z(g_2) = Z(g_1g_2)$ and provides a simple example of amalgamated sum $Z(g_1) \coprod_{Z(g_1,g_2)} Z(g_2)$ of algebraic schemes $Z(g_i), i = 1, 2$ (precise definition will be given below). Transferring to algebraic counterpart one has k-algebras $A_i = k[x, y]/(g_i), i = 1, 2$ corresponding to curves $Z(g_i), i = 1, 2$ respectively, and the k-algebra of intersection locus $A_0 = k[x, y]/(g_1, g_2)$. There are obvious k-algebra homomorphisms $f_i : A_i \twoheadrightarrow A_0$. Formation of the algebra $k[x, y]/(g_1g_2)$ for the union of two components provides an example of universal (fibred) product of k-algebras $A_1 \times_{A_0} A_2$.

For our purposes it is enough to restrict by affine algebraic k-schemes of finite type, i.e. prime spectra (sets of prime ideals with natural topology and collection of local rings forming a structure sheaf on the spectrum) of commutative associative k-algebras of finite type with unity (for complete theory cf. [1, ch.2]). We focus on algebraic side and operate exclusively with underlying algebras.

We describe general *quotient problem* in the category of algebraic schemes over a field k. The problem includes following ingredients:

- a scheme X;
- a subscheme $R \subset X \times X$;
- morphisms $p_i : R \subset X \times X \to X$ defined as composites of the immersion with the projection on ith factor.

The subscheme $R \subset X \times X$ is said to be an *equivalence relation*; this means that it satisfies three requirements as follows:

1. R is *reflexive*, i.e. $R \supset \operatorname{diag}(X)$ where $\operatorname{diag}(X)$ is an image of the diagonal immersion $\operatorname{diag} : X \hookrightarrow X \times X$;
2. R is *symmetric*, i.e. the immersion $R \subset X \times X$ is stable under the involution intertwining first and second factors of the product $X \times X$;
3. R is *transitive*, i.e. $\mathrm{pr}_{13}(R \times X \cap X \times R) \subset R$ where the intersection is taken in $X \times X \times X$. Here $\mathrm{pr}_{13} : X \times X \times X \to X \times X$ is the projection to the product of the 1st and 3rd factors.

The question is [2, ch. 1, 4.3] to construct (if possible) the *universal quotient* X/R. This is an object fitting into the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X/R \end{tikzcd}$$

such that for any other commutative square

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d] \\
X \arrow[r] & T
\end{tikzcd}
$$

there is a unique morphism $\tau : X/R \to T$ (in the appropriate category) fitting into the commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr] & X/R \arrow[dr, "\tau"] & \\
& & T
\end{tikzcd}
$$

The best result should be to know precisely when the universal quotient exist in some category (for example, in the category of algebraic schemes) and when it does not.

0.2. Particular Cases

1. The notion of algebraic space [3] which appears when morphisms $p_i, i = 1, 2$ assumed to be étale. In this case the object X/R belongs to the category of algebraic spaces.

2. Open covering of a scheme Y when $X = \bigsqcup U_\alpha$ is a disjoint union of open subschemes of Y, $R = \bigsqcup R_{\alpha\beta}$ and morphisms $R_{\alpha\beta} \to U_\alpha$ and $R_{\alpha\beta} \to U_\beta$ are local isomorphisms. In this case the object X/R is the scheme Y whose open cover was considered.

3. Let the scheme X is acted upon by an algebraic group G and R is a subscheme induced by G-equivalence [4]. In this case if $X/G = X/R$ exists its universality means that it is a categorical quotient of the scheme X by G.

0.3. Case of Several Components

Now let X be a disjoint union of schemes $X = X_1 \bigsqcup X_2$. Then

$$X \times X = X_1 \times X_1 \bigsqcup X_1 \times X_2 \bigsqcup X_2 \times X_1 \bigsqcup X_2 \times X_2$$

and the equivalence relation is broken into 4 disjoint components

$$R = R_{11} \bigsqcup R_{12} \bigsqcup R_{21} \bigsqcup R_{22}.$$

The problem reduces to the search of the universal completion of the diagram

$$
\begin{tikzcd}
R_{ij} \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, "p_i"'] & X_j \\
X_i &
\end{tikzcd}
$$

This universal completion is called an *amalgam* (or an *amalgamated sum*) of schemes X_i and X_j with respect to R_{ij} and is denoted as $X_i \coprod_{R_{ij}} X_j$. If for each pair $i, j = 1, 2$ the amalgam $X_i \coprod_{R_{ij}} X_j$ exists then $X/R = X \coprod_R X = \coprod_{i,j}(X_i \coprod_{R_{ij}} X_j)$.

0.4. Schemes and algebras

We recall that affine Grothendieck' scheme of finite type over a field k is a prime spectrum $\operatorname{Spec} A$ of associative commutative algebra A of finite type with unity over k.

Recall that the k-algebra A is said to be of finite type if it admits a surjective homomorphism of polynomial algebra in finite set of variables $k[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$. In particular this means that the algebra A under consideration can have any finite Krull dimension (if A admits an epimorphism of polynomial algebra in n variables then the Krull dimension of A is not greater than n). In this case the algebra A as k-vector space can be infinitely-dimensional.

Generally, fibred product and amalgam (or product and corpoduct, or small limits) are dual categorical notions [5, 1.17,1.18] and are not obliged to exist in any category. The schemes under consideration are prime spectra of associative commutative algebras of finite type over k. Duality is done by functorial correspondence taking k-algebra to its prime spectrum. The fibred product of associative commutative k-algebras of finite type as taken by this functor to the amalgam of corresponding spectra. The functorial behavior of fibred product of algebras is analogous to one of fibred product of schemes.

Despite that existence of fibred product for associative commutative algebras is known, the method of explicit computation of it is not described in the literature. We fill this gap.

Let A be a commutative associative algebra of finite type with unity; then it can be represented as a quotient algebra of n-generated polynomial algebra $\phi : k[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$ where n depends on the structure of A. The representing homomorphism ϕ corresponds to the immersion of the scheme $\operatorname{Spec} A$ into k-affine space $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$. By means of this immersion we interpret the abstract k-scheme Z as a closed subscheme $Z \subset \mathbb{A}^n$ of affine space. We call the isomorphism $A \cong k[x_1, \dots, x_n]/\ker \phi$ (resp., the immersion $Z \subset \mathbb{A}^n$) the *affine representation* of the algebra A (resp., scheme Z). This is the reason why any associative commutative algebra of finite type with unity is called an *affine algebra*. Then the k-algebra is affine if and only if it has affine representation. Any affine algebra has many different affine representations.

We prove the following result.

Theorem 1. *The universal (fibred) product of affine algebras of finite type over a field can be compute explicitly by means of generators and relations.*

The method to compute fibred products of affine algebras constitutes the main subject of this article and described below.

First we fix the terminology and describe the algorithm which constructs algebra to be a universal product of algebras by means of their appropriate affine representations. Then we confirm that choice of different appropriate affine representations leads to isomorphic algebras. Finally we prove the universality and hence confirm that the obtained algebra is indeed a fibred product.

I would like to thank the Delaunau Laboratory for the support during my work on this article and my Diploma student I. Chistousov for testing the finite-dimensional version of the method by thoroughly computing various examples.

1. Construction

1.1. Glossary

We work with polynomial rings of view $k[x_1, \dots, x_n]$, its ideals and quotients.

The *basis* of the ideal I is any system of generators of I as $k[x_1, \dots, x_n]$-module.

The basis is *minimal* if it does not span I whenever any of elements is excluded.

The *k-basis* of polynomial algebra (which is not obliged to be with unity) is its basis if the algebra is considered as k-vector space.

The *k-relation* between elements of the algebra A (which is not obliged to be with unity) is a nontrivial k-linear function (nontrivial k-linear combination) in these elements which equals 0 in A. As usually, linear combinations with finite number of nonzero coefficients are considered.

Fix the natural ordering of variables $x_1, \dots, x_n$; then we can use shorthand notation x^α for the monomial $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. The symbol α denotes the row of degrees $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

1.2. Algorithm

Reduction to surjective morphisms

We are given three algebras A_0, A_1, A_2 with morphisms $A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xleftarrow{f_2} A_2$. Show that we can assume that both f_i, $i = 1, 2$ are surjective. Since the morphisms f_i must include into commutative squares of the form

$$\begin{tikzcd} A_0 & A_2 \arrow[l, "f_2"'] \\ A_1 \arrow[u, "f_1"] & A_T \arrow[l, "\chi_1"] \arrow[u, "\chi_2"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

then for any such a commutative square the composite morphisms $f_1 \circ \chi_1$ and $f_2 \circ \chi_2$ have coincident images in A_0. By commutativity of the square $\operatorname{im} f_1 \circ \chi_1 = \operatorname{im} f_2 \circ \chi_2 \subset \operatorname{im} f_i$, $i = 1, 2$. This means that $\operatorname{im} f_i \circ \chi_i \subset \operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2$ and the morphism χ_i factors through the subalgebra $f_i^{-1}(\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2) \subset A_i$ for $i = 1, 2$. Then all algebras of interest A_T complete the square

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2 & {f_2}^{-1}(\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2) \arrow[l, two heads, "f_2'"'] \\ f_1^{-1}(\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2) \arrow[u, two heads, "f_1'"] & A_T \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

to commute.

Denote $A_1' \overset{f_1'}{\twoheadrightarrow} A_0' \overset{f_2'}{\twoheadleftarrow} A_2'$ where $A_0' = \operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2$, $A_i' = f_i^{-1}(A_0')$ and $f_i' = f_i|_{A_i'}$, $i = 1, 2$.

Let there is a fibred product $A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ for the case $A'_1 \overset{f'_1}{\twoheadrightarrow} A'_0 \overset{f'_2}{\twoheadleftarrow} A'_2$. Confirm that $A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ is also a universal product for the initial arbitrary data $A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xleftarrow{f_2} A_2$. By the construction of algebras A'_i, $i = 0, 1, 2$, and by the definition of the algebra $A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ it includes into the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
A_0 & & & A_2 \arrow[lll, "f_2"'] \\
& A'_0 \arrow[ul, hook] & A'_2 \arrow[l] \arrow[ur, hook] & \\
& A'_1 \arrow[u] \arrow[dl, hook] & A'_1 \times_{A'_0} A'_2 \arrow[l] \arrow[u] & \\
A_1 \arrow[uuu, "f_1"] & & &
\end{tikzcd}$$

Let A_T fit into the commutative diagram (1). Then by the universality of $A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ as a product there is a unique homomorphism $\varphi : A_T \to A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ which fits in the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
A_0 & & & A_2 \arrow[lll, "f_2"'] \\
& A'_0 \arrow[ul, hook] & A'_2 \arrow[l, "f'_2"'] \arrow[ur, hook] & \\
& A'_1 \arrow[u, "f'_1"] \arrow[dl, hook] & A'_1 \times_{A'_0} A'_2 \arrow[l] \arrow[u] & \\
A_1 \arrow[uuu, "f_1"] & & & A_T \arrow[lll] \arrow[uuu] \arrow[uull] \arrow[uul] \arrow[ul, dotted, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

This diagram provides universality of the algebra $A'_1 \times_{A'_0} A'_2$ as a product for initial data, i.e.

$$A'_1 \times_{A'_0} A'_2 = A_1 \times_{A_0} A_2.$$

Now we can replace everywhere our initial arbitrary data by the more special case when morphisms f_i, $i = 1, 2$, are surjective.

Easy case

Assume that $A_i \cong k[x_1, \dots, x_n]/I_i$, $i = 0, 1, 2$, so that $A_0 = A_1 \otimes_{k[x_1,\dots,x_n]} A_2$. This assumption says that the subscheme $\operatorname{Spec} A_0 \cong Z_0 \subset \mathbb{A}^n$ is an intersection of subschemes $Z_1 \subset \mathbb{A}^n$ and $Z_2 \subset \mathbb{A}^n$, $Z_i \cong \operatorname{Spec} A_i$, $i = 1, 2$.

Choose minimal bases in ideals I_i, $i = 1, 2$. Consider set of those monomials in $k[x_1, \dots, x_n]$ which are taken to 0 in both A_1 and A_2 by homomorphisms f_1 and f_2 respectively. It is clear that if x^α is such a monomial that for all $\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ the monomial $x^{\alpha+\beta}$ is taken to 0 in both A_1, A_2. Then the set of monomials under consideration generates an ideal J.

Quotient algebra $k[x_1, \dots, x_n]/J$ includes into the commutative square

$$\begin{tikzcd} A_0 & A_2 \arrow[l, two heads, "f_2"'] \\ A_1 \arrow[u, two heads, "f_1"] & k[x_1, \dots, x_n]/J \arrow[l, two heads] \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

Consider k-basis elements in $k[x_1, \dots, x_n]/J$. Since A_i are not obliged to be finite-dimensional over k, $k[x_1, \dots, x_n]/J$ can also have infinite k-basis. We form the list L of k-relations among k-basis elements of $k[x_1, \dots, x_n]/J$ as follows.

The k-relation $\sum a_\alpha x^\alpha$ between elements of $k[x_1, \dots, x_n]/J$ (possibly monomial) is include into L if and only if it equals 0 in both of A_1, A_2. It is clear that the linear span $< L >$ is an ideal in $k[x_1, \dots, x_n]/J$.

Now set $A = (k[x_1, \dots, x_n]/J)/ < L >= k[x_1, \dots, x_n]/(J+ < L >)$.

Remark 1. *By Hilbert's basis theorem, ideals J, $< L >$, and $J+ < L >$ admit finite bases.*

Remark 2. *If A_1 and A_2 finite-dimensional then* $\dim A_1 \times_{A_0} A_2 = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim A_0$. *This follows immediately from the algorithm described. If k is algebraically closed then* $\operatorname{length} A_i = \dim A_i$, *$i = 0, 1, 2$, and then* $\operatorname{length} A_1 \times_{A_0} A_2 = \operatorname{length} A_1 + \operatorname{length} A_2 - \operatorname{length} A_0$.

Hard case

How to build up affine representations of algebras A_0, A_1, A_2 to validate the Easy case, i.e. such that $A_0 = A_1 \otimes_{k[x_1,\dots,x_n]} A_2$?

Start with principal ideals in A_0: only those which are maximal under inclusion are necessary. Take a generator of each such an ideal. Choose any maximal k-linearly independent subset in the set of generators chosen. Since A_0 is an algebra of finite type, this subset is obliged to be finite; let it consist of s elements $g_1, \dots, g_s$. Each element g_j corresponds to the variable x_j in $k[x_1, \dots, x_s]$. The construction done fixes a homomorphism of k-algebras $h_0 : k[x_1, \dots, x_s] \twoheadrightarrow A_0$. Let $K_0 := \ker h_0$. Since $k[x_1, \dots, x_n]$ in Noetherian then K_0 is finitely generated ideal.

Let g'_j be one of preimages of the element $g_j \in A_0$ in A_1, g''_j be one of preimages of the same element in A_2. We complete the set $g'_1, \dots, g'_s$ to form the set of k-linearly independent generators of the algebra A_1, by adding elements $g'_{s+1}, \dots .g'_m \in A_1$. Similarly, the set $g''_1, \dots, g''_s$ is completed to the set of k-linearly independent generators of the algebra A_2 by adding elements $g''_{m+1}, \dots, g''_n$. We put the variables $x_{s+1}, \dots, x_m$ in the correspondence to the elements $g'_{s+1}, \dots, g'_m$ and the variables $x_{m+1}, \dots, x_n$ to the elements $g''_{m+1}, \dots, g''_n$.

This leads to homomorphisms $h_i : k[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A_i$, $i = 0, 1, 2$, $n \geq s$ defined by following correspondences

$$\begin{aligned} h_0(x_j) &= g_j, \ \ j=1,\dots,s,\\ h_0(x_j) &= 0, \ \ j=s+1,\dots,n,\\ h_1(x_j) &= g'_j, \ \ j=1,\dots,m,\\ h_1(x_j) &= 0, \ \ j=m+1,\dots,n,\\ h_2(x_j) &= g''_j, \ \ j=1,\dots,s,m+1,\dots,n,\\ h_2(x_j) &= 0, \ \ j=s+1,\dots,m. \end{aligned}$$

In particular, $h_0 = f_i \circ h_i$.

Affine representations of algebras A_0, A_1, A_2 and their homomorphisms f_1, f_2 lead to closed immersions of their spectra into affine space $\mathbb{A}^n$ according to the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n & \mathrm{Spec}\, A_2 \arrow[l, hook', "h_2^\sharp"'] \\ \mathrm{Spec}\, A_1 \arrow[u, hook, "h_1^\sharp"] & \mathrm{Spec}\, A_0 \arrow[l, hook', "f_1^\sharp"] \arrow[u, hook, "f_2^\sharp"'] \arrow[ul, hook, "h_0^\sharp"'] \end{tikzcd}$$

By some modification of representing homomorphisms h_i, $i=0,1,2$, we will easily achieve that in the appropriate affine space

$$h_0^\sharp(\mathrm{Spec}\, A_0) = h_1^\sharp(\mathrm{Spec}\, A_1) \cap h_2^\sharp(\mathrm{Spec}\, A_2).$$

For this purpose choose any system of generators $\kappa_1,\dots,\kappa_r$ of the ideal K_0 (as $k[x_1,\dots,x_n]$-module). Add to the set of variables $x_1,\dots,x_n$ additional variables (whose number equals to the number r of generators if K_0 chosen) $y_1,\dots,y_r$, and consider in A_1-algebra $A_1[y_1,\dots,y_r]$ an ideal K'_0 generated by all relations of view $y_l - \kappa_l(g'_1,\dots,g'_m)$, $l=1,\dots,r$. Then we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r] \arrow[r, two heads, "h'_2"] \arrow[d, two heads, "h'_1"'] \arrow[dr, two heads, "h'_0"] & A_2 \arrow[d, two heads, "f_2"] \\ A_1[y_1,\dots y_r]/K'_0 \arrow[r, two heads] & A_0 \end{tikzcd}$$

There $h'_i(x_j) = h_i(x_j)$ for $j=1,\dots,n$ and for $i=0,1,2$, but $h'_i(y_j)=0$ for $i=0,2$ and $j=1,\dots,r$.

Lemma 1. *There is an isomorphism of k-algebras $A_1[y_1,\dots y_r]/K'_0 \cong A_1$.*

Proof. Let $K_1 = \ker h_1$. Denote by J' the ideal in the ring $k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r]$ which is generated by relations $y_l - \kappa_l(x_1,\dots,x_n)$, $l=1,\dots,r$. Obviously, $J' \subset \ker h'_1$. The isomorphism of $k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r]$-modules $A_1[y_1,\dots y_r]/K'_0 \cong A_1$ follows from the exact diagram of $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_r]$-modules

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & J' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (y_1, \dots, y_r) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \ker h_1' \arrow[r] \arrow[d] & k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r] \arrow[r] \arrow[d] & A_1[y_1, \dots, y_r]/K_0' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d] & k[x_1, \dots, x_n] \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

where the isomorphism $J' \cong (y_1, \dots, y_r)$ is an isomorphism of free modules of equal ranks done by the correspondence $y_l - \kappa_l(x_1, \dots, x_n) \mapsto y_l$, $l = 1, \dots, r$. The k-algebra isomorphism $A_1[y_1, \dots y_r]/K_0' \cong A_1$ follows from the fact that the quotient algebra $A_1[y_1, \dots y_r]/K_0'$ admits the same system of generators $g_1', \dots, g_m'$ as an algebra A_1, with same relations (equal to generators of the ideal K_1). □

Proposition 1. *The homomorphisms h_i' lead to the expression*

$$A_0 = A_1 \otimes_{k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r]} A_2.$$

Proof. To prove the proposition one needs to confirm that A_0 is universal as a coproduct. Let Q be a k-algebra supplied with two homomorphisms $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} Q \xleftarrow{\varphi_2} A_2$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r] \arrow[r, two heads, "h_2'"] \arrow[d, two heads, "h_1'"'] & A_2 \arrow[d, two heads, "f_2"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
A_1 \arrow[r, two heads, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_1"'] & A_0 & Q
\end{tikzcd}$$

Commutativity of the ambient contour guarantees that $\varphi_1(A_1) = \varphi_2(A_2)$ and hence we can replace Q by $\varphi_1(A_1) = \varphi_2(A_2)$. However we preserve the notation Q but assume that homomorphisms φ_i are surjective. By the construction of homomorphisms h_i', the algebra A_0 is generated by the images of first s variables $x_1, \dots, x_s$.

Then by the commutativity of the ambient contour $\varphi_1 h_1'(x_j) = \varphi_2 h_2'(x_j)$ for $j = 1, \dots, n$. In particular, by the construction of homomorphisms h_i (and of homomorphisms h_i' built up by means of them), $\varphi_1 h_1'(x_j) = \varphi_2 h_2'(x_j) = 0$ for $j = s+1, \dots, n$. For $j = 1, \dots s$ we have $0 = \varphi_1 \circ h_1'(y_l - \kappa_l(x_j)) = \varphi_2 \circ h_2'(y_l - \kappa_l(x_j)) = -\varphi_2 h_2' \kappa_l(x_j)$ for $l = 1, \dots r$ since $h_2'(y_l) = 0$. This implies that homomorphisms φ_i, $i = 1, 2$, factor through the algebra A_0.

The homomorphism $\varphi_0 : A_0 \to Q$ is uniquely defined on generators $h_0'(x_j)$ of A_0 by the correspondence $h_0(x_j) \mapsto \varphi_i \circ h_i'(x_j)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, s$. □

Remark 3. *Proposition 1 means that affine representations constructed are such that the intersection of images of schemes* $\operatorname{Spec} A_1$ *and* $\operatorname{Spec} A_2$ *under closed immersions into* $\operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r] = \mathbb{A}^{n+r}$ *is the image of* $\operatorname{Spec} A_0$.

Remark 4. *In further considerations we use the notation of the view*

$$A_1 \xleftarrow{h_1} k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{h_2} A_2$$

assuming that homomorphisms h_i. $i = 1, 2$, *are surjective and that they admit application of the Easy case, i.e. Proposition 1 holds for them.*

2. Well-Definedness and Universality

2.1. Different affine representations chosen

Proposition 2. *Different affine representations of algebras* A_0, A_1, A_2 *lead to isomorphic product algebras* A.

Proof. Let we have two pairs of different affine representations defined by pairs of homomorphisms

$$A_1 \overset{h_1}{\twoheadleftarrow} k[x_1, \dots, x_n] \overset{h_2}{\twoheadrightarrow} A_2 \quad \text{and} \quad A_1 \overset{h'_1}{\twoheadleftarrow} k[x'_1, \dots, x'_m] \overset{h'_2}{\twoheadrightarrow} A_2$$

such that $A_0 = A_1 \otimes_{k[x'_1, \dots, x'_m]} A_2 = A_1 \otimes_{k[x_1, \dots, x_n]} A_2$. They correspond to two pairs of closed immersions of prime spectra

$$\operatorname{Spec} A_1 \overset{h_1^\sharp}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n \overset{h_2^\sharp}{\hookleftarrow} \operatorname{Spec} A_2 \quad \text{and} \quad \operatorname{Spec} A_1 \overset{h_1'^\sharp}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^m \overset{h_2'^\sharp}{\hookleftarrow} \operatorname{Spec} A_2$$

such that $h_1^\sharp(\operatorname{Spec} A_1) \cap h_2^\sharp(\operatorname{Spec} A_2) = h_0^\sharp(\operatorname{Spec} A_0)$ and $h_1'^\sharp(\operatorname{Spec} A_1) \cap h_2'^\sharp(\operatorname{Spec} A_2) = h_0'^\sharp(\operatorname{Spec} A_0)$. This leads to closed immersions $\overline{h_i^\sharp} : \operatorname{Spec} A_i \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ as composites with the diagonal immersion diag :

$$\overline{h_i^\sharp} : \operatorname{Spec} A_i \overset{\mathrm{diag}}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} A_i \times \operatorname{Spec} A_i \xrightarrow{(h_i^\sharp, h_i'^\sharp)} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m.$$

Now confirm that in this case also $\overline{h_1^\sharp}(\operatorname{Spec} A_1) \cap \overline{h_2^\sharp}(\operatorname{Spec} A_2) = \overline{h_0^\sharp}(\operatorname{Spec} A_0)$.

Homomorphisms $\overline{h}_i$ are defined as composites

$$\begin{array}{ccccc} k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[x'_1, \dots, x'_m] & \xrightarrow{(h_i, h'_i)} & A_i \otimes_k A_i & \overset{\delta_i}{\to} & A_i, \\ g_1 \otimes g_2 & \mapsto & h_i(g_1) \otimes h'_i(g_2) & \mapsto & h_i(g_1) \cdot h'_i(g_2). \end{array}$$

Let Q be an algebra together with two homomorphisms $\varphi_i : A_i \to Q$ such that $\varphi_1 \circ \overline{h}_1 = \varphi_2 \circ \overline{h}_2$. To confirm that $A_0 = A_1 \otimes_{k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[x'_1, \dots, x'_m]} A_2$ it is necessary to construct a unique homomorphism $\varphi_0 : A_0 \to A_T$ such that $\varphi_i = \varphi_0 \circ f_i$. Consider commutative diagrams

$$\begin{tikzcd}
A_i \otimes_k A_i \arrow[r, "(f_i, f_i)"] \arrow[d, "\delta_i"'] & A_0 \otimes_k A_0 \arrow[d, "\delta_0"] \arrow[ddr, "\varphi'_0"] & \\
A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[drr, "\varphi_i"'] & A_0 \arrow[dr, dotted, "\varphi_0"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}$$

for $i = 1, 2$. Let for any reducible tensor $x \otimes x' \in A_i \otimes_k A_i$

$$\begin{array}{ll} (f_i, f_i)(x \otimes x') = \overline{x} \otimes \overline{x}' \in A_0 \otimes_k A_0; & \delta_0(\overline{x} \otimes \overline{x}') = \overline{x} \cdot \overline{x}' \in A_0; \\ f_i(x \cdot x') = \overline{x} \otimes \overline{x}' \in A_0; & \delta_i(x \otimes x') = x \cdot x' \in A_i. \end{array}$$

Since by universality of the product

$$A_0 \otimes_k A_0 = (A_1 \otimes_k A_1) \otimes_{k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m]} (A_2 \otimes_k A_2)$$

the homomorphism φ'_0 is uniquely defined using homomorphisms

$$(\varphi_i, \varphi_i) : A_i \otimes_k A_i \to Q : x \otimes x' \mapsto \varphi_i(x) \cdot \varphi_i(x')$$

as

$$\varphi'_0(\overline{x} \otimes \overline{x}') = \varphi_i(x) \cdot \varphi_i(x') \in Q$$

then $\varphi_0 : A_0 \to Q$ is also uniquely defined as $\varphi_0(\overline{y}) = \varphi_i(y)$ for $\overline{y} = f_i(y)$, $y \in A_i$.

Now it rests to form product algebras for three different affine representations

$$\begin{tikzcd} k[x_1,\ldots,x_n] \arrow[d, "h_i"'] & k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m] \arrow[l, two heads, "\lambda"'] \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\overline{h}_i"'] & k[x'_1,\ldots,x'_m] \arrow[d, "h'_i"] \\ A_i \arrow[r, equal] & A_i \arrow[r, equal] & A_i \end{tikzcd}$$

Horizontal homomorphisms are defined by correspondences $\lambda : x'_l \mapsto 0$, $l = 1, \ldots, m$ and $\rho : x_j \mapsto 0$, $j = 1, \ldots, n$ respectively.

Denoting by $\overline{A}$ the product algebra for $\overline{h}_i : k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m] \twoheadrightarrow A_i$, $i = 0, 1, 2$, we come to the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} k[x_1,\ldots,x_n] \arrow[d, "h"'] & k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m] \arrow[l, two heads, "\lambda"'] \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\overline{h}"'] & k[x'_1,\ldots,x'_m] \arrow[d, "h'"] \\ A & \overline{A} \arrow[l, two heads, "p_A"'] \arrow[r, two heads, "p'_A"] & A' \end{tikzcd} \qquad (2)$$

associated to closed immersions

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m & \hookleftarrow & \mathbb{A}^m, \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0), & & \\ & & (0,\ldots,0,x'_1,\ldots,x'_m) & \longleftarrow\!\shortmid & (x'_1,\ldots,x'_m). \end{array}$$

Vertical homomorphisms in (2) define affine representations for product algebras built up according to the Easy case. Lower horizontal morphisms are surjective by commutativity of the diagram (2).

To prove isomorphicity of lower homomorphisms in (2) consider sections of homomorphisms $k[x_1,\ldots,x_n] \overset{\lambda}{\twoheadleftarrow} k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m] \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} k[x_1,\ldots,x_m]$, i.e. homomorphisms $k[x_1,\ldots,x_n] \overset{s_1}{\hookrightarrow} k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m] \overset{s_2}{\hookleftarrow} k[x_1,\ldots,x_m]$ defined by following rules $s_1 : f \mapsto f \otimes 1$, $s_2 : g \mapsto 1 \otimes g$. A nonzero element from A has nonzero preimage in $k[x_1,\ldots,x_n]$ which has nonzero image in $k[x_1,\ldots,x_n] \otimes_k k[x'_1,\ldots,x'_m]$. This image is taken to nonzero element of at least one of algebras A_1, A_2 and hence has nonzero image in $\overline{A}$. This leads to a homomorphism of k-algebras $s_A : A \to \overline{A}$. It is a section of the homomorphism p_A by its construction.

Now remark that s_A is surjective. Indeed, one can choose a system of k-generators (which is not obliged to be a basis) in $\overline{A}$ which are images of reducible tensors $f \otimes g$ from $k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[x'_1, \dots, x'_m]$, $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, $g \in k[x'_1, \dots, x'_m]$. This expression is defined up to the action of $k^* = k \setminus 0$. A polynomial f has nonzero image at least in one of algebras A_1, A_2. Hence it is taken to nonzero element in A. Since $p_A \circ s_A = \mathrm{id}_A$ then both s_A and p_A are isomorphisms.

Isomorphicity of p'_A is proven analogously. $\square$

2.2. Universality

Proposition 3. *The construction of product algebra A is indeed universal, i.e. A is true fibred product.*

Proof. Let A_T be an affine k-algebra together with two homomorphisms $\chi_i : A_T \to A_i$, $i = 1, 2$ such that $\chi_1 \circ f_1 = \chi_2 \circ f_2$. We construct a homomorphism φ to complete the diagram

$$\begin{tikzcd}
 & A_T \arrow[dl, "\chi_1"'] \arrow[d, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\chi_2"] & \\
A_1 & A \arrow[l, "\overline{f}_1"'] \arrow[r, "\overline{f}_2"] & A_2
\end{tikzcd}$$

Choose appropriate affine representations of algebras A_T, A, A_i, $i = 1, 2$. Perform the manipulations as described in the Easy case. Namely, let J be an ideal in $k[x_1, \dots, x_n]$ generated by all monomials taken to 0 in A_T, A and A_i, $i = 1, 2$.

Quotient algebra $k[x_1, \dots, x_n]/J$ includes in the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "f_1"'] & & \\
A_0 & A_T \arrow[u, "\chi_1"'] \arrow[d, "\chi_2"] & A \arrow[ul, "\overline{f}_1"'] \arrow[dl, "\overline{f}_2"] & k[x_1, \dots, x_n]/J \arrow[l, two heads] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
 & A_2 \arrow[ul, "f_2"] & &
\end{tikzcd}$$

Choose an arbitrary element $\alpha \in A_T$; it is taken to $\chi_1(\alpha) \in A_1$ and to $\chi_2(\alpha) \in A_2$ so that $f_1\chi_1(\alpha) = f_2\chi_2(\alpha)$. Any γ of preimages of α in $k[x_1, \dots, x_n]/J$ is also taken to $f_1\chi_1(\alpha) = f_2\chi_2(\alpha) \in A_0$ and to some element $\overline{\alpha} \in A$. We claim that $\overline{\alpha}$ does not depend on the choice of γ.

Choose another $\gamma' \in k[x_1, \dots, x_n]/J$ taken to α, then $\gamma - \gamma'$ maps to zero in A_T and hence it is mapped to zero in both A_i, $i = 1, 2$. Then by the construction of A (cf. Easy case) $\gamma - \gamma'$ is taken to zero in A. This shows that there is a homomorphism $\varphi : A_T \to A$ such that $\chi_i = \varphi \circ \overline{f}_i$, $i = 1, 2$, as required.

It rests to confirm ourselves that the homomorphism $\varphi : A_T \to A$ does not depend on the choice of affine representations of algebras A_T, A_i, $i = 0, 1, 2$. For this sake assume that there are two different collections of affine representations include into commutative diagrams

$$
\begin{tikzcd}
 & k[x_1,\dots,x_n] \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[d, "h_T"] \arrow[dr, "h_2"] & \\
 & A_T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A_1 \arrow[dr, "f_1"'] & A \arrow[l] \arrow[r] & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
 & A_0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & k[x'_1,\dots,x'_m] \arrow[dl, "h'_1"'] \arrow[d, "h'_T"] \arrow[dr, "h'_2"] & \\
 & A_T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A_1 \arrow[dr, "f_1"'] & A \arrow[l] \arrow[r] & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
 & A_0 &
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

Then consider the algebra $k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]$ and its homomorphisms on quotient algebras $k[x_1,\dots,x_n] \xleftarrow{\lambda} k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m] \xrightarrow{\rho} k[x'_1,\dots,x'_m]$ which are defined by their kernels $\ker\lambda = (x'_1,\dots,x'_m)$, $\ker\rho = (x_1,\dots,x_n)$ and correspond to immersions of subspaces $\mathbb{A}^n \overset{\lambda^\sharp}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^m \overset{\rho^\sharp}{\hookleftarrow} \mathbb{A}^m$ as linear subvarieties. Representations (3) define induced affine representations for algebras A_T, A_i, $i=0,1,2$, according to the following rule: $\overline{h}_T(x_j\otimes x'_l) = h_T(x_j)\cdot h'_T(x'_l)$, $\overline{h}_i(x_j\otimes x'_l) = h_i(x_j)\cdot h'_i(x'_l)$, $i=0,1,2$, $j=1,\dots,n$, $l=1,\dots,m$. This rule corresponds to the composites of immersions of prime spectra

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_T^\sharp &: \operatorname{Spec} A_T \overset{\text{diag}}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} A_T\times\operatorname{Spec} A_T \overset{(h_T^\sharp,{h'_T}^\sharp)}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^m,\\
\overline{h}_i^\sharp &: \operatorname{Spec} A_i \overset{\text{diag}}{\hookrightarrow} \operatorname{Spec} A_i\times\operatorname{Spec} A_i \overset{(h_i^\sharp,{h'_i}^\sharp)}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^m.
\end{aligned}
$$

Let J be the ideal generated by all monomials in $k[x_1,\dots,x_n]$ taken to 0 in A_T and in A_i, $i=0,1,2$, J' be the similar ideal in $k[x'_1,\dots,x'_m]$, and $\overline{J}$ the similar ideal in $k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]$. Quotient algebras by these ideals include into the following commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
k[x_1,\dots,x_n] \arrow[d] & k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m] \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & k[x'_1,\dots,x'_m] \arrow[d] \\
k[x_1,\dots,x_n]/J & k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]/\overline{J} \arrow[l, two heads] \arrow[r, two heads] & k[x'_1,\dots,x'_m]/J'
\end{tikzcd}
$$

Now we perform the construction of homomorphisms φ,φ' and $\overline{\varphi}$ using quotient algebras $k[x_1,\dots,x_n]/J, k[x'_1,\dots,x'_m]/J'$ and $k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]/\overline{J}$ respectively, as described in the beginning of this subsection. This yields in two commutative diagrams

$$
\begin{tikzcd}
k[x_1,\dots,x_n]/J \arrow[dd] \arrow[dr] & & k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]/\overline{J} \arrow[ll, two heads] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
 & A_T \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[rr, equal] & & A_T \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\
A \arrow[rr, equal] & & A &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
k[x_1,\dots,x_n]\otimes_k k[x'_1,\dots,x'_m]/\overline{J} \arrow[rr, two heads] \arrow[dd] \arrow[dr, two heads] & & k[x'_1,\dots,x'_m]/J' \arrow[dd] \arrow[dr, two heads] & \\
& A_T \arrow[rr, equal] \arrow[dl, two heads, "\overline{\varphi}"'] & & A_T \arrow[dl, two heads, "\varphi'"'] \\
A \arrow[rr, equal] & & A &
\end{tikzcd}$$

what implies that $\varphi = \varphi' = \overline{\varphi}$. $\square$

Example 1. *For example consider $A_1 = A_2 = k[x,y]/(x^2 - y)$, $A_0 = k[x]/(x^2)$, with homomorphisms $f_i : x \mapsto x, y \mapsto 0$, $i = 1,2$. The "occasional" affine representation used in the definition of these algebras cannot be involved to construct their product since $A_1 \otimes_{k[x,y]} A_2 = k[x,y]/(x^2 - y) \neq A_0$. Then it is necessary to form a new affine representation which fits for constructing a product, using Hard case.*

The algebra $A_0 = k[x]/(x^2)$ contains unique maximal principal ideal. Its generating element x corresponds to first variable x_1 and gives rise to the affine representation $k[x_1] \twoheadrightarrow A_0$, $x_1 \mapsto x$. Further, manipulations according to the Hard case lead to the polynomial algebra $k[x_1, x_2, x_3, y]$ and representations for algebras

$$A_1 = k[x_1,x_2,x_3,y]/(x_1^2 - x_2, x_3, x_1^2 - y), \quad A_2 = k[x_1,x_2,x_3,y]/(x_1^2 - x_3, x_2, y).$$

These algebras represent geometrically two parabolas with common tangent line in two 2-dimensional planes in 4-dimensional affine space. Planes meet along this tangent line. In this case

$$\begin{aligned} A_1 \otimes_{k[x_1,x_2,x_3,y]} A_2 &= k[x_1,x_2,x_3,y]/(x_1^2 - x_2, x_3, x_1^2 - y, x_1^2 - x_3, x_2, y) \\ &= k[x_1,x_2,x_3,y]/(x_1^2, x_2, x_3, y) = A_0. \end{aligned}$$

This means that our two parabolas intersect along the subscheme defined by the algebra A_0. This validates application of Easy case to affine representations we've constructed. The list J of monomials vanishing in both algebras A_i, $i = 1,2$, is empty. The ideal $< L >$ has a form $< L >= (x_1^2 - x_2 - x_3, x_2 - y, x_2x_3)$, and $A_1 \times_{A_0} A_2 = k[x_1,x_2,x_3,y]/ < L >= k[x_1,x_2,x_3,y]/(x_1^2 - x_2 - x_3, x_2 - y, x_2x_3) = k[x_1,x_2,x_3]/(x_1^2 - x_2 - x_3, x_2x_3)$. From the geometrical point of view this is union of two parabolas having a common tangent line at the origin. Parabolas lie in different 2-planes which meet along parabolas' common tangent line.

References

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, graduate texts in Math.: 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[2] V.I. Danilov, "Algebraic manifolds and schemes. (Russian)", *Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamentalnye napravleniya (Contemporary Problems of Math. Fundamental Directions). Itogi nauki i tehn. VINITI RAN USSR*, **23** (1988), 172–302.

[3] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **203**, Springer, 1971.

[4] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Second enlarged Ed., Springer-Verlag, Berlin –Heidelberg – New York, 1982.

[5] S. I. Gel'fand, Yu. I. Manin, "Homological algebra (Russian) (Gomologicheskaya algebra)", *Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye napravleniya (Contemporary Problems of Math. Fundamental Directions). Itogi nauki i tehn. VINITI RAN USSR*, **38** (1989), 5–238.

Тимофеева Н. В., "Расслоенное произведение коммутативных алгебр: образующие и соотношения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 620–634.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-620-634

Аннотация. В работе дан и обоснован метод прямого вычисления универсального (расслоенного) произведения в категории коммутативных ассоциативных алгебр конечного типа с единицей над полем. Поле коэффициентов не предполагается алгебраически замкнутым и может иметь любую характеристику. Формирование расслоенного произведения коммутативных ассоциативных алгебр составляет алгебраическую сторону процедуры склеивания алгебраических схем по некоторому отношению эквивалентности в алгебраической геометрии. Если исходные алгебры являются конечномерными векторными пространствами, то размерность их расслоенного произведения подчиняется формуле, аналогичной формуле размерности суммы подпространств. Геометрически конечномерный случай поставляет строгую версию объединения двух наборов точек, имеющих общую часть. Метод использует задание алгебр образующими и определяющими соотношениями на входе и выдает аналогичное представление произведения на выходе. Он пригоден для компьютерной реализации. Произведение алгебр определено корректно: выбор иных представлений тех же алгебр приводит к изоморфной алгебре-произведению. Также показано, что алгебра-произведеное обладает свойством универсальности, т.е. является настоящим расслоенным произведением. Входные данные – это тройка алгебр и пара гомоморфизмов $A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xleftarrow{f_2} A_2$. Алгебры и гомоморфизмы могут быть заданы произвольным образом. Показано, что для вычисления расслоенного произведения достаточно ограничиться случаем, когда гомоморфизмы $f_i, i = 1, 2$ сюръективны, и описан способ редукции к сюръективному случаю. Также рассмотрено правило выбора образующих и соотношений для исходных алгебр.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: коммутативные алгебры над полем, аффинные схемы Гротендика, универсальное произведение, амальгамированная сумма

Об авторах:
Тимофеева Надежда Владимировна, orcid.org/0000-0003-4363-1331, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: ntimofeeva@list.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке проекта №1.1875.2014/К проектной части госзадания на НИР ЯрГУ №2014/258

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 635–656
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 635–656

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-635-656

УДК 517.929

Асимптотическое интегрирование одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием

Нестеров П. Н.

получена 5 мая 2016

Аннотация. В работе строятся асимптотические формулы для решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием при стремлении независимой переменной к бесконечности. Следует отметить две особенности, касающиеся рассматриваемого уравнения. Во-первых, коэффициент этого уравнения имеет колебательно убывающий вид. Во-вторых, при нулевом запаздывании это уравнение переходит в так называемое одномерное уравнение Шредингера с нулевой энергией и потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Динамика решений последнего хорошо известна. В этой связи интерес представляет вопрос о том, как изменяется характер поведения решений этого уравнения в качественном и количественном отношении при введении в эту динамическую модель запаздывания. Рассматриваемое уравнение интересно также и с позиции теории колебаний решений функционально-дифференциальных уравнений. Используемая в работе методика асимптотического интегрирования опирается на идеологию теории центральных многообразий в ее изложении применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Суть метода сводится к построению так называемого критического многообразия в фазовом пространстве динамической системы. Это многообразие является притягивающим и положительно инвариантным, а значит, динамика всех решений исходного уравнения определяется динамикой решений на критическом многообразии. Система, описывающая динамику решений на критическом многообразии, представляет собой линейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении асимптотики решений этой системы используются усредняющие замены переменных и замены, позволяющие диагонализировать переменные матрицы. В результате подобных преобразований система на критическом многообразии приводится к так называемому L-диагональному виду. Асимптотика фундаментальной матрицы L-диагональной системы может быть построена с помощью классической теоремы Н. Левинсона.

Ключевые слова: асимптотика, уравнение с запаздыванием, уравнение Шредингера, осциллирующие коэффициенты, колеблемость решений, теорема Левинсона, метод усреднения

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Асимптотическое интегрирование одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 635–656.

Об авторах:
Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.

Постановка задачи

Исследованию поведения решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - q(t)x = 0 \tag{1}$$

при $t \to +\infty$ посвящено значительное число работ. Во многих из них исследуется задача о колеблемости (или, наоборот, неколеблемости) решений уравнения (1) (см., в частности, [1, 5–7]). Вопросу построения асимптотики решений этого уравнения посвящены, в частности, работы [14, 15]. В работах [3, 8, 12] уравнение (1) рассматривается как одномерное уравнение Шредингера при нулевой энергии. Авторами строится асимптотика решений этого уравнения при $t \to +\infty$ в случае некоторых специальных потенциалов $q(t)$. К исследованным в этих работах случаям относится и случай так называемого потенциала типа Вигнера–фон Неймана:

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^\rho}, \qquad \rho > 0. \tag{2}$$

Здесь $p(t)$ — действительный тригонометрический многочлен, имеющий нулевое среднее значение, т. е.

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad p_{-j} = \bar{p}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \tag{3}$$

причем

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T p(t)dt = p_0 = 0. \tag{4}$$

Символом $\bar{a}$ обозначено число, комплексно сопряженное к a.

Колебательный характер функции $q(t)$ существенно усложняет исследование динамики уравнения (1) и для получения асимптотических формул авторами используются различные методы. Как оказывается, динамика решений уравнения (1) в случае функции $q(t)$ вида (2), (3) во многом определяется величиной

$$a = \mathrm{M}\Big[\Big(\int\limits_0^t p(s)ds\Big)^2\Big] - \Big(\mathrm{M}\Big[\int\limits_0^t p(s)ds\Big]\Big)^2 = \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} \geq 0, \tag{5}$$

а также параметром ρ, характеризующим скорость убывания амплитуды колебаний функции $q(t)$ (см. таблицу 1 в разделе 3.).

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} - q(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0 \tag{6}$$

при условиях (2)–(4). Отметим, что в известных автору работах уравнения вида (6) рассматриваются, в основном, с позиций исследования вопроса о колеблемости решений. Отметим, в частности, монографии [10, 17, 18], в которых читатель может найти обзор литературы по этой тематике, а также работы [11, 20, 21], посвященные исследованию вопроса о колеблемости решений уравнений второго порядка с запаздыванием. Заметим также, что почти во всех работах, в которых изучается вопрос о колеблемости решений уравнений типа (6), функция $q(t)$ предполагается сохраняющей знак при $t \geq t_0$. Если функция $q(t)$ осциллирует, то известные методы оказываются не применимы. В работе будут построены асимптотические формулы, описывающие поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$. Нас будет интересовать вопрос о качественных и количественных различиях в динамике решений уравнения (6) и решений уравнения (1) с такой же функцией $q(t)$.

1. Описание метода асимптотического интегрирования

Запишем уравнение (6) в виде системы

$$\dot{y} = B_0 y_t + G(t, y_t), \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^2\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^2$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$ и определяемый формулой

$$B_0 \varphi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(0), \qquad \varphi(\theta) \in C_h. \tag{8}$$

Оператор $G(t, \varphi(\theta))$, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$, имеет вид

$$G(t, \varphi(\theta)) = q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(-h). \tag{9}$$

Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{10}$$

построенное для линейной автономной системы

$$\dot{y} = B_0 y_t, \tag{11}$$

имеет ровно два корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Рассматривая эти корни как корни характеристического квазиполинома (число корней которого счетно), формально можно считать, что все остальные корни уравнения (10) подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda < -\beta$, где $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Данное обстоятельство позволяет для построения асимптотики решений системы (7) воспользоваться методом, предложенным в работе [19]. Опишем далее суть этого метода.

Известно, что линейная автономная система (11) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)\colon C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (11), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = y_t^{\varphi}(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $y_t^{\varphi}(\theta)$ — решение системы (11) с начальным условием $y_0^\varphi(\theta) = \varphi$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \left\{\varphi \in C_h \;\middle|\; \varphi'(\theta) \in C_h, \;\; \varphi'(0) = B_0\varphi\right\}$$

плотна в C_h. Введем представление Рисса для оператора B_0:

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta),$$

где (2×2)-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$. С системой (11) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y}_* = -\int\limits_{-h}^{0} y_*(t-\theta)d\eta(\theta), \tag{12}$$

где $y_*(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины 2. Фазовым пространством для системы (12) является множество $C_h' \equiv C\big([0,h], \mathbb{C}^{2*}\big)$, где $\mathbb{C}^{2*}$ — пространство вектор-строк длины 2. Для любых $\psi \in C_h'$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi), \varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{14}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство, такое что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим (2×2)-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — (2×2)-матрица, по строкам которой расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (13). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi), \Phi(\theta)\big) = \Big\{\big(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta)\big)\Big\}_{1 \le i,j \le 2} = I. \tag{15}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая (2×2)-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{16}$$

где $-h \le \theta \le 0$ и $t \ge 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{17}$$

где $0 \le \xi \le h$. Матрицы $\Phi(0)$ и $\Psi(0)$ выбираются из следующих соображений. Столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ являются обобщенными собственными векторами инфинитезимального производящего оператора A, а следовательно, они принадлежат $D(A)$. Значит,

$$\Phi'(0) = \Phi(0)D = B_0\Phi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi(0)e^{D\theta}.$$

Аналогично, учитывая (12) и (17), выводим

$$\Psi'(0) = -D\Psi(0) = -\int\limits_{-h}^{0} e^{D\theta}\Psi(0)d\eta(\theta).$$

Возвращаясь теперь к разложению (14), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^2\},\\ Q_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid (\Psi, \varphi) = 0\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Несложные вычисления приводят нас к следующим формулам для матриц $\Phi(\theta)$, $\Psi(\xi)$ и D, построенных применительно к системе (11) в случае оператора (8):

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Определение 1. *Линейное двумерное пространство $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \ge t_* \ge t_0$ называется критическим многообразием для системы (7), если выполнены следующие условия:*

1. Существует (2×2)-матрица $H(t, \theta)$ непрерывная по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \ge t_*$ и $\|H(t, \cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t, \cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \le \theta \le 0} |H(t, \theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве (2×2)-матриц;

2. Пространство $\mathcal{W}(t)$ для $t \ge t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t, \theta)u,\ u \in \mathbb{C}^2\Big\}. \tag{20}$$

3. Пространство $\mathcal{W}(t)$ при $t \ge t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (7), т. е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \ge t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \ge T$.

Из результатов [19] следует, что при достаточно больших t в пространстве C_h для системы (7) существует критическое многообразие. Кроме того, данное множество является притягивающим множеством для всех траекторий системы (7). Скорость, с которой все траектории притягиваются к $\mathcal{W}(t)$, есть величина порядка $O(e^{-\beta t})$, где $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Траектории, лежащие при всех достаточно больших t в $\mathcal{W}(t)$, описываются формулой

$$y_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^2. \tag{21}$$

Здесь функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{22}$$

Эту систему называют проекцией системы (7) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. Можно показать (см. [19]), что матрица $H(t,\theta)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big) + H(t,\theta)\left(D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big), & \theta = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, если $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (22), а $y(t)$ — произвольное решение системы (7), определенное при $t \geq T$, то в силу (21) имеем

$$y(t) = y_t(0) = \big(\Phi(0) + H(t,0)\big)\big(c_1 u^{(1)}(t) + c_2 u^{(2)}(t)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty, \tag{24}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

В дальнейшем мы покажем, что система (22) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{u} = \Big[D + A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_k(t)t^{-k\rho} + R(t)\Big]u, \qquad u \in \mathbb{C}^2. \tag{25}$$

В этой системе матрица D определяется формулой (19), натуральное число k выбрано так, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, а $A_1(t), \ldots, A_k(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е. матрицы вида

$$A_j(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_s^{(j)} e^{\mathrm{i}\nu_s t}, \tag{26}$$

где $\beta_s^{(j)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы, а ν_s — вещественные числа. Наконец, матрица $R(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Построение асимптотики решений системы (25) при $t \to \infty$ усложняет то обстоятельство, что ее коэффициенты имеют колебательный вид. Поэтому на первом этапе построения асимптотических формул в системе (25) осуществляется так называемая усредняющая замена, которая позволяет избавиться от осциллирующих величин в главной части системы. Имеет место следующая теорема (см. [9]).

Теорема 1. *Система* (25) *при достаточно больших* t *заменой*

$$u = \Big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t)t^{-k\rho}\Big]u_1 \tag{27}$$

приводится к виду

$$\dot{u}_1 = \Big[D + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t))\Big]u_1(t) \tag{28}$$

с постоянными матрицами $A_1, \ldots, A_k$ *и матрицей* $R_1(t)$ *из класса* $L_1[t_*, \infty)$. *В замене* (27) I *— единичная матрица, а элементами матриц* $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ *являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением.*

Как правило, для построения асимптотики решений системы (28) достаточно вычислить лишь несколько первых постоянных матриц. По этой причине приведем здесь для них явные формулы. Имеем

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \tag{29}$$

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \tag{30}$$

$$A_3 = \mathrm{M}\big[A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t)\big]. \tag{31}$$

Матрицы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{Y}_1 - DY_1 + Y_1 D = A_1(t) - A_1, \tag{32}$$

$$\dot{Y}_2 - DY_2 + Y_2 D = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t) - Y_1(t)A_1 - A_2. \tag{33}$$

Дальнейшее преобразование усредненной системы (28) направлено на приведение ее с помощью некоторых специальных замен к виду

$$\dot{u}_2 = \big[A_0 + V(t)\big]t^{-\alpha}u_2 + R_2(t)u_2, \qquad \alpha > 0, \tag{34}$$

где A_0 — постоянная матрица, все собственные значения которой различны, $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{V}(t), R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Справедлива следующая лемма (см., например, [1, 4, 16]).

Лемма 1 (о диагонализации переменной матрицы). *Пусть все собственные числа матрицы* A_0 *различны, а матрица* $V(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. *Тогда при достаточно больших* t *существует невырожденная матрица* $C(t)$ *такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы* $A_0 + V(t)$ *и* $C(t) \to C_0$ *при* $t \to \infty$. *Постоянная матрица* C_0 *составлена из собственных векторов матрицы* A_0;

(ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_*, \infty)$;

(iii) *она приводит матрицу* $A_0 + V(t)$ *к диагональному виду, т. е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_0 + V(t)\big]C(t) = \hat{\Lambda}(t),$$

где $\hat{\Lambda}(t) = \mathrm{diag}\big(\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)\big)$ *и* $\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t)$ *— собственные числа матрицы* $A_0 + V(t)$.

В системе (34) осуществим замену

$$u_2(t) = C(t)u_3(t), \tag{35}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (34) к так называемому L-диагональному виду:

$$\dot{u}_3 = \big[\Lambda(t) + R_3(t)\big]u_3, \tag{36}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, $\lambda_j(t) = \hat{\lambda}_j(t)t^{-\alpha}$ $(j = 1, 2)$ и

$$R_3(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)R_2(t)C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ матрица $R_3(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$.

Для построения асимптотики фундаментальной матрицы L-диагональной системы (36) при $t \to \infty$ может быть использована известная асимптотическая теорема Н. Левинсона. Предположим, что для элементов матрицы $\Lambda(t)$ выполнено следующее условие, называемое условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{37}$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{38}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема (см., например, [4, 16]).

Теорема 2 (**Levinson**). *Пусть выполнено условие дихотомии* (37), (38). *Тогда фундаментальная матрица L-диагональной системы* (36) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$U(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{39}$$

2. Построение асимптотических формул

С учетом формул (9), (19) уравнение (23) для нахождения матрицы $H(t,\theta)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, принимает следующий вид:

$$q(t)\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix}+q(t)\begin{pmatrix}\theta & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h)+H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}+$$
$$+q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h)+\frac{\partial H}{\partial t}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial\theta}, & -h\le\theta<0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}H(t,0)+q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}+q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h), & \theta=0.\end{cases}\tag{40}$$

Система на критическом многообразии (22) имеет вид

$$\dot u=\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}+q(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h)\right]u.\tag{41}$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}H(t,-h)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ h_{11}(t,-h) & h_{12}(t,-h)\end{pmatrix},\quad H(t,\theta)=\begin{pmatrix}h_{11}(t,\theta) & h_{12}(t,\theta)\\ h_{21}(t,\theta) & h_{22}(t,\theta)\end{pmatrix},$$

то нам необходимо определить из уравнения (40) лишь элементы $h_{11}(t,\theta)$ и $h_{12}(t,\theta)$ матрицы $H(t,\theta)$. Согласно [19], решение (40) может быть представлено в виде

$$H(t,\theta)=H_1(t,\theta)t^{-\rho}+H_2(t,\theta)t^{-2\rho}+\ldots+H_k(t,\theta)t^{-k\rho}+Z(t,\theta),\tag{42}$$

где натуральное k выбрано так, что $(k+1)\rho>1$, $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}\in L_1[t_*,\infty)$, а элементами матриц $H_i(t,\theta)$ являются тригонометрические многочлены переменной t, коэффициенты которых достаточно гладко зависят от $\theta\in[-h,0]$. Подставим (42) в уравнение (40) и учтем (2). Собирая члены при $t^{-\rho}$ и отбрасывая слагаемые, принадлежащие классу $L_1[t_*,\infty)$, получаем следующее уравнение для нахождения матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$p(t)\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix}+H_1(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{\partial H_1}{\partial t}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\partial H_1}{\partial\theta}, & -h\le\theta<0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}H_1(t,0)+p(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}, & \theta=0.\end{cases}\tag{43}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$H_1(t,\theta)=\sum_{j=-N}^{N}\beta_j(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}.\tag{44}$$

Подставляя теперь (44) в (43) и собирая слагаемые при $e^{\mathrm{i}\omega_j t}$, с учетом (3) получаем следующие задачи для нахождения матриц $\beta_j(\theta)$, $j = -N, \dots, N$:

$$p_j \begin{pmatrix} \theta & -\theta h \\ 1 & -h \end{pmatrix} + \beta_j(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\omega_j \beta_j(\theta) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{d\beta_j}{d\theta}, \quad -h \le \theta < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \beta_j(0) + p_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \quad \theta = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Пусть

$$\beta_j(\theta) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\theta) & \beta_{12}(\theta) \\ \beta_{21}(\theta) & \beta_{22}(\theta) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где зависимость элементов матрицы $\beta_j(\theta)$ от индекса j для простоты записи временно упущена. Тогда задачу (45) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \beta'_{11}(\theta) = p_j\theta + \mathrm{i}\omega_j\beta_{11}(\theta), \\ \beta'_{12}(\theta) = -p_j\theta h + \beta_{11}(\theta) + \mathrm{i}\omega_j\beta_{12}(\theta), \\ \beta'_{21}(\theta) = p_j + \mathrm{i}\omega_j\beta_{21}(\theta), \\ \beta'_{22}(\theta) = -p_j h + \beta_{21}(\theta) + \mathrm{i}\omega_j\beta_{22}(\theta) \end{cases} \tag{47}$$

с начальными условиями, которые определяются из системы

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega_j\beta_{11}(\theta) = \beta_{21}(0), \\ \beta_{11}(0) + \mathrm{i}\omega_j\beta_{12}(0) = \beta_{22}(0), \\ \mathrm{i}\omega_j\beta_{21}(0) = 0, \\ \beta_{21}(0) + \mathrm{i}\omega_j\beta_{22}(0) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Из (48) выводим, что $\beta_{ij}(0) = 0$ для всех $i, j = 1, 2$. Решая затем систему (47) с нулевыми начальными условиями при $\theta = 0$, получаем, что

$$\beta_{11}^{(j)}(\theta) := \beta_{11}(\theta) = -\frac{p_j}{\omega_j^2} e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} - \frac{p_j}{\mathrm{i}\omega_j}\theta + \frac{p_j}{\omega_j^2}, \tag{49}$$

$$\beta_{12}^{(j)}(\theta) := \beta_{12}(\theta) = \left(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\right) e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\theta e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} + \left(\frac{p_j h}{\mathrm{i}\omega_j} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\right)\theta - \left(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\right). \tag{50}$$

Наконец, как следует из [19], для матрицы $Z(t, \theta)$ в (42) справедлива следующая оценка:

$$\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} = O\Big(\frac{d}{dt}(t^{-\rho})\Big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big) = O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big), \quad t \to \infty. \tag{51}$$

Таким образом, учитывая (2), (42), (44), (46), (49), (50), (51), получаем следующее представление для системы на критическом многообразии (41):

$$\dot{u} = \big[D + A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho} + R(t)\big]u. \tag{52}$$

Здесь матрица D имеет вид (19), а матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$ задаются формулами:

$$A_1(t) = p(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = p(t) \sum_{j=-N}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{11}^{(j)}(-h) & \beta_{12}^{(j)}(-h) \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega_j t}. \tag{53}$$

Явный вид матриц $A_i(t)$, $i = 3, \dots, k+1$, нам для дальнейших вычислений не потребуется. Отметим лишь, что элементами этих матриц являются тригонометрические многочлены

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

стоящие в позициях, отмеченных знаком $*$. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$ и допускает следующее представление при $t \to \infty$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) & O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

В системе (52) осуществим усредняющую замену переменных

$$u = \big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + \ldots + Y_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho}\big]u_1.$$

Подставляя эту замену в (52) и удерживая слагаемое порядка $O\big(t^{-(\rho+1)}\big)$ (несмотря на то что оно принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$), на основании теоремы 1 приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \big[D + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1} t^{-(k+1)\rho} + \rho Y_1(t) t^{-(\rho+1)} + R_1(t)\big]u_1. \tag{55}$$

Здесь A_i, $i = 1, \dots, k+1$, — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрицы A_1, A_2 и A_3 определяются формулами (29)–(31), а матрица $Y_1(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, находится из уравнения (32) и имеет следующий вид:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} \iint p(t)(dt)^2 & -2\iiint p(t)(dt)^3 - h\iint p(t)(dt)^2 \\ \int p(t)dt & -\iint p(t)(dt)^2 - h\int p(t)dt \end{pmatrix}.$$

Символом $\int$ обозначена первообразная, имеющая нулевое среднее значение. Матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$ при $t \to \infty$ имеет порядок $O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big)$. В силу (4), (29) и (53) матрица A_1 является нулевой. При вычислении матрицы A_2 согласно (30) заметим, что

$$\mathrm{M}\big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = \mathrm{M}\Big[\big(\int p(t)dt\big)^2\Big]$ есть в точности величина (5). Кроме того, здесь мы учли следующие формулы, которые проверяются простым интегрированием по частям:

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iint p(t)(dt)^2\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\Big(\int p(t)dt\Big)^2\Big], \quad \mathrm{M}\Big[p(t)\int p(t)dt\Big] = 0,$$
$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iiint p(t)(dt)^3\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\int p(t)dt \iint p(t)(dt)^2\Big] = 0.$$

Поскольку в силу (3) и (49)

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N} \beta_{11}^{(j)}(-h)e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = a - \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} e^{\mathrm{i}\omega_j h},$$

то окончательно получаем следующую формулу для матрицы A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a(h) & \nu(h) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

где

$$a(h) = \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} e^{\mathrm{i}\omega_j h} = 2\sum_{j=1}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} \cos(\omega_j h), \quad a(0) = a, \tag{57}$$

и, с учетом (3), (50),

$$\nu(h) = \mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N} \beta_{12}^{(j)}(-h) e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = 2\sum_{j=-N}^{N} |p_j|^2 \Big(\frac{h}{\omega_j^2} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big) e^{\mathrm{i}\omega_j h} = \tag{58}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{4|p_j|^2}{\omega_j^2}\Big(h\cos(\omega_j h) - \frac{1}{\omega_j}\sin(\omega_j h)\Big) = 2ha(h) - 4\sum_{j=1}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^3}\sin(\omega_j h).$$

Матрица A_3, вычисляемая по формуле (31), имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \psi(h) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(h)$, $\psi(h)$ — некоторые действительные величины, не оказывающие влияния на структуру асимптотических формул в главном.

Чтобы улучшить оценку остаточного члена, осуществим в системе (55) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + V(t)t^{-(\rho+1)}\big]u_2,$$

где матрица $V(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, определяется как решение уравнения

$$\dot V - DV + VD = \rho Y_1(t).$$

Поскольку $\mathrm{M}\big[Y_1(t)\big] = 0$, то в результате этой замены мы получим систему

$$\dot u_2 = \big[D + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1}t^{-(k+1)\rho} + R_2(t)\big]u_2, \tag{59}$$

где $R_2(t) = O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)$ при $t \to \infty$.

Продолжая упрощение системы на критическом многообразии, в системе (59) сделаем так называемое срезающее преобразование

$$u_2 = \begin{pmatrix} t^{\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix} u_3. \tag{60}$$

Приходим к системе

$$\dot u_3 = \big[B_0 t^{-1} + B_1 t^{-\rho} + B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t)\big]u_3, \tag{61}$$

где

$$B_0 = \frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(h) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \nu(h) \end{pmatrix} \tag{62}$$

и B_i ($i = 3, \dots k$) — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрица $R_3(t)$ из класса $L_1[t_*, \infty)$ имеет при $t \to \infty$ порядок $O(t^{-(k+1)\rho}) + O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-2}\big)$. Система (61) может быть представлена в виде (34), а значит, для построения асимптотики ее решений при $t \to \infty$ можно воспользоваться леммой 1 совместно с теоремой Левинсона. Далее нам необходимо рассмотреть различные интервалы изменения параметра ρ.

Пусть сначала

$$\rho > 1. \tag{63}$$

В этом случае функции $t^{-j\rho}$, $j = 1, \dots, k$, принадлежат классу $L_1[t_*, \infty]$. Поскольку матрица B_0 является диагональной, то система (61) имеет L-диагональную форму (36). Следовательно, ее фундаментальная матрица в силу теоремы 2 имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[I + o(1)\big] \begin{pmatrix} t^{-\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix}.$$

С учетом преобразования (60) получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (59):

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) & o(t^{\rho}) \\ o(1) & 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad t \to \infty. \tag{64}$$

К сожалению, данное представление не позволяет получить главную часть асимптотики для первой компоненты второго базисного решения системы (59). Это можно сделать следующим образом. Пусть

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix},$$

тогда из (59) с учетом (63) следует, что

$$\dot{u}_{12} = u_{22}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{22}(t) = O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + 1 + o(1).$$

Интегрируя этого уравнение и учитывая, что $O\big(t^{-(\rho+2)}\big) \in L_1[t_*, \infty)$, получаем

$$u_{12}(t) = \exp\Big\{\int\limits_{t_*}^{t} O\big(s^{-(\rho+2)}\big)ds\Big\}u_{12}(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \exp\Big\{\int\limits_{s}^{t} O\big(\tau^{-(\rho+2)}\big)d\tau\Big\}\big(1 + o(1)\big)ds =$$
$$= \big(1 + o(1)\big)t, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, фундаментальные решения системы (59), а значит, и системы (41) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \big(1 + o(1)\big)t \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}.$$

Замечая теперь, что в силу (19), (42) и (51)

$$\Phi(0) + H(t, 0) = I + o(1), \qquad t \to \infty, \tag{65}$$

из (24) с учетом (7) выводим, что все решения уравнения (6) в случае (63) допускают следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t + c_2\big(1 + o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть теперь

$$\rho = 1.$$

В этой ситуации система (61) может быть записана в виде

$$\dot{u}_3 = \big[A_0 t^{-1} + R_4(t)\big]u_3, \tag{66}$$

где

$$A_0 = B_0 + B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -a(h) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

и $R_4(t) = B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t) = O\big(t^{-2}\big) \in L_1[t_*, \infty)$. Вид собственных чисел матрицы A_0, а следовательно, и асимптотика решений системы (66), будут различаться в зависимости от знака величины $a(h) - \frac{1}{4}$.

- $a(h) > \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}.$$

Поскольку собственные числа матрицы A_0 различны, то заменой $u_3 = Cu_4$, где матрица C приводит матрицу A_0 к диагональной форме, систему (66) можно привести к L-диагональному виду (36) с матрицей $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)t^{-1}$. Применяя затем теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (61) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} \exp\{\lambda_1 \ln t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\lambda_2 \ln t\} \end{pmatrix}.$$

Проделывая теперь замены в обратном порядке, в силу (7), (24) и (65) получаем следующую асимптотическую формулу для решений уравнения (6) при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{\mathrm{i}\ln t\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\Big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\mathrm{i}\ln t\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 действительны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - a(h)}.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (61) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} & \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$ описывается следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\bigl(1 + o(1)\bigr)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} + c_2\bigl(1 + o(1)\bigr)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\frac{1}{2} < \rho < 1. \tag{67}$$

Систему (61) запишем в виде

$$\dot{u}_3 = \bigl[B_1 + V(t)\bigr]t^{-\rho}u_3 + R_4(t)u_3, \tag{68}$$

где $V(t) = B_0 t^{\rho-1}$ и $R_4(t) = B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t) = O\bigl(t^{-2\rho}\bigr) \in L_1[t_*, \infty)$. Заметим, что система (68) имеет вид (34), а значит, асимптотика ее решений строится с помощью леммы 1 и теоремы 2. Вид асимптотических формул будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Собственные числа матрица $\bigl[B_1 + V(t)\bigr]t^{-\rho}$ имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho} + O\bigl(t^{\rho-2}\bigr), \quad t \to \infty.$$

Поскольку величина $O\bigl(t^{\rho-2}\bigr)$ при условии (67) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, то для фундаментальной матрицы системы (68) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\bigl\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigr\} & 0 \\ 0 & \exp\bigl\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigr\} \end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущих случаях, строим асимптотику для решений исходного уравнения (6) при $t \to \infty$. Приходим к следующей формуле:

$$x(t) = c_1\bigl(1 + o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Bigl\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Bigr\} + c_2\bigl(1 + o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Bigl\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Bigr\} + O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ определяются формулой

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho} + O\big(t^{\rho-2}\big), \quad t \to \infty.$$

Для фундаментальной матрицы системы (68) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-a(h)} & -\sqrt{-a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} \end{pmatrix}.$$

Решения уравнения (6) описываются при $t \to \infty$ следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Big\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\Big\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$\rho \le \frac{1}{2}. \tag{69}$$

Систему (61) представим в виде

$$\dot{u}_3 = \big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}u_3 + R_3(t)u_3, \tag{70}$$

где $V(t) = B_2t^{-\rho} + \ldots + B_kt^{-(k-1)\rho} + B_0t^{\rho-1}$. Как и в предыдущем случае, асимптотика решений этой системы будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Учитывая формулы (62), определяющие матрицы B_1 и B_2, заключаем, что собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются комплексно сопряженными и имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \Big(\frac{\nu(h)}{2} + O\big(t^{-\rho}\big)\Big)t^{-2\rho} \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho}\Big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\Big), \quad t \to \infty. \tag{71}$$

Здесь величина $\nu(h)$ задается формулой (58). Заметим, что слагаемое порядка $O\big(t^{-3\rho}\big)$ в формуле (71) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, если $\rho > \frac{1}{3}$. Используя лемму 1 и теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (70) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\big\{f(t) + \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{f(t) - \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} \end{pmatrix},$$

где

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\nu(h)}{2}\ln t, & \rho=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\nu(h)}{2(1-2\rho)}t^{1-2\rho}, & \dfrac{1}{3}<\rho<\dfrac{1}{2},\\ \Bigl(\dfrac{\nu(h)}{2}+o(1)\Bigr)\dfrac{t^{1-2\rho}}{(1-2\rho)}, & \rho\le\dfrac{1}{3}.\end{cases}\tag{72}$$

Решения уравнения (6) при $t\to\infty$ описываются тогда следующей асимптотической формулой:

$$\begin{gathered}x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{f(t)+\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\ +c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{f(t)-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),\end{gathered}\tag{73}$$

где c_1,c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta>0$ — произвольное действительное число. В частности, в случае $\rho=\frac{1}{2}$ с учетом (72) асимптотическое представление (73) выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Bigl\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\ +c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Bigl\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr).\end{gathered}$$

- $a(h)<0$.

Собственные числа матрица $\bigl[B_1+V(t)\bigr]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются действительными:

$$\lambda_{1,2}(t)=\pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho}\bigl(1+O\bigl(t^{-\rho}\bigr)\bigr),\quad t\to\infty.$$

Фундаментальная матрица системы (70) при $t\to\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$\begin{gathered}U_3(t)=\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ \sqrt{-a(h)} & -\sqrt{-a(h)}\end{pmatrix}+o(1)\right]\times\\ \times\begin{pmatrix}\exp\bigl\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\bigr\} & 0\\ 0 & \exp\bigl\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\bigr\}\end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Решения уравнения (6) описываются при $t\to\infty$ следующей асимптотической формулой:

$$\begin{gathered}x(t)=c_1\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+\\ +c_2\bigl(1+o(1)\bigr)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Bigl\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr\}+O\bigl(e^{-\beta t}\bigr),\end{gathered}$$

где c_1,c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta>0$ — произвольное действительное число.

3. Сравнение асимптотик решений для уравнений (1) и (6)

В этом разделе мы сравним поведение решений уравнений (1) и (6) с функцией $q(t)$ вида (2) при $t \to +\infty$. Асимптотические формулы для базисных решений уравнения (1) при различных значениях параметра ρ приведены в таблице 1.

Таблица 1. Асимптотические формулы для фундаментальных решений уравнения (1), (2) при $t \to +\infty$ $(a \neq 0)$
Table 1. Asymptotic formulas for fundamental solutions of Eqs. (1), (2) as $t \to +\infty$ $(a \neq 0)$

$\rho > 1$		$x_1(t) = t\big(1+o(1)\big),\ x_2(t) = 1+o(1)$
$\rho = 1$	$a > \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a-1/4}\ln t\big\}\big(1+o(1)\big)$
$\rho = 1$	$a < \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{1/4-a}}\big(1+o(1)\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$		$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\}\big(1+o(1)\big)$
$\rho \le \frac{1}{2}$		$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\pm \mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\}\big(1+o(1)\big)$

Таблица 2. Асимптотические формулы для решений уравнения (6) при $t \to +\infty$
Table 2. Asymptotic formulas for solutions of Eq. (6) as $t \to +\infty$

$\rho > 1$		$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t + c_2\big(1+o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho = 1$	$a(h) > \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho = 1$	$a(h) < \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \le \frac{1}{2}$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{f(t) + \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho} \times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{f(t) - \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}\times$ $\times t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \le \frac{1}{2}$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho} \times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}} \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\times$ $\times\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$

В таблице 2 собраны построенные нами в предыдущем разделе асимптотические формулы для решений уравнения (6). В этой таблице c_1, c_2 — произвольные действительные (или комплексные) постоянные, $\beta > 0$ — произвольное действительное число, величина $a(h)$ определяется формулой (57), а функция $f(t)$ задается выражением (72)

Сравним далее поведение решений уравнений (1) и (6) при $t \to \infty$, анализируя приведенные в таблицах 1 и 2 асимптотические выражения.

1. $\rho > 1$.

Главные части асимптотических формул в этом случае совпадают, т. е. запаздывание не влияет существенным образом на динамику решений.

2. $\rho = 1$.

В отличие от уравнения (1) характер поведения решений уравнения (6) определяется величиной $a(h)$. Изменение величины запаздывания в данном случае может приводить как к количественным, так и к качественным изменениям в динамике решений. Отметим также следующее обстоятельство. Из формулы (57) следует, что $|a(h)| \le a$ для всех $h \ge 0$. Следовательно, если решения уравнения (1) осциллировали ($a > \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6) решения могут стать неосциллирующими при тех h, для которых $a(h) < \frac{1}{4}$. Если же решения уравнения (1) не осциллировали ($a < \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6) решения остаются неосциллирующими, т. к. в этой ситуации $a(h) < \frac{1}{4}$ для всех $h \ge 0$. Наконец, отметим, что, как у уравнения (1), так и у уравнения (6) при $\rho = 1$ всегда существуют неограниченные решения.

3. $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Существенное отличие динамики решений уравнения (6) от динамики решений уравнения (1) состоит в следующем. Величина $a(h)$, определяющая динамику решений уравнения (6), в отличие от величины a, определяющей динамику решений уравнения (1), может принимать отрицательные значения. В частности, если решения уравнения (1) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда осциллируют, то в уравнении (6) при изменении параметра h решения могут стать неосциллирующими, если $a(h) < 0$. Отметим также, что, как уравнение (1), так и уравнение (6) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда имеют неограниченные решения.

4. $\rho \le \frac{1}{2}$.

Сперва отметим, что, как и в предыдущем случае, решения уравнения (6) в отличие от решений уравнения (1) могут быть неосциллирующими при тех значениях h, при которых $a(h) < 0$. Существенная разница в динамике решений уравнения (1) и решений уравнения (6) может наблюдаться и при тех h, при которых $a(h) > 0$. Вспоминая представление (72) для функции $f(t)$, а также формулу (58) для величины $\nu(h)$, заключаем, что на поведение решений уравнения (6) при $t \to \infty$ будет влиять знак величины $\frac{1}{4} + \frac{\nu(h)}{2}$, если $\rho = \frac{1}{2}$, или знак величины $\nu(h)$, если $\rho < \frac{1}{2}$. Так, все ненулевые решения уравнения (1) при $\rho < \frac{1}{2}$ неограниченно возрастают, а все решения уравнения (6) стремятся к нулю при $t \to \infty$, если $\rho < \frac{1}{2}$, и запаздывание h выбрано так, что $a(h) > 0$ и $\nu(h) < 0$. В частности, заметим, что величина $\nu(h)$ отрицательна при всех достаточно малых $h > 0$, поскольку

$$\nu(h) = -\frac{4h^3}{3}\left(1 + O(h^2)\right)\sum_{j=1}^{N} |p_j|^2, \quad h \to 0.$$

Заметим, что отмеченные различия в динамике решений уравнений (1) и (6) во многом схожи с соответствующими различиями в динамике решений уравнения (1) и его разностного аналога

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \Big(1 - \frac{p(n)}{n^\rho}\Big)x(n) = 0, \quad n \geq n_0,$$

изученного в работе [13].

В завершение отметим, что совершенно аналогично тому, как это было сделано в настоящей работе, могут быть построены асимптотические формулы для решений уравнения

$$\ddot{x} - \xi(t)p(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0,$$

где функция $p(t)$ определяется формулами (3), (4), а действительная функция $\xi(t)$ такова, что $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\xi'(t) \in L_1[t_0, \infty)$ и существует такое целое неотрицательное K, что $\xi^K(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, но $\xi^{K+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Список литературы / References

[1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954; пер. с англ.: Bellman R., *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Бурд В. Ш., Каракулин В. А., "Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами", *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 658–666; англ. пер.: Burd V. Sh., Karakulin V. A., "On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients", *Math. Notes*, **64**:5 (1998), 571–578.

[3] Итс А. Р., "Асимптотическое поведение решений радиального уравнения Шредингера с осциллирующим потенциалом при нулевой энергии", *Проблемы математической физики. Сб. статей*, **9**, Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград, 1979, 30–41; англ. пер.: Its A. R., "The asymptotic behavior of solutions to the radial Schrödinger equation with oscillating potential at energy zero", *Selecta Math. Soviet*, **3** (1984), 291–300.

[4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Кондратьев В. А., "Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка", *УМН*, **12**:3(75) (1957), 159–160; [Kondrat'ev V. A., "Jelementarnyj vyvod neobhodimogo i dostatochnogo uslovija nekoleblemosti reshenij linejnogo differencialnogo uravnenija vtorogo porjadka", *UMN*, **12**:3(75) (1957), 159–160, (in Russian).]

[6] Левин А. Ю., "Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$", *УМН*, **20**:2(122) (1965), 244–246; [Levin A. Yu., "Integralnyj kriterij neoscilljacionnosti dlja uravnenija $\ddot{x} + q(t)x = 0$", *UMN*, **20**:2(122) (1965), 244–246, (in Russian).]

[7] Левин А. Ю., "Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае", *Матем. сб.*, **75(117)**:1 (1968), 39–63; англ. пер.: Levin A. J., "Behavior of the solutions of the equation $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ in the nonoscillatory case", *Mathematics of the USSR — Sbornik*, **4**:1 (1968), 33–55.

[8] Нестеров П. Н., "Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом", *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 240–250; англ. пер.: Nesterov P. N., "Construction of the asymptotics of the solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with rapidly oscillating potential", *Math. Notes*, **80**:2 (2006), 233–243.

[9] Нестеров П. Н., “Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; англ. пер.: Nesterov P. N., “Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients”, *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.

[10] Agarwal R. P., Bohner M., Li W.-T., *Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations*, Dekker, New York, 2004.

[11] Berezansky L., Braverman E., “Some oscillation problems for a second order linear delay differential equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **220**:2 (1998), 719–740.

[12] Bodine S., Lutz D. A., “Asymptotic analysis of solutions of a radial Schrödinger equation with oscillating potential”, *Math. Nachr.*, **279**:15 (2006), 1641–1663.

[13] Burd V., Nesterov P., “Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schroödinger equation”, *J. Difference Equ. Appl.*, **17**:11 (2011), 1555–1579.

[14] Cassell J. S., “The asymptotic behaviour of a class of linear oscillators”, *Quart. J. Math.*, **32**:3 (1981), 287–302.

[15] Cassell J. S., “The asymptotic integration of some oscillatory differential equations”, *Quart. J. Math.*, **33**:2 (1982), 281–296.

[16] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[17] Erbe L. H., Kong Q., Zhang B. G., *Oscillation theory for functional differential equations*, Dekker, New York, 1995.

[18] Ladde G. S., Lakshmikantham V., Zhang B. G., *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Dekker, New York-Basel, 1987.

[19] Nesterov P., “Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, № 33, 1–43.

[20] Opluštil Z., Šremr J., “Some oscillation criteria for the second-order linear delay differential equation”, *Math. Bohem.*, **136**:2 (2011), 195–204.

[21] Opluštil Z., Šremr J., “Myshkis type oscillation criteria for second-order linear delay differential equations”, *Monatsh. Math.*, **178**:1 (2015), 143–161.

Nesterov P. N., "Asymptotic Integration of a Certain Second-Order Linear Delay Differential Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 635–656.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-635-656

Abstract. We construct some asymptotic formulas for solutions of a certain linear second-order delay differential equation when the independent variable tends to infinity. Two features concerning the considered equation should be emphasized. First, the coefficient of this equation has an oscillatory decreasing form. Second, when the delay equals zero, this equation turns into the so-called one-dimensional Schrödinger equation at energy zero with Wigner–von Neumann type potential. Dynamics of the latter is well-known. The question of interest is how the behavior of solutions changes qualitatively and quantitatively when the delay is introduced in this dynamical model. This equation also attracts interest from the standpoint of the theory of oscillations of solutions of functional differential equations. We apply the method of asymptotic integration that is based on the ideas of the centre manifold theory in its presentation with respect to the systems of functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. The essence of the method is to construct a so-called critical manifold in the phase space of the considered dynamical system. This manifold is attractive and positively invariant, and, therefore, the dynamics of all solutions of the initial equation is determined by the dynamics of the solutions lying on the critical manifold. The system that describes the dynamics of the solutions lying on the critical manifold is a linear system of two ordinary differential equations. To construct the asymptotics for solutions of this system, we use the averaging changes of variables and transformations that diagonalize variable matrices. We reduce the system on the critical manifold to what is called the L-diagonal form. The asymptotics of the fundamental matrix of L-diagonal system may be constructed by the use of the classical Levinson's theorem.

Keywords: asymptotics, delay differential equation, Shrödinger equation, oscillating coefficients, oscillations of solutions, Levinson's theorem, method of averaging

On the authors:
Pavel N. Nesterov, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Acknowledgments:
This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 5 (2016), с. 657–666
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 5 (2016), pp. 657–666

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-657-666

УДК 541.1

Эквивалентность обычной и модифицированной сети обобщенных нейронных элементов

Коновалов Е. В.

получена 15 марта 2016

Аннотация. Статья посвящена анализу сетей, состоящих из обобщенных нейронных элементов. В первой части статьи предлагается новая нейросетевая модель — модифицированная сеть обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Данная сеть является развитием модели отдельного нейрона — обобщенного нейронного элемента, формальное описание которого содержит некоторые недостатки. В модели МОНЭ-сети эти недостатки преодолеваются. Нейронная сеть вводится сразу целиком, без предварительного описания модели одного нейронного элемента и способа взаимодействия таких элементов между собой. Описание нейросетевой математической модели упрощено и позволяет сравнительно легко построить на ее основе имитационную модель для проведения численных экспериментов. Модель МОНЭ-сети носит универсальный характер, объединяя свойства сетей, состоящих из нейронов-автогенераторов и нейронов-детекторов. Во второй части статьи доказывается эквивалентность функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: сети, состоящей из классических обобщенных нейронных элементов, и МОНЭ-сети. Вводится определение эквивалентности функционирования обобщенного нейронного элемента и МОНЭ-сети, состоящей из одного элемента. Затем вводится определение эквивалентности функционирования двух нейронных сетей в целом. Устанавливается соответствие различных параметров двух рассматриваемых нейросетевых моделей. Обсуждается вопрос согласования начальных условий двух рассматриваемых нейросетевых моделей. Доказывается теорема об эквивалентном функционировании этих моделей. Данная теорема позволяет перенести все полученные ранее результаты для сетей обобщенных нейронных элементов на класс модифицированных сетей.

Ключевые слова: нейронные сети, модели нейронных элементов, обобщенный нейронный элемент, МОНЭ-сеть

Для цитирования: Коновалов Е. В., "Эквивалентность обычной и модифицированной сети обобщенных нейронных элементов", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 657–666.

Об авторах:
Коновалов Евгений Владиславович, orcid.org/0000-0001-8532-487X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kinnarts@mail.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31431.

Моделирование и изучение нейронных сетей является сейчас одним из приоритетных научных направлений. При этом имеется определенный дефицит моделей нейронного элемента, с одной стороны, достаточно простых, а с другой стороны, потенциально способных порождать нейронные сети со сложным поведением. Важно также иметь возможность изучать полученные нейронные сети как аналитически-ми, так и численными методами. На пути построения такой модели в [1], [2] была введена модель обобщенного нейронного элемента (ОНЭ), первоначально названная обобщенным нейронным автоматом. Полное ее формальное описание приведено в [3].

Обобщенный нейронный элемент — нейронная модель, которая функционирует в непрерывном времени t и задается набором параметров p; r; α; T_R; n; m; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и T_m. Положительные величины p, r, α, T_R и T_m не меняются с течением времени и одинаковы для всех элементов, входящих в состав нейронных сетей, состоящих из ОНЭ. Число входов n и выходов m для каждого элемента фиксировано, но, вообще говоря, может быть неодинаковым для разных элементов, в зависимости от архитектуры конкретной нейронной сети. Входы каждого элемента характеризуются величинами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, где n — число входов данного элемента. Синаптические веса q_i определяют эффективность входного воздействия. Каждый такой вес характеризует однонаправленную синаптическую связь, которая соединяет выход одного элемента и вход другого. Сейчас и далее будем рассматривать только связи с положительными весами.

Внутреннее состояние элемента в момент времени t задается тремя функциями: $u(t)$, $s(t)$ и $\sigma(t)$. Функция $s(t)$ принимает следующие значения:

$$s(t) = \begin{cases} \text{восприимчивость} \\ \text{генерация импульса} \\ \text{рефрактерность} \end{cases}.$$

Функция $\sigma(t)$ равна единице, когда элемент генерирует выходной импульс (спайк). Этот импульс поступает на все m выходов данного элемента. В остальные моменты времени $\sigma(t) = 0$. Входные импульсы $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, …, $\sigma_n(t)$ зависят от момента времени t. А именно, $\sigma_i(t) = 1$ во все такие моменты времени t, когда по i-му входу пришел импульс. В остальные моменты времени $\sigma_i(t) = 0$. Введем вспомогательные функции $\sigma_1^m(t), \sigma_2^m(t), \ldots, \sigma_n^m(t)$. При каждом отдельном $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\sigma_i^m(t) = 1$ при всех $t \in [t^s; t^s + T_m]$, где t^s такие, что одновременно $s(t^s) = \{\text{восприимчивость}\}$ и $\sigma_i(t^s) = 1$. В остальные моменты времени $\sigma_i^m(t) = 0$.

Опишем теперь функционирование обобщенного нейронного элемента. В произвольный момент времени t возможен один из трех следующих вариантов.

I. Пусть $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$. Тогда $u(t) = p$, $\sigma(t) = 1$; при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$: $s(t + \varepsilon) = \{\text{рефрактерность}\}$.

II. Пусть $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$. Тогда $u(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$; $s(t_1^{sp} + T_R) = \{\text{восприимчивость}\}$, где

$$t_1^{sp} = \max_{\tau < t}\{\tau : \sigma(\tau) = 1\}. \tag{1}$$

III. Пусть $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$. Тогда $\sigma(t) = 0$, а функция мембранного потенциала $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{u} = \alpha(r + q(t) - u), \tag{2}$$

где функция $q(t)$ определяется следующим образом:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^m(t).$$

В качестве начального условия для уравнения (2) берется значение $u(t^0)$, которое определяется следующим образом:

$$u(t^0) = u(t^0 - 0),$$
$$t^0 = \begin{cases} t^*, \text{ если } t^* > t_1^{sp} + T_R \\ t_1^{sp} + T_R, \text{ если } t^* \le t_1^{sp} + T_R \end{cases},$$

где t_1^{sp} определяется из (1),

$$t^* = \max\{t^+; t^-\}, \qquad t^+ = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i(\tau) = 1\},$$
$$t^- = \max_i \max_{\tau \le t}\{\tau : \sigma_i^m(\tau) = 1, \sigma_i^m(\tau + 0) = 0\}.$$

Здесь t_1^{sp} — момент последнего по времени импульса данного элемента, t^+ — момент последнего по времени входного сигнала на данный элемент, t^- — момент последнего по времени завершения какого-либо входного воздействия на данный элемент.

Элемент переходит в состояние генерации импульса, если величина мембранного потенциала $u(t)$ равна пороговому значению p. Т.е. $s(t_2^{sp}) = \{$генерация импульса$\}$, где

$$t_2^{sp} = \min_{\tau > t}\{\tau : u(\tau) = p\}.$$

Если при всех $\tau > t$ выполняется неравенство $u(\tau) < p$, то $s(\tau) = \{$восприимчивость$\}$ при всех $\tau > t$. В данном случае элемент не генерирует импульс. Разобранные случаи полностью исчерпывают поведение обобщенного нейронного элемента.

Формально определенная динамика мембранного потенциала обобщенного нейронного элемента соответствует развитию потенциала биологического нейрона. Она согласуется с "базовой нейронной моделью" [4] и близка к модели биологического нейрона, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием [5]. При этом модель ОНЭ отличается простотой функционирования и позволяет избежать технических трудностей, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Кроме того, модель ОНЭ носит обобщенный характер. В частности, при $p < r$ элемент ведет себя как нейрон-автогенератор, а при $p > r$ — как нейрон-детектор.

Эта сравнительно простая модель позволяет строить нейронные сети со сложным поведением (в частности, динамическими аттракторами нейронной активности) и управлять этим поведением заранее с помощью синаптических весов [2]; исследовать поведение модели под влиянием пачечной активности (bursting) [6]; проводить адаптацию одного и нескольких обобщенных нейронных элементов [3] и др. Всё это показывает перспективность и самой модели, и порождаемых ею нейронных сетей.

Тем не менее, формальное описание модели ОНЭ не демонстрирует ее принципиальной простоты. Трудности возникали из-за того, что сначала вводилась модель одного нейронного элемента, при описании которой было трудно формализовать динамически меняющееся внешнее воздействие. Затем на основе модели элемента строилась та или иная нейронная сеть, конфигурация которой менялась в зависимости от решаемой задачи. В результате формальное описание модели оказалось перегруженным техническими деталями, а порождаемые моделью нейронные сети не производили впечатления принадлежащих к единому нейросетевому классу. На пути преодоления этих недостатков в настоящей статье вводится модифицированная сеть обобщенных нейронных элементов.

Дадим постановку задачи. На основе модели обобщенного нейронного элемента рассмотрим произвольную сеть обобщенных нейронных элементов (ОНЭ-сеть). Затем введем математическую модель модифицированной сети обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Элементы такой сети будут иметь определенное сходство с обобщенными нейронными элементами (ОНЭ), но при этом сеть будет введена сразу целиком. Далее докажем эквивалентность функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. Это позволит перенести все полученные ранее результаты на класс модифицированных сетей. Такой подход позволит подчеркнуть ясность и принципиальную простоту рассматриваемых нейронных сетей и принадлежность их к единому классу, в том числе для удобства дальнейших исследований — как аналитических, так и численных.

Рассмотрим произвольную нейронную сеть, состоящую из N пронумерованных обобщенных нейронных элементов, вообще говоря, полносвязной архитектуры. Элементы с номерами i и j $(i, j = 1, \ldots, N)$ соединены синаптической связью с неотрицательным весом $q_{i,j}$ $(q_{i,i} = 0)$. Параметры p, r, α, T_R и T_m одинаковы для всех элементов сети. Число входов n и выходов m при таком описании также одинаково для всех элементов сети и составляет $N - 1$. Эту произвольную сеть, состоящую из обобщенных нейронных элементов, будем в дальнейшем называть ОНЭ-сетью.

Рассмотрена детерминированная модель, функционирование которой однозначно определяется начальным состоянием в нулевой момент времени. Зададим начальное состояние ОНЭ-сети. Это означает, что нужно указать состояние всех элементов в нулевой момент времени, то есть $s^k(0)$ (k — номер элемента). Для простоты будем считать, что в нулевой момент времени ни один элемент не генерирует импульс. Далее, для элементов, у которых $s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\}$, необходимо указать значения мембранных потенциалов $u^k(0)$ $(k = 1, \ldots, N)$; какие соседние элементы осуществляют воздействие на каждый данный элемент (если оно есть), и сколько времени каждое такое воздействие будет длиться. Обозначим временной промежуток такого воздействия со стороны i-го элемента на k-ый элемент $(i, k = 1, \ldots, N)$ как $T_0^{i,k}$. Если воздействия нет, будем считать $T_0^{i,k} = 0$. Наконец, для тех элементов, у которых $s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\}$, нужно указать время, через которое они выйдут из состояния рефрактерности. Обозначим эту величину для k-го элемента как R_0^k $(k = 1, \ldots, N)$. Начальное состояние ОНЭ-сети задано.

Введем теперь новую модель — модифицированную сеть обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сеть). Чтобы обозначения параметров новой сети не дублировали параметры старой (но между ними сохранилось соответствие), будем во всех таких случаях пользоваться верхним подчеркиванием.

Рассмотрим нейронную сеть из $\overline{N}$ пронумерованных элементов, которые также функционируют в непрерывном времени t. Сеть определяется следующим набором параметров:

- $\overline{p}$ — пороговое значение мембранного потенциала;
- $\overline{r}$ — равновесное значение мембранного потенциала;
- $\overline{\alpha}$ — скоростной параметр;
- $\overline{T}_R$ — продолжительность периода рефрактерности;
- $W = (w_{ij})_{i=1,j=1}^{\overline{N},\overline{N}}$ — матрица синаптических весов, $w_{ij} \in 0 \cup \mathrm{Re}^+$;
- $M = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{\overline{N},\overline{N}}$ — матрица индикаторов синаптического воздействия, $m_{ij} \in 0, 1$.

Положительные действительные параметры $\overline{p}$, $\overline{r}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{T}_R$ и матрица W задаются заранее и не меняются в процессе функционирования сети. Элементы матрицы M меняются в процессе функционирования сети. Элементы матриц W и M имеют следующий смысл: w_{ij} — вес синаптической связи, ведущей от i-го элемента к j-му; m_{ij} — бинарный индикатор синаптического воздействия, которое передается по связи, ведущей от i-го элемента к j-му. А именно, если в момент времени t воздействия нет, то $m_{ij}(t) = 0$; если воздействие есть, то $m_{ij}(t) = 1$.

Поведение произвольного k-го элемента МОНЭ-сети определяется двумя функциями, зависящими от времени t:

- $S^k(t)$ — состояние элемента, $S^k(t) \in \{0, 1\}\ \forall t\ \forall k$;
- $U^k(t)$ — значение мембранного потенциала, $-1 \leq U^k(t) \leq \overline{p}\ \forall t\ \forall k$.

Функция состояния элемента $S^k(t)$ имеет следующий смысл. Если в произвольный момент времени t: $S^k(t) = 1$, то k-й элемент находится в состоянии восприимчивости. Если в произвольный момент времени t: $S^k(t) = 0$, то k-й элемент находится в состоянии рефрактерности.

Зададим начальное состояние МОНЭ-сети в нулевой момент времени:

- при каждом k зафиксируем $S^k(0) = \{0, 1\}$, т.е. часть элементов находится в состоянии восприимчивости, часть — в состоянии рефрактерности;
- если для произвольного k-го элемента $S^k(0) = 0$, то $U^k(0) = U_0^k$, где $U_0^k \in [-1, 0)$;
- если для произвольного k-го элемента $S^k(0) = 1$, то $U^k(0) = U_0^k$, где $U_0^k \in [0, \min(\overline{r}, \overline{p}))$;
- $m_{ij} = 0\ \forall i, j$ — отсутствие начального воздействия элементов друг на друга.

Переходя к описанию динамики МОНЭ-сети, введем некоторые определения.

Будем говорить, что в момент времени t^* происходит 0-событие для k-го элемента, если $\exists k : S^k(t^*) = 0, U^k(t^*) = 0$. Биологический смысл 0-события — выход k-го элемента из состояния рефрактерности.

Будем говорить, что в момент времени t^* происходит p-событие для k-го элемента, если $\exists k : U^k(t^*) = \overline{p}$. Биологический смысл p-события — генерация k-м элементом нервного импульса (спайка).

Под действием этих событий в МОНЭ-сети происходят следующие изменения.

Если в момент времени t^* происходит 0-событие для k-го элемента, то

- $S^k(t^* + 0) = 1$ (k-й элемент переходит в состояние восприимчивости);
- $m_{ik} = 0\,\forall i$ (устраняется внешнее воздействие на k-й элемент).

Если в момент времени t^* происходит p-событие для k-го элемента, то

- $S^k(t^* + 0) = 0$ (k-й элемент генерирует импульс и тут же переходит в состояние рефрактерности);
- $U^k(t^* + 0) = -1$ (деполяризация мембранного потенциала);
- $m_{kj} = 1\forall j$ (k-й элемент начинает оказывать воздействие на остальные элементы сети).

Если в момент времени t^* в МОНЭ-сети происходит несколько событий для различных элементов, то сначала обрабатываются все 0-события в произвольном порядке (например, по возрастанию номеров элементов), затем все p-события, также в произвольном порядке.

Между событиями бинарные величины $S^k(t)$ не меняются. Меняются только величины мембранных потенциалов $U^k(t)$. Определим механизм этих изменений, задав тем самым динамику сети в произвольные моменты времени.

В нулевой момент времени событий в МОНЭ-сети нет. Начиная с нулевого момента времени и до первого по счету события в рассматриваемой сети динамика произвольного k-го элемента в произвольный момент времени t определяется следующим образом.

Если $S^k(t) = 0$, то $U^k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{U}^k = \frac{1}{\overline{T}_R} \tag{3}$$

с начальным условием $U^k(t_0) = U^k(0) = U_0^k$.

Если $S^k(t) = 1$, то $U^k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{U}^k = \overline{\alpha}(\overline{r} + \sum_{i=1}^{\overline{N}} m_{ik} w_{ik} - U^k) \tag{4}$$

с начальным условием $U^k(t_0) = U^k(0) = U_0^k$.

Аналогичным образом определяется динамика МОНЭ-сети между любой парой последовательных событий в моменты времени t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$). В качестве момента времени для начальных условий берется t_1 с известными значениями $U^k(t_1)\,\forall k$.

Изложение модели модифицированной сети обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сети) завершено.

Уравнение (4) близко к уравнению, предложенному Дж. Хопфилдом в 1984 для описания одноименной непрерывной сети [7], но гораздо проще его, т.к. между каждой парой событий представляет собой уравнение с постоянными коэффициентами. Не содержит уравнение (4) и запаздывающего аргумента, что выгодно отличает его от нейросетевых моделей хопфилдовского типа, описываемых уравнениями с запаздыванием [8]. Все это позволяет легко исследовать МОНЭ-сети сколь угодно большого размера и произвольной топологии, а также имитировать их динамику на компьютере при численных исследованиях.

Перейдем к доказательству эквивалентности функционирования двух рассмотренных нейронных сетей: ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. Введем определение эквивалентности функционирования обобщенного нейронного элемента и отдельного элемента МОНЭ-сети, а также сетей в целом.

Определение 1. *Будем говорить, что обобщенный нейронный элемент и элемент МОНЭ-сети с номером k функционируют эквивалентным образом, если в одной и той же временной шкале и в любой произвольный момент времени t выполняется следующее:*

- *если обобщенный нейронный элемент генерирует импульс, то для k-го элемента МОНЭ-сети происходит p-событие;*
- *если обобщенный нейронный элемент находится в состоянии рефрактерности, то для k-го элемента МОНЭ-сети $S^k(t) = 0$;*
- *если обобщенный нейронный элемент находится в состоянии восприимчивости, то для k-го элемента МОНЭ-сети $S^k(t) = 1$.*

Определение 2. *Будем говорить, что ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом, если*

- *в этих двух сетях одинаковое количество элементов;*
- *в этих двух сетях можно так пронумеровать элементы, что каждый i-й обобщенный нейронный элемент и i-й элемент МОНЭ-сети функционируют эквивалентным образом.*

Далее установим соответствие между параметрами моделей ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. А именно:

$$\overline{N} = N, \quad \overline{p} = p, \quad \overline{r} = r, \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{T}_R = T_R, \quad w_{ij} = q_{i,j}, \quad T_m = +\infty. \tag{5}$$

Также необходимо согласовать начальные условия для ОНЭ-сети и МОНЭ-сети. А именно, пусть в нулевой момент времени:

$$S^k(0) = \begin{cases} 1, \text{ если } s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\} \\ 0, \text{ если } s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\} \end{cases} \tag{6}$$

Также необходимо синхронизировать значения мембранных потенциалов всех элементов в нулевой момент времени:

$$U^k(0) = \begin{cases} u^k(0), \text{ если } s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\} \\ -R_0^k/T_R, \text{ если } s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\} \end{cases} \tag{7}$$

Наконец, наложим условие отсутствия внешнего воздействия в ОНЭ-сети в нулевой момент времени:

$$T_0^{i,j} = 0 \ \forall i, j. \tag{8}$$

В МОНЭ-сети этому соответствует условие $m_{ij} = 0\ \forall i, j$. Оно уже было наложено при задании начального состояния МОНЭ-сети.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть даны произвольные ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть, параметры которых удовлетворяют условиям (5), а начальные состояния выбраны в соответствии с условиями (6) — (8).*

Тогда эти ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом в смысле определения 2.

Доказательство. Условие $\overline{N} = N$ означает, что в ОНЭ-сети и МОНЭ-сети одинаковое количество элементов. Согласованно пронумеруем элементы в этих сетях. Рассмотрим обобщенный нейронный элемент (входящий в состав данной ОНЭ-сети) и элемент данной МОНЭ-сети с одним и тем же произвольным номером k. Необходимо показать, что эти элементы функционируют эквивалентным образом, то есть проверить условия Определения 1 в произвольный момент времени t.

Рассмотрим сначала ситуацию при $t = 0$. Как уже отмечалось, в нулевой момент времени в МОНЭ-сети событий не происходит. В ОНЭ-сети в нулевой момент времени также не происходит ни генерации импульса каким-либо элементом, ни выхода какого-либо элемента из состоянии рефрактерности. Условие (6) обеспечивает согласованный выбор состояния k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети. Тем самым условия Определения 1 выполнены при $t = 0$.

Теперь рассмотрим промежуток времени $(0; t_1)$, где t_1 — момент первого по времени события в МОНЭ-сети. Условие (7) — (8) и уравнение (2) модели обобщенного нейронного элемента обеспечивают, что при $t \in (0; t_1)$ в ОНЭ-сети также не происходит ни генерации импульса каким-либо элементом, ни выхода какого-либо элемента из состоянии рефрактерности. Это позволяет легко рассмотреть динамику изменения мембранного потенциала k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети сразу на всем промежутке $(0; t_1)$. В зависимости от состояния ОНЭ возможны два случая.

Если $s^k(0) = \{\text{рефрактерность}\}$ и по условию (6) $S^k(0) = 0$, то условие $U^k(0) = -R_0^k/T_R$ обеспечивает выход k-го ОНЭ из состояния рефрактерности и 0-событие для k-го элемента МОНЭ-сети (с учетом уравнения (3)) в один и тот же момент времени R_0^k. В частности, $s^k(t) = \{\text{рефрактерность}\}$ и $S^k(t) = 0$ при $t \in (0; t_1)$.

Если $s^k(0) = \{\text{восприимчивость}\}$ и по условию (6) $S^k(0) = 1$, то условие $U^k(0) = u^k(0)$ обеспечивает следующее. Уравнение (2) динамики мембранного потенциала k-го обобщенного нейронного элемента принимает вид $\dot{u}^k = \alpha(r - u^k)$ с начальным условием $u^k(0) = u_0^k$. Уравнение (4) динамики мембранного потенциала k-го элемента МОНЭ-сети принимает вид $\dot{U}^k = \overline{\alpha}(\overline{r} - U^k)$ с тем же самым начальным условием $U^k(0) = U_0^k$. Очевидно, их решения $u^k(t)$ и $U^k(t)$ совпадают при $t \in (0; t_1)$. Значит, генерация импульса данным k-м ОНЭ (при $u^k(t) = p$) и p-событие для данного k-го элемента МОНЭ-сети произойдут в один и тот же момент времени. По крайней мере, если не произойдет внешнего воздействия на рассматриваемые элементы в их сетях. Если же такое внешнее воздействие будет иметь место, то согласованный вид уравнений (2) и (4) обеспечит также одинаковую динамику изменения мембранных потенциалов k-го обобщенного нейронного элемента и k-го элемента МОНЭ-сети. Продемонстрируем это чуть позже. Пока же при $t \in (0; t_1)$ условия Определения 1 выполнены.

В момент времени t_1 в МОНЭ-сети происходит какое-то событие для j-го элемента (в том числе, возможно, что $j = k$). Рассмотрев динамику j-го ОНЭ при $t \in (0; t_1)$, легко убедиться в том, что именно в момент времени t_1 данный j-й ОНЭ либо генерирует импульс, либо выходит из состояния рефрактерности. А именно, если в МОНЭ-сети происходит 0-событие для j-го элемента, то j-й ОНЭ выходит из состояния рефрактерности. Если же если в МОНЭ-сети происходит p-событие для j-го элемента, то j-й ОНЭ генерирует импульс. Это достигается за счет согласования параметров сетей (4) и согласованным заданием начального состояния (6) — (8). Действия при обработке 0-события и p-события, изложенные в описании модели МОНЭ-сети, приводят к тому, что состояние $S^j(t)$ и динамика мембранного потенциала j-го элемента МОНЭ-сети (и всех остальных — в случае p-события) изменяются с таким расчетом, что условия Определения 1 оказываются выполнены при $t = t_1$. Причем изменения матрицы M индикаторов синаптического воздействия (в случае p-события) приводят к изменению правой части уравнения (4) для некоторых элементов МОНЭ-сети (возможно, что и k-го элемента). Но точно такие же изменения для ОНЭ с теми же самыми номерами претерпевает и правая часть уравнения (2), описывающего динамику мембранного потенциала ОНЭ. Это происходит за счет ступенчатого вида функций $\sigma_i^m(t)$ и условия $T_m = +\infty$.

Теперь рассмотрим промежуток времени $(t_1; t_2)$, где t_2 — момент следующего по времени события в МОНЭ-сети. На этом промежутке рассуждения проводятся аналогичным образом. Затем можно рассмотреть момент времени t_2 и так далее.

Поскольку обе модели носят детерминированный характер, то и в дальнейшем условия Определения 1 останутся верными для произвольных k-го ОНЭ и k-го элемента МОНЭ-сети. Значит, данные ОНЭ-сеть и МОНЭ-сеть функционируют эквивалентным образом. Теорема доказана.

Список литературы / References

[1] Майоров В. В., Коновалов Е. В., “Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети”, *Нейрокомпьютеры: Разработка, применение*, Радиотехника, М., 2007, 3–8; [Mayorov V. V., Konovalov E. V., “Obobshchennyy neyronnyy avtomat v zadache rasprostraneniya volny vozbuzhdeniya po neyronnoy seti”, *Neirokompiutery: Razrabotka, primenenie*, Radiotehnika, M., 2007, 3–8, (in Russian).]

[2] Коновалов Е. В., “Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **14**:2 (2007), 30–35; [Konovalov E. V., “The stable oscillatory regime in a neuron net consisting of generalized automatic neuron-detectors”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **14**:2 (2007), 30–35, (in Russian).]

[3] Коновалов Е. В., “Задача адаптации обобщенного нейронного элемента”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:1 (2012), 69–83; [Konovalov E. V., “The problem of adaptation of the generalized neural element”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:1 (2012), 69–83, (in Russian).]

[4] Крюков В. И., Борисюк Г. Н., Борисюк Р. М., Кириллов А. Б., Коваленко Е. И., *Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге*, НЦБИ АН СССР, Пущино, 1986; [Kryukov V. I., Borisyuk G. N., Borisyuk R. M., Kirillov A. B., Kovalenko E. I., *Metastabilnye i neustoychivye sostoyaniya v mozge*, NTsBI AN SSSR, Pushchino, 1986, (in Russian).]

[5] Майоров В. В., Мышкин И. Ю., “Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием”, *Математическое моделирование*, **2**:11 (1990), 64–76; [Mayorov V. V., Myshkin I. Yu., “Matematicheskoe modelirovanie neyronov seti

na osnove uravneniy s zapazdyvaniem", *Matematicheskoe modelirovanie*, **2**:11 (1990), 64–76, (in Russian).]

[6] Коновалов Е. В., "Задача о пачечном воздействии на обобщенный нейронный автомат", *Моделирование и анализ информационных систем*, **14**:3 (2007), 43–49; [Konovalov E. V., "The problem of berst influence on the generalized automatic neuron", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **14**:3 (2007), 43–49, (in Russian).]

[7] Hopfield J. J., "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **81** (1984), 3088–3092.

[8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием", Сер. матем., **77**, 2013, 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay", Mathematics, **77**, 2013, 271–312].

Konovalov E. V., "Equivalence of Conventional and Modified Network of Generalized Neural Elements", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 657–666.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-657-666

Abstract. The article is devoted to the analysis of neural networks consisting of generalized neural elements. The first part of the article proposes a new neural network model — a modified network of generalized neural elements (MGNE-network). This network developes the model of generalized neural element, whose formal description contains some flaws. In the model of the MGNE-network these drawbacks are overcome. A neural network is introduced all at once, without preliminary description of the model of a single neural element and method of such elements interaction. The description of neural network mathematical model is simplified and makes it relatively easy to construct on its basis a simulation model to conduct numerical experiments. The model of the MGNE-network is universal, uniting properties of networks consisting of neurons-oscillators and neurons-detectors. In the second part of the article we prove the equivalence of the dynamics of the two considered neural networks: the network, consisting of classical generalized neural elements, and MGNE-network. We introduce the definition of equivalence in the functioning of the generalized neural element and the MGNE-network consisting of a single element. Then we introduce the definition of the equivalence of the dynamics of the two neural networks in general. It is determined the correlation of different parameters of the two considered neural network models. We discuss the issue of matching the initial conditions of the two considered neural network models. We prove the theorem about the equivalence of the dynamics of the two considered neural networks. This theorem allows us to apply all previously obtained results for the networks, consisting of classical generalized neural elements, to the MGNE-network.

Keywords: neural networks, models of neural element, generalized neural element, MGNE-network

On the authors:
Evgeniy V. Konovalov, orcid.org/0000-0001-8532-487X, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kinnarts@mail.ru

Acknowledgments:
This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Grant No 14-01-31431.