

ISSN 1818–1015 (Print)  
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 24      № 1(67)      2017

Основан в 1999 году  
Выходит 6 раз в год

*Главный редактор*

**В.А. Соколов,**

доктор физико-математических наук, профессор, Россия

*Редакционная коллегия*

**С.М. Абрамов**, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **В.С. Афраймович**, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия; **В.Н. Белых**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Захаров**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Кушнаренок**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАО, Россия; **Н. Сидорова**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **М.Б. Трахтенброт**, д-р комп. наук, Израиль, **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Ф. Шнеблен**, проф., Франция

*Ответственный секретарь* **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

**Адрес редакции:** ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия  
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: [mais@uniyar.ac.ru](mailto:mais@uniyar.ac.ru); телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

# СОДЕРЖАНИЕ

---

*Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №1. 2017*

---

Перераспределение, производство и неравенство <i>Захаров А. В., Захаров В. Е.</i>	5
Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка <i>Кащенко С. А.</i>	13
Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности <i>Давыдова М. А., Нефедов Н. Н.</i>	31
О комбинировании различных методов ускорения при итерационном решении уравнений с частными производными методом коллокаций и наименьших невязок <i>Шапеев В. П., Ворожцов Е. В.</i>	39
Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением <i>Нестеров П. Н.</i>	64
Релаксационные автоколебания в системе из двух синаптически связанных импульсных нейронов <i>Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Марушкина Е. А.</i>	82
Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом <i>Невский М. В., Ухалов А. Ю.</i>	94
Пополнение ядра оператора дифференцирования <i>Морозов А. Н.</i>	111

---

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 – 66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 17.02.2017. Дата выхода в свет 28.02.2017. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 12,0. Объем 120 с. Тираж 46 экз. Свободная цена. Заказ 001/017. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)  
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS  
OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 24      No 1(67)      2017

Founded in 1999  
6 issues per year

*Editor-in-Chief*

**V. A. Sokolov,**

Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

*Editorial Board*

**S.M. Abramov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **V.A. Zakharov**, Prof., Dr. Sci., Russia

*Responsible Secretary* **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

**Editorial Office Address:** P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia  
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: [mais@uniyar.ac.ru](mailto:mais@uniyar.ac.ru)

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2017

# Contents

---

*Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 1. 2017*

---

Production, Redistribution, and Inequality <i>Zakharov A. V., Zakharov V. E.</i>	5
Asymptotic of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Value Problem for Second Order Differential Equations <i>Kashchenko S. A.</i>	13
Existence and Stability of the Solutions with Internal Layers in Multidimensional Problems of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Balanced Nonlinearity <i>Davydova M. A., Nefedov N. N.</i>	31
On Combining Different Acceleration Techniques at the Iterative Solution of PDEs by the Method of Collocations and Least Residuals <i>Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V.</i>	39
Asymptotics for Solutions of Harmonic Oscillator with Integral Perturbation <i>Nesterov P. N.</i>	64
Relaxation Oscillations in a System of Two Pulsed Synaptically Coupled Neurons <i>Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Marushkina E.A.</i>	82
New Estimates of Numerical Values Related to a Simplex <i>Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu.</i>	94
Completion of the Kernel of the Differentiation Operator <i>Morozov A. N.</i>	111

©Zakharov A. V., Zakharov V. E., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-5-12

UDC 330.4

# Production, Redistribution, and Inequality

Zakharov A. V., Zakharov V. E.<sup>1</sup>

*Received December 1, 2016*

**Abstract.** We use an infinite-dimensional Lotka–Volterra model to analyze production, accumulation, and redistribution of wealth in an economy. We show that, if the amount of wealth produced in the economy is small relative to the amount redistributed, the eventual distribution of wealth will be extremely unequal, with all of it being concentrated in single hands in the limit case. The winner’s identity is determined by his ability to redistribute and produce wealth. Similar outcomes are observed in some physical processes. Article is published in the authors’ wording.

**Keywords:** redistribution, inequality, Lotka–Volterra model

**For citation:** Zakharov A. V., Zakharov V. E., “Production, Redistribution, and Inequality”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 5–12.

**On the authors:**

Alexei Zakharov, National Research University Higher School of Economics,  
20 Myasnitskaya str., Moscow 101000, Russia, e-mail: al.v.zakharov@gmail.com

Vladimir Zakharov, doctor of science, University of Arizona, Tucson, USA; Novosibirsk State University, Russia,  
author ID 7402990981

**Acknowledgments:**

<sup>1</sup>This work was supported by Russian Science Foundation grant no. 14-22-00174 “Weak turbulence, theory, numerical simulation, experiment”.

## 1. Introduction

Worldwide, a substantial fraction of income is redistributed in an unproductive manner — a phenomenon often referred to as “rent seeking” by the economic literature. Examples include monopoly rents, profits obtained through regulation and trade restrictions, lobbying, theft (see Mueller, 2003, for a review of literature on the extent of rent seeking), very high executive compensations (Bertrand and Muillanathan, 2001; Bebchuk and Grinstein, 2005), wages in financial sector (Phillipon and Reshev, 2010), corruption (Lambsdorff, 2002), and privatization (Birdsall and Nellis, 2003).

Often, a firm’s or an individual’s ability to expropriate resources from other economic players is a function of resources that one has already accumulated. More resources means that one becomes more efficient at taking from weaker players (but, possibly, represents a more valuable target for a stronger party). Privatization in post-Soviet Russia is a particular example where rent seeking exhibited such a pattern. Russian privatization resulted in the ownership of the largest industrial enterprises falling to a few individuals.

Enterprise managers were in a position of an enormous administrative advantage over other participants of the privatization process (particularly, the workers); that advantage was made even stronger by the wealth that they have already accumulated from earlier business deals (Alexeev, 1999).

In this paper we capture such distributional effects of rent-seeking with a dynamic model of wealth production and redistribution. We assume an economy populated by a large number of individuals, each of whom owns a certain amount of wealth. The wealth of each individual changes with time. Each individual has a constant stream of income. The wealth also grows (or declines) at a rate that has two components. First, there is a fixed (and possibly negative) individual-specific rate of return on wealth from productive use. Second, there is a variable component to the rate of return on an individual's wealth that depends on the wealth of other individuals and his rent-seeking abilities vis-a-vis other individuals.

We assume that an individual's rent-seeking ability varies from one person he interacts with to the next. So, individual A may be naturally inclined to expropriate from individual B, but, in turn, be expropriated by individual C. This is a more general assumption than each individual having a scalar proficiency at taking wealth from others. We assume that the individuals are linearly ordered, and each individual is endowed with a fixed, real-valued position.<sup>1</sup> The relative rent-seeking ability of two individuals is a function of their positions, and the individual-specific component of growth rate also depends on his position. Redistribution is taken to be zero-sum, so no losses are incurred as wealth is shifted between individuals.

Our chief results are that a steady state distribution of wealth is unique and globally stable whenever it exists, and that it becomes unequal if the individual fixed incomes are small. If the functions that govern the rent-seeking and productive activity are taken to be quadratic, then all wealth becomes concentrated in the hands of a single individual as fixed incomes approach zero.

The model used in this work is an infinite-dimensional extension of the well-known Lotka-Volterra dynamic model. It can be used to describe several physical phenomena. Consider, for example, a gas-filled container that is subjected to a powerful flux of electrons. Such a container is likely to become a source of light of a very narrow frequency band — a laser. Generation of light in such medium is described by a mathematical model similar to one used in this work. The state of the system is characterized by the distribution of energy across the frequency spectrum. Energy is transferred between different parts of frequency spectrum (just as wealth is transferred between individuals in this model), while the total amount of energy is constant. As a result, almost all light frequencies are eliminated from the spectrum in a process known as “mode competition” (Haken, 1985).

---

<sup>1</sup>Linear ordering of individuals or firms is a common assumption in economic literature that has been made in several contexts. Individuals may be physically located in different places (Hotelling, 1929), and traveling to a different location entails a cost. Firms may produce differentiated products, with the “distance” between products being their ease with which they can be substituted for one another (Dixit and Stiglitz, 1977). Finally, different positions may represent different preferences, such as those toward public policy (Downs, 1957; Metlzer and Richards, 1981).

## 2. The model

Consider an economy populated by a continuum of individuals indexed by  $k \in [-1, 1]$ . At every moment of time  $t \in [0, \infty)$ , individual  $k$  possesses wealth  $w_{kt}$ , with  $w_{k0} > 0$ . There are three reasons why individual wealth can change with time. First, each individual has a constant stream of income  $y_k > 0$ . Second, the stock of wealth grows (or depreciates) at a fixed rate  $\gamma_k$ . Finally, the wealth is redistributed between individuals. We assume that the rate at which wealth is transferred between individuals  $k$  and  $k'$  is proportional to the wealth of each individual and to constant  $T_{kk'}$ . We assume that the interactions between individuals are purely redistributive, so

$$T_{kk'} = -T_{k'k}. \quad (1)$$

If  $T_{kk'} > 0$ , then individual  $k'$  is a donor with respect to the recipient individual  $k$ ; the situation is reversed if  $T_{kk'} < 0$ , and no transfer of wealth between the individuals takes place if  $T_{kk'} = 0$ . Condition (1) demands that  $T_{kk} = 0$ . Assume that  $T_{kk'}$  is a twice differentiable function on  $[-1, 1]^2$ .

It follows that the wealth of individual  $k$  changes according to the following rule:

$$\frac{\partial w_{kt}}{\partial t} = w_{kt}\Gamma_{kt} + y_k, \text{ where } \Gamma_{kt} = \gamma_k + \int_{-1}^1 T_{kk'}w_{k't}dk'. \quad (2)$$

Note that the wealth of individuals never turns negative, as differential equations (2) have a solution

$$w_{kt} = w_{k0} + y_k e^{-\Gamma_{kt}t} \int_0^t e^{\Gamma_{k\tau}} d\tau. \quad (3)$$

A steady-state solution to equations (2) are wealth levels  $\bar{w}_k$  such that the wealth is constant for each individual, or

$$\bar{w}_k \left( \gamma_k + \int_{-1}^1 T_{kk'}\bar{w}_{k'}dk' \right) + y_k = 0. \quad (4)$$

We are going to study the properties of the steady state. A necessary condition for the existence of a steady state is that the function  $\gamma_k$  should be negative for some values of  $k$ . Indeed, because of (1), it is true that

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 w_{kt}dk = \int_{-1}^1 \gamma_k w_{kt}dk + \int_{-1}^1 y_k dk. \quad (5)$$

Since the last integral is positive, a steady state  $w_{kt} = \bar{w}_k$  is possible only if

$$\int_{-1}^1 \gamma_k \bar{w}_k dk < 0, \quad (6)$$

So, steady-state wealth levels exist only if at least one individual has a negative rate of return from productive activity; otherwise, the wealth of some individuals will grow without bound.

We now show that the steady state, whenever it exists, is unique.

**Theorem 1.** There exists at most one  $\bar{w}_k$  satisfying (4). Whenever it exists, it is globally stable, so for any  $w_{k0}$  we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_{kt} = \bar{w}_k \quad (7)$$

for all  $k \in [-1, 1]$ .

This is a variant of the well-known  $H$ -theorem for dynamic systems. We show that a measure of entropy of the system is always increasing, reaching a unique global maximum at the steady state.<sup>2</sup>

Our next goal is to analyze the steady state of the system if the fixed incomes  $y_k$  are small for all  $k$ . We do it for a special case of the model.

**Theorem 2.** Let  $y_k = y$  and suppose that  $\gamma_k$  and  $T_{kk'}$  are second-degree polynomials:

$$\gamma_k = k + ck^2 \quad \text{and} \quad T_{kk'} = k' + k'^2 - k - k^2. \quad (8)$$

Denote by  $\Omega$  the set of all  $k$  such that

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{w}_k \neq 0.$$

Then  $\Omega = \{0\}$ .

We show that, as the fixed incomes decline, the steady-state wealth is increasingly concentrated in the hands of a single individual. In the limit case, all individuals except  $k = 0$  have zero wealth. Figure 1 shows the steady state distribution of wealth for different values of  $y$ .

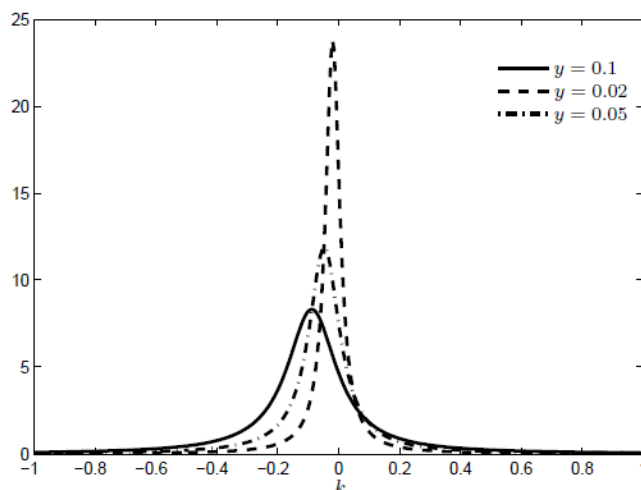


Fig 1: Steady state  $\bar{w}$

The identity of the individual who eventually accumulates all wealth in the economy is determined by the capacity of individuals for both rent-seeking and productive economic

<sup>2</sup>Formal proofs of the statements are in the Appendix.



activity. Individual  $k_1 = -\frac{1}{4}$  is the only one with  $T_{kk'} \geq 0$  for all  $k' \in [-1, 1]$ , so he enjoys a rent-seeking advantage against almost everyone else; however, his return on wealth  $\gamma_{k_1}$  is too small, so his wealth depreciates faster than he can expropriate others. Individual  $k_2 = 1$  has the highest rate of return  $\gamma_{k_2} = 1 + c$ , but is incapable of protecting his wealth from others. Both of them, as well as everyone else, eventually lose their wealth to individual  $k = 0$ .

### 3. Discussion

In this work we analyze a steady-state distribution of wealth in a rent-seeking economy in which wealth is constantly being redistributed between individuals. Each individual is assumed to have a one-dimensional spatial position. It is assumed that the magnitude and direction of redistribution between any two individuals is determined by their wealth and their spatial positions, while the redistribution itself is zero-sum. Depending on the positions of individuals A and B, either one of them is a donor and another — a recipient, or there is no transfer of wealth between the two.

We show that in such an economy there exists at most one steady state, which is globally stable. If the functions  $T$  and  $\gamma$  governing rent seeking and productive activity are quadratic, the steady-state distribution of income becomes extremely unequal as fixed incomes become small; ultimately, all wealth is accumulated by a single individual. Similar results — that inequality is sometimes a natural outcome of simple economic dynamics — have been shown in computer simulations (Epstein and Axtell, 1996).

Our results can be extended in several ways. First, we expect the latter result to hold for almost all twice continuously differentiable redistribution and growth functions. Continuity of the rent-seeking function implies that an individual who is a donor (or a recipient) to someone else is also a donor (recipient) to his close neighbors. Whenever there exists a steady-state solution for fixed incomes approaching zero, all wealth in the limiting case will be concentrated by a finite number of individuals out of a continuum. We believe that this result will fail to hold only for a non-generic subset of rent-seeking and growth functions.<sup>3</sup> Thus we predict that, whenever the magnitude of rent-seeking exceeds that of productive activities, we should expect to observe high inequality.

Second, we think that the limit steady-state solution for fixed incomes approaching zero should be invariant with respect to the exact sequence of fixed incomes. So, the limit steady-state solution is determined uniquely by the rent-seeking and growth functions  $T$  and  $\gamma$ . Finally, we expect the limit steady state to exist for a generic subset of functions  $T$  and  $\gamma$ .

### 4. Appendix

#### Proof of Theorem 1.

Denote

$$H_t = \int_{-1}^1 (\bar{w}_{kt} \ln w_{kt} - w_{kt} + \bar{w}_k - \bar{w}_k \ln \bar{w}_k) dk. \quad (9)$$

---

<sup>3</sup>For example, using the “finite shyness” notion of non-genericity (Anderson and Zame, 2001).

Introducing  $X_{kt} = \frac{w_{kt}}{\bar{w}_k} > 0$ , we can rewrite  $H_t$  as

$$H_t = \int_{-1}^1 \bar{w}_k (\ln X_{kt} + 1 - X_{kt}) dk. \quad (10)$$

The function  $f(X_{kt}) = \ln X_{kt} + 1 - X_{kt}$  is negative for all  $X_{kt}$ , except for  $f(1) = 0$ . It follows that  $H_t \leq 0$ , with  $H_t = 0$  if and only if  $w_{kt} = \bar{w}_k$  for all  $k = 1, \dots, N$ .

From (4) we have

$$\gamma_k = - \int_{-1}^1 T_{kk'} \bar{w}_{k'} dk' - \frac{y_k}{\bar{w}_k}. \quad (11)$$

Substituting this into (2), we obtain

$$\frac{\partial w_{kt}}{\partial t} = w_{kt} \int_{-1}^1 T_{kk'} (w_{k't} - \bar{w}_{k'}) dk' + y_k \left( 1 - \frac{w_{kt}}{\bar{w}_k} \right). \quad (12)$$

Now we can calculate

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{kk'} (w_{kt} - \bar{w}_k) (w_{k't} - \bar{w}_{k'}) dk dk' + \int_{-1}^1 y_k \frac{(w_{kt} - \bar{w}_k)^2}{w_{kt} \bar{w}_k} dk.$$

As we assume  $T_{kk'} = -T_{k'k}$ , the first sum on the right-hand side of this equation is equal to zero. That gives us

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} = \int_{-1}^1 y_k \frac{(w_{kt} - \bar{w}_k)^2}{w_{kt} \bar{w}_k} dk > 0, \quad (13)$$

so  $\frac{\partial H_t}{\partial t}$  increases whenever the economy is not in a steady state. It follows that a steady state is a global attractor.

We now show that the steady state is unique. Suppose  $\bar{w}$  and  $\bar{w}'$  are two different steady states, and let  $A$  be the set of all  $k$  such that  $\bar{w}_k \neq \bar{w}'_k$ . Then  $A$  must have measure 0, with  $\bar{w}_k$  and  $\bar{w}'_k$  finite for all  $k \in A$ . Otherwise, by (13) we will have  $\frac{\partial H_t}{\partial t} > 0$ , contradicting the assumption that either  $\bar{w}$  or  $\bar{w}'$  is a steady state. As  $A$  has measure 0 and  $\bar{w}_k$  and  $w'_k$  are finite for all  $k \in A$ , for all  $k$  we should have

$$\int_{-1}^1 T_{kk'} \bar{w}_{k'} dk' = \int_{-1}^1 T_{kk'} \bar{w}'_{k'} dk',$$

where by (4) we have  $\bar{w}_k = \bar{w}'_k$ . **Q.E.D.**

### Proof of Theorem 2.

If  $\gamma_k, T_{kk'}$  are given by (8), the steady-state solution must satisfy

$$\bar{w}_k \left( \gamma_k + \int_{-1}^1 T_{kk'} \bar{w}_{k'} dk' \right) = -y, \quad (14)$$

or

$$\bar{w}_k = \frac{y}{(N_0 - c)k^2 + (N_0 - 1)k - N_1 - N_2} = \frac{y}{\Delta(k)},$$

where

$$N_0 = \int_{-1}^1 \bar{w}_k dk, \quad N_1 = \int_{-1}^1 k \bar{w}_k dk, \quad \text{and} \quad N_2 = \int_{-1}^1 k^2 \bar{w}_k dk.$$

As  $\Delta(k)$  must be positive for all  $k \in [-1, 1]$ , it must be that  $N + 0 - c > 0$ . We can thus rewrite

$$\Delta(k) = (N_0 - c)[(k + a)^2 + b^2],$$

where

$$2a(N_0 - c) = N_0 - 1 \quad \text{or} \quad a = \frac{N_0 - 1}{2(N_0 - c)},$$

and

$$(b^2 + a^2)(N_0 - c) = -N_1 - N_2.$$

The last equation implies that  $N_1 + N_2 < 0$  or, as  $N_2$  is positive, that  $N_1 < 0$ , so the density of  $\bar{w}_k$  is maximal for some  $k < 0$ . Now we have

$$N_0 = \frac{y}{N_0 - c} \int_{-1}^1 \frac{dk}{(k + a)^2 + b^2} = \frac{y}{b(N_0 - c)} \left( \arctan \frac{1 + a}{b} + \arctan \frac{1 - a}{b} \right). \quad (15)$$

We can similarly express  $N_1$  and  $N_2$  in terms of  $a$  and  $b$ ; however, we will not be able to obtain a closed-form solution for  $a$  and  $b$  in terms of model fundamentals  $c$  and  $y$ . It might be possible only in the limiting case  $y \rightarrow 0$ . As the arctangent function is finite, it follows from (15) that  $b \rightarrow 0$  as  $y \rightarrow 0$ . Assuming  $a < 1$ , we have

$$b \simeq \frac{\pi y}{N_0(N_0 - c)}$$

for small values of  $y$ . After some rearrangement we obtain

$$-c(a^2 + b^2) + \frac{2y}{N_0 - c} - a(1 - 2a)N_0 + \frac{y(1 - 2a)}{N_0 - c} \int_{-1}^1 \frac{k + a}{(k + a)^2 + b^2} dk = 0. \quad (16)$$

Notice that

$$\int_{-1}^1 \frac{k + a}{(k + a)^2 + b^2} dk = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + a)^2 + b^2}{(1 - a)^2 + b^2}.$$

For  $a$  and  $b$  close to zero, we have

$$\int_{-1}^1 \frac{k + a}{(k + a)^2 + b^2} dk \simeq 2a$$

Here the integral term is second order in  $y$ . Collecting together first-order terms of  $y$  one gets

$$a \simeq \frac{2y}{N_0(N_0 - c)}.$$

The statement of the theorem follows, as

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{w}_k = 0$$

for any  $k \neq 0$ .

## References

- [1] Alexeev Michael, “The effect of privatization on wealth distribution in Russia”, *Economics of Transition*, **7(2)** (1999), 449–465.
- [2] Anderson Robert M., William R. Zame, “Genericity with Infinitely Many Parameters”, *Advances in Theoretical Economics*, **1(1)** (2001), DOI: 10.2202/1534-5963.1003.
- [3] Bebchuk Lucian, Yaniv Grinstein, “The Growth of Executive Pay”, *Oxford Review of Economic Policy*, **21(1)**, 2005, 283–303.
- [4] Bertrand Marianne, Sendhil Mullainathan, “Are CEOs Rewarded for Luck? The Ones without Principals Are”, *The Quarterly Journal of Economics*, **116(3)** (2001), 901–932.
- [5] Birdsall Nancy, John Nellis, “Winners and Losers: Assessing the Distributional Impact of Privatization”, *World Development*, **31(10)** (2003), 1617–1633.
- [6] Dixit Avinash K., Joseph E. Stiglitz, “Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity”, *The American Economic Review*, **67(3)** (1977), 297–308.
- [7] Downs Anthony, “An Economic Theory of Political Action in a Democracy”, *The Journal of Political Economy*, 1957, 135–150.
- [8] Epstein Joshua M., Robert Axtell, *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*, Brookings Institution Press, 1996.
- [9] Haken H., *Light. V. 2: Laser Light Dynamics*, Horth-Holland, 1985.
- [10] Hotelling Harold, “Stability in Competition”, *The Economic Journal*, **39(153)** (1929), 41–57.
- [11] Lambsdorff Johann G., “Corruption and Rent-seeking”, *Public Choice*, **113**, 2002, 97–125.
- [12] Meltzer Allan H., Scott F. Richard, “A Rational Theory of the Size of Government”, *The Journal of Political Economy*, 1981, 914–927.
- [13] Mueller Thomas, *Public Choice III*, Cambridge University Press, 2003.
- [14] Philippon Thomas, Ariell Reshef, *Wages and Human Capital in the US Financial Industry: 1909–2006*, No. **w14644**, National Bureau of Economic Research, 2009.

---

Захаров А. В., Захаров В. Е., "Перераспределение, производство и неравенство", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:1** (2017), 5–12.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-5-12

**Аннотация.** Мы используем бесконечномерную модель Лотки–Вольтерра для анализа производства, накопления и перераспределения богатства в экономике. Мы показываем, что если объем производства по сравнению с объемом перераспределения невелик, то итоговое распределение богатства будет очень неравным. В предельном случае, все богатство будет сконцентрировано в одних руках. Личность победителя определяется его способностью производить и перераспределять богатство. Похожие исходы можно наблюдать и для некоторых физических процессов. Статья публикуется в авторской редакции.

**Ключевые слова:** перераспределение, неравенство, модель Лотка–Вольтерра

**Об авторах:**

Захаров Алексей Владимирович, Национальный Исследовательский Университет "Высшая Школа Экономики", ул. Мясницкая, 20, Москва, 101000 Россия, e-mail: al.v.zakharov@gmail.com

Захаров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, академик РАН, Новосибирский государственный университет, Россия  
 Аризонский университет, США, ID 7402990981

**Благодарности:**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №14-22-00174.

©Кащенко С. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-13-30

УДК 517.9

## Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

Кащенко С. А.

получена 14 октября 2016

**Аннотация.** Рассматривается асимптотическое распределение собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Это дает возможность получить асимптотики зон устойчивости и неустойчивости решений. Показано, что в отсутствие точек поворота ( $r(t) > 0$ ) длины зон неустойчивости стремятся к нулю с ростом их номера, а длины зон устойчивости – к некоторой положительной величине. Ситуация, когда  $r(t) \geq 0$  и имеются нули  $r(t)$ , приводит к тому, что длины зон устойчивости и зон неустойчивости имеют конечный ненулевой предел при неограниченном увеличении номера соответствующей зоны. Если же функция  $r(t)$  знакопеременна, то длины всех зон устойчивости стремятся к нулю, а длины зон неустойчивости – к некоторым конечным величинам. Эти выводы позволили сформулировать ряд интересных критериев устойчивости и неустойчивости решений линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Приведенные результаты иллюстрируются содержательным примером. Методика исследования основана на детальном изучении так называемых специальных эталонных уравнений и последующем сведении исходных уравнений к тому или иному виду эталонных уравнений. При этом используются асимптотические методы теории сингулярных возмущений, а также известные свойства ряда специальных функций.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенное уравнение, точки поворота, асимптотика, краевая задача, собственные числа

**Для цитирования:** Кащенко С. А., "Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 13–30.

### Об авторах:

Кащенко Сергей Александрович, [orcid.org/0000-0002-8777-4302](https://orcid.org/0000-0002-8777-4302), доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское ш., 31, г. Москва, 115409 Россия  
e-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

## Введение

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами занимают особое место при исследовании многих прикладных задач.

Их изучению посвящена значительная литература (см., например, обзор [1]). К анализу решений таких уравнений сводятся многие задачи об устойчивости периодических решений в нелинейных уравнениях. Выдающийся вклад в теорию линейных уравнений с периодическими коэффициентами внес А.М. Ляпунов, работы которого [2, 3] (см., также, [4]) стали отправной точкой для формирования теории зон устойчивости. Изложение основ этой теории приведено в работах [1, 5].

В работе [6] приведены пионерские результаты о законах распределения собственных значений ряда краевых задач для некоторых линейных уравнений второго порядка. В настоящей работе, существенно использующей результаты из [6], получены асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач. Это, в свою очередь, позволило дать ответ на вопрос об асимптотическом распределении длины ляпуновских зон устойчивости и неустойчивости.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0, \quad (1)$$

где  $T$ -периодические функции  $r(t)$  и  $q(t)$  достаточно гладкие. Отметим, что нули функции  $r(t)$  называют точками поворота. В разделе 1 исследуется случай, когда  $r(t) > 0$ , т.е. точки поворота отсутствуют. В разделе 2 предполагается, что  $r(t) \geq 0$  и для некоторых  $t$  функция  $r(t)$  обращается в нуль. Наиболее интересны результаты раздела 3, в котором функция  $r(t)$  знакопеременна.

Методика исследования основана на изучении асимптотики решений уравнения (1) при достаточно больших значениях  $\lambda$ . Здесь существенно используются результаты работ [6–10]. Отметим еще работы [11–15], в которых получены асимптотические законы разложения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка.

## 1. Асимптотика собственных значений для уравнений без точек поворота

Основное предположение этого раздела состоит в том, что отсутствуют точки поворота, т.е.

$$r(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Поставим для уравнения (1) периодическую краевую задачу, т.е. задачу нахождения всех таких  $\lambda$ , для которых существует ненулевое  $T$ -периодическое решение  $x(t): x(t+T) \equiv x(t)$ . Такие значения  $\lambda$  называются собственными значениями периодической краевой задачи.

Одновременно будем изучать для (1) антипериодическую краевую задачу, т.е. задачу нахождения всех таких  $\lambda$ , для которых (1) имеет ненулевое  $T$ -антипериодическое решение  $x(t+T) \equiv -x(t)$ . Такие  $\lambda$  называются собственными значениями антипериодической краевой задачи.

Согласно ляпуновской теории зон устойчивости [1–5], существует бесконечно много собственных значений  $\lambda_n^+$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) периодической и  $\lambda_n^-$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) антипериодической краевых задач, причем

$$(\lambda_0^+)^2 < (\lambda_1^-)^2 \leq (\lambda_2^-)^2 < (\lambda_1^+)^2 < (\lambda_3^-)^2 \leq \dots$$

Нас будет интересовать вопрос о зависимости собственных значений  $\lambda_n^+$  и  $\lambda_n^-$  от номера  $n$ , когда  $n$  стремится к бесконечности. Поскольку при больших номерах  $n$  величины  $(\lambda_n^\pm)^2$  положительны, то через  $\lambda_n^\pm$  удобно обозначать в дальнейшем арифметическое значение корня из  $(\lambda_n^\pm)^2$ .

**Теорема 1.** *Имеют место асимптотические неравенства*

$$\lambda_{2n-1}^+ = \frac{2\pi n}{T \int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda_{2n}^+ = \frac{2\pi n}{T \int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\lambda_{2n-1}^- = \frac{(2n-1)\pi}{T \int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda_{2n}^- = \frac{(2n-1)\pi}{T \int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

**Доказательство.** Сначала приведем уравнение (1) к более удобному для исследования виду. Для этого выполним в нем последовательно несколько преобразований. Сначала произведем замену времени

$$t = \varphi(\tau) \quad (\varphi'(\tau) > 0),$$

затем положим  $x(\varphi(\tau)) = z(\tau)$  и, наконец,

$$z(\tau) = \left( \sqrt{\dot{\varphi}(\tau)} \right)^{-1} y(\tau).$$

Тогда для функции  $y(\tau)$  получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + [\lambda r(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^2(\tau) + g(\tau)] y = 0,$$

где

$$g(\tau) = \dot{\varphi}^2(\tau) g(\varphi(\tau)) + \frac{2\ddot{\varphi}(\tau)\dot{\varphi}(\tau) - \ddot{\varphi}^2(\tau)}{4\dot{\varphi}^2(\tau)}.$$

Функцию  $\varphi(\tau)$  определим из условия равенства единице коэффициента при  $\lambda^2$ , т.е.

$$r(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^2(\tau) = 1.$$

Решая это уравнение, находим неявное выражение для  $\varphi(\tau)$ :

$$\tau = \int_0^{\varphi(\tau)} \sqrt{r(t)} dt.$$

Отсюда функция  $\varphi(\tau)$  легко определяется. Для уравнения с  $T_1 = \int_0^T \sqrt{r(t)} dt$ -периодическими коэффициентами

$$\ddot{y} + [\lambda^2 + g(\tau)] y = 0 \tag{2}$$

в [1, 6, 15] была получена асимптотика при больших  $\lambda$  следа  $f(\lambda)$  матрицы монодромии:

$$f(\lambda) = 2 \cos \lambda T_1 + O(\lambda^{-1}). \tag{3}$$

Отметим, что  $f(\lambda)$  является также следом матрицы монодромии уравнения (1). Поэтому собственные значения рассматриваемых краевых задач и только они являются решениями уравнений

$$f(\lambda) = 2, \quad f(\lambda) = -2. \quad (4)$$

Положим затем  $\lambda_{2n-1}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + \delta_{2n-1}$ ,  $\lambda_{2n}^+ = \frac{2\pi n}{\int_0^T \sqrt{r(t)} dt} + \delta_{2n}$ . Тогда, используя в первом равенстве (4) выражение (3), для определения  $\delta_{2n-1}$  и  $\delta_{2n}$  получим равенства

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} \delta_{2n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad 4 \sin^2 \frac{1}{2} \delta_{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из общих свойств функции  $f(\lambda)$  вытекает, что эти уравнения разрешимы, а значит,  $\delta_{2n-1} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$  и  $\delta_{2n} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ . Для того чтобы установить наличие нужного числа нулей у собственных функций  $x_{2n-1}^+(t)$  и  $x_{2n}^+(t)$ , опять используем полученные в [1, 6, 15] асимптотические представления решений (2). Для величин  $\lambda_{2n-1}^-$  и  $\lambda_{2n}^-$  рассуждения те же. Тем самым теорема доказана.

Сделаем одно замечание. Можно показать, что для любого натурального  $k \geq 1$  имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2n-1}^+ &= 2\pi n \left( \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^1}{n} + \dots + \frac{c_k^1}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n}^+ &= 2\pi n \left( \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^1}{n} + \dots + \frac{c_k^1}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n-1}^- &= (2n-1)\pi \left( \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^2}{n} + \dots + \frac{c_k^2}{n^k} + O(n^{-k-1}), \\ \lambda_{2n}^- &= (2n-1)\pi \left( \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1} + \frac{c_1^2}{n} + \dots + \frac{c_k^2}{n^k} + O(n^{-k-1}), \end{aligned}$$

в которых коэффициенты  $c_j^i$  выражаются через  $r(\varphi(\tau))$ ,  $g(\tau)$  и их производные. Обратим внимание, что для любого целого  $k$

$$(\lambda_{2n-1}^\pm - \lambda_{2n}^\pm) = O(n^{-k}),$$

т.е. длина зон неустойчивости стремится к нулю (быстрее любой отрицательной степени  $n$ ). Длина зон устойчивости, очевидно, стремится к числу  $\pi \left( \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right)^{-1}$ .

## 2. Асимптотика собственных значений при условии $r(t) \geq 0$

**1. Формулировка результатов.** Основным предположением здесь является неотрицательность и наличие нулей функции  $r(t)$  в уравнении

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0. \quad (5)$$



Ограничимся для простоты изложения рассмотрением случая, когда  $r(t)$  имеет конечное число  $t_1, \dots, t_m$  ( $m \geq 1$ ) нулей на промежутке  $(0, T)$  длины периода, причем будем считать, что кратность каждого нуля равна двум. Далее, как обычно, предположим, что непрерывно дифференцируемая функция  $p(t)$  такова, что

$$M(p) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \geq 0.$$

Наряду с (5) введем в рассмотрение самосопряженное уравнение

$$\ddot{y} + [\lambda^2 r(t) + g(t)] y = 0, \quad (6)$$

где

$$g(t) = q(t) - \frac{1}{2}\dot{p}(t) - \frac{1}{4}p^2(t).$$

Напомним, что решения (5) и (6) связаны соотношением

$$x = ye^{-\frac{1}{2} \int_0^t p(s) ds}.$$

Поставим для каждого из уравнений (5) и (6) периодическую и антипериодическую краевые задачи. Собственные значения этих краевых задач для уравнения (6) обозначим через  $\lambda_n^+$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и  $\lambda_n^-$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) соответственно. Нас будет интересовать вопрос об асимптотической зависимости  $\lambda_n^\pm$  от номера  $n$ , когда  $n$  велико, а также вопрос о существовании бесконечного множества вещественных собственных значений рассматриваемых краевых задач для уравнения (5) и об их асимптотических законах распределения. Отметим, что уравнение (6) может иметь лишь конечное число комплексных (чисто мнимых) собственных значений.

Сначала сформулируем результаты для случая  $m = 1$ .

**Теорема 2.** *Имеют место равенства*

$$\lambda_{2n-1}^+ = 2\pi \left(n - \frac{1}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right),$$

$$\lambda_{2n}^+ = 2\pi \left(n + \frac{1}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right),$$

$$\lambda_{2n-1}^- = 2\pi \left(n - \frac{5}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right),$$

$$\lambda_{2n}^- = 2\pi \left(n - \frac{3}{8}\right) \left(\int_0^T \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1} + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right).$$

Опишем теперь, как можно получить соответствующие результаты для произвольного  $m > 1$ . Сначала введем несколько обозначений. Считая, что нули  $t_1, \dots, t_m$  функции  $r(t)$  занумерованы в порядке возрастания, положим

$$t_{m+1} = t_1 + T, \quad a_i = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Далее, введем матрицы

$$U_i(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11}^i(\lambda) & u_{12}^i(\lambda) \\ u_{21}^i(\lambda) & u_{22}^i(\lambda) \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, m),$$

элементы которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{11}^i(\lambda) &= \cos \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \sin \lambda a_i \cdot \cos \lambda a_{i+1}, \\ u_{12}^i(\lambda) &= \lambda^{-1}(\sin \lambda[a_i + a_{i+1}] + 2 \cos \lambda a_i \cdot \cos \lambda a_{i+1}), \\ u_{21}^i(\lambda) &= -\lambda(\sin \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \sin \lambda a_i \cdot \sin \lambda a_{i+1}), \\ u_{22}^i(\lambda) &= \cos \lambda[a_i + a_{i+1}] - 2 \cos \lambda a_i \cdot \sin \lambda a_{i+1}. \end{aligned}$$

Матрицу  $U(\lambda)$  определим тогда по правилу

$$U(\lambda) = U_m(\lambda) \cdot \dots \cdot U_1(\lambda),$$

а след этой матрицы обозначим через  $\varphi(\lambda)$ .

В формулировке следующего результата будут участвовать решения уравнений

$$\varphi(\lambda) = 2 \text{ и } \varphi(\lambda) = -2.$$

Неотрицательные решения  $h_n^+$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) первого и  $h_n^-$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) второго из этих уравнений удобно считать занумерованными в порядке возрастания с учетом кратности.

**Теорема 3.** *Имеют место равенства*

$$\lambda_n^+ = h_n^+ + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right), \quad \lambda_n^- = h_n^- + O\left(n^{-\frac{1}{2}} \ln n\right).$$

Если  $M(p) = 0$ , то собственные значения рассматриваемых краевых задач для уравнения (5) те же, что и у (6). Пусть

$$M(p) > 0. \tag{7}$$

**Теорема 4.** *Пусть  $m = 1$  и выполняется неравенство*

$$\text{ch} \left[ \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right] > \sqrt{2}.$$

Тогда уравнение (5) имеет лишь конечное число вещественных собственных значений периодической и антипериодической краевых задач, причем при всех достаточно больших  $\lambda$  решения (5) устойчивы. Если же

$$\operatorname{ch} \left[ \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right] < \sqrt{2}, \quad (8)$$

то уравнение (5) имеет лишь конечное число комплексных собственных значений тех же краевых задач, причем при неограниченном увеличении  $\lambda$  устойчивость и неустойчивость решений неограниченно чередуются.

Из приводимого ниже доказательства теоремы 4 будет следовать, что при условии (8) у уравнения (5) существует бесконечно много зон устойчивости и неустойчивости, причем длины этих зон имеют конечные ненулевые пределы при неограниченном росте  $n$ . Интересно отметить, что в случае  $r(t) > 0$  существование конечного числа вещественных собственных значений (и устойчивость решений (5) при всех достаточно больших  $\lambda$ ) следует уже из неравенства (7).

Можно сформулировать результаты, аналогичные теореме 4, и для  $m > 1$ , однако на этом останавливаться не будем.

**2. Вспомогательные построения.** Важным моментом доказательства является сведение случая, когда  $m > 1$ , к рассмотрению более простого случая  $m = 1$ . Для этого поступим следующим образом. Обозначим через  $U(t, \lambda)$  фундаментальную матрицу решений уравнения (6). Все значения параметра  $\lambda$ , при которых матрица монодромии  $U(T, \lambda)$  имеет собственные значения  $\pm 1$  (и только они), будут являться собственными значениями периодической и антипериодической краевых задач. Изучим асимптотику матрицы  $U(t, \lambda)$ . Считая, что

$$0 < t_1 < \dots < t_m < T,$$

введем в рассмотрение числа  $\tau_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) так, чтобы выполнялись неравенства

$$\tau_0 = 0 < t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \dots < t_m < T = \tau_m.$$

Если теперь обозначить через  $U_i(t, \lambda)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие фундаментальные матрицы уравнения (6), что  $U_i(\tau_{i-1}, \lambda) = I$ , то получим следующее важное для нас равенство

$$U(T, \lambda) = U_m(\tau_m, \lambda) \cdot U_{m-1}(\tau_{m-1}, \lambda) \cdot \dots \cdot U_1(\tau_1, \lambda).$$

Из него вытекает, что асимптотика  $U(T, \lambda)$  будет получена, если удастся получить асимптотику каждой из матриц  $U_i(\tau_i, \lambda)$ . Для этого, в свою очередь, достаточно изучить поведение одной из этих матриц при больших значениях  $\lambda$ . Выберем для определенности в качестве такой матрицы  $U_1(\tau_1, \lambda)$  и займемся изучением ее свойств.

Введем несколько обозначений. Через  $x_1(t, \lambda)$  и  $x_2(t, \lambda)$  обозначим решения уравнения (6) с начальными условиями

$$x_1(0, \lambda) = \dot{x}_2(0, \lambda) = 1, \quad \dot{x}_1(0, \lambda) = x_2(0, \lambda) = 0.$$

Элементами матрицы  $U_1(\tau_1, \lambda)$  являются величины  $x_1(\tau_1, \lambda)$ ,  $\dot{x}_1(\tau_1, \lambda)$ ,  $x_2(\tau_1, \lambda)$  и  $\dot{x}_2(\tau_1, \lambda)$ . Поэтому изучим эти величины при больших  $\lambda$ . Как оказывается, это удобно сделать, вводя две вспомогательные функции  $x_0(t, \lambda)$  и  $x^0(t, \lambda)$ , которые являются решениями того же уравнения, что и функции  $x_1(t, \lambda)$  и  $x_2(t, \lambda)$ , а начальные условия их таковы:

$$x_0(t_1, \lambda) = \dot{x}^0(t_1, \lambda) = 1, \quad \dot{x}_0(t_1, \lambda) = x^0(t_1, \lambda) = 0.$$

Отметим, что функции  $x_1(t, \lambda)$  и  $x_2(t, \lambda)$  легко выражаются через  $x_0(t, \lambda)$  и  $x^0(t, \lambda)$ , а именно

$$x_1(t, \lambda) = \dot{x}^0(0, \lambda) \cdot x_0(t, \lambda) - \dot{x}_0(0, \lambda)x^0(t, \lambda), \quad (9)$$

$$x_2(t, \lambda) = -x^0(0, \lambda) \cdot x_0(t, \lambda) + x_0(0, \lambda)x^0(t, \lambda). \quad (10)$$

Отсюда вытекает, что для получения асимптотики  $U_1(\tau_1, \lambda)$  необходимо изучить асимптотическое поведение величин  $x_0(t, \lambda)$ ,  $x^0(t, \lambda)$  и их производных при  $t = 0$  и  $t = \tau_1$ . Этим сейчас и займемся.

**3. Обоснование результатов.** Введем в рассмотрение модельное уравнение

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + s^2 y = 0.$$

Пусть решения  $y_0(s)$  и  $y^0(s)$  этого уравнения удовлетворяют начальным условиям

$$y_0(0) = \dot{y}^0(0) = 1, \quad y^0(0) = \dot{y}_0(0) = 0.$$

Асимптотические (при больших значениях  $s$ ) представления этих функций хорошо известны (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} y_0(s) &= 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{5}{2}}\right), \\ \dot{y}_0(s) &= 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) s^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right), \\ y^0(s) &= 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{3\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{5}{2}}\right), \\ \dot{y}^0(s) &= 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) s^{-\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{\pi}{8}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

**Лемма 1.** *Имеют место асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} (\omega'(t_1))^{-\frac{1}{2}} x_0(\tau, \lambda) &= (\omega'(\tau))^{-\frac{1}{2}} y_0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda), \\ (\omega'(t_1))^{-\frac{1}{2}} \dot{x}_0(\tau, \lambda) &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left[(\omega'(\tau))^{\frac{1}{2}} \dot{y}_0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda)\right], \\ (\omega'(t_1))^{\frac{1}{2}} x^0(\tau, \lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \left[(\omega'(\tau))^{-\frac{1}{2}} y^0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda)\right], \\ (\omega'(t_1))^{\frac{1}{2}} \dot{x}^0(\tau, \lambda) &= (\omega'(\tau))^{\frac{1}{2}} \dot{y}^0\left[\lambda^{\frac{1}{2}} \omega(\tau)\right] + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\tau$  принимает значения 0 и  $\tau_1$ , а

$$\omega(t) = \left(2 \int_{t_1}^t \sqrt{r(\xi)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\omega(t)r(t) \geq 0). \quad (12)$$

О доказательстве леммы 1. В уравнении (6) произведем замены

$$s = \omega(t),$$

где  $\omega(t)$  определяется формулой (12), а затем

$$x(t) = (\omega'(t))^{-\frac{1}{2}} y(s). \quad (13)$$

Тогда для функции  $y(s)$  получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \lambda^2 s^2 y = g(s)y, \quad (14)$$

в котором через  $g(s)$  обозначена функция, легко вычисляющаяся в процессе замен (12) и (13). Точный вид этой функции нам не понадобится. Пусть  $y_1(s, \lambda)$  и  $y_2(s, \lambda)$  — решения уравнения (14) с начальными условиями

$$y_1(0, \lambda) = \dot{y}_2(0, \lambda) = 1, \quad \dot{y}_1(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = 0.$$

Метод вариации произвольной постоянной для уравнения (14) позволяет получить представления

$$u_1(s, \lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right) K(s, \tau) d\tau + \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s u_1(\tau, \lambda) K(s, \tau) d\tau, \quad (15)$$

$$u_2(s, \lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right) K(s, \tau) d\tau + \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^s u_2(\tau, \lambda) K(s, \tau) d\tau, \quad (16)$$

где

$$K(s, \tau) = g(\tau) \left[ y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}s\right) y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right) - y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}s\right) y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right) \right], \\ u_1(s, \lambda) = y_1(s, \lambda) - y_0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}s\right), \quad u_2(s, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} \left( y_2(s, \lambda) - y^0\left(\lambda^{\frac{1}{2}}s\right) \right).$$

Учет в формулах (15) и (16) свойств функций  $y_0(s)$  и  $y^0(s)$  позволяет непосредственно получить оценки для функций  $u_i(s, \lambda)$  ( $i = 1, 2$ ) при фиксированном  $s \neq 0$ :

$$u_i(s, \lambda) = O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda\right) \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда уже, производя замену, обратную (13), приходим к обоснованию леммы.

Равенства (11) позволяют по формулам (9) и (10) определить асимптотические соотношения для элементов матрицы  $U_1(\tau_1, \lambda)$ . Производя необходимые вычисления, получаем

$$x_1(\tau_1, \lambda) = \sqrt{\frac{r(0)}{r(\tau_1)}} \left[ \cos\left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ \left. - 2 \sin\left(\lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8}\right) \right] + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda\right),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau_1, \lambda) &= -\lambda \sqrt{r(0)r(\tau_1)} \left[ \sin \left( \lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \left( \lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left( \lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) + O \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right) \right], \\ x_2(\tau_1, \lambda) &= -\lambda^{-1} \left( r(0)r(\tau_1) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \sin \left( \lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \left( \lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left( \lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) + O \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right) \right], \\ \dot{x}_2(\tau_1, \lambda) &= \sqrt{\frac{r(\tau_1)}{r(0)}} \left[ \cos \left( \lambda \int_0^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \left( \lambda \int_0^{t_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left( \lambda \int_{t_1}^{\tau_1} \sqrt{r(t)} dt - \frac{\pi}{8} \right) \right] + O \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right). \end{aligned}$$

Тем самым найдено асимптотическое представление матрицы  $U_1(\tau_1, \lambda)$ . Аналогично получаются подобные выражения для всех остальных матриц, фигурирующих в определении  $U(T, \lambda)$ .

Заметим теперь, что при таком специальном выборе чисел  $\tau_0, \dots, \tau_m$ , при котором верны соотношения

$$\int_{\tau_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{r(t)} dt,$$

справедливо равенство  $U(T, \lambda) = U(\lambda) + O \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right)$ . Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + O \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \ln \lambda \right). \quad (17)$$

Здесь через  $f(\lambda)$  обозначен след матрицы монодромии  $U(T, \lambda)$ . Собственные значения  $\lambda_n^+$  и  $\lambda_n^-$  являются корнями уравнений

$$f(\lambda) = 2 \text{ и } f(\lambda) = -2 \quad (18)$$

соответственно. Отсюда, из равенства (17) и из определения чисел  $h_n^+$  и  $h_n^-$  вытекает доказательство теорем 2 и 3. Отметим еще, что проверку того, что собственные функции, отвечающие  $\lambda_n^+$  и  $\lambda_n^-$ , имеют нужное число нулей, легко осуществить, используя асимптотические формулы решений.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Собственные значения периодической и антипериодической краевых задач (и только они) являются соответственно решениями уравнений

$$f(\lambda) = 2 \operatorname{ch} \left[ \int_0^T p(s) ds \right] \text{ и } f(\lambda) = -2 \operatorname{ch} \left[ \int_0^T p(s) ds \right]. \quad (19)$$

Для следа матрицы монодромии справедлива формула

$$f(\lambda) = x_1(T, \lambda) + \dot{x}_2(T, \lambda).$$

Асимптотические представления для  $x_1(T, \lambda)$  и  $\dot{x}_2(T, \lambda)$  приводят к равенству

$$f(\lambda) = 2^{\frac{3}{2}} \cos \left( \lambda \int_0^T \sqrt{r(t)} dt \right) + O(\lambda^{-1} \ln \lambda).$$

Подставляя последнее выражения в (19), легко убеждаемся в справедливости теоремы 4.

Таким образом, сравнивая поведение собственных значений при  $r(t) > 0$  и  $r(t) \geq 0$ , делаем вывод, что наличие нулей у  $r(t)$  приводит к сдвигке всех собственных значений на некоторые постоянные величины.

### 3. Асимптотика собственных значений в случае знакопеременной $r(t)$

**1. Формулировка результатов.** Будем считать, что  $T$ -периодическая функция  $r(t)$  в уравнении

$$\ddot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)] x = 0, \quad (20)$$

имеет конечное число простых нулей  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  на интервале  $(0, T)$ . При неограниченном увеличении  $\lambda$  количество нулей решений (20) на отрезке  $[0, T]$  стремится к бесконечности. Отсюда и из результатов [1–5] вытекает, что существует бесконечно много собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения (20). Очевидно, кроме бесконечного числа вещественных собственных значений существует и бесконечно много чисто мнимых собственных значений, однако, поскольку замена  $\lambda^2$  на  $-\lambda^2$  не меняет типа задачи, достаточно рассмотреть лишь вещественные собственные значения. Условимся о нумерации. Собственными значениями  $\lambda_{2n-1}^+$  и  $\lambda_{2n}^+$  будем называть такие неотрицательные собственные значения периодической краевой задачи, которым отвечают собственные функции, имеющие ровно  $2n$  нулей на  $[0, T)$ . Аналогично, собственными значениями  $\lambda_{2n-1}^- \geq 0$  и  $\lambda_{2n}^- \geq 0$  назовем такие собственные значения антипериодической краевой задачи, отвечающие которым собственные функции имеют ровно  $2n - 1$  нулей на  $[0, T)$ . Нас будет интересовать вопрос о зависимости  $\lambda_n^\pm$  от номера  $n$ , когда  $n$  неограниченно растет.

Прежде чем перейти к формулировке результатов, введем несколько обозначений. Пусть  $(\alpha_i, \beta_i)$  ( $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ ) — все те интервалы отрезка  $[t_1, t_1 + T]$ , концами которых служат нули функции  $r(t)$  и на которых  $r(t)$  положительна. Положим

$$r_i(t) = \begin{cases} r(t), & t \in (\alpha_i + kT, \beta_i + kT) \ (k = 0, \pm 1, \dots), \\ 0, & t \in \overline{(\alpha_i + kT, \beta_i + kT)} \ (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases}$$

Рассмотрим затем совокупность чисел

$$h_{ik} = \frac{\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\int_0^T \sqrt{r_i(t)} dt} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{m}{2}; k = 0, 1, \dots\right).$$

Расположим все числа  $h_{ik}$  в ряд в порядке возрастания. Определим затем числа  $h_n$ , которые будем считать равными соответственно  $(n + 1)$ -му члену этого ряда.

**Теорема 5.** *Имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_{n-1}^+ = h_n + O(n^{-1}), \quad \lambda_n^- = h_n + O(n^{-1}).$$

Рассмотрим затем несамосопряженное уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [\lambda^2 r(t) + q(t)]x = 0, \quad (21)$$

где  $r(t)$  та же, что и выше. Условие несамосопряженности означает, что

$$M(p) > 0.$$

Через  $\tilde{\lambda}_{2n-1}^+$  и  $\tilde{\lambda}_{2n}^+$  ( $\tilde{\lambda}_{2n-1}^-$  и  $\tilde{\lambda}_{2n}^-$ ) будем обозначать такие вещественные собственные числа (если они существуют) периодической (антипериодической) краевой задачи, отвечающие которым собственные функции имеют ровно  $2n$  ( $2n - 1$ ) нулей на полуинтервале  $[0, T)$ .

**Теорема 6.** *Для уравнения (21) имеют место следующие утверждения:*

1. *Найдутся такое  $\lambda_0 > 0$  и такое четное  $n_0$ , что на полуоси  $[\lambda_0, \infty)$  существует бесконечно много собственных значений  $\tilde{\lambda}_n^+$  ( $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ) и  $\tilde{\lambda}_n^-$  ( $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ), для которых справедливы неравенства*

$$\tilde{\lambda}_{n_0}^+ < \tilde{\lambda}_{n_0+1}^- \leq \tilde{\lambda}_{n_0+2}^- < \tilde{\lambda}_{n_0+1}^+ \leq \tilde{\lambda}_{n_0+2}^+ < \dots$$

2. *Решения устойчивы в том и только в том случае, когда*

$$\lambda \in \left(\tilde{\lambda}_{2n}^+, \tilde{\lambda}_{2n+1}^-\right) \text{ или } \lambda \in \left(\tilde{\lambda}_{2n}^-, \tilde{\lambda}_{2n-1}^+\right).$$

3. *Имеют место асимптотические равенства*

$$\tilde{\lambda}_{n-1}^+ = h_n + O(n^{-1}), \quad \tilde{\lambda}_n^- = h_n + O(n^{-1}).$$



Из этой теоремы вытекает, в частности, что независимо от величины  $M(p)$ , длина зон устойчивости стремится к нулю с ростом  $n$ , а последовательность длин зон неустойчивости состоит, вообще говоря, из нескольких подпоследовательностей, имеющих конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ , причем хотя бы один из этих пределов не равен нулю.

**2. Об обосновании результатов.** Так же, как и в предыдущем случае, здесь достаточно изучить асимптотику матрицы  $U_1(\tau_1, \lambda)$ . Считая, что  $r(0) < 0$ , в качестве модельного уравнения примем такое:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + sy = 0. \quad (22)$$

Для решений  $y_0(s)$  и  $y^0(s)$  этого уравнения с начальными условиями  $y_0(0) = \dot{y}^0(0) = 1$ ,  $\dot{y}_0(0) = y^0(0) = 0$  воспользуемся известными [6] асимптотическими формулами для больших значений  $s$ . Эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} y_0(s) &= 3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ y_0(s) &= 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (-s)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ y^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{5\pi}{12}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ y^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) (-s)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ \dot{y}_0(s) &= -3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{7\pi}{12}\right] + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ \dot{y}_0(s) &= -3^{\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-1} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0, \\ \dot{y}^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} \cos\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right] \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s > 0, \\ \dot{y}^0(s) &= 3^{\frac{5}{6}} 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(s^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}, \quad s < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

На следующем этапе, действуя так же, как при доказательстве леммы 1, получаем выражения для функций  $x_0(\tau, \lambda)$  и  $x^0(\tau, \lambda)$  через  $y_0(s, \lambda)$  и  $y^0(s, \lambda)$ . Окончательные формулы здесь такие:

$$\begin{aligned} [\omega'(t_1)]^{-\frac{1}{2}} x_0(\tau, \lambda) &= [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} y_0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \\ [\omega'(t_1)]^{-\frac{1}{2}} \dot{x}_0(\tau, \lambda) &= \lambda^{\frac{2}{3}} [\omega'(\tau)]^{\frac{1}{2}} \dot{y}_0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \\ [\omega'(t_1)]^{\frac{1}{2}} x^0(\tau, \lambda) &= \lambda^{-\frac{2}{3}} \left\{ [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} y^0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})] \right\}, \\ [\omega'(t_1)]^{\frac{1}{2}} \dot{x}^0(\tau, \lambda) &= [\omega'(\tau)]^{-\frac{1}{2}} \dot{y}^0\left(\lambda^{\frac{2}{3}} \omega(\tau)\right) [1 + O(\lambda^{-1})], \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\tau$  принимает значения 0 и  $\tau_1$ , а функция  $\omega(t)$  определяется равенством

$$\omega(t) = \left[ \frac{3}{2} \int_{t_1}^t \sqrt{r(s)} ds \right]^{\frac{2}{3}}.$$

По формулам (23) и (24) находим асимптотические выражения для  $x_0(\tau, \lambda)$  и  $x^0(\tau, \lambda)$ , а затем из равенств (9) и (10) получим асимптотику  $U_1(\tau_1, \lambda)$ . Для того

чтобы подобным образом изучить матрицу  $U_2(\tau_2, \lambda)$ , необходимо в качестве модельного уравнения принять

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - sy = 0.$$

Отметим, что это уравнение получается из уравнения (22) с помощью замены времени  $s$  на  $-s$ . Учитывая это, можно воспользоваться предыдущими формулами.

Для упрощения вычислений можно положить  $|r(\tau_1)| = |r(\tau_2)| = \dots = |r(\tau_m)|$ . Прежде чем привести окончательные формулы, введем еще два обозначения:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= 2^{\frac{m}{2}} \cos\left(\lambda \int_0^T \sqrt{r_1(t)} dt\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\lambda \int_0^T \sqrt{r_{\frac{m}{2}}(t)} dt\right), \\ r_-(t) &= \begin{cases} -r(t), & \text{если } r(t) \leq 0, \\ 0, & \text{если } r(t) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1(T, \lambda) &= [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ \dot{x}_1(T, \lambda) &= \lambda [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ x_2(T, \lambda) &= \lambda^{-1} [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}, \\ \dot{x}_2(T, \lambda) &= [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем соотношение для следа  $f(\lambda)$  матрицы монодромии:

$$f(\lambda) = 2 [\psi(\lambda) + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda \int_0^T \sqrt{r_-(t)} dt}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в равенства (18) и (19) и анализируя получающиеся выражения, приходим к обоснованию всех сформулированных в первом пункте результатов.

**3. Пример.** Изучим асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для уравнения

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda^2 r(t)x = 0, \quad (26)$$

где  $\alpha > 0$ , а периодическая с периодом  $T = 1$  функция  $r(t)$  имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} \beta^2, & \text{если } t \in [0, a], \beta > 0, 0 < a < 1, \\ -1, & \text{если } t \in [a, 1]. \end{cases}$$

Несмотря на то, что функция  $r(t)$  не принадлежит к рассмотренному выше классу, тем не менее выводы для уравнения (25) будут примерно такими же, что и в случае непрерывной и знакопеременной  $r(t)$ . Уравнение (26) интегрируется в явном

виде. Найдем решения  $x_1(t, \lambda)$  и  $x_2(t, \lambda)$  этого уравнения с начальными условиями  $x_1(0, \lambda) = \dot{x}_2(0, \lambda) = 1$ ,  $\dot{x}_1(0, \lambda) = x_2(0, \lambda) = 0$ . Для значений  $t$  из отрезка  $[0, a]$  находим, что

$$x_1(t, \lambda) = \left[ \cos \left( \sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2}} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) \right] e^{-\alpha t}, \quad (27)$$

$$x_2(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2}} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 \beta^2 - \alpha^2} t \right) e^{-\alpha t}. \quad (28)$$

Учитывая это, получим следующее выражение для значений  $t \in (a, 1]$ :

$$x_1(t, \lambda) = \left( 2\sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right)^{-1} \times \left\{ \left[ \left( \alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_1(a, \lambda) + \dot{x}_1(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} - \left[ \dot{x}_1(a, \lambda) + \left( \alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_1(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha - \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} \right\}, \quad (29)$$

$$x_2(t, \lambda) = \left( 2\sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right)^{-1} \times \left\{ \left[ \left( \alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_2(a, \lambda) + \dot{x}_2(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} - \left[ \dot{x}_2(a, \lambda) + \left( \alpha + \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2} \right) x_2(a, \lambda) \right] e^{(-\alpha - \sqrt{\lambda^2 \beta^2 + \alpha^2})(t-a)} \right\}, \quad (30)$$

причем входящие в эти равенства величины  $x_i(a, \lambda)$  и  $\dot{x}_i(a, \lambda)$  ( $i = 1, 2$ ) определяются в (27) и (28) при  $t = a$ . Формулы (29) и (30) дают возможность получить асимптотическое выражение для следа  $f(\lambda)$  матрицы монодромии уравнения (26). Имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= x_1(1, \lambda) + \dot{x}_2(1, \lambda) = \\ &= [\cos \lambda \beta + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda(1-a+O(\lambda^{-1}))}. \end{aligned}$$

Уравнения для нахождения собственных значений принимают после простых преобразований вид

$$[\cos \lambda \beta + O(\lambda^{-1})] e^{\lambda(1-a+O(\lambda^{-1}))} = \pm 1.$$

Отсюда собственные значения легко находятся. Очевидно, что при неограниченном увеличении  $\lambda$  они стремятся к нулям функции  $\cos \lambda \beta$ , т.е. к числам вида  $\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \beta^{-1}$ .

**4. Пример.** Устойчивость решений уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(\varepsilon t)\dot{x} + q(\varepsilon t)x = 0 \quad (31)$$

с периодическими медленно меняющимися коэффициентами, т.е. при условии  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Рассмотрим вопрос об устойчивости решений уравнения (31) для достаточно малых значений  $\varepsilon$  и при условии

$$M(p) > 0.$$

После замены  $\varepsilon t \rightarrow t$  рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \varepsilon p(t)\dot{x} + q(t)x = 0.$$

Выполним стандартную замену

$$x = y \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t p(s) ds\right),$$

в результате которой получим уравнение

$$\varepsilon^2 \ddot{y} + [r(t) + \varepsilon m(t)]y = 0, \quad (32)$$

где  $r(t) = q(t) - \frac{1}{4}p^2(t)$ ,  $m(t) = -\frac{1}{2}\dot{p}(t)$ . Положим

$$r_+ = \int_0^T \left[ \frac{(|r(t)| + r(t))}{2} \right]^{1/2} dt, \quad r_- = \int_0^T \left[ \frac{(|r(t)| - r(t))}{2} \right]^{1/2} dt.$$

Асимптотические формулы для решения уравнения (32) приведены выше. Из них вытекает следующее утверждение

**Теорема 7.** Пусть

$$M(p) > 2r_-.$$

Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  решения уравнения (31) асимптотически устойчивы.

Пусть

$$M(p) < 2r_- \text{ и } r_+ = 0,$$

тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  решения уравнения (31) неустойчивы.

Пусть

$$M(p) < 2r_- \text{ и } r_+ > 0.$$

Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  устойчивость и неустойчивость уравнения (31) неограниченно чередуются.

## 4. Заключение

Получены асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Показано, что в отсутствие точек поворота ( $r(t) > 0$ ) длины зон неустойчивости стремятся к нулю с ростом их номера, а длины зон устойчивости – к некоторой положительной величине. Ситуация, когда  $r(t) \geq 0$  и имеются нули  $r(t)$ , приводит к тому, что длины зон устойчивости и зон неустойчивости имеют конечный ненулевой предел при неограниченном увеличении номера соответствующей зоны. Если же функция  $r(t)$  знакопеременна, то длины всех зон устойчивости стремятся к нулю, а длины зон неустойчивости – к некоторым конечным величинам. Эти выводы позволили сформулировать ряд интересных критериев устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1).

## Список литературы / References

- [1] Якубович В. А., Старжинский В. М., *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами*, Наука, М., 1972; [Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Lineynye differentsialnye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami*, Nauka, M., 1972, (in Russian).]
- [2] Ляпунов А. М., “Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка”, *Собр. соч.*, **2**, Изд-во АН СССР, М.; Л., 1956., 401–403; [Lyapunov A. M., “Ob odnom lineynom differentsialnom uravnenii vtorogo poriyadka”, *Sobr. soch.*, **2**, Izd-vo AN SSSR, M.; L., 1956., 401–403, (in Russian).]
- [3] Ляпунов А. М., “Об одном трансцендентном уравнении и о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодическими коэффициентами”, *Собр. соч.*, **2**, Изд-во АН СССР, М.; Л., 1956, 404–406; [Lyapunov A. M., “Ob odnom transtsendentnom uravnenii i o lineynykh differentsialnykh uravneniyakh vtorogo poriyadka s periodicheskimi koeffitsientami”, *Sobr. soch.*, **2**, Izd-vo AN SSSR, M.; L., 1956, 404–406, (in Russian).]
- [4] Смирнов В. И., “Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, I*, Изд-во АН СССР, М., 1956, 236; [Smirnov V. I., “Nauchnyy arkhiv A. M. Lyapunova po voprosam ustoychivosti i teorii obyknovennykh differentsialnykh uravneniy”, *Tr. III Vsesoyuzn. matem. sezda, I*, Izd-vo AN SSSR, M., 1956, 236, (in Russian).]
- [5] Коддингтон Э., Левинсон И., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; [Koddington E., Levinson I., *Teoriya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy*, IL, M., 1958, (in Russian).]
- [6] Дородницын А. А., “Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка”, *УМН*, **7**, 6:52 (1952), 3–96; [Dorodnitsyn A. A., “Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znacheniy dlya nekotorykh osobykh vidov differentsialnykh uravneniy vtorogo poriyadka”, *UMN*, **7**, 6:52 (1952), 3–96, (in Russian).]
- [7] Тихонов А. Н., “Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Математический сборник*, **31 (73)**:3 (1952), 575–586; [Tikhonov A. N., “Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives”, *Mat. Sb.*, **31**:3 (1952), 575–586.
- [8] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., “Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Итоги науки. Математический анализ 1967*, ВИНТИ АН СССР, М., 1969; [Butuzov V. F., Vasil’eva A. B., Fedoryuk M. V., “Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations”, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **8** (1970), 1–82 ].
- [9] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasil’eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]
- [10] Крейн М. Г., “Основные положения теории  $\lambda$ -зон устойчивости канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами”, *Сборник Памяти А. А. Андропова*, Изд-во АН СССР, М., 1955; [Kreyn M. G., “Osnovnye polozheniya teorii  $\lambda$ -zon ustoychivosti kanonicheskikh sistem lineynykh differentsialnykh uravneniy s periodicheskimi koeffitsientami”, *Sbornik Pamyati A. A. Andronova*, Izd-vo AN SSSR, M., 1955, (in Russian).]
- [11] Кащенко С. А., “Предельные значения собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками поворота”, *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 3–39; [Kashchenko S. A., “Predelnye znacheniya sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poriyadka s tochkami povorota”, *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 3–39, (in Russian).]
- [12] Кащенко С. А., “Асимптотика собственных чисел первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с точками

- поворота”, *Вест. Яросл. ун-та*, **10**, 1974, 40–64; [Kashchenko S. A., “Asimptotika sobstvennykh chisel pervoy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Vest. Yarosl. un-ta*, **10**, 1974, 40–64, (in Russian).]
- [13] Kashchenko S. A., “Asymptotics of Eigenvalues of the First Boundary-Value Problem for Singularly Perturbed Second-Order Differential Equation with Turning Points”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:7 (2016), 636–656.
- [14] Кащенко С. А., “Асимптотика собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота”, *Вестник Яросл. ун-та*, **13**, 1975, 20–83; [Kashchenko S. A., “Asimptotika sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i antiperiodicheskoy kraevykh zadach dlya singulyarno vozmushchennykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Vestnik Yarosl. un-ta*, **13**, 1975, 20–83, (in Russian).]
- [15] Кащенко С. А., “Асимптотические законы распределения собственных значений периодической и антипериодической краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота”, *Исслед. по устойчив. и теории колеб.*, Ярославль: ЯрГУ, 1976, 95–113; [Kashchenko S. A., “Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znacheniy periodicheskoy i antiperiodicheskoy kraevoy zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s tochkami povorota”, *Issled. po ustoych. i teorii koleb.*, YarGU, Yaroslavl, 1976, 95–113, (in Russian).]

---

**Kashchenko S. A.**, "Asymptotic of Eigenvalues of Periodic and Antiperiodic Boundary Value Problem for Second Order Differential Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 13–30.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-13-30

**Abstract.** The article considers asymptotic distribution of characteristic constants in periodic and antiperiodic boundary-value problems for the second-order linear equation with periodic coefficients. It allows getting asymptotics of stability and instability zones of solutions. It was shown that in the absence of turning points ( $r(t) > 0$ ) the instability zones lengths converge to zero with their number increasing, and the stability zones lengths converge to a positive quantity. The situation, when ( $r(t) \geq 0$ ) and there are zeroes  $r(t)$ , results in the fact that the lengths of stability and instability zones have a finite nonzero bound at an unbounded increase of the number of the corresponding zone. But if the function  $r(t)$  is alternating, the lengths of all stability zones converge to zero, and the lengths of instability zones converge to some finite quantities. These conclusions allowed to formulate a series of interesting criteria of stability and instability of solutions of the second-order equation with periodic coefficients. The results given are illustrated by a substantial example. The methods of investigation are based on a detailed study of the so-called special standard equations and the consequent reduction of original equations to any particular type of standard equations. Here, asymptotic methods of the theory of singular perturbation, as well as certain properties of a series of special functions are used.

**Keywords:** singularly perturbed equation, turning points, asymptotic, boundary value problem, eigenvalues

**On the authors:**

Sergey A. Kashchenko, [orcid.org/0000-0002-8777-4302](https://orcid.org/0000-0002-8777-4302), doctor of science, professor,  
 P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,  
 National Research Nuclear University MEPhI,  
 Kashirskoye shosse, 31, Moscow, 115409 Russia,  
 e-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

©Давыдова М. А., Нефедов Н. Н., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-31-38

УДК 517.9

## Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности

Давыдова М. А., Нефедов Н. Н.

получена 16 мая 2016

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается многомерная сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения эллиптического типа, называемого в приложениях стационарным уравнением реакция-диффузия-адвекция. Формулируются основные условия существования решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур) и строятся асимптотические приближения произвольного порядка точности таких решений. Применяется эффективный алгоритм определения положения поверхности перехода, позволяющий распространить наш подход на более сложный случай сбалансированных адвекции и реакции (так называемый критический случай). Для обоснования построенной асимптотики используется и развивается на этот класс задач асимптотический метод дифференциальных неравенств, позволяющий также установить устойчивость по Ляпунову решений с внутренними переходными слоями как стационарных решений соответствующих параболических задач.

**Ключевые слова:** уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры

**Для цитирования:** Давыдова М. А., Нефедов Н. Н., "Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:1 (2017), 31–38.

**Об авторах:**

Давыдова Марина Александровна, [orcid.org/0000-0002-9255-7353](https://orcid.org/0000-0002-9255-7353), канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: [m.davydova@bk.ru](mailto:m.davydova@bk.ru)

Нефедов Николай Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: [nefedov@phys.msu.ru](mailto:nefedov@phys.msu.ru)

**Благодарности:**

Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №16-01-00437.

# 1. Постановка задачи. Основные условия существования контрастных структур

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Дирихле

$$\varepsilon^2 \Delta u - f(\varepsilon \nabla u, u, x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in D \subset R^N, \quad (1)$$

$$u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \quad (2)$$

предполагая, что  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, функции  $f$ ,  $g(x)$  и граница  $\partial D$  – достаточно гладкие,  $f$  удовлетворяет условию не более чем квадратичного роста по  $\nabla u$ . Под обозначением  $\varepsilon \nabla u$  будем подразумевать зависимость функции  $f$  от аргументов  $v_1 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_1, v_2 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_2, \dots, v_N \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_N$ ,  $\Delta = \sum_{k=1}^N \partial^2 / \partial x_k^2$  – оператор Лапласа.

При исследовании задачи (1), (2) на наличие решений с внутренними переходными слоями основным требованием является условие

(Y<sub>1</sub>) Вырожденное уравнение  $f(0, u, x) = 0$  имеет ровно три корня  $u = \phi_i(x)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , причем  $\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x)$ ,  $f_u(0, \phi_i(x), x) > 0$ ,  $i = 1, 3$ ,  $f_u(0, \phi_2(x), x) < 0$  при  $x \in \bar{D}$ .

По аналогии с работой [2] определим множество  $\{\bar{\Omega}\}$  достаточно гладких замкнутых поверхностей в области  $D$  с локальными координатами в  $\delta$  – окрестности  $\bar{\Omega}_\delta$  каждой поверхности

$$x \in \bar{\Omega}^\delta \mapsto (y, r) \in \bar{\Omega} \times [-\delta; \delta].$$

Здесь  $y \in \bar{\Omega}$ , причем  $dist(x, \bar{\Omega}) = dist(x, y)$ ;  $r = \begin{cases} dist(x, y), & x \in D^+, \\ -dist(x, y), & x \in D^-, \end{cases}$   $D^+$  и  $D^-$  – соответственно внешняя и внутренняя подобласти области  $D$ , разделенные поверхностью  $\bar{\Omega}$ . Пусть  $\mathbf{n}(y, \bar{\Omega})$  – единичная внешняя нормаль к  $\bar{\Omega}$  в точке  $y$ . Тогда взаимно однозначное соответствие между координатами дается выражениями

$$x_i = y_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + r n_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \bar{\Omega}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где  $\{\theta_1, \dots, \theta_{N-1}\}$  – криволинейные координаты на поверхности  $\bar{\Omega}$ ,  $n_i(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \bar{\Omega})$  – направляющие косинусы нормали, причем

$$\partial u / \partial x_i = l^i(r, \theta) \partial u / \partial r + \sum_{j=1}^{N-1} q_j^i(r, \theta) \partial u / \partial \theta_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где  $l^i(r, \theta)$ ,  $q_j^i(r, \theta)$  – известные функции,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) \in \bar{\Theta}$ ,  $\bar{\Theta}$  – область изменения координаты  $\theta$  на поверхности  $\bar{\Omega}$ .

При описании контрастных структур в задаче (1), (2) существенную роль играет присоединенная система уравнений

$$\partial \tilde{v} / \partial \xi = f(l^1(r, \theta) \tilde{v}, \dots, l^N(r, \theta) \tilde{v}, \tilde{u}, r, \theta), \quad \partial \tilde{u} / \partial \xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad (5)$$

где  $r$  и  $\theta$  рассматриваются как параметры. Для каждой поверхности из множества  $\{\bar{\Omega}\}$  определим функцию  $H(r, \theta) \equiv \tilde{v}^+(0, r, \theta) - \tilde{v}^-(0, r, \theta)$ ,  $(r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta}$ , где  $\tilde{v}^\pm(\xi, r, \theta)$  – решения системы (5) с условиями

$$\tilde{u}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = \phi_i(r, \theta), \quad i = 1, 3, \quad \tilde{v}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = 0. \quad (6)$$



Пусть выполнено условие

(Y<sub>2</sub>) Функция  $H(r, \theta) = 0$  при  $(r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta}$  для любой поверхности из множества  $\{\bar{\Omega}\}$ .

Условие (Y<sub>2</sub>) означает, что для любой поверхности из указанного множества на фазовой плоскости  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  системы (5) существует сепаратриса, соединяющая седла  $(\phi_1(r, \theta), 0)$  и  $(\phi_3(r, \theta), 0)$  при  $\theta \in \Theta$ . Это требование выделяет критический случай. В некритическом случае функция  $H(r, \theta)$  обращается в ноль на одной или нескольких поверхностях из множества  $\{\bar{\Omega}\}$  [2].

**Формальное асимптотическое разложение** решения  $u(x, \varepsilon)$  типа контрастной структуры по степеням  $\varepsilon$  получается в результате  $C^1$ -сшивания двух асимптотик погранслояного типа

$$\begin{aligned} u^-(x, \varepsilon) &= \bar{u}^-(x, \varepsilon) + Qu^-(\xi, \lambda^*, \theta, \varepsilon), \\ u^+(x, \varepsilon) &= \bar{u}^+(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) + Qu^+(\xi, \lambda^*, \theta, \varepsilon) \end{aligned} \quad (7)$$

на поверхности перехода  $\Omega$ .

Здесь  $\bar{u}^-(x, \varepsilon) = \phi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1^-(x) + \dots$ ,  $\bar{u}^+(x, \varepsilon) = \phi_3(x) + \varepsilon \bar{u}_1^+(x) + \dots$  – регулярные ряды,  $\Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \eta) + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + \dots$  – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы  $\partial D$ ,  $\rho = \bar{r}/\varepsilon$ ,  $(\bar{r}, \eta)$  – локальные координаты в окрестности границы  $\partial D$ ,  $Qu^\pm(\xi, \lambda^*, \theta, \varepsilon) = Q_0 u^\pm(\xi, \lambda^*, \theta) + \varepsilon Q_1 u^\pm(\xi, \lambda^*, \theta) + \dots$  – ряды, описывающие пограничные слои, локализованные в окрестности поверхности  $\Omega$ , соответственно вне и внутри поверхности.

Положение поверхности перехода определим условием

$$u(x, \varepsilon) = \phi_2(x), \quad x \in \Omega,$$

а уравнение поверхности  $\Omega$  найдем в виде асимптотического разложения по степеням  $\varepsilon$

$$r = \lambda^*(\theta, \varepsilon) = \varepsilon(\lambda_1(\theta) + \varepsilon\lambda_2(\theta) + \dots), \quad (8)$$

где в качестве главного члена фигурирует уравнение поверхности  $\Omega_0$ , критерий выбора которой будет сформулирован ниже.

Здесь  $(r, \theta)$  – локальные координаты, определяемые в окрестности поверхности  $\Omega_0$  в соответствии с (3).

Построение асимптотических разложений погранслояного типа (7), где  $\xi = \varepsilon^{-1}(r - \lambda^*(\theta, \varepsilon))$ , выполняется в соответствии с методом пограничных функций [3], развитым на случай многомерных задач в работе [4].

Коэффициенты  $\lambda_i(\theta)$  разложения (8) определяются из условия  $C^1$ -сшивания асимптотик (7) на поверхности  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon (\partial u^+(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)/\partial r - \partial u^-(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta, \varepsilon)/\partial r) &= H(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \\ + \varepsilon (\phi'_3(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) - \phi'_1(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \partial Q_1 u^+(0, \lambda^*, \theta)/\partial \xi - \partial Q_1 u^-(0, \lambda^*, \theta)/\partial \xi) &+ \dots \equiv \\ \equiv H(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \varepsilon G_1(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \varepsilon^2 G_2(\lambda^*(\theta, \varepsilon), \theta) + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая условие (Y<sub>2</sub>), явный вид функций  $Q_k^\pm u(r, \theta, \lambda^*)$ ,  $k \geq 1$  и разложение (8), представляем каждое слагаемое в уравнении (9), начиная со второго, в виде разложения по степеням  $\varepsilon$ . В результате приходим к уравнению:

$$\varepsilon G_1(0, \theta) + \varepsilon^2 (M(\theta)\lambda_1(\theta) - \Phi_1(\theta)) + \dots = 0, \quad (10)$$

где линейный оператор  $M(\theta)$  будет определен ниже,  $\Phi_1(\theta)$  – известная функция.

Уравнение (10) выполняется в первом приближении при условии, определяющем положение поверхности перехода в нулевом приближении:

(У<sub>3</sub>) Существует поверхность  $\Omega_0 \subset \{\bar{\Omega}\}$  такая, что функция

$$G_1(0, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{v_k}(\xi, \theta) \frac{\partial l^k}{\partial r}(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \tilde{f}_r(\xi, \theta) \right) p(\xi, \theta) \tilde{v}(\xi, \theta) \xi d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) \tilde{v}(\xi, \theta) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}_{v_k}(\xi, \theta) q_j^k(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j} d\xi - k(0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) \tilde{v}^2(\xi, \theta) d\xi = 0, \quad (11)$$

при  $\theta \in \Theta_0$ , где  $\Theta_0$  – область изменения координаты  $\theta$  на поверхности  $\Omega_0$ .

Здесь  $k(0, \theta) = \sum_{j=1}^{N-1} k_j(0, \theta)$  – сумма главных кривизн поверхности  $\Omega_0$  в точке с координатой  $\theta$ ;  $\tilde{u}(\xi, \theta)$ ,  $\tilde{v}(\xi, \theta)$  – решение системы (5), (6) при  $r = 0$ ,  $\theta \in \Theta_0$ , которое описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении;  $\tilde{f}(\xi, \theta) \equiv f(l^1(0, \theta)\tilde{v}, \dots, l^N(0, \theta)\tilde{v}, \tilde{u}, 0, \theta)$ ,  $p(\xi, \theta) = \exp\left(-\int_0^\xi \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) l^k(0, \theta) d\eta\right)$ .

В частности, пусть  $\Omega_0 \subset D \subset R^2$  – простая замкнутая кривая, которая относительно некоторой полярной системы координат  $(R, \theta)$  с полюсом внутри области  $D$  описывается уравнением вида  $R = \sigma(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Тогда уравнение (11) в совокупности с условием периодичности  $\sigma(\theta) = \sigma(\theta + 2\pi)$  представляет собой нелинейную задачу для ОДУ 2-го порядка [5], разрешимую в силу условия (У<sub>3</sub>).

Периодические функции  $\lambda_n(\theta)$ ,  $n \geq 1$  определяются с использованием  $n + 1$ -го приближения уравнения (10) из линейных дифференциальных задач для уравнений

$$M(\theta)\lambda_n(\theta) - \Phi_n(\theta) = 0, \quad \theta \in \Theta_0. \quad (12)$$

Здесь  $\Phi_n(\theta)$  – известные функции, оператор  $M(\theta)$  имеет вид

$$M(\theta) = -\tilde{v}^{-1}(0, \theta) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta \sum_{j=1}^{N-1} m_j(0, \theta) \partial^2 / \partial \theta_j^2 + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} q_j^k(0, \theta) \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial r}(0, \theta) \int_0^{+\infty} \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta + \right.$$

$$+ \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(0, \theta) \int_{-\infty}^0 \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta \right] \frac{\partial}{\partial \theta_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \left[ 2m_j(0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \partial \tilde{v} / \partial \theta_j \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta + \right.$$

$$+ \left. \bar{n}_j(0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta \right] \frac{\partial}{\partial \theta_j} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\eta, r, \theta) \bar{p}(\eta, r, \theta) \left( \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) \frac{\partial l^k}{\partial r}(r, \theta) \tilde{v}(\eta, r, \theta) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{f}_r(\eta, \theta) \right) \eta d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\eta, r, \theta) \bar{p}(\eta, r, \theta) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) q_j^k(r, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j}(\eta, r, \theta) d\eta \right] \Big|_{r=0} + \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{N-1} k_j^2(0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta - k(0, \theta) \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, r, \theta) \bar{p}(\eta, r, \theta) d\eta \right|_{r=0} \Bigg\},
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}(\xi, r, \theta)$ ,  $\tilde{v}(\xi, r, \theta)$  – решение системы (5), (6),  $m_j(0, \theta)$ ,  $\bar{n}_j(0, \theta)$  – известные функции  $\bar{p}(\xi, r, \theta) = \exp \left( - \int_0^\xi \sum_{k=1}^N \tilde{f}_{v_k}(\eta, \theta) l^k(r, \theta) d\eta \right)$ .

Условие, обеспечивающее разрешимость периодических задач для уравнений (12), формулируется следующим образом

(Y<sub>4</sub>) Оператор  $M(\theta)$  положительно обратим при  $\theta \in \Theta_0$  на множестве положительных  $\Theta_0$  – периодических правых частей.

**Существование решений типа контрастных структур и их устойчивость по Ляпунову**, как решений соответствующих параболических задач, доказываются с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств, причем верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) получаются путем стандартных модификаций частичных сумм  $n$ -го порядка асимптотических разложений (7) (см., например, [1, 3]). Доказана оценка остаточного члена

$$|u(x, \varepsilon) - U_n^\pm(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1},$$

где

$$\begin{aligned}
 U_n^-(x, \varepsilon) &= \phi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1^-(x) + Q_0 u^-(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1 u^-(\xi, \theta) + \\
 &+ \dots + \varepsilon^{n-1} \bar{u}_{n-1}^-(x) + \varepsilon^n \bar{u}_n^-(x) + \varepsilon^{n-1} Q_{n-1} u^-(\xi, \theta) + \varepsilon^n Q_n u^-(\xi, \theta), \\
 U_n^+(x, \varepsilon) &= \phi_3(x) + \varepsilon \bar{u}_1^+(x) + Q_0 u^+(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1 u^+(\xi, \theta) + \Pi_0 u(\rho, \eta) + \\
 &+ \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + \dots + \varepsilon^{n-1} \bar{u}_{n-1}^+(x) + \varepsilon^n \bar{u}_n^+(x) + \varepsilon^{n-1} Q_{n-1} u^+(\xi, \theta) + \varepsilon^n Q_n u^\pm(\xi, \theta) + \\
 &+ \varepsilon^{n-1} \Pi_{n-1} u(\rho, \eta) + \varepsilon^n \Pi_n u(\rho, \eta), \quad \xi = \varepsilon^{-1} \left( r - \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon^k \lambda_k(\theta) \right),
 \end{aligned}$$

$x \in \bar{D}$ ,  $C > 0$  и не зависит от  $\varepsilon$ .

## 2. Пример

Рассмотрим задачу (1), (2) при условии (Y<sub>1</sub>) и  $D \subset R^2$ . Пусть кривая  $\Omega_0$ , в  $\varepsilon$ -окрестности которой локализован внутренний слой, относительно некоторой полярной системы координат с полюсом внутри области  $D$  описывается уравнениями:  $x_1 = R \cos \theta$ ,  $x_2 = R \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $R = const$ . Определим локальные координаты в окрестности этой кривой:  $x \in \Omega_0^\delta \mapsto (r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times [0, 2\pi]$ . Они связаны с декартовыми посредством соотношений  $x_1 = (R + r) \cos \theta$ ,  $x_2 = (R + r) \sin \theta$ .

В системе координат  $(r, \theta)$  производные  $\partial u / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2$ , вычисляются следующим образом:  $\partial u / \partial x_1 = \cos \theta \partial u / \partial r - \sin \theta (R + r)^{-1} \partial u / \partial \theta$ ,  $\partial u / \partial x_2 = \sin \theta \partial u / \partial r + \cos \theta (R + r)^{-1} \partial u / \partial \theta$ . Пусть реализуется критический случай, т.е. выполнено условие  $(Y_2)$ , где  $\tilde{v}^\pm(\xi, r, \theta)$  – решения системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{v}^\pm}{\partial \xi} = (A_1(\tilde{u}^\pm, r, \theta) \cos \theta + A_2(\tilde{u}^\pm, r, \theta) \sin \theta) \tilde{v}^\pm + B(\tilde{u}^\pm, r, \theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}^\pm}{\partial \xi} = \tilde{v}^\pm \quad (13)$$

с дополнительными условиями (6). Множество точек, в которых выполняется уравнение (11), составляет кривую  $\Omega_0$ . С учетом этого приходим к уравнению относительно  $R$ :

$$R \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\xi, \theta) p(\xi, \theta) \left[ \left( \frac{\partial A_1}{\partial r}(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta + \frac{\partial A_2}{\partial r}(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta \right) \tilde{v} + \frac{\partial B}{\partial r}(\tilde{u}, 0, \theta) \right] \xi d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\xi, \theta) p(\xi, \theta) (A_2(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta - A_1(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v}(\xi, \theta))^2 p(\xi, \theta) d\xi = 0,$$

где  $\tilde{u}(\xi, \theta)$ ,  $\tilde{v}(\xi, \theta)$  – решения системы (13) при  $r = 0$  с дополнительными условиями  $\tilde{u}^\pm(0, \theta) = \phi_2(0, \theta)$ ,  $\tilde{u}^-(\infty, \theta) = \phi_1(0, \theta)$ ,  $\tilde{u}^+(\infty, \theta) = \phi_3(0, \theta)$ ,  $p(\xi, \theta) = \exp \left( -\cos \theta \int_0^\xi A_1(\tilde{u}, 0, \theta) d\eta - \sin \theta \int_0^\xi A_2(\tilde{u}, 0, \theta) d\eta \right)$ .

В следующих приближениях относительно членов асимптотики, описывающих внутренний слой, получаем линейные краевые задачи для уравнений следующего вида ( $n \geq 1$ ):  $N(\xi, \theta) Q_n u^\pm = H_n^\pm(\xi, \theta)$ , где  $N(\xi, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - (A_1(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta + A_2(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial A_1}{\partial u}(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta + \frac{\partial A_2}{\partial u}(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta \right) \frac{\partial \tilde{u}^\pm}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial u}(\tilde{u}, 0, \theta)$ ,  $H_n^\pm(\xi, \theta)$  – известные функции.

Коэффициенты разложения (8) находятся из линейных задач для уравнения типа (12), где

$$M(\theta) = -\tilde{v}^{-1}(0, \theta) \left\{ R^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta \partial^2 / \partial \theta^2 + \right. \\ + \left[ R^{-1} \frac{\partial \phi_3}{\partial r}(0, \theta) \int_0^{+\infty} (A_2(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta - A_1(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta) \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta + \right. \\ + R^{-1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(0, \theta) \int_{-\infty}^0 (A_2(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta - A_1(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta) \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta + \\ \left. + 2R^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial \tilde{v} / \partial \theta \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta \right] \partial / \partial \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \frac{\partial A_1}{\partial r}(\tilde{u}, r, \theta) \cos \theta + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial A_2}{\partial r}(\tilde{u}, r, \theta) \sin \theta \right) \tilde{v}(\eta, r, \theta) + \frac{\partial B}{\partial r}(\tilde{u}, r, \theta) \right) \tilde{v}(\eta, r, \theta) p(\eta, r, \theta) d\eta \right] \Big|_{r=0} +$$

$$\begin{aligned} &+ R^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\eta, r, \theta) \bar{p}(\eta, r, \theta) (A_2(\tilde{u}, r, \theta) \cos \theta - A_1(\tilde{u}, r, \theta) \sin \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(\eta, r, \theta) d\eta - \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, r, \theta) \bar{p}(\eta, r, \theta) d\eta \right] \Bigg|_{r=0} + R^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\eta, \theta) p(\eta, \theta) d\eta - \\ &\left. - R^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\eta, \theta) p(\eta, \theta) (A_2(\tilde{u}, 0, \theta) \cos \theta - A_1(\tilde{u}, 0, \theta) \sin \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этих задач установлено в (У<sub>4</sub>).

## Список литературы / References

- [1] Нефедов Н. Н., “Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущенных задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае”, *Дифференц. уравнения*, **32**:11 (1996), 1529–1537; English transl.: Nefedov N.N., “The method of differential inequalities for nonlinear singularly perturbed problems with contrast structures of step type in the critical case”, *Differ. Equ.*, **32**:11 (1996), 1526–1534.
- [2] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **48**:5 (2012), 738–748; English transl.: Nefedov N.N., Davydova M.A., “Contrast structures in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Differ. Equ.*, **48**:5 (2012), 745–755.
- [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Тр. МИАН*, **268** (2010), 268–283; English transl.: Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., “Singularly perturbed problems with boundary and internal layers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 258–273.
- [4] Davydova M.A., “Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Math. Notes*, **98**:6 (2015), 909–919.
- [5] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференц. уравнения*, **49**:6 (2013), 715–733; English transl.: Nefedov N.N., Davydova M.A., “Contrast structures in singularly perturbed quasilinear reaction-diffusion-advection equations”, *Differ. Equ.*, **49**:6 (2013), 688–706.

**Davydova M. A., Nefedov N. N.**, "Existence and Stability of the Solutions with Internal Layers in Multidimensional Problems of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Balanced Nonlinearity.", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:1** (2017), 31–38.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-31-38

**Abstract.** In the present paper, we consider a multidimensional singularly perturbed problem for an elliptic equation referred to as the stationary reaction-diffusion-advection equation in applications. We formulate basic conditions of the existence of solutions with internal transition layers (contrast structures), and we construct an asymptotic approximation of an arbitrary-order accuracy to such solutions. We use a more efficient method for localizing the transition surface, which permits one to develop our approach to a more complicated case of balanced advection and reaction (the so-called critical case). To justify the constructed asymptotics, we use and develop, to this class of problems, an asymptotic method of differential inequalities, which also permits one to prove the Lyapunov stability of such solutions, as stationary solutions of the corresponding parabolic problems.

**Keywords:** problems of the reaction-diffusion-advection type, solutions with internal layers, contrast structures

**On the authors:**

Marina A. Davydova, [orcid.org/0000-0002-9255-7353](https://orcid.org/0000-0002-9255-7353), PhD,  
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,  
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,  
e-mail: [m.davydova@bk.ru](mailto:m.davydova@bk.ru)

Nikolay N. Nefedov, Professor,  
Lomonosov Moscow State University,  
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,  
e-mail: [nefedov@phys.msu.ru](mailto:nefedov@phys.msu.ru)

**Acknowledgments:**

This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.

©Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-39-63

УДК 517.9

## О комбинировании различных методов ускорения при итерационном решении уравнений с частными производными методом коллокаций и наименьших НЕВЯЗОК

Шапеев В. П., Ворожцов Е. В.

получена 15 августа 2016

**Аннотация.** Рассматривается проблема ускорения итерационного процесса численного решения методом коллокаций и наименьших невязок (КНН) краевых задач для уравнений с частными производными (PDE). Для решения этой проблемы впервые предложено комбинированно применять одновременно три способа ускорения итерационного процесса: предобуславливатель, многосеточный алгоритм и коррекцию решения PDE на промежуточных итерациях в подпространстве Крылова. Исследовано влияние на итерационный процесс всех трех способов его ускорения как по отдельности, так и при их комбинировании. Показано, что каждый из указанных способов вносит свой вклад в количественный показатель ускорения итерационного процесса. При этом наибольший вклад дает применение алгоритма, использующего подпространства Крылова. Комбинированное применение одновременно всех трех способов ускорения итерационного процесса решения конкретных краевых задач позволило уменьшить время их решения на компьютере до 230 раз по сравнению со случаем, когда никакие способы ускорения не применялись. Исследован двухпараметрический предобуславливатель. Предложено находить оптимальные значения его параметров путем численного решения относительно нетрудоемкой задачи минимизации числа обусловленности модифицированной предобуславливателем системы линейных алгебраических уравнений, решаемой в методе КНН. Показано, что в многосеточном варианте метода КНН для существенного уменьшения времени решения краевой задачи достаточно ограничиться только простой операцией продолжения решения на многосеточном комплексе. Приводятся многочисленные примеры расчетов, демонстрирующие эффективность предлагаемых подходов к ускорению итерационных процессов решения краевых задач для двумерных уравнений Навье–Стокса. Указывается, что предложенная комбинация способов ускорения итерационных процессов может быть реализована также в рамках применения других численных методов решения PDE.

**Ключевые слова:** предобуславливание, подпространства Крылова, многосеточные алгоритмы, итерации Гаусса–Зейделя, уравнения Навье–Стокса, метод коллокаций и наименьших невязок

**Для цитирования:** Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., "О комбинировании различных методов ускорения при итерационном решении уравнений с частными производными методом коллокаций и наименьших невязок", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:1 (2017), 39–63.

**Об авторах:** Шапеев Василий Павлович, [orcid.org/0000-0001-6761-7273](https://orcid.org/0000-0001-6761-7273), доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, Новосибирский национальный исследовательский университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: [vshapeev@ngs.ru](mailto:vshapeev@ngs.ru)

Ворожцов Евгений Васильевич, [orcid.org/0000-0003-2753-8399](https://orcid.org/0000-0003-2753-8399), доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, e-mail: [vorozh@itam.nsc.ru](mailto:vorozh@itam.nsc.ru)

## Введение

В последние десятилетия идет бурное развитие математических методов моделирования, и прежде всего численного моделирования. Оно используется во всевозрастающем объеме, как в традиционных для него областях физики и техники, так и в связанных с экономикой, биологией и новыми технологиями. Большое разнообразие моделируемых явлений и процессов, сложности и особенности в возникающих при этом математических задачах предъявляют повышенные требования к свойствам и возможностям численных методов и алгоритмов, стимулируют поиск новых, с лучшими свойствами. От численных методов, в частности, требуется решать задачи точнее и быстрее, несмотря на сложность новых задач и содержащиеся в них другие трудности. Для этого предлагаются новые подходы и методы. При этом не последнюю роль играет идея комбинированного применения уже известных алгоритмов. Зачастую применение комбинированного алгоритма эффективнее по сравнению с применением по отдельности его компонент. Многие исследователи в этом направлении ведут поиск.

Решение PDE различными численными методами сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При этом стремление достичь большую точность решения приводит к необходимости решать СЛАУ больших размеров. Для решения последних приходится применять итерационные методы. Поэтому оптимизация итерационных процессов, и прежде всего их ускорение, – актуальная задача вычислительной математики, которой многие исследователи уделяют особое внимание. В частности, в работе [1] описан итерационный метод Ньютона–Крылова для ускорения итераций численного решения стационарных уравнений Навье–Стокса. В [2] дан обзор методов Ньютона–Крылова. В [3] возникающая в результате дискретизации исходных PDE-уравнений СЛАУ решалась с применением приведенного в [4] эффективного алгоритма GMRES, являющегося вариантом реализации метода Крылова [5]. Заметим, что в работе [6] также было реализовано ускорение итераций при решении PDE с применением подпространств Крылова, хотя в ней отсутствует термин "подпространства Крылова".

В последнее время ряд исследователей показали еще большую эффективность от комбинированного применения алгоритмов ускорения итерационных процессов. Например, комбинирование методов Крылова и Федоренко [7] ранее применялось в ряде численных методов. В [3, 8–12] оно применялось в случаях, когда СЛАУ возникала в результате дискретизации уравнений Навье–Стокса с помощью конечно-разностных методов и методов конечного объема. Техника ускорения итерационных процессов путем последовательного включения многосеточного и GMRES алгоритмов была реализована в [11]. В результате было достигнуто ускорение до 25 раз по сравнению со стандартным нелинейным многосеточным алгоритмом. В работах [13–16] описаны некоторые варианты комбинирования методов Крылова и Федоренко в рамках различных вариантов метода конечных элементов (МКЭ). На практике часто используются различного вида предобуславливатели, эффективность влияния которых на итерационный процесс заключается в уменьшении числа обусловленности матрицы решаемой СЛАУ. Ввиду относительной простоты диагональные предобуславливатели получили широкое распространение. В целях краткости мы здесь процитируем только две репрезентативные работы [17, 18], в которых



используются такие предобуславливатели для ускорения сходимости итерационных процессов решения стационарных уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье–Стокса решаются численно в работе [17] в терминах скорости и давления с использованием комбинации метода конечных элементов и метода наименьших квадратов (LSFEM). Возникающая при этом СЛАУ решается предобусловленным методом сопряженных градиентов. Используется простой диагональный предобуславливатель (Якоби). Проведенные многочисленные расчеты подтверждают высокую эффективность этого простого предобуславливателя.

В [18] описан метод граничных элементов (ВЕМ) для численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса, записанных в терминах функции тока и завихренности. В указанной работе приводятся примеры отсутствия сходимости итерационного решателя в случае, когда предобуславливатель не используется, и наличие сходимости при применении диагонального предобуславливателя. Важно отметить, что в варианте ВЕМ, описанном в [18], используются условия непрерывности решения и его производной в направлении нормали к каждому граничному элементу, которые фактически совпадают с условиями согласования на стыках между соседними ячейками пространственной расчетной сетки в методе коллокаций и наименьших невязок (КНН), рассматриваемом в данной статье.

В представленной работе идея комбинации алгоритмов реализована двояко: во-первых, комбинированным является собственно метод КНН, во-вторых, при его реализации используется комбинация трех способов ускорения итерационного процесса решения СЛАУ, к решению которой сводится применение метода КНН.

В методе КНН метод коллокации (МК) комбинируется с требованием минимизации функционала, составленного из невязок линейных алгебраических уравнений, из которых определяется приближенное решение задачи. Существенное его отличие от многих методов решения PDE в том, что для приближенного решения дифференциальной задачи в нем выписывается переопределенная СЛАУ. О достоинстве такого подхода будет указано далее в содержательной части статьи. Идея метода была предложена Слепцовым А.Г. и реализована в [19]. Следует отметить, что она была опубликована одновременно с работой [20], которая, по-видимому, положила начало большой серии работ, объединенных аббревиатурой LSFEM. Обзор работ по LSFEM вне предмета данной работы, и здесь укажем только некоторые из них [17, 21–23]. В методе LSFEM так же, как и в КНН, для определения приближенного решения задачи выписывается переопределенная СЛАУ, решение которой ищется методом наименьших квадратов (LS), на котором достигается минимум функционала – суммы квадратов невязок ее уравнений. В первых вариантах реализации метода КНН решение переопределенной СЛАУ (псевдорешение) также искалось методом LS. Однако в последующем при реализации метода КНН в нем переопределенная СЛАУ решается с помощью QR-декомпозиции ее матрицы, где  $Q$  – ортогональная, а  $R$  – верхнетреугольная матрицы. Как будет показано далее, на таком псевдорешении переопределенной СЛАУ также достигается минимум указанного функционала невязки.

В данной работе в качестве объекта, на котором демонстрируются предлагаемые подходы, взята краевая задача для уравнений Навье–Стокса. Их численное решение при умеренных и больших числах Рейнольдса представляет трудности для многих

методов, так как в этом случае в результате их дискретизации получается плохо обусловленная СЛАУ. Метод КНН – один из методов, который позволяет эффективно решать задачи для эллиптических, параболических и гиперболических PDE [24–35] на различных адаптивных сетках с прямоугольными и треугольными ячейками с использованием графов для их упорядочивания в процессе расчета. В [25, 34, 36] были построены варианты метода, которые позволили получить решения 2D и 3D эталонных задач о течении вязкой жидкости в каверне и обтекании обратной ступеньки, находящиеся среди наиболее точных на сегодняшний день [37, 38]. В [35] дан краткий обзор по методу КНН, а обзор работ по применению метода КНН для численного решения двумерных несжимаемых уравнений Навье–Стокса имеется в [32]. В [33, 34] метод КНН применен для решения трехмерных уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости на пространственной расчетной сетке из кубических ячеек. В качестве примера приведены результаты расчетов течения в кубической каверне с движущейся крышкой при  $Re = 100$  и  $Re = 1000$ , показано их сравнение с известными наиболее точными расчетами. В [39, 40] различные варианты метода КНН применены для расчета напряженного состояния пластин из изотропных и анизотропных композиционных материалов. В [41] метод КНН приложен к решению задачи о продольных колебаниях бимодулярных балок, в [42] – к решению уравнения Бюргера и уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера, в [27, 43] – к трехмерному моделированию лазерной сварки металлических пластин на адаптивных сетках в областях с криволинейной поверхностью.

Здесь для ускорения итерационного процесса решения СЛАУ в методе КНН конструируется диагональный предобуславливатель. Для достижения большего ускорения он применяется в комбинации с использованием многосеточного комплекса (метода Федоренко [7]) и алгоритма с использованием подпространств Крылова. Здесь предложен и применяется новый вариант реализации этого метода, отличающийся и не уступающий весьма эффективному GMRES, различные варианты которого приведены в [4]. На практике указанные способы ускорения итерационного процесса применяются как в отдельности, так и в комбинации. Сначала рассматриваем применение диагонального предобуславливателя на каждой сетке многосеточного алгоритма в рамках метода КНН. Поскольку диагональный предобуславливатель в нашем случае по результатам оказался недостаточно эффективным для наших целей, мы далее вводим двухпараметрический предобуславливатель и находим оптимальные значения входящих в него параметров из требования минимизации числа обусловленности матрицы СЛАУ. В данной работе рассматривается комбинированное применение трех способов ускорения итерационного процесса: предобуславливателя, метода подпространств Крылова и операции продолжения на многосеточном комплексе, являющемся составной частью метода Федоренко. Комбинирование в методе КНН метода Крылова только с операцией продолжения на многосеточном комплексе впервые было реализовано в [44]. Уже там было получено ускорение решения задачи на ЭВМ в сотни раз.

## 1. Описание метода КНН

Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений Навье–Стокса

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V} - \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad (2)$$

в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . В уравнениях (1)  $x_1, x_2$  — декартовы пространственные координаты,  $\mathbf{V} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$  — вектор скорости;  $p = p(x_1, x_2)$  — давление,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  — заданная вектор-функция,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Система (1) решается с граничными условиями Дирихле (2), где  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2) = (g_1, g_2)$  — заданная вектор-функция. На давление налагается условие

$$\iint_{\Omega} p \, dx_1 dx_2 = 0 \quad (3)$$

при  $\mathbf{f} = 0$  [45]. Давление определяется из (1), (2) с точностью до константы. Если потребовать выполнения условия (3), то тем самым фактически задается эта константа. В качестве области решения задачи в дальнейшем берется квадрат

$$\Omega = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_i \leq L, i = 1, 2\}, \quad (4)$$

где  $L > 0$  — заданная длина стороны квадрата. Величина  $L$  использовалась в конкретных расчетах в качестве характерной длины при обезразмеривании независимых и зависимых переменных, и она входит естественным образом в определение числа Рейнольдса  $\text{Re}$  в (1). В данной задаче (1)–(4) область (4) покрывается сеткой из квадратных ячеек  $\Omega_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, I$ ,  $I \geq 1$ . Удобно ввести локальные координаты  $y_1, y_2$  в каждой ячейке  $\Omega_{ij}$ . Зависимость локальных координат от глобальных координат  $x_1, x_2$  задается формулами  $y_m = (x_m - x_{m,i,j})/h$ ,  $m = 1, 2$ , где  $x_{m,i,j}$  — значение координаты  $x_m$  в центре ячейки  $\Omega_{ij}$ , а  $h$  — половина длины стороны квадратной ячейки. Пусть  $\mathbf{u}(y_1, y_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{V}(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$ ,  $q(y_1, y_2) = p(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$ . В локальных переменных уравнения Навье–Стокса принимают следующий вид:

$$\Delta u_m - \text{Re}h \left( u_1 \frac{\partial u_m}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial u_m}{\partial y_2} + \frac{\partial q}{\partial y_m} \right) = \text{Re} \cdot h^2 f_m, \quad m = 1, 2; \quad (5)$$

$$\frac{1}{h} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ . Линеаризация по Ньютону уравнений (5) приводит к формулам

$$\Delta u_m^{s+1} - (\text{Re} \cdot h) \left( u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + q_{y_m}^{s+1} \right) = F_m, \quad (7)$$

где  $m = 1, 2$  и  $s$  — номер итерации по нелинейности,  $s = 0, 1, 2, \dots$ ,  $u_1^s, u_2^s, q^s$  — известное приближение решения на  $s$ -ой итерации начиная с выбранного начального приближения с индексом  $s = 0$ ,  $F_m = \text{Re} \left[ h^2 f_m - h \left( u_1^s u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^s \right) \right]$ ,  $u_{m,y_l} = \partial u_m / \partial y_l$ ,  $q_{y_m} = \partial q / \partial y_m$ ,  $l, m = 1, 2$ .

Таблица 1. Вид базисных функций  $\varphi_l$ 

$l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_l$	1	$y_1$	$y_2$	$y_1^2$	$-2y_1y_2$	$y_2^2$	0	0	0	0	0	0
	0	$-y_2$	0	$-2y_1y_2$	$y_2^2$	0	1	$y_1$	$y_1^2$	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$y_1$	$y_2$

Приближенное решение в каждой ячейке  $\Omega_{i,j}$  ищется в виде линейной комбинации базисных вектор-функций  $\varphi_l$ :

$$(u_1^s, u_2^s, q^s)^T = \sum_{l=1}^{12} b_{i,j,l}^s \varphi_l, \quad (8)$$

где верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования. В данном варианте метода решение задачи проектируется в пространство многочленов. Таким образом, искомое приближенное решение является кусочно-полиномиальным. В данной работе для аппроксимации составляющих скорости использованы многочлены второй степени по переменным  $y_1, y_2$ , а для аппроксимации давления – многочлены первой степени. Всего базисных функций в выбранном пространстве пятнадцать. Поскольку в уравнении неразрывности коэффициенты константы, то его легко удовлетворить за счет выбора базисных полиномов  $\varphi_l$ . Нетрудно установить, что для этого требуется удовлетворить ими три линейных соотношения. В итоге из первоначальных пятнадцати базисных полиномов независимыми останутся только двенадцать. Они приведены в табл. 1. Их совокупность можно назвать соленоидальным базисом, так как  $\operatorname{div} \varphi_l = 0$ .

Сформулируем “локальную” СЛАУ – дискретную задачу, из которой определяется приближенное решение в каждой отдельной ячейке – локальное решение, и “глобальную” СЛАУ, из которой определяется приближенное глобальное решение задачи (1)–(3).

Количество точек коллокаций и их расположение внутри ячейки может варьироваться в различных вариантах метода. В данной работе были реализованы три варианта задания координат точек коллокации. Обозначим через  $N_c$  число точек коллокации внутри каждой ячейки. При  $N_c = 4$  локальные координаты точек коллокаций имеют вид  $(\pm\omega, \pm\omega)$ , где  $\omega$  – задаваемое пользователем значение в интервале  $0 < \omega < 1$ . В случае  $N_c = 8$  координаты точек коллокации задавались следующим образом: расположение первых четырех точек было взято таким же, как при  $N_c = 4$ , а координаты следующих четырех точек задавались по формулам  $(\pm\omega, 0)$ ,  $(0, \pm\omega)$ . Подставляя (8) в (7) и выписывая полученные соотношения в каждой точке коллокации с численными значениями ее координат, получим  $2N_c$  линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{12} a_{\nu,m}^{(1)} \cdot b_m^{s+1} = f_{\nu}^s, \quad \nu = 1, \dots, 2N_c. \quad (9)$$

В [19] было предложено в методе коллокаций и наименьших квадратов (КНК) дополнить систему уравнений коллокаций (9) линейными условиями согласования локального решения в каждой ячейке с локальными решениями, взятыми во всех соседних с ней ячейках. В работе [46] были введены параметры в условия согласования и было показано с помощью вычислительных экспериментов, что область значений параметров, при которых глобальная СЛАУ метода КНК хорошо обусловлена, пересекается в значительной степени с областью, где наблюдается наилучшая точность численного решения задачи.

Однако в [19, 46] не исследовалось влияние условий согласования на число обусловленности локальной СЛАУ. Это исследование выполняется ниже в разделе 2, где показано, что включение условий согласования в локальную СЛАУ позволяет существенно (на пять-шесть десятичных порядков) уменьшить число обусловленности локальных СЛАУ во внутренних ячейках сетки.

По аналогии с [19, 36, 46] дополним систему уравнений дискретной задачи в ячейке  $\Omega_{ij}$  условиями согласования. Запишем эти условия в отдельных точках (называемых точками согласования) на сторонах ячейки  $\Omega_{ij}$ , которые являются общими с соседними ячейками. Условия согласования берутся здесь в виде

$$h \frac{\partial(u^+)^n}{\partial n} + (u^+)^n = h \frac{\partial(u^-)^n}{\partial n} + (u^-)^n, \quad (10)$$

$$h \frac{\partial(u^+)^{\tau}}{\partial n} + (u^+)^{\tau} = h \frac{\partial(u^-)^{\tau}}{\partial n} + (u^-)^{\tau}, \quad (11)$$

$$q^+ = q^-. \quad (12)$$

Здесь  $h \frac{\partial}{\partial n} = h \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$ ,  $n = (n_1, n_2)$  — внешняя нормаль к стороне ячейки  $\Omega_{ij}$ ,  $(\cdot)^n$ ,  $(\cdot)^{\tau}$  — нормальная и касательная составляющие вектора скорости на рассматриваемой стороне ячейки,  $u^+$  и  $u^-$  — пределы функции  $u$  при стремлении ее аргументов к точке согласования изнутри и снаружи ячейки  $\Omega_{ij}$ .

Для единственности определения давления в решении задаем его значение в одной точке области либо аппроксимируем условие (3) по формуле

$$\frac{1}{h} \left( \iint_{\Omega_{i,j}} q \, dy_1 dy_2 \right) = \frac{1}{h} \left( -I^* + \iint_{\Omega_{i,j}} q^* \, dy_1 dy_2 \right). \quad (13)$$

Здесь  $I^*$  — интеграл по всей области  $\Omega$ , рассчитанный как сумма интегралов по каждой ячейке на предыдущей итерации,  $q^*$  — давление в ячейке с предыдущей итерации.

Обозначим через  $N_m$  число точек согласования для составляющих вектора скорости на сторонах каждой ячейки. При  $N_m = 4$  координаты этих точек согласования задаются формулами  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ . При  $N_m = 8$  координаты точек согласования таковы:  $(\pm 1, -\zeta)$ ,  $(\pm 1, \zeta)$ ,  $(-\zeta, \pm 1)$ ,  $(\zeta, \pm 1)$ , где  $0 < \zeta < 1$ . В расчетах, результаты которых представлены ниже, использовалось значение  $\zeta = 1/2$ . Условия согласования для давления (12) задаются в четырех точках с координатами  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ . Используя (8), подставим координаты этих точек в каждое из трех условий согласования (10)–(12). Из первых двух условий получим  $2N_m$  линейных алгебраических уравнений для составляющих скорости. Подстановка представления (8) в (12) дает ещё четыре линейных алгебраических уравнения согласования.

В настоящей работе давление задавалось в вершине ячейки  $\Omega_{1,1}$  или же использовалось условие (13). Если сторона ячейки совпадает с границей области  $\Omega$ , то в соответствующих точках вместо условий согласования в локальной СЛАУ выписываются граничные условия:  $u_m = g_m$ ,  $m = 1, 2$ .

Объединяя уравнения коллокаций, согласования и уравнения, полученные из краевых условий, если ячейка  $\Omega_{i,j}$  граничная, в каждой ячейке получим СЛАУ вида

$$A_{i,j} \cdot \vec{X}_{i,j}^{s+1} = \vec{f}_{i,j}^{s,s+1}, \quad (14)$$

где  $\vec{X}_{i,j}^{s+1} = (b_{i,j,1}^{s+1}, \dots, b_{i,j,12}^{s+1})^T$ . В методе КНН система (14) является переопределенной.

Для решения СЛАУ дискретной задачи применялся процесс, который условно можно назвать итерациями Гаусса–Зейделя. Одна глобальная  $(s + 1)$ -ая итерация заключалась в том, что в расчетной области  $\Omega$  последовательно перебирались все ячейки. При этом в каждой ячейке СЛАУ (14) решалась ортогональным методом (Гивенса или Хаусхолдера), в правой части уравнений (10), (12) в качестве  $u^-$ ,  $q^-$  берутся либо значения решения на  $(s + 1)$ -ой итерации, если они уже сосчитаны на этой итерации, либо их значения на предыдущей итерации.

## 2. Предобуславливатели для метода КНН

В каждой ячейке  $\Omega_{ij}$  необходимо решать СЛАУ вида (14). Опустим в (14), для краткости, верхние и нижние индексы:

$$A\vec{X} = \vec{f}. \quad (15)$$

Число обусловленности прямоугольной матрицы  $A$  вычисляется по формуле

$$\kappa(A) = \sqrt{\|A_1\| \cdot \|A_1^{-1}\|}, \quad (16)$$

где предполагается, что квадратная матрица  $A_1 = A^T A$  несингулярная.

Мы сначала испытали известный диагональный предобуславливатель (Якоби), описанный в [18], но он не обеспечил в нашем случае ожидаемое ускорение сходимости итераций. С другой стороны, хорошо известно, что введение параметров в предобуславливатель увеличивает его возможности для дальнейшего понижения числа обусловленности, так как эти параметры можно затем подбирать из требования минимизации числа обусловленности. В нашем случае мы построили предобуславливатель, зависящий от параметров  $\xi$  и  $\eta$ .

Параметр  $\xi$  вводится путем умножения на  $\xi$  обеих частей уравнений (7):

$$\xi[\Delta u_m^{s+1} - (\text{Re} \cdot h)(u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + q_{y_m}^{s+1})] = \xi F_m, \quad (17)$$

где  $m = 1, 2$ . Параметр  $\eta$  вводится в (10) следующим образом:

$$h \frac{\partial(u^+)^n}{\partial n} + \eta(u^+)^n = h \frac{\partial(u^-)^n}{\partial n} + \eta(u^-)^n. \quad (18)$$

Обозначим через  $A_{\text{col}}$  матрицу размера  $2N_c \times 12$ , получаемую при подстановке в (17) координат точек коллокаций; ее элементами являются коэффициенты при 12 искомым коэффициентах в представлении решения (8). Заметим, что матрицу  $A_{\text{col}}$  можно представить в виде  $A_{\text{col}} = \bar{A}_{\text{col}} \cdot D$ , где  $D = \text{diag}(\xi, \dots, \xi)$  — диагональная матрица размера  $12 \times 12$ , а матрица  $\bar{A}_{\text{col}}$  получается из уравнений (7). То есть матрицу  $D$  можно рассматривать как правый диагональный однопараметрический предобуславливатель матрицы  $\bar{A}_{\text{col}}$ .

Давление входит в уравнение количества движения (17) только в виде производных  $\partial q / \partial y_1$  и  $\partial q / \partial y_2$ , поэтому коэффициент при  $b_{10}$  в матрице  $A_{\text{col}}$  равен нулю. Вследствие этого матрица  $A_{\text{col}}$  неполного ранга. Чтобы потенциально с помощью этой матрицы можно было определить решение, необходимо включить в  $A_{\text{col}}$  строку, соответствующую уравнению (13). Эта строка имеет следующий вид:

$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h, 0, 0\}$ . Обозначим такую дополненную матрицу через  $\tilde{A}_{\text{col}}$ . Это изменение делает ненулевым десятый столбец, и при  $N_c = 8 \tilde{A}_{\text{col}}$  становится матрицей полного ранга. Из (17) видно, что элементы матрицы  $\tilde{A}_{\text{col}}$  зависят от решения на предыдущей итерации. Поэтому дальнейшее исследование свойств обусловленности осуществлялось на заданной сетке при решении конкретной задачи. В качестве такой задачи рассмотрим в этом разделе модельную задачу для двумерных уравнений Навье–Стокса (1), которая имеет следующее точное решение:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \quad u_2 = -\sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \\ p &= \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \right] - \frac{2L \sin(\pi L/2)}{\pi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что функции  $u_1(x_1, x_2)$  и  $u_2(x_1, x_2)$  описывают поле скорости с нулевой дивергенцией. Выражения  $f_1$  и  $f_2$  в (1) находятся подстановкой (19) в (1).

С помощью многосеточного алгоритма сначала получали хорошее приближение решения на сравнительно грубой сетке из  $40 \times 40$  ячеек. Выполнялось в общей сложности 1000 итераций последовательно на сетках из  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  и  $40 \times 40$  ячеек, из них 150 итераций — на сетке из  $40 \times 40$  ячеек. Затем полученные численные значения решения использовали для вычисления элементов матрицы  $\tilde{A}_{\text{col}}$ . Таким образом, элементы матрицы  $\tilde{A}_{\text{col}}$  зависят от параметров  $\xi$  и  $h$ . Для того, чтобы получить матрицу  $\tilde{A}_{\text{col}}$ , состоящую только из числовых элементов, задавались числовые значения полушага сетки  $h$  по формуле  $h = 0.5/(2M)$ ,  $M = 20, 40, 60, 80, 160, 320$ . Кроме того, параметр  $\xi$  варьировался в промежутке от 0.01 до 20. Далее для вычисления числа обусловленности согласно (16) использовалась встроенная функция системы *Mathematica* [47] `Norm[A1, 2]`, которая вычисляет евклидову норму квадратной матрицы. Было найдено, что число обусловленности  $\kappa(\tilde{A}_{\text{col}})$  не зависит от величины полушага сетки  $h$ . В промежутке  $0.01 \leq \xi \leq 20$  число  $\kappa(\tilde{A}_{\text{col}})$  менялось в следующих пределах:  $4.2255 \cdot 10^6 \leq \kappa(\tilde{A}_{\text{col}}) \leq 4.2258 \cdot 10^6$  (здесь  $N_c = 8$ ).

Обозначим через  $A_{\text{mat}}$  матрицу, соответствующую условиям согласования (18), (11), (12). Тогда можно представить всю матрицу  $A$  в виде

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\text{col}} \\ A_{\text{mat}} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

При заданном численном значении полушага  $h$  элементы матрицы  $A$  зависят от  $\xi$  и  $\eta$ . Пусть  $G(\xi, \eta) = \kappa(A(\xi, \eta))$ . Обозначим через  $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$  значения параметров  $\xi, \eta$ , при которых функция  $G(\xi, \eta)$ , то есть число обусловленности матрицы  $A$  (20), достигает своего минимума. Ниже описывается численный алгоритм для нахождения  $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$  по числовым данным в любой внутренней ячейке сетки.

Сначала задавалась в плоскости  $(\xi, \eta)$  некоторая прямоугольная область  $D_{\xi, \eta}^{(1)}$ , включающая в себя те значения параметров  $\xi, \eta$ , при которых расчеты по методу КНН с рассматриваемым преобуславливателем демонстрировали сходимость итерационного процесса получения решения. В области  $D_{\xi, \eta}^{(1)}$  задавалась прямоугольная равномерная сетка размера  $40 \times 80$  узлов, где 40 узлов брались вдоль оси  $\xi$  и 80 — вдоль оси  $\eta$ . Затем простым перебором по узлам  $(\xi_i, \eta_j)$  находился такой узел  $(\xi_{i_0}, \eta_{j_0})$ , в котором значение функции  $G(\xi, \eta)$  было минимальным. После этого строилась новая область  $D_{\xi, \eta}^{(2)}$ , размеры которой в каждом из координатных направлений  $\xi$  и  $\eta$  были в два раза меньше, чем в случае области  $D_{\xi, \eta}^{(1)}$ , но количество узлов

Таблица 2. Влияние числа точек коллокаций в ячейке на оптимальные значения  $\xi, \eta$  для преобуславливателя

$N_c$	$(\xi_{\text{opt}})_E$	$(\eta_{\text{opt}})_E$	$\kappa_E$	$(\xi_{\text{opt}})_F$	$(\eta_{\text{opt}})_F$	$\kappa_F$
4	0.213	1.738	3.83	0.264	1.871	6.74
8	0.156	1.747	3.84	0.189	1.873	6.71

сетки в  $D_{\xi,\eta}^{(2)}$  было таким же, как и в  $D_{\xi,\eta}^{(1)}$ . Геометрический центр новой области  $D_{\xi,\eta}^{(2)}$  находился в точке  $(\xi_{i_0}, \eta_{j_0})$ , найденной в области  $D_{\xi,\eta}^{(1)}$ . Этот процесс сжатия областей поиска оптимума продолжался до тех пор, пока значения  $(\xi_{\text{opt}}^{(\nu-1)}, \eta_{\text{opt}}^{(\nu-1)})$  и  $(\xi_{\text{opt}}^{(\nu)}, \eta_{\text{opt}}^{(\nu)})$ , найденные в областях, соответственно,  $D_{\xi,\eta}^{(\nu-1)}$  и  $D_{\xi,\eta}^{(\nu)}$  ( $\nu = 2, 3, \dots$ ), не совпадали в трех первых цифрах мантиссы числа с плавающей запятой. Весь этот процесс требовал не более трех минут работы настольного компьютера.

По вышеописанному алгоритму были проведены расчеты, имевшие целью выяснить влияние на значения  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  величины полушага сетки  $h$ , числа точек коллокаций  $N_c$  и выбора нормы. Оказалось, что полученные значения  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  не зависят от величины полушага сетки  $h$ . В табл. 2 приведены значения  $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$  и  $\kappa(A(\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}))$  для двух различных значений числа точек коллокаций в ячейке и для двух различных норм — евклидовой ( $\|\cdot\|_E$ ) и нормы Фробениуса ( $\|\cdot\|_F$ ) для случая аналитического теста (19), рассматриваемого ниже в п. 5.1. Видно, что в результате включения в СЛАУ уравнений согласования число обусловленности уменьшилось на шесть десятичных порядков. При этом во втором случае, когда  $N_c = 8$ , результат аналогичен случаю  $N_c = 4$ , хотя в первом случае система переопределена, а во втором случае в матрице  $A_{\text{col}}$  число строк меньше числа столбцов. То есть, в методе КНН включение в локальную СЛАУ условий согласования существенно улучшает ее обусловленность. Характер результата не меняется и в случае, когда в локальную СЛАУ добавляются еще уравнения коллокации так, чтобы в матрице  $A_{\text{col}}$  число строк равнялось числу столбцов. Это указывает на причину, которая обеспечивает существенно лучшие вычислительные свойства метода КНН и превосходство его возможностей для численного решения PDE в сравнении с методом коллокации. Заметим, что добавление в локальную СЛАУ уравнения (12) (или значения давления в одной точке) как в методе коллокаций, так и в методе КНН необходимо для определения константы интегрирования для давления и следует постановке дифференциальной задачи (1)–(3).

Приведенные в табл. 2 данные являются практическим доказательством того, что при использовании переопределенной системы в дискретной задаче соответствующая СЛАУ дискретной задачи получается лучше обусловленной, чем когда СЛАУ при этом не является переопределенной.

Далее, из табл. 2 видно, что уменьшение величины  $N_c$  более заметно сказывается на значении  $\xi_{\text{opt}}$ , чем на значении  $\eta_{\text{opt}}$ . На рис. 1 показан вид поверхностей  $\kappa(A(\xi, \eta))$ .

Значения элементов матрицы (20) зависят от решения, поэтому желательно найти оптимальные значения  $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$  параметров  $\xi, \eta$  в каждой ячейке  $\Omega_{i,j}$  пространственной расчетной сетки. Но это привело бы к многократному увеличению машинного времени решения задачи гидродинамики по методу КНН. В связи с этим в настоящей работе был реализован более простой алгоритм нахождения значений



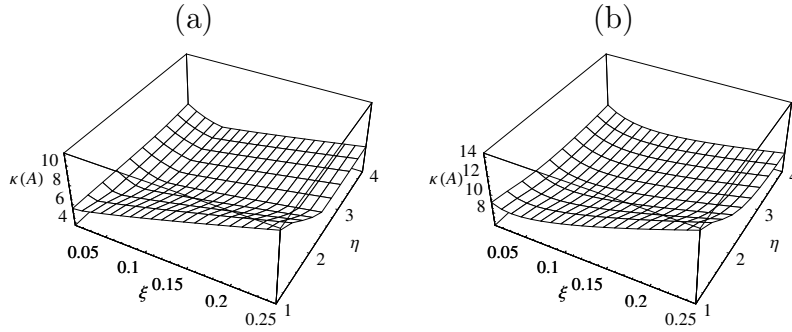


Рис. 1. Поверхности  $\kappa(A(\xi, \eta))$ , полученные при использовании евклидовой нормы (a) и нормы Фробениуса (b),  $N_c = 8$ ,  $x_{10} = L/2$ ,  $x_{20} = L/2$

Fig. 1. Surfaces  $\kappa(A(\xi, \eta))$  obtained at the use of the Euclidean norm (a) and the Frobenius norm (b),  $N_c = 8$ ,  $x_{10} = L/2$ ,  $x_{20} = L/2$

$\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  в любой точке  $(x_1, x_2) \in \Omega$ . Сначала перечислим шаги этого алгоритма и затем подробно опишем реализацию каждого шага.

*Шаг 1.* Вычисление значений  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  в узлах грубой сетки в области  $\Omega$ .

*Шаг 2.* Получение аналитических (полиномиальных) аппроксимаций для  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  с помощью метода наименьших квадратов.

Грубая сетка генерировалась на первом шаге следующим образом. Пусть  $R$  — радиус окружности, в которую вписана квадратная область (4); очевидно, что  $R = \frac{L}{\sqrt{2}}$ . Далее задаем в  $\Omega$  восемь точек со следующими координатами:  $P_1(\frac{L}{2}, \frac{L}{2} - \delta R)$ ,  $P_2(\frac{L}{2} + \delta R, \frac{L}{2})$ ,  $P_3(\frac{L}{2}, \frac{L}{2} + \delta R)$ ,  $P_4(\frac{L}{2} - \delta R, \frac{L}{2})$ ,  $P_5(\delta R, \delta R)$ ,  $P_6(L - \delta R, \delta R)$ ,  $P_7(L - \delta R, L - \delta R)$ ,  $P_8(\delta R, L - \delta R)$ , где  $\delta R = \frac{R}{3}$ . После этого находим в каждой из указанных восьми точек оптимальные значения параметров  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$  с помощью вышеописанного алгоритма. Результаты этих расчетов даны в табл. 3.

Таблица 3. Значения величин  $(\xi_{\text{opt}})_E$ ,  $(\eta_{\text{opt}})_E$  и  $(\kappa_{\text{opt}})_E$  в узлах грубой сетки,  $\text{Re} = 1000$

Точка	$(x_1, x_2)$	$(\xi_{\text{opt}})_E$	$(\eta_{\text{opt}})_E$	$(\kappa_{\text{opt}})_E$
$P_1$	(0.2562, 0.1313)	0.196	1.759	3.920
$P_2$	(0.3688, 0.2562)	0.223	1.797	3.992
$P_3$	(0.2562, 0.3688)	0.209	1.722	3.837
$P_4$	(0.1313, 0.2562)	0.223	1.722	3.853
$P_5$	(0.1187, 0.1187)	0.250	1.722	3.841
$P_6$	(0.3812, 0.1187)	0.223	1.797	4.076
$P_7$	(0.3812, 0.3812)	0.223	1.759	3.874
$P_8$	(0.1187, 0.3812)	0.197	1.722	3.880

На втором шаге нужно сначала задать аналитические выражения для функций  $\xi_{\text{opt}}(x_1, x_2)$  и  $\eta_{\text{opt}}(x_1, x_2)$ . Как известно, многочлен второй степени от переменных  $x_1, x_2$  зависит от шести коэффициентов. Табл. 3 показывает, что величины  $\xi_{\text{opt}}(x_1, x_2)$  и  $\eta_{\text{opt}}(x_1, x_2)$  изменяются незначительно в расчетной области (4) при  $L = 0.5$ . Поэтому мы ограничились аппроксимирующими многочленами первой степени:

$$\xi_{\text{opt}} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2, \quad \eta_{\text{opt}} = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2. \quad (21)$$

С использованием данных табл. 3 были найдены методом наименьших квадратов следующие значения коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  в (21),  $j = 0, 1, 2$ :  $A_0 = 0.233123$ ,  $A_1 = -0.003297$ ,  $A_2 = -0.056330$ ,  $B_0 = 1.71317$ ,  $B_1 = 0.24172$ ,  $B_2 = -0.09530$ . Обозначим через  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{am}}$  и  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{am}}$  значения  $\xi_{\text{opt}}$ ,  $\eta_{\text{opt}}$ , вычисленные как средние арифметические значения восьми значений каждой из этих величин, представленных в табл. 3. Пусть  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{int}}$  и  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{int}}$  — интегральные средние значения величин  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$ , то есть

$$(\xi_{\text{opt}})_{\text{int}} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \xi_{\text{opt}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (\eta_{\text{opt}})_{\text{int}} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \eta_{\text{opt}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Были получены следующие значения величин  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{am}}$ ,  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{int}}$ ,  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{am}}$ ,  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{int}}$ :  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{am}} = 0.218125$ ,  $(\xi_{\text{opt}})_{\text{int}} = 0.218217$ ,  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{am}} = 1.750000$ ,  $(\eta_{\text{opt}})_{\text{int}} = 1.749775$ .

Поскольку величины  $\xi_{\text{opt}}$  и  $\eta_{\text{opt}}$ , представленные в табл. 3, незначительно отличаются от их средних значений, тестовые расчеты, описанные в разделе 5.1., были выполнены при  $\xi = \xi_{\text{opt}} = 0.218$  и  $\eta = \eta_{\text{opt}} = 1.75$ .

### 3. Вариант алгоритма Крылова с редукцией базиса подпространства

#### 3.1. Основные формулы

Приведем кратко сведения о предложенном и более подробно описанном в [33] варианте алгоритма метода Крылова ускорения итерационного процесса решения СЛАУ. Пусть СЛАУ имеет вид

$$\vec{X} = T\vec{X} + \vec{f}, \quad (22)$$

где вектор  $\vec{X}$  — искомое решение,  $T$  — квадратная матрица,  $\vec{f}$  — вектор-столбец. Пусть матрица  $T$  — матрица полного ранга, и пусть сходится итерационный процесс

$$\vec{X}^{n+1} = T\vec{X}^n + \vec{f}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

в котором  $\vec{X}^n$  — приближение к решению на итерации с номером  $n$ . По определению,  $\vec{r}^n = T\vec{X}^n + \vec{f} - \vec{X}^n = \vec{X}^{n+1} - \vec{X}^n$  — невязка уравнений (22), а  $\vec{Z}^n = \vec{X} - \vec{X}^n$  — погрешность решения на  $n$ -ой итерации. Нетрудно из выписанных формул вывести соотношение:  $\vec{r}^{n+1} = T\vec{r}^n$ . Численное значение невязки на любой итерации в отличие от погрешности легко находится. Пусть от некоторого  $\vec{X}^0$  — начального приближения к решению сделаны  $k+1$  итераций, начиная с некоторого  $\vec{X}^0$  — начального приближения, то есть вычислены величины  $\vec{X}^1, \vec{X}^2, \dots, \vec{X}^{k+1}$  и  $\vec{r}^0, \vec{r}^1, \dots, \vec{r}^k$ , соответственно. В алгоритмах ускорения итерационных процессов по Крылову значение  $\vec{X}^{k+1}$  уточняется до вычисления  $\vec{X}^{k+2}$  по формуле (23), полагая  $\vec{X}^{*k+1} = \vec{X}^{k+1} + \vec{Y}^{k+1}$ . Поправка вида

$$\vec{Y}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{r}^i \quad (24)$$

с неопределенными коэффициентами  $\alpha_i$  ищется в подпространстве [4, 5, 36]

$$\mathcal{K}_k(\vec{r}^1, T) = \text{span}\{\vec{r}^1, T\vec{r}^1, \dots, T^{k-1}\vec{r}^1\},$$

где  $\text{span}\{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^k\}$  — линейная оболочка векторов  $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^k$ . Коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  находятся из условия минимизации функционала невязки  $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \|\vec{X}^{*k+1} - \Gamma \vec{X}^{*k+1} - \vec{f}\|_2^2$ , которая возникает при подстановке  $\vec{X}^{*k+1}$  в (22). Здесь  $\|\vec{u}\|_2$  — евклидова норма вектора  $\vec{u}$  размерности  $N$ :  $\|\vec{u}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2$ ,  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$ . Можно показать [6], что для выполнения этого условия искомые коэффициенты  $\alpha_i$  разложения поправки в базисе подпространства должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$(\vec{r}^1 - \vec{r}^0) \alpha_1 + \dots + (\vec{r}^k - \vec{r}^{k-1}) \alpha_k = -\vec{r}^k. \quad (25)$$

Построенное таким образом приближенное решение  $\vec{X}^{*k+1}$  можно использовать как начальное приближение для следующих итераций (23).

В случае сходящегося итерационного процесса  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{r}^n\|_2 = 0$ . В малой окрестности решения элементы матрицы системы (25) — разности близких между собой малых величин  $\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Из-за ошибок округления на ЭВМ их вычисление приводят к относительно большой погрешности. В результате по мере достижения всё большей точности решения СЛАУ поправки (24) вычисляются всё менее точно, рассматриваемый метод ускорения становится всё менее “устойчивым” и менее эффективным. Другая неприятность, снижающая эффективность поправки в области малых невязок, заключается в том, что в условиях ограниченной разрядности представления чисел на ЭВМ система (25) нередко может быть плохо обусловленной или вырожденной. У нее с точностью до небольшого числа, близкого к машинному нулю, могут быть нулевые или линейно зависимые между собой столбцы.

Сделаем предположение (CR): допустим, что матрица системы (25) является матрицей полного ранга (complete rank). Для достижения большей устойчивости процесса вычисления коэффициентов поправки  $\vec{Y}^{*k+1}$  в области малых невязок здесь применяются несколько приемов. Первый прием — нормировка столбцов матрицы системы (25). Это позволяет уменьшить в процессе решения СЛАУ (25) количество арифметических действий с числами, близкими к машинному нулю. Нормировка уравнений в (25) производилась здесь при помощи замены неизвестных  $\beta_i = \alpha_i \|\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}\|_2$ ,  $i = 1, \dots, k$ . В результате СЛАУ (25) принимает вид

$$B \vec{\beta} = (\vec{B}_1) \beta_1 + \dots + (\vec{B}_k) \beta_k = -\vec{r}^k, \quad (26)$$

где  $\vec{B}_i = (\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}) / \|\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}\|_2$ ,  $i = 1, \dots, k$  — столбцы матрицы  $B$ .

Вторым приемом является применение ортогонального метода для решения переопределенной СЛАУ (26). Здесь использовались методы либо Хаусхолдера, либо Гивенса с выбором главного элемента в  $i$ -ом столбце  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . То есть для прямоугольной матрицы  $B$  системы (26) строилось  $QR$ -разложение с ортогональной матрицей  $Q$  и прямоугольной матрицей  $R$ , у которой на главной диагонали ненулевые элементы, а под главной диагональю все элементы — нули. Так что в первых  $k$  строках матрицы  $R$  квадратная верхне-треугольная матрица. И решение переопределенной системы  $B \vec{\beta} = \vec{r}^k$  (26) свелось к решению системы

$$R \vec{\beta} = -Q^T \vec{r}^k. \quad (27)$$

Решение СЛАУ, состоящей из первых  $k$  уравнений системы (27), принимается в качестве псевдорешения системы (26). Известно, что ортогональный метод сводит решение заданной системы к решению системы, обусловленность которой не хуже обусловленности исходной. Описанные первый и второй приемы содержатся в упомянутом методе GMRES.

При численном решении прикладных задач в начале итерационного процесса, когда невязки  $\vec{r}^i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) не маленькие, с большой вероятностью матрица  $B$  имеет полный ранг – предположение  $CR$  выполняется. Однако по мере сходимости итерационного процесса при небольших  $\vec{r}^i$  с ненулевой вероятностью предположение  $CR$  может не выполняться. При этом попытка построить  $QR$  – разложение не дает в первых  $k$  строках матрицы  $R$  треугольную матрицу размера  $k$ . Если этот факт имеет место с точностью, близкой к машинному нулю, т.е. по крайней мере один из элементов на диагонали верхней треугольной матрицы  $R$  близок к машинному нулю, то поправка (24) будет найдена с непригодной точностью (или попытка решить систему (27) может дать в результате большое число, не представимое в арифметике с конкретной используемой разрядностью представления чисел в ЭВМ). Это может привести (или приведет) к автоматическому останова машины (авосту). Если даже система (27) будет решена, то это может быть сделано с плохой точностью. При этом поправки  $\vec{Y}^{k+1}$  к  $\vec{X}^{k+1}$  вычисляются неустойчиво. В вычислительном эксперименте в области малых невязок решения можно наблюдать осцилляции в графике погрешности решения.

### 3.2. Редукция базиса подпространства Крылова в области малых невязок

Третий существенный прием, примененный здесь, как и первые два, направлен на увеличение устойчивости вычисления поправок (устойчивого построения подпространства Крылова). Суть его заключается в редукции имеющегося базиса путем ограничения числа невязок  $\vec{r}^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, s < k$ , используемых в редуцированном базисе, при вычислении поправок к приближенным значениям решения в области плохой обусловленности системы (25). Здесь применялся достаточно простой критерий ( $S$  – критерий) для выбора числа невязок, пригодных с точки зрения устойчивого построения подпространства Крылова. В [36] был реализован некоторый его вариант.

Пусть в процессе  $QR$ -разложения на диагонали матрицы  $R$  в  $(s + 1)$ -ой строке появился элемент по модулю меньше некоторого числа  $\delta$ , близкого к машинному нулю, и все элементы под диагональю равны нулю. Тогда для построения поправки используются только первые  $s + 1$  невязки  $r^i$  ( $i = 0, 1, \dots, s$ ). В системе (26) оставляются первые  $s$  столбцов, а в правой части соответственно редуцированной определяющей системы вместо вектора  $-\vec{r}^k$  берется вектор  $-\vec{r}^s$ .

Как показали результаты большого количества итерационного решения тестовых примеров, применение  $S$ -критерия позволяет избежать некоторого количества авостов при приближении величин невязок к машинному нулю и получить более точные решения СЛАУ, чем без применения критерия.

Очевидно, что программа с автоматическим применением  $S$ -критерия позволя-

ет применять метод Крылова также в случае, когда матрица  $B$  системы (26) не является матрицей полного ранга.

## 4. Ускорение сходимости итераций применением многосеточного алгоритма

Основная идея многосеточных алгоритмов состоит в селективном демпфировании гармоник ошибки [7, 48]. В методе КНН, как и в других методах, количество итераций, необходимых для достижения заданной точности приближения к предельному решению, зависит от начального приближения. Мы применили операции продолжения вдоль восходящей ветви V-цикла — расчеты на последовательности измельчающихся сеток — в качестве способа получения хорошего начального приближения для итераций на самой мелкой сетке среди сеток, используемых в многосеточном комплексе. Переход от грубой сетки к более мелкой делается с помощью операторов продолжения. Проиллюстрируем алгоритм операции продолжения на примере составляющей скорости  $u_1(y_1, y_2, b_1, \dots, b_{12})$ . Пусть  $h_1 = h$ , где  $h$  — полушаг грубой сетки, и пусть  $h_2 = h_1/2$  — полушаг мелкой сетки, на которой нужно найти разложение функции  $u_1$  по базису.

*Шаг 1.* Пусть  $X_1, X_2$  — глобальные координаты центра ячейки грубой сетки. Сделаем следующие подстановки в полиномиальное выражение для  $u_1$ :

$$y_l = (x_l - X_l)/h_1, \quad l = 1, 2. \quad (28)$$

В результате получаем многочлен

$$U_1(x_1, x_2, b_1, \dots, b_{12}) = u_1 \left( \frac{x_1 - X_1}{h_1}, \frac{x_2 - X_2}{h_1}, b_1, \dots, b_{12} \right). \quad (29)$$

*Шаг 2.* Пусть  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  — глобальные координаты центра любой из четырех ячеек мелкой сетки, содержащихся в ячейке грубой сетки. Сделаем в (29) замену  $x_l = \tilde{X}_l + \tilde{y}_l \cdot h_2$ ,  $l = 1, 2$ . В результате получим многочлен второй степени  $\tilde{U}_1 = P(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{12})$  от переменных  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  с коэффициентами  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{12}$ . После приведения подобных оказывается, что координаты  $X_1, X_2$  и  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$  входят в  $\tilde{b}_l$  ( $l = 1, \dots, 12$ ) только в виде комбинаций  $\delta x_l = (X_l - \tilde{X}_l)/h_1$ . Согласно (28), величина  $-\delta x_l = (\tilde{X}_l - X_l)/h_1$  является локальной координатой в ячейке грубой сетки центра ячейки мелкой сетки.

Приведем выражения для коэффициентов  $\tilde{b}_j$  ( $j = 1, \dots, 12$ ) представления решения в ячейке мелкой сетки с полушагом  $h_2$  в терминах коэффициентов  $b_1, \dots, b_{12}$  представления решения в ячейке с полушагом  $h_1 = 2h_2$  и величин  $\sigma_1 = h_2/h_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= b_1 - b_2\delta x_1 + b_4\delta x_1^2 - (b_3 + 2b_5\delta x_1)\delta x_2 + b_6\delta x_2^2; \\ \tilde{b}_2 &= \sigma_1(b_2 - 2b_4\delta x_1 + 2b_5\delta x_2); \quad \tilde{b}_3 = \sigma_1[b_3 + 2(b_5\delta x_1 - b_6\delta x_2)]; \\ \tilde{b}_4 &= \sigma_2 b_4; \quad \tilde{b}_5 = \sigma_2 b_5; \quad \tilde{b}_6 = \sigma_2 b_6; \\ \tilde{b}_7 &= b_7 - b_8\delta x_1 + b_9\delta x_1^2 + \delta x_2(b_2 - 2b_4\delta x_1 + b_5\delta x_2); \\ \tilde{b}_8 &= \sigma_1(b_8 - 2b_9\delta x_1 + 2b_4\delta x_2); \\ \tilde{b}_9 &= \sigma_2 b_9; \quad \tilde{b}_{10} = b_{10} - b_{11}\delta x_1 - b_{12}\delta x_2; \quad \tilde{b}_{11} = \sigma_1 b_{11}; \quad \tilde{b}_{12} = \sigma_1 b_{12}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что можно выписать аналогичные формулы перехода от грубой сетки к мелкой в случае любой целой величины отношения длин сторон их ячеек.

## 5. Результаты численных экспериментов

### 5.1. Тестирование

С целью изучения свойств сходимости и точности изложенного выше метода КНН были выполнены многочисленные вычислительные эксперименты с использованием аналитического решения (19). Среднеквадратичные погрешности решения вычислялись по формулам

$$\delta \mathbf{u}(h) = \left[ \frac{1}{2M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\nu=1}^2 (u_{\nu,i,j} - u_{\nu,i,j}^{ex})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \delta p(h) = \left[ \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (p_{i,j} - p_{i,j}^{ex})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $M$  – количество ячеек вдоль каждого координатного направления,  $\mathbf{u}_{i,j}^{ex}$  и  $p_{i,j}^{ex}$  – вектор скорости и давление, вычисленные из точного решения (19). Величины  $\mathbf{u}_{i,j}$  и  $p_{i,j}$  обозначают численное решение, полученное по методу КНН, описанному выше, и вычисленное в центре ячейки  $\Omega_{ij}$ . Порядки сходимости  $\nu_u$  и  $\nu_p$  вычислялись по известным формулам [32, 34]. Пусть  $b_{i,j,l}^s$ ,  $s = 0, 1, \dots$  – значения коэффициентов  $b_{i,j,l}$  в (8) на  $s$ -ой итерации. Использовалось следующее условие для окончания итераций по нелинейности:  $\delta b^{s+1} < \varepsilon$ , где  $\delta b^{s+1} = \max_{i,j} (\max_{1 \leq l \leq 12} |b_{i,j,l}^{s+1} - b_{i,j,l}^s|)$ , а  $\varepsilon < h^2$  – малая положительная величина. В дальнейшем будем называть величину  $\delta b^{s+1}$  псевдопогрешностью приближенного решения.

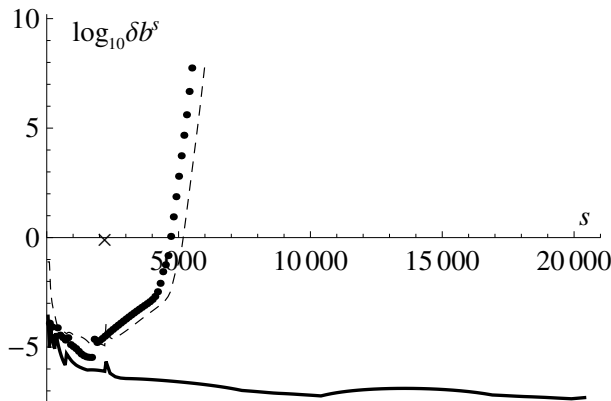


Рис. 2. Погрешность  $\delta b^s$  при использовании различных преуславливателей: (—)  $\xi = \xi_{opt}$ ,  $\eta = \eta_{opt}$ ; (---)  $\xi = \eta = 1$ ; (.....) – диагональный преуславливатель

Fig. 2. Error  $\delta b^s$  at the use of different preconditioners: (—)  $\xi = \xi_{opt}$ ,  $\eta = \eta_{opt}$ ; (---)  $\xi = \eta = 1$ ; (.....) the diagonal preconditioner

Была проведена серия расчетов с целью изучения влияния конкретного вида преуславливателя на сходимость итераций по методу КНН. В этой серии расчетов критерием останова счета было выполнение неравенства  $\delta b^s < 10^{-9}$ . Результаты представлены на рис. 2. Крестиком на оси  $s$  показан тот номер итерации  $s$ , начиная с которого расчет в рамках многосеточного алгоритма осуществляется на сетке из  $80 \times 80$  ячеек. Видно, что при отсутствии преуславливателя, когда  $\xi = 1$  в (17) и  $\eta = 1$  в (18), псевдопогрешность  $\delta b^{s+1}$  начинает расти сразу после перехода к расчету на сетке из  $80 \times 80$  ячеек.

Аналогичное поведение демонстрирует также диагональный преуславливатель из [18]. В то же время преуславливатель, использующий (17), (18) с  $\xi =$

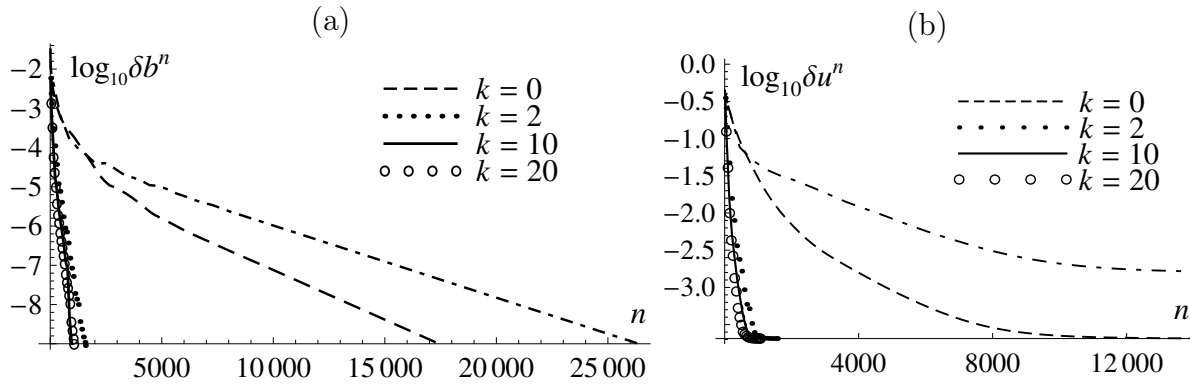


Рис. 3. Влияние значения  $k$  в (25) на скорость сходимости величин  $\log_{10} \delta b^n$  (а) и  $\log_{10} \delta u$  (б), где  $n$  — число итераций

Fig. 3. Influence of the number of the value of  $k$  in (25) on the convergence rate of quantities  $\log_{10} \delta b^n$  (a) and  $\log_{10} \delta u$  (b), where  $n$  is the number of iterations

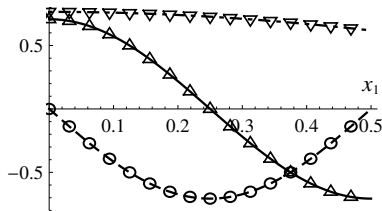


Рис. 4. Сравнение профилей приближенного и точного решений при  $x_2 = L/4$

Fig. 4. Comparison of the approximate and exact solution profiles at  $x_2 = L/4$

$\xi_{\text{opt}} = 0.218$ ,  $\eta = \eta_{\text{opt}} = 1.75$ , обеспечивает достижение неравенства  $\delta b^s < 10^{-9}$ . Поэтому все расчеты, описываемые ниже в данном разделе, были проведены с применением предобуславливателя, описанного в п. 2, с  $\xi = \xi_{\text{opt}}$ ,  $\eta = \eta_{\text{opt}}$ .

На рис. 3, 4 и в табл. 4 приводятся результаты численных экспериментов, имевших целью выяснить влияние на ускорение сходимости итерационного процесса решения двумерных уравнений Навье–Стокса по методу КНН только при использовании двухпараметрического предобуславливателя и метода подпространств Крылова. Число Рейнольдса  $Re = 1000$ ,  $X = 0.5$  в (4). Эти расчеты были выполнены на сетке из  $40 \times 40$  ячеек,  $N_c = 4$ . Поэтому, в соответствии с табл. 2, использовались следующие значения величин  $\xi, \eta$ :  $\xi = \xi_{\text{opt}} = 0.213$ ,  $\eta = \eta_{\text{opt}} = 1.738$ . Критерием останова счета было выполнение неравенства  $\delta b^n < 10^{-9}$ . Расчеты без применения алгоритма Крылова соответствует случай  $k = 0$ . В этой серии расчетов в переопределенную СЛАУ (14) было включено уравнение (13). В процессе итераций по методу КНН абсолютная величина интеграла (3) падала со значения порядка  $10^{-3}$  до величины порядка  $10^{-12} - 10^{-13}$ , то есть до величины порядка машинных ошибок округления при расчетах по Фортран-программе с двойной точностью. Это может служить одним из критериев правильности программной реализации представленного выше метода КНН. Из рис. 3 видно, что с увеличением числа невязок  $k$ , используемых в методе Крылова, скорость сходимости численного решения по методу КНН растет. Количество итераций  $N_{it}$ , необходимых для обеспечения выполнения неравенства  $\delta b^n < 10^{-9}$ , составляло 17429, 1577, 969 и 1072 соответственно при  $k = 0, 2, 10$  и 20. Таким образом, применение алгоритма Крылова при  $Re = 1000$  с  $k = 10$  позволило уменьшить количество итераций, требуемых для сходимости приближенного решения, в 18 раз по сравнению со случаем  $k = 0$ .

Таблица 4. Погрешности  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta p$  и их порядки сходимости  $\nu_u, \nu_p$  на последовательно-сти сеток,  $Re = 1000$ ,  $L = 0.5$ ,  $N_c = 8$

$M$	$\delta \mathbf{u}$	$\delta p$	$\nu_u$	$\nu_p$
10	2.204E-03	3.087E-03		
20	7.174E-04	9.021E-04	1.62	1.77
40	1.801E-04	2.521E-04	1.99	1.84
80	4.070E-05	9.547E-05	2.15	1.40

Таблица 5. Влияние предобуславливателя и комбинации методов Крылова и Федоренко на последовательности сеток размеров  $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m$ ,  $m = 0, \dots, 4$  на скорость сходимости метода КНН при  $Re = 1000$

Метод	$N_{it}$	Время счета, с	AF	$\delta \mathbf{u}$	$\delta p$
$K_{mgr} = 1, k = 0$	851119	464718	1.0	3.587E-05	7.065E-04
$K_{mgr} = 5, k = 0$	1282529	843849	0.55	2.108E-05	4.570E-04
$K_{mgr} = 1, k = 9$	39521	21944	21.18	3.587E-05	7.060E-04
$K_{mgr} = 1, k = 10$	40154	22375	20.77	3.587E-05	7.063E-04
$K_{mgr} = 5, k = 5$	6185	2119	219.31	3.570E-05	6.713E-05
$K_{mgr} = 5, k = 8$	6283	2172	213.96	3.571E-05	6.392E-05
$K_{mgr} = 5, k = 9$	5832	2018	230.29	3.571E-05	5.787E-05
$K_{mgr} = 5, k = 10$	6090	2186	212.59	3.571E-05	5.628E-05

Был также проведен расчет при отсутствии предобуславливателя, то есть когда  $\xi = \eta = 1$ , см. штрих-пунктирные линии на рис. 3. В этом случае понадобилось 26384 итераций по методу КНН при  $k = 0$  для достижения неравенства  $\delta b^n < 10^{-9}$ , то есть примерно в полтора раза больше, чем при использовании значений  $\xi_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$  в предобуславливателе. Из рис. 3 (b) видно, что погрешность  $\delta u^n$  сошедшегося решения выше в  $10^{0.884}$  раз, чем при использовании значений  $\xi_{opt}$ ,  $\eta_{opt}$  в предобуславливателе. Из табл. 4 видно, что при  $Re = 1000$  порядок сходимости  $\nu_u$  близок к 2, а  $\nu_p < \nu_u$  при  $M \geq 40$ .

На рис. 4 дано сравнение профилей компонент полученного методом КНН и точного решения. Компоненты  $v_1$ ,  $v_2$  и  $p$  приближенного решения нарисованы символами  $\Delta$ ,  $\circ$  и  $\nabla$ , те же компоненты точного решения — сплошными, штриховыми и штрих-пунктирными линиями соответственно. Здесь видно хорошее согласие между численными результатами и аналитическим решением.

Были проведены расчеты с применением восходящей ветви V-цикла с целью выяснить, как влияет применение только многосеточного алгоритма на ускорение сходимости метода КНН. Были также проведены расчеты, в которых движение по восходящей ветви многосеточного V-цикла применялось совместно с алгоритмом ускорения, основанным на подпространствах Крылова. Результаты этих расчетов представлены в табл. 5. В ней  $K_{mgr}$  — количество последовательно используемых сеток в многосеточном комплексе. Если  $K_{mgr} = 1$ , то это означает, что в расчете используется только одна сетка, и это самая мелкая сетка с числом ячеек  $80 \times 80$ . Далее,  $N_{it}$  — суммарное количество итераций, выполненных на всех сетках комплекса. Фактор ускорения итерационного процесса AF в результате применения того или иного способа его ускорения вычисляется как отношение времени счета при  $K_{mgr} = 1, k = 0$  ко времени счета при применении последовательности из



нескольких сеток ( $K_{mgr} > 1, k = 0$ ) или же последовательности сеток в сочетании с применением алгоритма Крылова на каждой сетке ( $K_{mgr} > 1, k > 1$ ). Во всех расчетах, показанных в табл. 5, использовались оптимальные значения  $\xi_{opt} = 0.218, \eta_{opt} = 1.75$  в двухпараметрическом предобуславливателе. Из табл. 5 видно, что наибольшее ускорение скорости сходимости — до 230 раз по сравнению с расчетом только на самой мелкой сетке — имеет место при применении пяти сеток в много-сеточном алгоритме и 9 невязок в методе Крылова.

## 5.2. Использование высокоточных решений эталонной задачи для верификации метода КНН

Для контроля и верификации результатов численных экспериментов здесь, кроме их сравнения с точными решениями тестовых задач, проведено сравнение характерных величин, полученных в численных экспериментах по решению эталонной задачи о течении вязкой жидкости в каверне. В этой задаче расчетная область каверна — квадрат (4) со стороной  $L = 1$ , начало координат находится в ее левом нижнем углу. Верхняя крышка каверны движется в безразмерных величинах с единичной скоростью в положительном направлении оси  $Ox_1$ . Остальные стороны каверны (4) покоятся. На всех сторонах заданы условия прилипания:  $v_1 = 1, v_2 = 0$  при  $x_2 = X$  и  $v_m = 0, m = 1, 2$ , на остальных сторонах.

Течение в каверне с движущейся крышкой имеет сингулярности в верхних углах области. Их влияние на точность численного решения усиливается с увеличением числа Рейнольдса. Поэтому при больших числах Рейнольдса для получения более точного решения необходимо применять адаптивные сетки с более мелкими ячейками в окрестности сингулярностей [36, 38]. Здесь использовали только равномерные сетки, размер которых не превосходил  $320 \times 320$  ячеек.

Таблица 6. Результаты по ускорению решения методом КНН эталонной задачи путем применения комбинации методов Крылова и Федоренко на последовательности сеток размеров  $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m, m = 0, 1, 2, 3$  при  $Re = 100$

Метод	$N_{it}$	Время счета, с.	AF
$K_{mgr} = 1, k = 0$	360104	31640.44	1.0
$K_{mgr} = 4, k = 0$	152172	13147.12	2.41
$K_{mgr} = 1, k = 10$	13608	1242.36	25.47
$K_{mgr} = 4, k = 8$	3623	197.75	160.0
$K_{mgr} = 4, k = 9$	3591	194.97	162.28
$K_{mgr} = 4, k = 10$	3632	199.48	158.61

Таблица 6 иллюстрирует эффективность совместного применения двухпараметрического предобуславливателя и алгоритмов Крылова и Федоренко. Перед выполнением расчетов, результаты которых приведены в этой таблице, была найдена область оптимальных значений параметров  $\xi, \eta$  для двухпараметрического предобуславливателя с помощью алгоритма, описанного в разделе 2. В этой области были взяты значения  $\xi_{opt} = 2.0$  и  $\eta_{opt} = 3.5$ , которые использовались во всех вариантах расчетов, представленных в табл. 6. Видно, что ускорение сходимости весьма значительное: при  $K_{mgr} = 4, k = 9$  соответствующий фактор ускорения  $AF = 162.28$ . Из

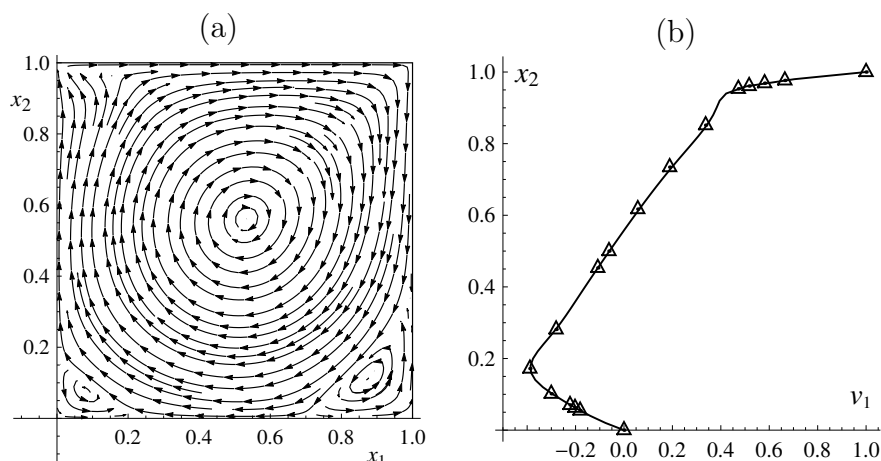


Рис. 5. Картина линий тока (a) и профиль составляющей скорости  $v_1$  вдоль линии  $x_1 = 0.5$  (b) в решении эталонной задачи при  $Re = 1000$  (значки  $\Delta$  — результаты работы [37])

Fig. 5. Pattern of streamlines (a) and the profile of the velocity component  $v_1$  along the line  $x_1 = 0.5$  (b) in the benchmark problem solution at  $Re = 1000$

этой таблицы также следует, что в рассматриваемой задаче наилучшим для ускорения сходимости итерационного процесса при решении уравнений Навье–Стокса с умеренными числами Рейнольдса является число невязок  $k = 9$  в описанном выше варианте алгоритма Крылова. Заметим, что это же значение  $k$  оказалось наилучшим и при тестировании совместного применения алгоритмов Крылова и Федоренко на решении (19), см. табл. 5.

Для полноты исследования были также выполнены некоторые другие вычислительные эксперименты, например, на сетке из  $40 \times 40$  ячеек с неоптимальными значениями параметров  $\xi = 0.8$  и  $\eta = 3.5$ ; примененные способы ускорения были теми же, что и в табл. 6. В этом случае машинные времена счета увеличились в среднем в 2.9 раза по сравнению с табл. 6. Это вновь подтверждает важность оптимизации итерационных процессов.

На рис. 5 представлены некоторые результаты численных расчетов течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне для числа Рейнольдса  $Re = 1000$ . Расчеты выполнены на равномерной сетке  $320 \times 320$  ячеек. Стрелки на рис. 5 (a) указывают локальные направления движения частиц жидкости. Сплошная линия на рис. 5 (b) — результат расчета по вышеописанному методу КНН. Полученные результаты сравнивались с наиболее точными результатами других исследователей, полученными при  $Re = 1000$ . Результаты по методу КНН совпадали с результатами [36–38] с точностью  $\approx 10^{-3}$ .

Все вычисления, результаты которых приведены в данной статье, были получены на РС с процессором Intel с тактовой частотой 2,83 ГГц.

## Заключение

В данной работе были скомбинированы в методе КНН три способа ускорения сходимости итераций при решении СЛАУ. Каждый способ, входящий в комбинацию, дает свой вклад в суммарную характеристику ускорения сходимости итераций. Одним из

позитивных факторов, вносящих вклад в быструю сходимость итераций при использовании многосеточного комплекса в методе КНН, является возможность перехода с одной сетки на другую без применения таких процедур, как, например, интерполяция или осреднение, которые вводят собственную ошибку в промежуточное численное решение. Сравнение результатов по ускорению итераций при использовании одновременно всех трех способов со случаем, когда применяется только предобуславливатель, привело к ускорению до 230 раз. Как было показано выше, построение переопределенной СЛАУ для нахождения приближенного решения уравнений с частными производными по методу КНН позволяет значительно снизить ее число обусловленности по сравнению с числом обусловленности, полученным в методе коллокаций. Этот факт также оказывает положительное влияние на скорость сходимости итераций в методе КНН. Кроме того, минимизация функционала невязки в методе КНН на каждой итерации подавляет различные ошибки гармоник возмущения решения, которые возникают в промежуточных итерациях. Поэтому комбинация различных способов ускорения итераций позволяет получать на этой основе ускорение в сотни раз. Оказалось, что для значительного ускорения сходимости итераций при использовании метода Федоренко в методе КНН достаточно ограничиваться только операцией продолжения решения на многосеточном комплексе.

Эффективность совместного применения методов Крылова и Федоренко в сочетании с предложенным предобуславливателем позволила выполнить на персональных компьютерах достаточно много вычислительных экспериментов, включая решение уравнений Навье–Стокса. Часть результатов представлена в этой статье. Такая комбинация способов ускорения итерационных процессов может быть реализована и при применении других численных итерационных методов решения PDE.

## Список литературы / References

- [1] Edwards W. S., Tuckerman L. S., Friesner R. A., Sorensen D. C., “Krylov methods for the incompressible Navier–Stokes equations”, *J. Comput. Phys.*, **110** (1994), 82–102.
- [2] Knoll D. A., Keyes D. E., “Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications”, *J. Comput. Phys.*, **193**:2 (2004), 357–397.
- [3] Griffith B. E., “An accurate and efficient method for the incompressible Navier–Stokes equations using the projection method as a preconditioner”, *J. Comput. Phys.*, **228**:20 (2009), 7565–7595.
- [4] Saad Y., *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester University Press, Manchester, 1991.
- [5] Крылов А. Н., “О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем”, *Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук*, 1931, №4, 491–539; [Krylov A. N., “O chislennom reshenii uravneniya, kotorym v tekhnicheskikh voprosakh opredelyayutsya chastoty malykh kolebaniy materialnykh sistem”, *Izv. AN SSSR, Otd. matem. i estestv. nauk*, 1931, №4, 491–539, (in Russian).]
- [6] Слепцов А. Г., “Об ускорении сходимости линейных итераций П”, *Моделирование в механике*, **3**(20):5 (1989), 118–125; [Sleptsov A. G., “Ob uskorenii skhodimosti lineinykh iteratsiy P”, *Modelirovanie v mekhanike*, **3**(20):5 (1989), 118–125, (in Russian).]
- [7] Федоренко Р. П. “О скорости сходимости одного итерационного процесса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:3 (1964), 559–564; English transl.: Fedorenko R. P., “The speed of convergence of one iterative process”, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, **4**:3 (1964), 227–235.

- [8] Piquet J., Vasseur X., “A nonstandard multigrid method with flexible multiple semicoarsening for the numerical solution of the pressure equation in a Navier–Stokes solver”, *Num. Algorithms*, **24**:4 (2000), 333–355.
- [9] Jothiprasad G., Mavriplis D. J., Caughey D. A., “Higher-order time integration schemes for the unsteady Navier–Stokes equations on unstructured meshes”, *J. Comput. Phys.*, **191**:2 (2003), 542–566.
- [10] Ge L., Sotiropoulos F., “A numerical method for solving the 3D unsteady incompressible Navier–Stokes equations in curvilinear domains with complex immersed boundaries”, *J. Comput. Phys.*, **225**:2 (2007), 1782–1809.
- [11] Lucas P., van Zuijlen A. H., Bijl H., “Fast unsteady flow computations with a Jacobian-free Newton–Krylov algorithm”, *J. Comput. Phys.*, **229**:2 (2010), 9201–9215.
- [12] Nasr-Azadani M. M., Meiburg E., “TURBINS: An immersed boundary, Navier–Stokes code for the simulation of gravity and turbidity currents interacting with complex topographies”, *Comp. & Fluids*, **45**:1 (2011), 14–28.
- [13] Wang M., Chen L., “Multigrid methods for the stokes equations using distributive gauss-seidel relaxations based on the least squares commutator”, *J. Sci. Comput.*, **56**:2 (2013), 409–431.
- [14] Nickaen M., Ouazzi A., Turek S., “Newton multigrid least-squares FEM for the V-V-P formulation of the Navier–Stokes equations”, *J. Comput. Phys.*, **256** (2014), 416–427.
- [15] Fairag F. A., Wathen A. J., “A block preconditioning technique for the streamfunction-vorticity formulation of the Navier–Stokes equations”, *Num. Methods Partial Differential Equations*, **28**:3 (2012), 888–898.
- [16] Benzi M., Wang Z., “Analysis of augmented lagrangian-based preconditioners for the steady incompressible navier-stokes equations”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **33**:5 (2011), 2761–2784.
- [17] Jiang B. N., Lin T. L., Povinelli L. A., “Large-scale computation of incompressible viscous flow by least-squares finite element method”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **114**:3–4 (1994), 213–231.
- [18] Ramšak M., Škerget L., “A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **46** (2004), 815–847.
- [19] Плясунова А. В., Слепцов А. Г., “Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений на подвижных сетках”, *Моделирование в механике*, **18**:4 (1987), 116–137; [Plyasunova A. V., Sleptsov A. G., “Kollokatsionno-setochnyi metod resheniya nelineinykh parabolicheskikh uravneniy na podvizhnykh setkakh”, *Modelirovanie v mekhanike*, **18**:4 (1987), 116–137, (in Russian).]
- [20] Carey G. F., Jiang B. N., “Least-squares finite element method and preconditioned conjugate gradient solution”, *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, **24**:7 (1987), 1283–1296.
- [21] Jiang B. N., *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Springer, Berlin, 1998.
- [22] Bochev P. B., Gunzburger M. D., “Finite element methods of least-squares type”, *SIAM Rev.*, **40**:4 (1998), 789–837.
- [23] Soares B. F., Garcia R. V., Pinto P. C., Romao E. C., “Interval study of convergence in the solution of 1D Burgers by least squares finite element method (LSFEM) + Newton linearization”, *Scientific Research and Essays*, **10**:16 (2015), 522–530.
- [24] Семин Л. Г., Слепцов А. Г., Шапеев В. П., “Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса”, *Вычисл. технологии*, **1**:2 (1996), 90–98; [Semin L. G., Sleptsov A. G., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy-naimenshikh kvadratov dlya uravneniy Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **1**:2 (1996), 90–98, (in Russian).]
- [25] Semin L., Shapeev V., “Constructing the numerical method for Navier–Stokes equations using computer algebra system”, *LNCS*, **3718**, Springer, Heidelberg, 2005, 367–378.

- [26] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов”, *Труды ИММ УрО РАН*, **14**:1 (2008), 41–60; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “Development of the collocations and least squares method”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **261** (2008), 87–106.
- [27] Исаев В. И., Шапеев В. П., Черепанов А. Н., “Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне”, **13**:3 (2010), 451–466; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., Cherepanov A. N., “Numerical simulation of laser welding of thin metallic plates taking into account convection in the welding pool”, *Thermophysics and Aeromechanics*, **13**:3 (2010), 419–434.
- [28] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса”, *Докл. Академии наук*, **442**:4 (2012), 442–445; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P. “High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier–Stokes equations”, *Dokl. Math.*, **85** (2012), 71–74.
- [29] Слепцов А. Г., Шокин Ю. И., “Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:5 (1997), 572–586; English transl.: Sleptsov A. G., Shokin Yu. I., “An adaptive grid-projection method for elliptic problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **37** (1997), 558–571.
- [30] Беляев В. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей”, *Вычислительные технологии*, **5**:4 (2000), 12–21; [Belyaev V. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimen’shikh kvadratov na adaptivnykh setkakh v oblasti s krivolineinoi granitsej”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **5**:4 (2000), 12–21, (in Russian).]
- [31] Shapeev V. P., Isaev V. I., Idimeshev S. V., “The collocations and least squares method: application to numerical solution of the Navier–Stokes equations”, *CD-ROM Proc. 6th ECCOMAS, Sept. 2012*, Vienna Univ. of Tech. ISBN: 978-3-9502481-9-7, 2012.
- [32] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations”, *LNCS*, **7442**, Springer, Heidelberg, 2012, 321–333.
- [33] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В., “Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса”, *Вычислит. методы и программирование*, **14** (2013), 306–322; [Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok dlya trekhmernykh uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, **14** (2013), 306–322, (in Russian).]
- [34] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations”, *LNCS*, **8136**, Springer, Heidelberg, 2013, 381–392.
- [35] Shapeev V., “Collocation and least residuals method and its applications”, *EPJ Web of Conferences*, **108**:01009 (2016).
- [36] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:10 (2010), 1758–1770; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 1670–1681.
- [37] Botella O., Peyret R., “Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow”, *Comput. Fluids*, **27** (1998), 421–433.
- [38] Shapeev A. V., Lin P., “An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **31** (2009), 1874–1900.
- [39] Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин”, *Вычислительные технологии*, **18**:6 (2013), 31–43; [Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **18**:6 (2013), 31–43, (in Russian).]

- [40] Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П., “Разработка и применение метода коллокации и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин”, *Вычислительные технологии*, **19:5** (2014), 24–36; [Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P., “Razrabotka i primenenie metoda kollokatsiy i naimenshih nevyazok k zadacham mekhaniki anizotropnykh sloistykh plastin”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **19:5** (2014), 24–36, (in Russian).]
- [41] Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., Semin L., “Free longitudinal vibrations of bimodular beams: a comparative study”, *Int. J. Structural Stability and Dynamics*, **11:1** (2011), 23–56.
- [42] Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., “CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg–de Vries–Burgers equations”, *LNCS*, **8660**, Springer, Heidelberg, 2014, 432–446.
- [43] Isaev V., Cherepanov A., Shapeev V., “Numerical study of heat modes of laser welding of dissimilar metals with an intermediate insert”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **99** (2016), 711–720.
- [44] Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., “Об ускорении итерационных процессов решения краевых задач комбинированием методов Крылова и Федоренко”, *Символ науки*, 2015, № 10(2), 24–43; [Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P., “Ob uskorenii iteratsionnykh protsessov resheniya kraevykh zadach kombinirovaniem metodov Krylova i Fedorenko”, *Simvol nauki*, 2015, № 10(2), 24–43, (in Russian).]
- [45] Temam R., *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
- [46] Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А., “Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса”, *Вычислительные технологии*, **12:3** (2007), 1–19; [Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A., “Issledovanie svoistv metoda kollokatsii i naimenshih kvadratov resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **12:3** (2007), 1–19, (in Russian).]
- [47] Wolfram S., *The Mathematica Book, 5th edn.*, Wolfram Media, Inc., Champaign, IL., 2003.
- [48] Wesseling P., *An Introduction to Multigrid Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1992.

---

**Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V.**, "On Combining Different Acceleration Techniques at the Iterative Solution of PDEs by the Method of Collocations and Least Residuals", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:1** (2017), 39–63.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-39-63

**Abstract.** In the work, we consider the problem of accelerating the iteration process of the numerical solution of boundary-value problems for partial differential equations (PDE) by the method of collocations and least residuals (CLR). To solve this problem, it is proposed to combine simultaneously three techniques of the iteration process acceleration: the preconditioner, the multigrid algorithm, and the correction of the PDE solution at the intermediate iterations in the Krylov subspace. The influence of all three techniques of the iteration acceleration was investigated both individually for each technique and at their combination. Each of the above techniques is shown to make its contribution to the quantitative figure of iteration process speed-up. The algorithm which employs the Krylov subspaces makes the most significant contribution. The joint simultaneous application of all three techniques for accelerating the iterative solution of specific boundary-value problems enabled a reduction of the CPU time of their solution on computer by a factor of up to 230 in comparison with the case when no acceleration techniques were applied. A two-parameter preconditioner was investigated. It is proposed to find the optimal values of its parameters by the numerical solution of a computationally inexpensive problem of minimizing the condition number of the system of linear algebraic equations. The problem is solved by the CLR method and it is modified by the preconditioner. It is shown that it is sufficient to restrict oneself in the multigrid version of the CLR method only to a simple solution prolongation operation on the multigrid complex to reduce substantially the CPU time of the boundary-value problem solution.

Numerous computational examples are presented, which demonstrate the efficiency of the approaches proposed for accelerating the iterative processes of the numerical solution of the boundary-value problems for the two-dimensional Navier–Stokes equations. It is pointed out that the proposed combination of the techniques for accelerating the iteration processes may be also implemented within the framework of other numerical techniques for the solution of PDEs.

**Keywords:** preconditioning, Krylov subspaces, multigrid, Gauss–Seidel iterations, Navier–Stokes equations, the method of collocations and least residuals

**On the authors:**

Vasily P. Shapeev, [orcid.org/0000-0001-6761-7273](https://orcid.org/0000-0001-6761-7273), Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4/1 Institutskaya str., Novosibirsk 630090, Russia, Novosibirsk National Research University, 2, Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia, e-mail: [vshapeev@ngs.ru](mailto:vshapeev@ngs.ru)

Evgenii V. Vorozhtsov, [orcid.org/0000-0003-2753-8399](https://orcid.org/0000-0003-2753-8399), Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4/1 Institutskaya str., Novosibirsk 630090, Russia, e-mail: [vorozh@itam.nsc.ru](mailto:vorozh@itam.nsc.ru)

©Нестеров П. Н., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-64-81

УДК 517.968.72

## Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением

Нестеров П. Н.

получена 10 ноября 2016

### Аннотация.

В работе строятся асимптотические формулы для решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением при стремлении независимой переменной к бесконечности. Особенностью рассматриваемого интегрального возмущения является колебательно убывающий характер его ядра. Предполагается, что интегральное ядро является вырожденным. Данное обстоятельство позволяет свести исходное интегро-дифференциальное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении асимптотических формул для базисных решений полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется специальный метод асимптотического интегрирования линейных динамических систем с колебательно убывающими коэффициентами. В результате серии специальных преобразований система обыкновенных дифференциальных уравнений приводится к так называемому  $L$ -диагональному виду. Асимптотика фундаментальной матрицы  $L$ -диагональной системы может быть построена с помощью классической теоремы Н. Левинсона. Полученные асимптотические формулы позволяют выявить так называемые резонансные частоты, т. е. частоты колебательной составляющей ядра, при которых у исходного интегро-дифференциального уравнения имеются неограниченные решения. Как оказывается, эти частоты несколько отличаются от резонансных частот в адиабатическом осцилляторе с синусоидальной колебательной составляющей убывающего во времени возмущения.

**Ключевые слова:** асимптотика, интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, гармонический осциллятор, колебательно убывающие ядра, метод усреднения, теорема Левинсона

**Для цитирования:** Нестеров П. Н., "Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:1** (2017), 64–81.

### Об авторах:

Нестеров Павел Николаевич, [orcid.org/0000-0002-9102-9436](https://orcid.org/0000-0002-9102-9436), канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [nesterov.pn@gmail.com](mailto:nesterov.pn@gmail.com)

### Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.



## Постановка задачи

Уравнение возмущенного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t)x = 0, \quad (1)$$

где функция  $q(t)$  мала в некотором смысле при  $t \rightarrow \infty$ , называют обычно адиабатическим осциллятором. Пример уравнения (1) доставляет адиабатический осциллятор с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \quad a, \lambda \neq 0, \quad \rho > 0, \quad (2)$$

где  $a, \lambda$  — вещественные числа. Известно (см. [2, 7, 9, 10, 14, 15]), что если  $(\lambda = \pm 2)$  и  $(\rho \leq 1)$  или  $(\lambda = \pm 1)$  и  $(\rho \leq 1/2)$ , уравнение (1) с функцией  $q(t)$  вида (2) имеет неограниченные решения при любых значениях параметра  $a \neq 0$ . В этом случае говорят, что в уравнении (1) имеет место параметрический резонанс. Если  $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$ , то все ненулевые решения этого уравнения ограничены и не стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В работе [13] (см. также [5]) рассматривается уравнение адиабатического осциллятора с запаздыванием

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t)x(t-h) = 0, \quad (3)$$

где  $h > 0$  и функция  $q(t)$  имеет вид (2). Как оказывается, динамика решений уравнения (3) при  $\rho \leq 1/2$  существенно отличается от динамики решений уравнения (1). В частности, все решения уравнения (3) могут стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

В этой статье исследуется динамика решений интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t) \int_{t_0}^t x(s) ds = 0, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (4)$$

где функция  $q(t)$  определяется формулой (2). Мы построим асимптотические представления для решений уравнений (4) при  $t \rightarrow \infty$ . Асимптотическое поведение решений ИДУ второго порядка, к которым относится и уравнение вида (4), изучалось, например, в работах [8, 16]. Следует заметить, что теория асимптотического интегрирования ИДУ по сравнению с соответствующей теорией для ОДУ существенно менее развита. Для линейных ИДУ попытка развития такой теории предпринимается в статье [12]. В отмеченных работах авторами, в частности, указываются условия, при которых асимптотика решений ИДУ, в главном, определяется фундаментальными решениями предельного уравнения, которое, в свою очередь, является, ОДУ. Как будет нами показано, асимптотика всех решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$  не всегда имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + o(1), \quad (5)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные комплексные постоянные, т.е. не всегда определяется фундаментальными решениями гармонического осциллятора. Мы также отметим замечательную монографию [6], в которой отражено современное состояние теории ИДУ типа Вольтерра.

## 1. Метод асимптотического интегрирования

Ставший уже классическим результат об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений был сформулирован Н. Левинсоном в работе [11] применительно к системам вида

$$\dot{x} = [A_0 + V(t) + R(t)]x, \quad x \in \mathbb{C}^m. \quad (6)$$

Относительно квадратных матриц  $A_0$ ,  $V(t)$  и  $R(t)$  предполагаются выполненными следующие условия:

А.1. Все собственные числа постоянной матрицы  $A_0$  различны.

А.2. Матрица  $V(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

А.3. Матрица  $\dot{V}(t)$  принадлежит классу  $L_1[t_0, \infty)$  для некоторого  $t_0 \in \mathbb{R}$ , т. е.

$$\int_{t_0}^{\infty} |\dot{V}(t)| dt < \infty,$$

где  $|\cdot|$  — какая-либо матричная норма.

А.4. Матрица  $R(t)$  принадлежит классу  $L_1[t_0, \infty)$ .

Теорема Левинсона базируется на двух основных утверждениях, первый из которых известен как лемма о диагонализации переменной матрицы (см., например, [1]).

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия А.1 – А.3. Тогда при достаточно больших  $t$  существует невырожденная матрица  $C(t)$  такая, что:

(i) по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы  $A_0 + V(t)$  и  $C(t) \rightarrow C_0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Постоянная матрица  $C_0$  составлена из собственных векторов матрицы  $A_0$ ;

(ii)  $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ ;

(iii) она приводит матрицу  $A_0 + V(t)$  к диагональному виду, т. е.

$$C^{-1}(t)[A_0 + V(t)]C(t) = \Lambda(t),$$

где  $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$  — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы  $A_0 + V(t)$ .

В системе (6) осуществим замену

$$x(t) = C(t)y(t), \quad (7)$$

где  $C(t)$  — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (6) к так называемому  $L$ -диагональному виду:

$$\dot{y} = [\Lambda(t) + R_1(t)]y, \quad (8)$$

где

$$R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы  $C(t)$  и условия А.4 матрица  $R_1(t)$  принадлежит классу  $L_1[t_0, \infty)$ . Оказывается, что остаточный член  $R_1(t)$  не влияет в главном на

асимптотику решений системы (8) в предположении некоторой регулярности относительно поведения функций  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$ . Эта регулярность задается следующим условием дихотомии: для каждой пары индексов  $(i, j)$  имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)) ds \leq K_1, \quad t_2 \geq t_1 \geq t_*, \quad (9)$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)) ds \geq K_2, \quad t_2 \geq t_1 \geq t_*, \quad (10)$$

где  $K_1, K_2$  — некоторые постоянные. Основной результат, полученный Левинсоном, состоит в следующем (см. [3, 7, 11]).

**Теорема 1 (Levinson).** Пусть выполнено условие дихотомии (9), (10). Тогда фундаментальная матрица  $L$ -диагональной системы (8) допускает следующее асимптотическое представление при  $t \rightarrow \infty$ :

$$Y(t) = (I + o(1)) \exp \left\{ \int_{t^*}^t \Lambda(s) ds \right\}. \quad (11)$$

Возвращаясь к системе (6) с помощью замены (7) и учитывая свойство (i) матрицы  $C(t)$ , заключаем, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$X(t) = (C_0 + o(1)) \exp \left\{ \int_{t^*}^t \Lambda(s) ds \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, для использования теоремы Левинсона исходную систему следует привести к виду (6) или (8). В тех случаях, когда исходная система содержит колебательно убывающие величины, особенную эффективность в решении этой задачи показали усредняющие замены переменных [2, 4].

Рассмотрим следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = (A_1(t)v(t) + A_2(t)v^2(t) + \dots + A_k(t)v^k(t) + R(t))x. \quad (13)$$

Здесь  $x$  —  $m$ -мерный комплекснозначный вектор;  $A_i(t)$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $R(t)$  — квадратные матрицы размера  $m \times m$ ;  $v(t)$  — скалярная абсолютно непрерывная на  $[t_0, \infty)$  функция. Пусть

- В.1.  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .
- В.2.  $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ .
- В.3.  $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$  для некоторого целого неотрицательного  $k$ .

В.4. Элементами матриц  $A_l(t)$  ( $l = 1, \dots, k$ ) являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_l(t) = \sum_{j=1}^M \beta_j^{(l)} e^{i\lambda_j t}, \quad (14)$$

где  $\lambda_j$  — произвольные действительные числа, а  $\beta_j^{(l)}$  — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

В.5. Матрица  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . Имеет место следующая теорема (см. [2, 4]).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия В.1 — В.5. Тогда система (13) при достаточно больших  $t$  заменой

$$x = [I + Y_1(t)v(t) + Y_2(t)v^2(t) + \dots + Y_k(t)v^k(t)]y, \quad (15)$$

где  $I$  — единичная матрица, а элементами матриц  $Y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot{y} = (A_1v(t) + A_2v^2(t) + \dots + A_kv^k(t) + R_1(t))y \quad (16)$$

с постоянными матрицами  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) и матрицей  $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$ .

Матрицы  $Y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) в замене (15) определяются как решения матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t) - \sum_{l=0}^{i-1} Y_l(t)A_{i-l} \quad (17)$$

с нулевым средним значением. В уравнении (17) полагаем  $Y_0(t) = I$ . Матрицы  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) выбираются из условия однозначной разрешимости уравнений (17) в классе матриц, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Именно,

$$A_i = M \left[ \sum_{l=0}^{i-1} A_{i-l}(t)Y_l(t) \right], \quad \left( M[F(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s)ds \right). \quad (18)$$

В частности,

$$A_1 = M[A_1(t)], \quad A_2 = M[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)]. \quad (19)$$

Здесь матрица  $Y_1(t)$  с нулевым средним значением определяется из уравнения

$$\frac{dY_1}{dt} = A_1(t) - A_1. \quad (20)$$

Замены вида (15) называют усредняющими.

Система (16) проще исходной системы (13) в том смысле, что она, вообще говоря, не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. Предположим, что первым ненулевым слагаемым в системе (16) является матрица  $A_s v^s(t)$ . Это означает, что систему (16) можно записать в виде

$$\dot{y} = [A_s + V(t)]v^s(t)y(t) + R_1(t)y(t), \quad (21)$$

где  $(m \times m)$ -матрица  $V(t)$  удовлетворяет условиям А.2 и А.3. Тогда, если все собственные числа матрицы  $A_s$  различны, то заменой  $y(t) = C(t)z(t)$ , где  $C(t)$  — матрица из леммы 1, система (21) приводится к  $L$ -диагональному виду

$$\dot{z} = [\Lambda(t)v^s(t) + R_2(t)]z(t). \quad (22)$$

Здесь диагональная матрица  $\Lambda(t)$  составлена из собственных чисел матрицы  $A_s + V(t)$  и

$$R_2(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)R_1(t)C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы  $C(t)$  матрица  $R_2(t)$  принадлежит классу  $L_1[t_0, \infty)$ . Теперь для построения асимптотики решений системы (22) остается лишь воспользоваться теоремой 1.

## 2. Построение асимптотики решений уравнения (4)

Полагая

$$\dot{x} = y, \quad z(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds, \quad u_0 = (x, y, z)^T,$$

от уравнения (4) перейдем к системе

$$\dot{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0 + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0, \quad (23)$$

которая должна рассматриваться вместе с дополнительным условием

$$z(t_0) = 0. \quad (24)$$

В системе (23) осуществим замену

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ -i & i & 1 \end{pmatrix} u_1. \quad (25)$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_1 + \frac{q(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & -i \\ 2i & -2i & -2 \end{pmatrix} u_1. \quad (26)$$

Рассмотрим сначала случай, когда параметр  $\rho$  в формуле (2), определяющей функцию  $q(t)$ , удовлетворяет неравенству

$$\rho > 1. \quad (27)$$

При выполнении этого условия система (26) является  $L$ -диагональной. В силу теоремы 1 фундаментальная матрица системы (26) имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U_1(t) = [I + o(1)] \text{diag}(e^{it}, e^{-it}, 1).$$

Возвращаясь теперь к системе (23) с помощью замены (25), приходим к следующим асимптотическим представлением для первых компонент ее фундаментальных решений:

$$x^{(1,2)}(t) = (1 + o(1))e^{\pm it}, \quad x^{(3)}(t) = o(1). \quad (28)$$

Условие (24) выделяет в пространстве решений системы (23) линейное двумерное подпространство. В качестве базиса в этом пространстве могут быть выбраны некоторые линейные комбинации фундаментальных решений системы (23) (очевидно, линейно независимые). Отсюда следует, что в качестве фундаментальных решений уравнения (4) следует взять некоторые линейные комбинации функций (28). Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$z(t) = c_1(-i + o(1))e^{it} + c_2(i + o(1))e^{-it} + c_3(1 + o(1)),$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для  $z(t)$  в (24) и выбирая величину  $t_0$  достаточно большой, выражаем из полученного равенства величину  $c_3$  линейным образом через  $c_1$  и  $c_2$ . Записывая затем линейную комбинацию функций (28) и подставляя в нее полученное выражение для  $c_3$ , приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимых решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x_{1,2}(t) = (1 + o(1))e^{\pm it}. \quad (29)$$

Таким образом, справедливость асимптотических представлений (29) обоснована нами, по крайней мере, для достаточно больших  $t_0$ .

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1. \quad (30)$$

В результате замены

$$u_1 = \text{diag}(e^{it}, e^{-it}, 1)u_2 \quad (31)$$

система (26) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{u}_2 = t^{-\rho}A_1(t)u_2. \quad (32)$$

Матрица коэффициентов этой системы определяется выражением

$$A_1(t) = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} (-i)(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) & i(e^{i(\lambda-2)t} - e^{-i(\lambda+2)t}) & (e^{i(\lambda-1)t} - e^{-i(\lambda+1)t}) \\ i(e^{i(\lambda+2)t} - e^{-i(\lambda-2)t}) & (-i)(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) & -(e^{i(\lambda+1)t} - e^{-i(\lambda-1)t}) \\ 2(e^{i(\lambda+1)t} - e^{-i(\lambda-1)t}) & (-2)(e^{i(\lambda-1)t} - e^{-i(\lambda+1)t}) & 2i(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В силу теоремы 2 осуществим в системе (32) усредняющую замену переменной

$$u_2 = [I + t^{-\rho}Y_1(t)]u_3 \quad (34)$$

Приходим к системе

$$\dot{u}_3 = [t^{-\rho}A_1 + R(t)]u_3, \quad (35)$$

где  $A_1 = M[A_1(t)]$  и  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . Вид матрицы  $A_1$  будет различаться в следующих случаях.

Предположим сначала, что

$$\lambda \neq \pm 1, \pm 2. \quad (36)$$

Тогда  $A_1 = 0$  и система (35) имеет  $L$ -диагональную форму. Из теоремы Левинсона следует, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U_3(t) = I + o(1).$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (23), получаем асимптотические представления (28) для первых компонент ее фундаментальных решений. Точно так же, как и в случае (27), устанавливаем справедливость асимптотических формул (29) для линейно независимых решений уравнения (4).

Поскольку в силу вида функции  $q(t)$  замена параметра  $\lambda$  в (2) на  $(-\lambda)$  эквивалентна замене параметра  $a$  на  $(-a)$ , то в дальнейшем мы будем рассматривать лишь положительные значения параметра  $\lambda$ . Изучим далее случай, когда

$$\lambda = 1. \quad (37)$$

Матрица  $A_1$  в этой ситуации имеет следующий вид:

$$A_1 = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами этой матрицы являются

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{ai}{2}, \quad \mu_3 = 0. \quad (38)$$

Поскольку собственные числа матрицы  $A_1$  различны, то в силу леммы 1 система (35) может быть приведена к  $L$ -диагональной форме, например, с помощью замены

$$u_3 = Cu_4, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2i & -2i & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Из теоремы 1 тогда следует, что фундаментальная матрица системы (35) имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U_3(t) = [C + o(1)] \operatorname{diag} \left\{ \exp \left\{ \frac{ai}{2} \int t^{-\rho} dt \right\}, \exp \left\{ -\frac{ai}{2} \int t^{-\rho} dt \right\}, 1 \right\}.$$

Здесь матрица  $C$  определяется формулой (39). Возвращаясь к системе (23), получаем следующие асимптотические формулы для первых компонент ее фундаментальных решений при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} x^{(1,2)}(t) &= \left[ (1 + o(1))e^{it} + (1 + o(1))e^{-it} \right] \exp \left\{ \pm \frac{ai}{2} \int t^{-\rho} dt \right\}, \\ x^{(3)}(t) &= (1 + o(1))e^{it} - (1 + o(1))e^{-it}. \end{aligned} \quad (40)$$

Построим асимптотики фундаментальных решений уравнения (4), когда величина  $t_0$  достаточно велика. Выписывая линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23), получаем

$$\begin{aligned} z(t) = & c_1 \left[ (-i + o(1))e^{it} + (i + o(1))e^{-it} + 2i + o(1) \right] \exp \left\{ \frac{ai}{2} \int t^{-\rho} dt \right\} + \\ & + c_2 \left[ (-i + o(1))e^{it} + (i + o(1))e^{-it} - 2i + o(1) \right] \exp \left\{ -\frac{ai}{2} \int t^{-\rho} dt \right\} + \\ & + c_3 \left[ (-i + o(1))e^{it} - (i + o(1))e^{-it} + o(1) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные комплексные постоянные. Подставим полученное для  $z(t)$  выражение в условие (24). Заметим, что коэффициент при  $c_2$  не обращается в ноль, если  $t_0$  достаточно велико. Тогда величина  $c_2$  может быть линейным образом выражена через  $c_1$  и  $c_3$ . Выписывая затем линейную комбинацию функций из (40) с учетом полученного представления для  $c_2$ , приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимых решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,3)}(t) + \delta_{1,2} x^{(2)}(t). \quad (41)$$

Здесь  $\delta_{1,2}$  — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (24).

Перейдем теперь к рассмотрению случая

$$\lambda = 2. \quad (42)$$

Нетрудно видеть, что матрица  $A_1$  в системе (35) определяется выражением

$$A_1 = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{4}, \quad \mu_3 = 0. \quad (43)$$

В силу леммы 1 система (35) с помощью замены

$$u_3 = C u_4, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

может быть приведена к  $L$ -диагональной форме. Из теоремы Левинсона тогда следует, что фундаментальная матрица системы (35) имеет следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U_3(t) = [C + o(1)] \operatorname{diag} \left( \exp \left\{ \frac{a}{4} \int t^{-\rho} dt \right\}, \exp \left\{ -\frac{a}{4} \int t^{-\rho} dt \right\}, 1 \right).$$



Здесь матрица  $C$  определяется выражением (44). Для первых компонент фундаментальных решений системы (23) получаем следующие асимптотические формулы при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} x^{(1,2)}(t) &= \left[ (1 + o(1))e^{it} \mp (\mathbf{i} + o(1))e^{-it} \right] \exp\left\{ \pm \frac{a}{4} \int t^{-\rho} dt \right\}, \\ x^{(3)}(t) &= o(1). \end{aligned} \quad (45)$$

Как и в предыдущих случаях, выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Получаем

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 \left[ (-\mathbf{i} + o(1))e^{it} + (1 + o(1))e^{-it} \right] \exp\left\{ \frac{a}{4} \int t^{-\rho} dt \right\} + \\ &+ c_2 \left[ (-\mathbf{i} + o(1))e^{it} - (1 + o(1))e^{-it} \right] \exp\left\{ -\frac{a}{4} \int t^{-\rho} dt \right\} + c_3(1 + o(1)), \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для  $z(t)$  в (24) и выбирая величину  $t_0$  достаточно большой, выражаем величину  $c_3$  линейным образом через  $c_1$  и  $c_2$ . Записывая затем линейную комбинацию функций (45) и подставляя в нее полученное выражение для  $c_3$ , приходим к следующим асимптотическим формулам для фундаментальных решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \quad (46)$$

Таким образом, при условиях (30), (42) уравнение (4) имеет неограниченные решения.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \leq \frac{1}{2}.$$

В результате усредняющей замены

$$u_2 = [I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t)]u_3 \quad (47)$$

система (32) приводится к виду

$$\dot{u}_3 = [t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_2 + R(t)]u_3. \quad (48)$$

Здесь  $A_1 = M[A_1(t)]$ ,  $A_2 = M[A_1(t)Y_1(t)]$ , где матрица  $Y_1(t)$  определяется как решение матричного дифференциального уравнения (20) с нулевым средним значением, и, наконец,  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле для матрицы  $A_1(t)Y_1(t)$ :

$$A_1(t)Y_1(t) = \frac{a^2}{16} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ \bar{a}_{12}(t) & \bar{a}_{11}(t) & \bar{a}_{13}(t) \\ a_{31}(t) & \bar{a}_{31}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Здесь символом  $\bar{z}$  обозначено число, комплексно сопряженное с  $z$ . Элементы матрицы (49) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 a_{11}(t) &= \frac{i}{\lambda} \left( e^{2i\lambda t} - e^{-2i\lambda t} \right) + i \left( \frac{e^{2i\lambda t}}{\lambda + 2} + \frac{1}{\lambda - 2} - \frac{1}{\lambda + 2} - \frac{e^{-2i\lambda t}}{\lambda - 2} \right) - \\
 &\quad - 2i \left( \frac{e^{2i\lambda t}}{\lambda + 1} + \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda + 1} - \frac{e^{-2i\lambda t}}{\lambda - 1} \right), \\
 a_{12}(t) &= (-i) \left( \frac{e^{2i(\lambda-1)t}}{\lambda - 2} + \frac{e^{-2it}}{\lambda + 2} - \frac{e^{-2it}}{\lambda - 2} - \frac{e^{-2i(\lambda+1)t}}{\lambda + 2} \right) - \\
 &\quad - \frac{i}{\lambda} \left( e^{2i(\lambda-1)t} - e^{-2i(\lambda+1)t} \right) + 2i \left( \frac{e^{2i(\lambda-1)t}}{\lambda - 1} + \frac{e^{-2it}}{\lambda + 1} - \frac{e^{-2it}}{\lambda - 1} - \frac{e^{-2i(\lambda+1)t}}{\lambda + 1} \right), \\
 a_{13}(t) &= - \left( \frac{e^{i(2\lambda-1)t}}{\lambda - 1} - \frac{e^{-i(2\lambda+1)t}}{\lambda + 1} \right) - \left( \frac{e^{i(2\lambda-1)t}}{\lambda + 1} - \frac{e^{-i(2\lambda+1)t}}{\lambda - 1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left( e^{i(2\lambda-1)t} - e^{-i(2\lambda+1)t} \right), \\
 a_{31}(t) &= - \frac{2}{\lambda} \left( e^{i(2\lambda+1)t} - e^{-i(2\lambda-1)t} \right) - 2 \left( \frac{e^{i(2\lambda+1)t}}{\lambda + 2} + \frac{e^{it}}{\lambda - 2} - \frac{e^{it}}{\lambda + 2} - \frac{e^{-i(2\lambda-1)t}}{\lambda - 2} \right) + \\
 &\quad + 4 \left( \frac{e^{i(2\lambda+1)t}}{\lambda + 1} + \frac{e^{it}}{\lambda - 1} - \frac{e^{it}}{\lambda + 1} - \frac{e^{-i(2\lambda-1)t}}{\lambda - 1} \right), \\
 a_{33}(t) &= (-2i) \left( \frac{e^{2i\lambda t}}{\lambda - 1} - \frac{e^{-2i\lambda t}}{\lambda + 1} \right) - 2i \left( \frac{e^{2i\lambda t}}{\lambda + 1} - \frac{e^{-2i\lambda t}}{\lambda - 1} \right) + \frac{4i}{\lambda} \left( e^{2i\lambda t} - e^{-2i\lambda t} \right). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Заметим, что интерес представляет лишь изучение случая, когда выполнены неравенства (36). Действительно, если  $\lambda = 1$  или  $\lambda = 2$ , то матрица  $A_1$  в системе (48) ненулевая и ее собственные числа различны. Воспользовавшись леммой 1, систему (48) заменой  $u_3 = C(t)u_4$  можно привести к  $L$ -диагональному виду

$$\dot{u}_4 = [t^{-\rho}\Lambda(t) + R_1(t)]u_4, \quad (51)$$

где диагональная матрица  $\Lambda(t)$  составлена из собственных чисел матрицы  $A_1 + t^{-\rho}A_2$ , а  $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . Построим затем асимптотику фундаментальной матрицы системы (51) при  $t \rightarrow \infty$  согласно теореме Левинсона и вернемся к исходной системе (23). Тогда для фундаментальных решений уравнения (4) в случае  $\lambda = 1$  мы получаем асимптотические формулы (40), (41), а в случае  $\lambda = 2$  — формулы (45), (46) с тем лишь изменением, что величину  $\int t^{-\rho} dt$  в отмеченных формулах следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho} (1 + o(1)). \quad (52)$$

Итак, будем далее рассматривать случай, когда выполнены неравенства (36). Тогда матрица  $A_1 = 0$  и необходимо вычислить матрицу  $A_2$ . Вновь нам потребуется рассмотреть несколько ситуаций. Пусть сначала

$$\lambda \neq \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2. \quad (53)$$

Используя (49), (50), несложно убедиться в том, что

$$A_2 = [A_1(t)Y_1(t)] = \mu i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{3a^2}{4(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)}. \quad (54)$$

Из вида матрицы  $A_2$  следует, что система (48) является  $L$ -диагональной и асимптотика ее фундаментальной матрицы может быть построена на основании теоремы 1. Первые компоненты фундаментальных решений системы (23) имеют тогда следующие асимптотики при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x^{(1,2)}(t) = (1 + o(1)) \exp\left\{\pm i\left(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\right)\right\}, \quad x^{(3)}(t) = o(1). \quad (55)$$

Как и ранее, будем предполагать, что величина  $t_0$  в (24) достаточно велика. Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$z(t) = c_1(-i + o(1)) \exp\left\{i\left(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\right)\right\} + \\ + c_2(i + o(1)) \exp\left\{-i\left(t + \mu \int t^{-2\rho} dt\right)\right\} + c_3(1 + o(1)),$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные комплексные постоянные. Подставляя это равенство в (24), выражаем при достаточно больших  $t_0$  величину  $c_3$  линейно через  $c_1$  и  $c_2$ . Выписывая теперь линейную комбинацию функций (55) с учетом полученного выражения для  $c_3$ , получаем следующие асимптотики для линейно независимых решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \quad (56)$$

Предположим теперь, что

$$\lambda = \frac{1}{2}. \quad (57)$$

Из (49), (50) следует, что

$$A_2 = [A_1(t)Y_1(t)] = \frac{a^2}{15} \begin{pmatrix} 4i & 0 & 5 \\ 0 & -4i & 5 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Несложный подсчет показывает, что собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{21}}{15} a^2, \quad \mu_3 = 0. \quad (59)$$

Система (48) заменой

$$u_3 = Cu_4, \quad C = \begin{pmatrix} \delta & -\bar{\delta} & 1 \\ \bar{\delta} & -\delta & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{4}{5}i \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{\sqrt{21} + 2i}{10} \quad (60)$$

может быть приведена к  $L$ -диагональной форме. В силу теоремы Левинсона фундаментальная матрица системы (48) имеет тогда следующую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U_3(t) = [C + o(1)] \text{diag}\left\{\exp\left\{\mu_1 \int t^{-2\rho} dt\right\}, \exp\left\{\mu_2 \int t^{-2\rho} dt\right\}, 1\right\}.$$

Здесь матрица  $C$  имеет вид (60), а величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются выражениями (59). Первые компоненты фундаментальных решений системы (23) допускают тогда следующие асимптотические представления при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \left[ (\delta + o(1))e^{it} + (\bar{\delta} + o(1))e^{-it} \right] \exp \left\{ \mu_1 \int t^{-2\rho} dt \right\}, \\ x^{(2)}(t) &= \left[ (-\bar{\delta} + o(1))e^{it} - (\delta + o(1))e^{-it} \right] \exp \left\{ \mu_2 \int t^{-2\rho} dt \right\}, \\ x^{(3)}(t) &= (1 + o(1))e^{it} - (1 + o(1))e^{-it}. \end{aligned} \quad (61)$$

Вновь выпишем линейную комбинацию  $z$ -компонент фундаментальных решений системы (23). Имеем

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 \left[ (-i\delta + o(1))e^{it} + (i\bar{\delta} + o(1))e^{-it} + 1 + o(1) \right] \exp \left\{ \mu_1 \int t^{-2\rho} dt \right\} + \\ &+ c_2 \left[ (i\bar{\delta} + o(1))e^{it} - (i\delta + o(1))e^{-it} + 1 + o(1) \right] \exp \left\{ \mu_2 \int t^{-2\rho} dt \right\} + \\ &+ c_3 \left[ (-i + o(1))e^{it} - (i + o(1))e^{-it} - \frac{4i}{5} + o(1) \right], \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные комплексные постоянные. Подставим это выражение в (24). Заметим, что коэффициент при  $c_3$  для достаточно больших  $t_0$  сколь угодно близок к величине  $(-2i \cos t_0 - \frac{4i}{5})$ . Следовательно,  $c_3$  можно линейно выразить через  $c_1$  и  $c_2$  для достаточно больших  $t_0$ , таких что  $\cos t_0 \neq -\frac{2}{5}$ . В таком случае для фундаментальных решений уравнения (4) получаем следующие асимптотики при  $t \rightarrow \infty$ :

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + \delta_{1,2} x^{(3)}(t). \quad (62)$$

где  $\delta_{1,2}$  — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (24). Заметим, что в рассмотренной ситуации уравнение (4) имеет неограниченные при  $t \rightarrow \infty$  решения.

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$\rho \leq \frac{1}{3}.$$

Систему (32) с помощью усредняющей замены

$$u_2 = \left[ I + t^{-\rho} Y_1(t) + \dots + t^{-k\rho} Y_k(t) \right] u_3 \quad (63)$$

приводим к виду

$$\dot{u}_3 = \left[ t^{-\rho} A_1 + t^{-2\rho} A_2 + \dots + t^{-k\rho} A_k + R(t) \right] u_3. \quad (64)$$

Здесь  $k \in \mathbb{N}$  выбрано так, что  $0 < k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$ , матрицы  $Y_i(t)$  и  $A_i$  определяются согласно формулам (17), (18), а матрица  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . Очевидно, что поведение решений системы (64) при  $t \rightarrow \infty$  будет определяться видом собственных чисел матрицы

$$A(t) = t^{-\rho} A_1 + t^{-2\rho} A_2 + \dots + t^{-k\rho} A_k. \quad (65)$$

Исследуем структуру этой матрицы более подробно. Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

**Предложение 1.** Пусть в системе (13) каждая матрица  $A_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{y} & \bar{x} & \bar{z} \\ w & \bar{w} & r \end{pmatrix}, \quad (66)$$

где  $x, y, z, w$  — некоторые комплекснозначные функции, а  $r$  — некоторая действительнозначная функция, зависящие от номера матрицы. Тогда каждая из постоянных матриц  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , в усредненной системе (16) также имеет структуру вида (66), где  $x, y, z, w$  — некоторые комплексные числа, а  $r$  — некоторое действительное число.

Справедливость этого утверждения следует из легко проверяемого факта о том, что сумма и произведение матриц вида (66) также является матрицей подобного вида, а также из формул (17), (18). Кроме того, очевидно, что интегрирование матрицы вида (66), а значит, и вычисление среднего значения такой матрицы также не изменяет ее структуру.

Будем говорить, что тригонометрический многочлен

$$p(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},$$

относится к классу  $\mathcal{A}$ , если все его коэффициенты  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — чисто мнимые, и к классу  $\mathcal{B}$  — если действительны. Например, функция  $p(t) = \sin t$  относится к классу  $\mathcal{A}$ , а  $p(t) = \cos t$  — к классу  $\mathcal{B}$ .

**Предложение 2.** Пусть в системе (13) каждая матрица  $A_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

где символами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  обозначена принадлежность соответствующего элемента тому или иному классу. Тогда каждая из постоянных матриц  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , в усредненной системе (16) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{i} & \boxed{i} & \boxed{r} \\ \boxed{i} & \boxed{i} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{i} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

где символом  $\boxed{i}$  обозначено некоторое чисто мнимое число или ноль, а символом  $\boxed{r}$  — некоторое действительное число или ноль.

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по номеру матрицы  $A_i$ . Поскольку

$$\mathbb{M} \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \boxed{i} & \boxed{i} & \boxed{r} \\ \boxed{i} & \boxed{i} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{i} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

то в силу (19) утверждение справедливо для матрицы  $A_1$ . Кроме того, из (20) следует, что матрица  $Y_1(t)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

поскольку такой вид имеет интеграл от матрицы (67). Предположим далее, что все матрицы  $A_j$  для  $j \leq i - 1$ ,  $i \geq 2$ , имеют вид (68), а все матрицы  $Y_j(t)$ ,  $j \leq i - 1$ , имеют вид (70). Покажем, что матрицы  $A_i$  и  $Y_i(t)$  имеют тогда такую же структуру. Заметим, что произведение матрицы вида (67) и матрицы вида (70) есть матрица вида (67). Тогда из (18) в силу (69) следует, что матрица  $A_i$  имеет вид (68). Далее, произведение матрицы вида (70) и матрицы вида (68) есть матрица вида (67). Из (17) заключаем, что матрица  $Y_i(t)$  имеет вид (70), поскольку, как было отмечено ранее, такой вид имеет интеграл от матрицы (67).  $\square$

Вернемся к рассмотрению матрицы  $A(t)$  из (65). Поскольку матрица  $A_1(t)$  в системе (32) имеет вид (66), (67), то в силу утверждений 1, 2 каждая из матриц  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , в усредненной системе (64) имеет вид (66), (68). Таким образом, сопоставляя формулы (66) и (68), заключаем, что

$$A(t) = \begin{pmatrix} i\alpha(t) & i\beta(t) & \gamma(t) \\ -i\beta(t) & -i\alpha(t) & \gamma(t) \\ \omega(t) & \omega(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

где  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \omega(t)$  — некоторые действительнзначные функции. Для определения собственных чисел матрицы  $A(t)$  получаем характеристический многочлен

$$p(\mu) = -\mu^3 + \mu(\beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t)).$$

Следовательно, собственные числа  $\mu_{1,2}(t)$  определяются как корни полинома

$$\mu^2 = \beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t),$$

а значит, при достаточно больших  $t$  являются либо чисто мнимыми и комплексно сопряженными друг другу, либо действительными и разных знаков. Кроме того, собственное число  $\mu_3(t) \equiv 0$ . Заметим, что первой ненулевой матрицей в системе (64) является либо матрица  $A_1$ , либо матрица  $A_2$ . Из леммы 1 тогда следует, что система (64) приводится к  $L$ -диагональному виду

$$\dot{u}_4 = [\Lambda(t) + R_1(t)]u_4,$$

где матрица  $\Lambda(t) = \text{diag}(\mu_1(t), \mu_2(t), 0)$  составлена из собственных чисел матрицы (65).

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы. Если  $\lambda = 1$ , то

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2}t^{-\rho}(1 + o(1)), \quad (72)$$

где числа  $\mu_{1,2}$  определяются формулой (38). В этом случае для фундаментальных решений уравнения (4) (во всяком случае при достаточно больших  $t_0$ ) справедливы

асимптотические формулы (40), (41), в которых величину  $\int t^{-\rho} dt$  следует заменить выражением (52). Если  $\lambda = 2$ , то для собственных чисел матрицы (65) мы получаем представление (72), где на сей раз числа  $\mu_{1,2}$  определяются формулой (43). Тогда для фундаментальных решений уравнения (4) мы получаем асимптотические представления (45), (46), в которых вновь следует заменить величину  $\int t^{-\rho} dt$  выражением (52). Предположим теперь, что  $\lambda = \frac{1}{2}$ . В этом случае собственные числа матрицы (65) имеют вид

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2} t^{-2\rho} (1 + o(1)), \quad (73)$$

где числа  $\mu_{1,2}$  определяются формулой (59). Для фундаментальных решений уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$  мы получаем асимптотические формулы (61), (62), в которых величину  $\int t^{-2\rho} dt$  следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho} (1 + o(1)). \quad (74)$$

Наконец, если  $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ , то собственные числа матрицы (65) имеют асимптотику вида (73), где  $\mu_{1,2} = \pm i\mu$ , а величина  $\mu$  определяется формулой (54). В этом случае фундаментальные решения уравнения (4) при  $t \rightarrow \infty$  описываются асимптотическими формулами (55), (56), в которых  $\int t^{-2\rho} dt$  следует заменить выражением (74). Отметим также, что во всех рассмотренных случаях остаточный член  $o(1)$  в формулах (72) и (73) есть величина действительная при достаточно больших  $t$ .

Анализируя полученные в этом разделе формулы мы можем заключить следующее. Неограниченные колебания в ИДУ (4) могут существовать, только если ( $\lambda = \pm 2$ ) и ( $\rho \leq 1$ ) или ( $\lambda = \pm 1/2$ ) и ( $\rho \leq 1/2$ ). Во всех остальных случаях ненулевые решения уравнения (4) ограничены и не стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

## Заключение

Совершенно аналогично тому, как это было сделано для уравнения (4), можно строить асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  для решений ИДУ вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \int_{t_0}^t K(t, s)x(s)ds = 0, \quad t \geq t_0,$$

где ядро  $K(t, s)$  допускает следующее представление (вырожденное ядро):

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^n v_j(t)P_j(t)Q_j(s).$$

Здесь  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  — скалярные абсолютно непрерывные на  $[t_0, \infty)$  функции такие, что

- 1<sup>0</sup>.  $v_1(t) \rightarrow 0, v_2(t) \rightarrow 0, \dots, v_n(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;
- 2<sup>0</sup>.  $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \dots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$ ;
- 3<sup>0</sup>. Произведение  $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) \dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$  для любого набора  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$ .

Относительно функций  $P_j(t)$  и  $Q_j(s)$  предполагается, что они или являются периодическими с одним и тем же периодом или представляют собой тригонометрические многочлены.

## Список литературы / References

- [1] Беллман Р., *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954; English transl.: [Bellman R., *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.]
  - [2] Бурд В. Ш., Каракулин В. А., “Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами”, *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 658–666; English transl.: [Burd V. Sh., Karakulin V. A., “On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients”, *Math. Notes*, **64**:5 (1998), 571–578.]
  - [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; English transl.: [Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.]
  - [4] Нестеров П. Н., “Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; English transl.: [Nesterov P. N., “Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients”, *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.]
  - [5] Нестеров П. Н., Агафончиков Е. Н., “Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:5 (2013), 25–44; English transl.: [Nesterov P. N., Agafonchikov E. N., “Specific features of oscillations in adiabatic oscillators with delay”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 582–596.]
  - [6] Burton T. A., *Volterra integral and differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 2005.
  - [7] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
  - [8] Grace S. R., Lalli B. S., “Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **76** (1980), 84–90.
  - [9] Harris Jr. W. A., Lutz D. A., “Asymptotic integration of adiabatic oscillators”, *J. Math. Anal. Appl.*, **51**:1 (1975), 76–93.
  - [10] Harris Jr. W. A., Lutz D. A., “A unified theory of asymptotic integration”, *J. Math. Anal. Appl.*, **57**:3 (1977), 571–586.
  - [11] Levinson N., “The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations”, *Duke Math. J.*, **15**:1 (1948), 111–126.
  - [12] Naulin R., Vanegas C. J., “Asymptotic formulas for the solutions of integro-differential equations”, *Acta Math. Hungar.*, **89**:4 (2000), 281–299.
  - [13] Nesterov P., “Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients”, *Monatsh. Math.*, **171** (2013), 217–240.
  - [14] Wintner A., “The adiabatic linear oscillator”, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 385–397.
  - [15] Wintner A., “Asymptotic integration of the adiabatic oscillator”, *Amer. J. Math.*, **69** (1946), 251–272.
  - [16] Yang E. H., “Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **106** (1985), 132–139.
-



**Nesterov P. N.**, "Asymptotics for Solutions of Harmonic Oscillator with Integral Perturbation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 64–81.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-64-81

**Abstract.** We construct the asymptotics for solutions of a harmonic oscillator with integral perturbation when the independent variable tends to infinity. The specific feature of the considered integral perturbation is an oscillatory decreasing character of its kernel. We assume that the integral kernel is degenerate. This makes it possible to reduce the initial integro-differential equation to an ordinary differential system. To get the asymptotic formulas for the fundamental solutions of the obtained ordinary differential system, we use a special method proposed for the asymptotic integration of linear dynamical systems with oscillatory decreasing coefficients. By the use of the special transformations we reduce the ordinary differential system to the so called  $L$ -diagonal form. We then apply the classical Levinson's theorem to construct the asymptotics for the fundamental matrix of the  $L$ -diagonal system. The obtained asymptotic formulas allow us to reveal the resonant frequencies, i. e., frequencies of the oscillatory component of the kernel that give rise to unbounded oscillations in the initial integro-differential equation. It appears that these frequencies differ slightly from the resonant frequencies that occur in the adiabatic oscillator with the sinusoidal component of the time-decreasing perturbation.

**Keywords:** asymptotics, Volterra integro-differential equations, harmonic oscillator, oscillatory decreasing kernels, method of averaging, Levinson's theorem

**On the authors:**

Pavel N. Nesterov, [orcid.org/0000-0002-9102-9436](https://orcid.org/0000-0002-9102-9436), PhD,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [nesterov.pn@gmail.com](mailto:nesterov.pn@gmail.com)

**Acknowledgments:**

This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.

©Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Марушкина Е.А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-82-93

УДК 517.9

## Релаксационные автоколебания в системе из двух синаптически связанных импульсных нейронов

Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Марушкина Е.А.<sup>1</sup>

получена 25 октября 2016

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель синаптического взаимодействия пары импульсных нейронных элементов. Моделью каждого из отдельных нейронов является сингулярно возмущенное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием. Связь между элементами предполагается пороговой, кроме того, в ней учитывается запаздывание по времени. Изучаются вопросы о существовании и устойчивости в полученных системах релаксационных периодических движений. Как оказалось, принципиальным является соотношение между запаздыванием, обусловленным внутренними факторами в модели одиночного импульсного нейрона, и запаздыванием в цепи связи между осцилляторами. При условии, что запаздывание в цепи связи меньше, чем обусловленный внутренним запаздыванием период колебаний уединенного осциллятора, доказываются существование и устойчивость однородного цикла задачи. Увеличение запаздывания приводит к усложнению синфазного режима, в частности, показано, что за счет подходящего выбора этой величины релаксационные колебания в изучаемой системе могут усложняться и на промежутке периода система может иметь не один, а несколько всплесков большой амплитуды. Это означает, что *bursting*-эффект может возникать в системе из двух синаптически связанных осцилляторов нейронного типа за счет запаздывания в цепи связи.

**Ключевые слова:** нейронные модели, дифференциально-разностные уравнения, релаксационные колебания, асимптотика, устойчивость, синаптическая связь

**Для цитирования:** Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Марушкина Е.А., "Релаксационные автоколебания в системе из двух синаптически связанных импульсных нейронов", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:1 (2017), 82–93.

### Об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич, [orcid.org/0000-0002-6403-4061](https://orcid.org/0000-0002-6403-4061), д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, ведущий научный сотрудник, ИЦ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: [glyzin@uniyar.ac.ru](mailto:glyzin@uniyar.ac.ru)

Колесов Андрей Юрьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [kolesov@uniyar.ac.ru](mailto:kolesov@uniyar.ac.ru)

Марушкина Елена Александровна, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии им. Б.Н. Делоне, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [marushkina-ea@yandex.ru](mailto:marushkina-ea@yandex.ru)

### Благодарности:

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60039 мол\_а\_дк.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается новый подход к моделированию химических синапсов, сформулированный в статье [1]. С точки зрения применяемых методов асимптотического анализа наша работа является продолжением начатого в статьях [2–6] цикла исследований, посвященных релаксационным автоколебаниям в нейронных системах с запаздыванием.

В основе нашего подхода лежит соответствующим образом модифицированная идея быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation или FTM). Этот феномен, впервые описанный в работах [7, 8], представляет собой специальный способ связи динамических систем. Характерная особенность этого способа состоит в том, что правые части соответствующих дифференциальных уравнений меняются скачкообразно при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения. В нейронных системах идея FTM реализуется, как правило, следующим образом.

Предположим, что напряжение  $u = u(t)$  и сила тока  $v = v(t)$  в отдельной нейронной клетке удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = f(u, v), \quad \dot{v} = g(u, v). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, а на правые части  $f, g \in C^\infty$  наложены стандартные ограничения [9], обеспечивающие существование устойчивого релаксационного цикла. Типовым примером модели (1) служит известная система ФитцХью–Нагумо [10].

Рассмотрим, далее, простейшую сеть, состоящую из двух синаптически связанных нейронов. В этом случае согласно выработанным к настоящему времени представлениям (см., например, [11]) соответствующие им электрические переменные  $(u_j, v_j)$ ,  $j = 1, 2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 &= f(u_1, v_1) + b s_2(u_2)(u_* - u_1), & \dot{v}_1 &= g(u_1, v_1), \\ \varepsilon \dot{u}_2 &= f(u_2, v_2) + b s_1(u_1)(u_* - u_2), & \dot{v}_2 &= g(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $b$  – положительный параметр, характеризующий максимальную проводимость синапса,  $u_*$  – потенциал покоя (или потенциал Нернста), а функции  $s_j(u_j)$ ,  $j = 1, 2$  – постсинаптические проводимости, зависящие от пресинаптических потенциалов  $u_j$ .

Следует отметить, что существует несколько различных способов выбора функций  $s_j(u_j)$ , описание которых можно найти в [11]. Мы же, руководствуясь идеей FTM, остановимся на простейшем из них. А именно, будем считать, что

$$s_j(u_j) = H(u_j - u_{**}), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $u_{**}$  – порог, начиная с которого одна клетка влияет на другую. Например, если  $u_1 < u_{**}$ , то первый нейрон не действует на второй, а если  $u_1 > u_{**}$ , то действует.

Наша основная задача заключается в том, чтобы адаптировать приведенный выше способ моделирования химических синапсов для дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа. В связи с этим будем считать, что функционирование отдельного нейрона моделируется уравнением вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (4)$$

для мембранного потенциала  $u = u(t) > 0$ . Здесь параметр  $\lambda > 0$ , характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а функция  $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$  обладает свойствами:

$$f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad u f'(u), \quad u^2 f''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

где  $a = \text{const} > 0$ . Примером такой функции служит

$$f(u) = (1 - u)/(1 + u/a). \quad (6)$$

Уравнение (4), представляющее собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона [12], было предложено и исследовано в статье [13]. В упомянутой работе показано, что при всех  $\lambda \gg 1$  оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл  $u_*(t, \lambda) > 0$  периода  $T_*(\lambda)$ , удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где  $T_0 = (1 + a)t_0$ ,  $t_0 = 1 + 1/a$ ,  $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u_*(t, \lambda))$ , а  $T_0$ -периодическая функция  $x_0(t)$  задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (8)$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла дает его график на плоскости  $(t, u)$ , построенный численно для случая (4), (6) при  $\lambda = 5$ ,  $a = 2$  (см. рис. 1).

Предположим теперь, что имеет место синаптическое взаимодействие пары нейронов, причем это взаимодействие носит запаздывающий по времени характер (см. также [14, 15]). В этом случае, руководствуясь описанной выше методикой, мы можем перейти от уравнения (4) к аналогичной (2) системе

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda f(u_1(t-1))u_1 + b s_2(u_2(t-h))(u_* - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda f(u_2(t-1))u_2 + b s_1(u_1(t-h))(u_* - u_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где функции  $s_1, s_2$  заданы равенствами (3), а положительный параметр  $h$  отвечает за запаздывание в цепи связи между осцилляторами.

Вместе с тем, в данной ситуации можно отказаться от общепринятых представлений (см. [1]) и в качестве математической модели рассматриваемой нейронной сети взять несколько иную систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= [\lambda f(u_1(t-1)) + b g(u_2(t-h)) \ln(u_*/u_1)]u_1, \\ \dot{u}_2 &= [\lambda f(u_2(t-1)) + b g(u_1(t-h)) \ln(u_*/u_2)]u_2, \end{aligned} \quad (10)$$

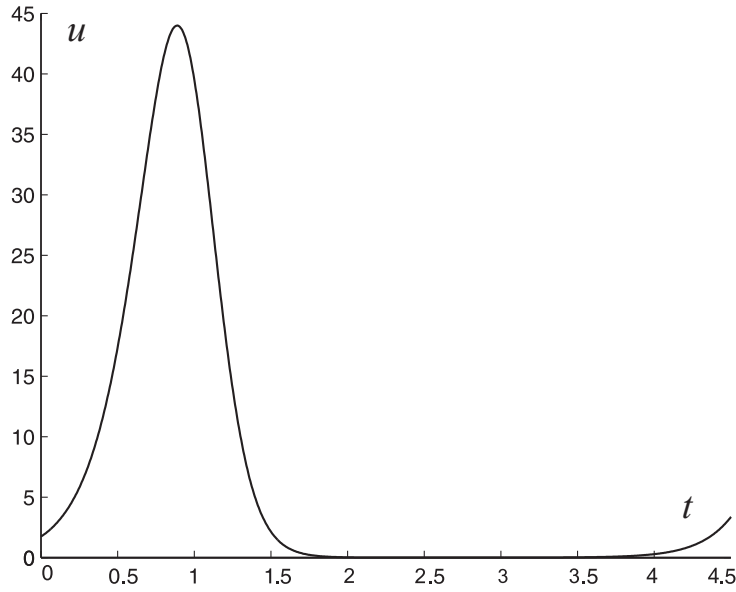


Рис. 1.

в которой  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(c\lambda)$ ,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ , а функция  $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  такова, что

$$\begin{aligned} g(u) > 0 \quad \forall u > 0, \quad g(0) = 0; \quad g(u) - 1, \quad ug'(u), \\ u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Мотивы, по которым в [1] выбор был остановлен на системе (10), состоят в следующем. Во-первых, при переходе от (9) к (10) общий качественный характер синаптической связи сохраняется, поскольку в обоих случаях соответствующие связующие слагаемые  $b s_2(u_2(t-h))(u_* - u_1)$ ,  $b s_1(u_1(t-h))(u_* - u_2)$  и  $b g(u_2(t-h))u_1 \ln(u_*/u_1)$ ,  $b g(u_1(t-h))u_2 \ln(u_*/u_2)$  меняют знак с "+" на "-" при увеличении потенциалов  $u_1$ ,  $u_2$  и при прохождении их через критическое значение  $u_*$ . Во-вторых, и это самое главное, для системы (10) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием.

Действительно, после перехода к новым переменным  $x_j = (1/\lambda) \ln u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  система (10) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F(x_1(t-1), \varepsilon) + b(c - x_1)G(x_2(t-h), \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= F(x_2(t-1), \varepsilon) + b(c - x_2)G(x_1(t-h), \varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$ ,  $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$ ,  $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$ . Далее, обратим внимание, что в силу свойств (5), (11) справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = H(x), \quad (13)$$

где  $H(x)$  – функция из (3). А отсюда, в свою очередь, следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  система

(12) переходит в релейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= R(x_1(t-1)) + b(c - x_1)H(x_2(t-h)), \\ \dot{x}_2 &= R(x_2(t-1)) + b(c - x_2)H(x_1(t-h)).\end{aligned}\quad (14)$$

Наличие предельного объекта (14) существенно облегчает проблему отыскания аттракторов системы (12) и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [16] о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем.

Поставим задачу отыскания у системы (12) простейших релаксационных режимов.

## 2. Отыскание однородного решения с одним всплеском на периоде

В первую очередь отметим, что у системы (12) имеется синхронное решение  $x_1 \equiv x_2$ . Поэтому от системы (12) можно перейти к уравнению

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + b(c - x)G(x(t-h), \varepsilon). \quad (15)$$

Решение системы (12) такое, что  $x_1 \equiv x_2 \equiv x(t)$ , где  $x(t)$  — решение уравнения (15) будем далее называть однородным.

Исследуем вопрос о существовании у вспомогательного уравнения (15) релаксационного периодического движения. В связи с этим в первую очередь, опираясь на свойства (13), перейдем от (15) к соответствующему релейному уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + b(c - x)H(x(t-h)). \quad (16)$$

Его анализ будем проводить при дополнительных условиях

$$t_0 + 1 < h < T_0, \quad (17)$$

где величины  $t_0, T_0$  те же, что и в (7), (8). Смысл данных ограничений прояснится в последующем.

Как и в работах [2–6, 17, 18], понятие решения уравнения (16) определим конструктивно. С этой целью фиксируем некоторое достаточно малое  $\sigma_0 > 0$  (оценка сверху на  $\sigma_0$  в дальнейшем будет уточнена), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-h - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-h - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0 \quad (18)$$

и обозначим через  $x_\varphi(t)$ ,  $t \geq -\sigma_0$  решение уравнения (16) с произвольным начальным условием из класса (18).

При интегрировании уравнения (16) существенно то обстоятельство, что фигурирующие в его правой части функции  $R(x(t-1))$ ,  $H(x(t-h))$  кусочно-постоянны и меняются лишь тогда, когда  $x(t-1)$  или  $x(t-h)$  меняет знак. В частности, в силу (17), (18) при  $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$  имеем одновременно  $\varphi(t-1) < 0$  и  $\varphi(t-h) < 0$ . Поэтому на указанном промежутке функция  $x_\varphi(t)$  является решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1, \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0,$$

а значит, задается формулой

$$x_\varphi(t) = t. \quad (19)$$

Добавим еще, что равенство (19) можно "протянуть" по  $t$  до тех пор, пока выполняются условия  $x_\varphi(t-1) < 0$  и  $x_\varphi(t-h) < 0$ . Следовательно, оно заведомо справедливо на отрезке времени  $-\sigma_0 \leq t \leq 0$ .

При  $0 \leq t \leq h$  из уже проделанных построений вытекает, что  $x_\varphi(t-h) < 0$  и в силу этого  $H(x_\varphi(t-h)) = 0$ . Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение  $x_\varphi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)). \quad (20)$$

Что же касается уравнения (20), то его свойства были изучены в статье [13]. В упомянутой работе, в частности, установлено, что любое решение  $x(t)$  этого уравнения, такое что  $x(t) < 0$  при  $-1 \leq t < 0$ ,  $x(0) = 0$ , при всех  $t \geq 0$  совпадает с функцией  $x_0(t)$  (см. (8)).

Возвращаясь к исходному уравнению (16) и принимая во внимание все вышесказанное, приходим к равенству

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq h. \quad (21)$$

Дальнейший анализ связан с отрезком времени  $h \leq t \leq h + t_0$ , где, напомним,  $t_0$  – момент времени, фигурирующий в (8). Из уже установленной формулы (21) и свойств функции  $x_0(t)$  вытекает, что при  $t \in (h, h+t_0)$  имеет место оценка  $x_\varphi(t-h) > 0$ , а значит,  $H(x_\varphi(t-h)) = 1$ . Кроме того, мы а priori предполагаем, что

$$x_\varphi(t) < 0 \quad \text{при} \quad h \leq t \leq h + t_0. \quad (22)$$

Объединяя соотношения (8), (21), (22) с условиями (17), убеждаемся, что  $x_\varphi(t-1) < 0$  при  $h \leq t \leq h + t_0$  и, следовательно, при рассматриваемых значениях  $t$  решение  $x_\varphi(t)$  удовлетворяет задаче Коши

$$\dot{x} = 1 + b(c - x), \quad x|_{t=h} = h - T_0.$$

Несложный ее анализ приводит к очередному равенству

$$x_\varphi(t) = (h - T_0 - c - 1/b) \exp(-b(t-h)) + c + 1/b, \quad h \leq t \leq h + t_0. \quad (23)$$

Следует, однако, напомнить, что формула (23) получена нами при априорном предположении (22). Справедливость же последнего эквивалентна условию

$$c + 1/b < \frac{T_0 - h}{\exp(bt_0) - 1}, \quad (24)$$

которое всюду ниже считаем выполненным.

При  $h + t_0 < t \leq h + t_0 + 1$  в силу (8), (21), (22) имеем  $x_\varphi(t-1) < 0$ ,  $x_\varphi(t-h) < 0$ . Поэтому в данном случае решение  $x_\varphi(t)$  определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = 1, \quad x|_{t=h+t_0} = x_\varphi(h + t_0)$$

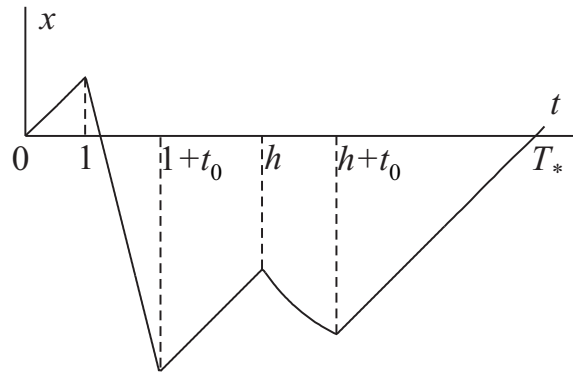


Рис. 2.

и задается равенством

$$x_\varphi(t) = t - T_*, \quad \text{где } T_* = h + t_0 - x_\varphi(h + t_0) > 0. \quad (25)$$

Добавим еще, что формула (25) сохраняется при тех  $t > h + t_0$ , для которых одновременно  $x_\varphi(t - 1) < 0$ ,  $x_\varphi(t - h) < 0$ . Тем самым, она заведомо применима при  $h + t_0 \leq t < T_* + 1$ .

Распорядимся теперь выбором свободного параметра  $\sigma_0$  из (18). В дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min(T_* - h - t_0, T_0 - h), \quad (26)$$

обеспечивающее принадлежность функции  $x_\varphi(t + T_*)$ ,  $-h - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$  множеству (18). Кроме того, из (26) следует, что уравнение  $x_\varphi(t - \sigma_0) = -\sigma_0$  имеет на промежутке  $(0, T_* + 1]$  ровно два корня  $t = t_0 + \sigma_0/a$ ,  $t = T_*$  (данный факт необходим для обоснования приведенной ниже теоремы 1).

Итак, при условии (26) на параметр  $\sigma_0$  процесс построения решения  $x_\varphi(t)$  на отрезках времени  $rT_* - \sigma_0 \leq t \leq (r + 1)T_* - \sigma_0$ ,  $r = 1, 2, \dots$  циклически повторяется. А это значит, что при  $t \geq -\sigma_0$  любое решение  $x_\varphi(t)$  с начальным условием (18) совпадает с  $T_*$ -периодической функцией

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq h, \\ (h - T_0 - c - 1/b) \exp(-b(t - h)) + c + 1/b & \text{при } h \leq t \leq h + t_0, \\ t - T_* & \text{при } h + t_0 \leq t \leq T_*. \end{cases} \quad (27)$$

График функции (27) при  $a = 4$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = -5$ ,  $h = 4$  представлен на рис. 2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (15) и (16). Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (17), (24), (26) на параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $\sigma_0$ . Тогда найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  уравнение (15) допускает единственный экспоненциально орбитально устойчивый цикл  $x_*(t, \varepsilon)$ ,  $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$  периода  $T_*(\varepsilon)$ , удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*.$$



Доказательство данной теоремы опустим, поскольку оно выполняется по той же схеме, что и доказательство соответствующего утверждения в [1].

### 3. Устойчивость однородного решения

Рассмотрим теперь вопрос устойчивости полученного однородного решения для системы (12). Предположим, что начальные функции релейной системы (14) выбраны так, что одна из них отрицательна при  $t < 0$  на промежутке  $[-h, 0)$  длины запаздывания и равна нулю в точке ноль, а вторая обращается в ноль в точке  $\Delta > 0$  и также отрицательна при  $t < \Delta$  на промежутке длины запаздывания. Величина  $\Delta$  находится в нашем распоряжении и выбирается подходящим образом малой. В этом случае релейная система (14) легко интегрируется шагами и можно вычислить моменты времени, когда функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  имеют при  $t > \Delta$  второй подряд идущий ноль. Сравнивая расстояние между порученными корнями, можно будет выяснить, приближаются ли решения друг другу, а значит, судить об устойчивости однородного решения системы. Анализ системы (14), как и в предыдущем пункте, выполним при соблюдении условий (17). При интегрировании системы (14) существенно используется кусочная постоянность функций  $R(x(t-1))$ ,  $H(x(t-h))$ , которые меняются лишь тогда, когда  $x_j(t-1)$  или  $x_j(t-h)$  ( $j = 1, 2$ ) меняют знак. В частности, в силу (17) и отрицательности  $x_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) при  $t < 0$  имеем  $H(x_j(t-h)) = 0$  при  $\Delta < t < 1$ . Поэтому на указанном промежутке функции  $x_{j\varphi}(t)$  являются решением начальной задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, & x_1|_{t=\Delta} &= \Delta, \\ \dot{x}_2 &= 1, & x_2|_{t=\Delta} &= 0, \end{aligned}$$

и задаются формулами

$$x_{1\varphi}(t) = t, \quad x_{2\varphi}(t) = t - \Delta. \quad (29)$$

Учитывая, что при  $\Delta < t < h$  слагаемое, содержащее  $H(x_j(t-h))$ , остается нулевым, нетрудно видеть, что на этом промежутке  $x_{1\varphi}(t) = x_0(t)$ , а  $x_{2\varphi}(t) = x_0(t - \Delta)$ .

На промежутке  $h < t < h + \Delta$  уравнение для  $x_1$  сохраняет свой вид, а значит, выполнено равенство  $x_{1\varphi}(t) = x_0(t)$ , а второе уравнение системы (14) принимает вид

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2), \quad x_2|_{t=h} = h - \Delta - T_0,$$

тем самым, на данном промежутке имеем

$$x_{1\varphi}(t) = x_0(t), \quad x_{2\varphi}(t) = 1/b + c + (h - \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-b(t-h)). \quad (30)$$

На следующем промежутке  $h + \Delta < t < t_0 + h$  начальная задача Коши, определяющая решение релейной системы (14), оказывается следующей:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + b(c - x_1), & x_1|_{t=h+\Delta} &= h + \Delta - T_0, \\ \dot{x}_2 &= 1 + b(c - x_2), & x_2|_{t=h+\Delta} &= 1/b + c + (h - \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-b\Delta), \end{aligned}$$

при этом первая компонента ее решения имеет вид

$$x_{1\varphi}(t) = 1/b + c + (h + \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-b(t-h-\Delta)), \quad (31)$$

а вторая вычисляется по формуле (30).

Следующий промежуток  $t_0 + h < t < t_0 + h + \Delta$ , на котором вычисляется решение релейной системы (14), характеризуется тем, что на нем  $x_1(t - h)$  снова оказывается отрицательным, а значит  $H(x_1(t - h))$  становится равным нулю. Это приводит к начальной задаче Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + b(c - x_1), & x_1|_{t=t_0+h} &= 1/b + c + (h + \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-b(t_0 - \Delta)), \\ \dot{x}_2 &= 1, & x_2|_{t=t_0+h} &= 1/b + c + (h - \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-bt_0). \end{aligned}$$

Первая компонента решения этой задачи вычисляется по формуле (31), а вторая имеет вид

$$x_{2\varphi}(t) = t - t_0 - h + 1/b + c + (h - \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-bt_0). \quad (32)$$

Последним для релейной системы (14) рассмотрим промежуток  $t > t_0 + h + \Delta$ . На нем имеем начальную задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, & x_1|_{t=t_0+h+\Delta} &= 1/b + c + (h + \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-bt_0), \\ \dot{x}_2 &= 1, & x_2|_{t=t_0+h+\Delta} &= \Delta + 1/b + c + (h - \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-bt_0), \end{aligned}$$

вторая компонента которой имеет вид (32), а первая оказывается равной

$$x_{1\varphi}(t) = t - t_0 - h - \Delta + 1/b + c + (h + \Delta - T_0 - 1/b - c) \exp(-bt_0). \quad (33)$$

По формулам (32), (33) нетрудно найти точки  $T_{1\varphi}$ ,  $T_{2\varphi}$  такие, что  $x_{1\varphi}(T_{1\varphi}) = 0$ ,  $x_{2\varphi}(T_{2\varphi}) = 0$ . По разности  $\bar{\Delta} = T_{2\varphi} - T_{1\varphi}$  между этими числами можно судить об устойчивости однородного решения релейной системы (14). Учитывая, что

$$\bar{\Delta} = \Delta(2 \exp(-bt_0) - 1), \quad (34)$$

для всех значений параметров, при которых существует однородное решение  $x_*(t)$ , величина  $2 \exp(-bt_0) - 1$  меньше по модулю единицы, можно сделать вывод, что это решение устойчиво. Этот результат совместно с доказанной теоремой 1 позволяет утверждать, что при выполнении условий данной теоремы однородный цикл  $x_1 \equiv x_2 \equiv x_*(t, \varepsilon)$  является экспоненциально орбитально устойчивым решением системы (12).

Подводя итог, отметим, что система (10), моделирующая синаптическое взаимодействие импульсных нейронов, имеет при подходящем выборе параметра запаздывания  $h$  в цепи связи однородный цикл более сложной структуры по сравнению с циклом задачи без взаимодействия.

#### 4. Заключение

Результаты данной работы получены при серьезных ограничениях на величину запаздывания  $h$ , которая должна удовлетворять неравенствам (17). Учитывая, что параметр  $h$  моделирует задержку в цепи связи и эта величина может быть большой, представляет интерес задача о релаксационных колебаниях системы (10) при увеличении  $h$ , когда эта величина близка к нескольким периодам решения уединенного осциллятора ( $T_0$ ). В этом случае уравнение с двумя запаздываниями (15)

может иметь периодическое решение с несколькими участками положительности, что соответствует такому же количеству асимптотически больших всплесков на периоде у однородного цикла системы (10). Как известно, для автоколебательных процессов в реальных нейронных системах также характерно чередование пакетов импульсов (наборов из нескольких подряд идущих интенсивных всплесков) с относительно спокойными участками изменения мембранного потенциала, которое будем называть «bursting-эффект» («bursting behavior»). Исследованию bursting-эффекта посвящена достаточно обширная литература (см., например, работы [19–23]). Как правило, для математического моделирования этого эффекта привлекаются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя быстрыми и одной медленной переменными, в которых при определенных условиях могут существовать устойчивые bursting-циклы (периодические движения с bursting-эффектом). В статье [17] нами предложен иной подход к решению данной проблемы, связанный с введением в модель импульсного нейрона нескольких запаздываний по времени.

Структура уравнения с двумя запаздываниями (15) близка структуре модельного уравнения импульсного нейрона из [17]. В частности, при решении релейного уравнения (16) при всех  $0 \leq t \leq h$  задача сводится к тому же уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)),$$

что и в [17]. Это означает, что выбор параметра  $h$  в соответствии с ограничениями

$$n(2 + a + 1/a) + 2 + 1/a < h < (n + 1)(2 + a + 1/a) \quad (35)$$

приведет к появлению у исходной системы (10) однородного цикла с  $n$  всплесками на периоде, остается лишь подобрать остальные параметры задачи так, чтобы после указанных всплесков на промежутке длины не менее  $h$  решение было асимптотически мало.

Решение данной задачи и определение значений параметров, при которых существует и устойчивый однородный цикл с наперед заданным числом всплесков на периоде, позволит утверждать, что bursting-эффект может возникать в системе из двух синаптически связанных осцилляторов нейронного типа за счет запаздывания в цепи связи.

## Список литературы / References

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Об одном способе математического моделирования химических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:10 (2013), 1227–1244; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “On a Method for Mathematical Modeling of Chemical Synapses”, *Differential Equations*, **49**:10 (2013), 1193–1210].
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941].
- [3] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713].

- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48:2** (2012), 155–170; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48:2** (2012), 159–175].
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *ЖВМ и МФ*, **52:5** (2012), 840–858; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52:5** (2012), 702–719].
- [6] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *УМН*, **70:3(423)** (2015), 3–76; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70:3** (2015), 383–452].
- [7] Somers D., Kopell N., “Rapid synchronization through fast threshold modulation”, *Biol. Cybern.*, **68** (1993), 393–407.
- [8] Somers D., Kopell N., “Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions”, *J. Math. Biol.*, **33** (1995), 261–280.
- [9] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, М., 1975, 247 с.; [Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., *Differentsialnye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya*, Moskva, 1975, 247 pp., (in Russian)].
- [10] FitzHugh R. A., “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophysical J.*, **1** (1961), 445–466.
- [11] Terman D., “An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics”, *Tutorials in Mathematical Biosciences I, Lecture Notes in Mathematics*, **1860** (2005), 21–68.
- [12] Hutchinson G. E., “Circular causal systems in ecology”, *Ann. N. Y. Acad. of Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [13] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *ЖВМ и МФ*, **50:12** (2010), 2099–2112; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson’s equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:12** (2010), 1990–2002].
- [14] Глызин С. Д., Киселева Е. О., “Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17:2** (2010), 133–143; [Glyzin S. D., Kiseleva E. O., “The account of delay in a connecting element between two oscillators”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17:2** (2010), 133–143 (in Russian)].
- [15] Глызин С. Д., Солдатова Е. А., “Фактор запаздывания и десинхронизация колебаний связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17:3** (2010), 134–143; [Glyzin S. D., Soldatova E. A., “The factor of delay in a system of coupled oscillators FitzHugh–Nagumo”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17:3** (2010), 134–143 (in Russian)].
- [16] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его  $C^1$ -аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*, **216** (1997), 126–153; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its  $C^1$ -approximation”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146].
- [17] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах”, *Матем. заметки*, **93:5** (2013), 684–701; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems”, *Math. Notes*, **93:5** (2013), 676–690].
- [18] Глызин С. Д., Марушкина Е. А., “Релаксационные циклы в обобщенной нейронной модели с двумя запаздываниями”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20:6** (2013), 179–199; [Glyzin S. D., Marushkina E. A., “Relaxation Cycles in a Generalized Neuron Model with Two Delays”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **20:6** (2013), 179–199 (in Russian)].

- [19] Chay T. R., Rinzel J., “Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model”, *Biophys. J.*, **47**:3 (1985.), 357–366.
- [20] Ermentrout G. B., Kopell N., “Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **46**:2 (1986), 233–253.
- [21] Izhikevich E., “Neural excitability, spiking and bursting”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10**(6) (2000), 1171–1266.
- [22] Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., and Abarbanel H. D. I., “Dynamical principles in neuroscience”, *Rev. Mod. Phys.*, **78** (2006), 1213–1265.
- [23] Coombes S., Bressloff P. C., *Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system.*, World Scientific Publishing Company, 2005.

---

**Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Marushkina E. A.**, "Relaxation Oscillations in a System of Two Pulsed Synaptically Coupled Neurons", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 82–93.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-82-93

**Abstract.** We consider a mathematical model of synaptic interaction between two pulse neuron elements. Each of the neurons is modeled by a singularly-perturbed difference-differential equation with delay. Coupling is assumed to be at the threshold, and time delay is taken into consideration. Problems of existence and stability of relaxation periodic movements for obtained systems are considered. It turns out that the ratio between the delay due to internal causes in a single neuron model and the delay in the coupling link between oscillators is crucial. Existence and stability of a uniform cycle of the problem is proved for the case where the delay in the link is less than a period of a single oscillator that depends on the internal delay. As the delay grows, the in-phase regime becomes more complex, particularly, it is shown that by choosing a suitable delay, we can obtain more complex relaxation oscillation and inside a period interval the system can exhibit not one but several high-amplitude splashes. This means that bursting-effect can appear in a system of two synaptic coupled oscillators of neuron type due to a delay in a coupling link.

**Keywords:** neural models, differential-difference equations, relaxation oscillations, asymptotic behavior, stability, synaptic coupling

**On the authors:**

Sergei D. Glyzin, [orcid.org/0000-0002-6403-4061](https://orcid.org/0000-0002-6403-4061), Doctor, Professor,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,  
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia  
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Andrey Yu. Kolesov, Doctor, Professor,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,  
e-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Elena A. Marushkina, PhD, Researcher  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

**Acknowledgments:**

<sup>1</sup>The reported study was funded by RFBR, according to the research project No. 16-31-60039 mol\_a\_dk.

©Невский М. В., Ухалов А. Ю., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-94-110

УДК 514.17+517.51+519.6

## Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом

Невский М. В., Ухалов А. Ю.

получена 12 октября 2016

**Аннотация.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n = [0, 1]^n$ . Для невырожденного симплекса  $S \subset \mathbb{R}^n$  через  $\sigma S$  обозначается результат гомотетии  $S$  относительно центра тяжести с коэффициентом гомотетии  $\sigma$ . Под  $\xi(S)$  понимается минимальное  $\sigma > 0$ , такое что  $Q_n \subset \sigma S$ . Через  $\alpha(S)$  обозначается минимальное  $\sigma > 0$ , при котором  $Q_n$  принадлежит трансляту симплекса  $\sigma S$ . Через  $d_i(S)$  обозначается  $i$ -й осевой диаметр  $S$ , представляющий собой максимальную длину отрезка, принадлежащего  $S$  и параллельного  $i$ -й координатной оси. Формулы для  $\xi(S)$ ,  $\alpha(S)$ ,  $d_i(S)$  были ранее доказаны первым автором. Положим  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . Всегда  $\xi_n \geq n$ . Обсуждаются некоторые гипотезы, сформулированные в предыдущих работах. Одной из них является следующее утверждение. Для любого  $n$  существует константа  $\gamma > 0$ , не зависящая от  $S \subset Q_n$ , с которой выполняется неравенство  $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$ . Минимальное  $\gamma$  с таким свойством обозначается через  $\varkappa_n$ . Доказывается, что  $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$  и при  $n > 1$  справедливо  $\varkappa_n \geq 1$ . Если  $n > 1$  и  $\xi_n = n$ , то  $\varkappa_n = 1$ . Равенство  $\xi_n = n$  выполняется, если  $n + 1$  — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка  $n + 1$ . Последнее утверждение известно; приводится ещё одно его доказательство, непосредственно использующее матрицы Адамара. Доказывается, что  $\xi_5 = 5$ . Таким образом, существуют такие  $n$ , для которых  $n + 1$  не является числом Адамара и, тем не менее,  $\xi_n = n$ . Минимальное  $n$  с таким свойством равно 5. Это влечёт  $\varkappa_5 = 1$  и опровергает гипотезу о характеристизации чисел Адамара в терминах гомотетии симплексов, высказанную ранее первым автором:  $n + 1$  есть число Адамара тогда и только тогда, когда  $\xi_n = n$ . Последнее утверждение оказывается верным лишь в одну сторону. Существует симплекс  $S \subset Q_5$ , для которого граница симплекса  $5S$  содержит все вершины куба  $Q_5$ . Указывается однопараметрическое семейство симплексов, принадлежащих  $Q_5$  и обладающих свойством  $\alpha(S) = \xi(S) = 5$ . Эти симплексы удаётся найти с помощью комбинации численных и символьных вычислений. Новым результатом является неравенство  $\xi_6 < 6.0166$ . Систематизируются оценки чисел  $\xi_n$ ,  $\theta_n$ ,  $\varkappa_n$ , полученные авторами к моменту написания статьи. Здесь  $\theta_n$  — минимальная величина нормы интерполяционного проектора на пространство линейных функций  $n$  переменных как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$ .

**Ключевые слова:** симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы

**Для цитирования:** Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:1 (2017), 94–110.

### Об авторах:

Невский Михаил Викторович, [orcid.org/0000-0002-6392-7618](https://orcid.org/0000-0002-6392-7618), доктор физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [mnevsk55@yandex.ru](mailto:mnevsk55@yandex.ru)

Ухалов Алексей Юрьевич, [orcid.org/0000-0001-6551-5118](https://orcid.org/0000-0001-6551-5118), кандидат физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [alex-uhalov@yandex.ru](mailto:alex-uhalov@yandex.ru)

## 1. Основные определения и обозначения

Числовые и геометрические характеристики  $n$ -мерных выпуклых тел и приложения этих характеристик к задачам полиномиальной интерполяции рассматривались в ряде работ первого автора, а также его монографии [6]. В недавней статье [8] теоретические исследования были дополнены вычислениями с применением специально написанных компьютерных программ. Этот подход позволил авторам улучшить ряд оценок и высказать некоторые предположения. Настоящая статья по своей тематике продолжает эту линию.

Остановимся на основных определениях. Ниже  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n$  есть  $n$ -мерный единичный куб  $[0, 1]^n$ . Для невырожденного симплекса  $S \subset \mathbb{R}^n$  под  $\sigma S$  понимается результат гомотетии  $S$  относительно центра тяжести с коэффициентом  $\sigma$ . Через  $d_i(S)$  обозначим  $i$ -й осевой диаметр  $S$ , представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в  $S$  и параллельного  $i$ -й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом [14], [15]. Для многогранника  $G$  через  $\text{ver}(G)$  обозначается совокупность его вершин.

Для невырожденного симплекса  $S$  и выпуклого тела  $C$  в  $\mathbb{R}^n$  определим

$$\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Равенство  $\xi(C; S) = 1$  эквивалентно включению  $C \subset S$ . Положим  $\xi(S) := \xi(Q_n; S)$ . Введём в рассмотрение величину

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset Q_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Через  $\alpha(S)$  обозначим минимальное  $\sigma > 0$ , для которого  $Q_n$  принадлежит трансляту симплекса  $\sigma S$ .

Ниже  $C(Q_n)$  есть пространство непрерывных функций  $f : C(Q_n) \rightarrow \mathbb{R}$  с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

$\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — совокупность многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq 1$  (линейных функций  $n$  переменных). Запись  $L(n) \asymp M(n)$  означает, что существуют константы  $c_1, c_2 > 0$ , не зависящие от  $n$ , с которыми выполняется  $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$ .

## 2. Вычисление и оценки числовых характеристик $n$ -мерного симплекса

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$  с вершинами  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ . Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим  $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$ . Обозначим через  $\lambda_j$  многочлен из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , коэффициенты которого составляют  $j$ -й столбец  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}.$$

Многочлены  $\lambda_j$  обладают свойством  $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ , где  $\delta_j^k$  — символ Кронекера. Для  $x \in \mathbb{R}^n$  числа  $\lambda_j(x)$  являются *барицентрическими координатами* точки  $x$  относительно  $S$ . Многочлены  $\lambda_j$  имеют приложения, связанные с линейной интерполяцией функций  $n$  переменных по узлам, совпадающим с вершинами  $S$ . Мы называем  $\lambda_j$  *базисными многочленами Лагранжа*, соответствующими симплексу  $S$ . Подробнее о свойствах этих многочленов см. [6; гл. 1].

В [4] установлено, что  $i$ -й осевой диаметр  $S$  удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1)$$

Этот результат обобщается на максимальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному вектору  $v \neq 0$  (см. [7]).

Приведём формулы для вычисления введённых выше числовых характеристик, определённых посредством гомотетии. Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . В [6; § 1.3] доказано, что если  $C \not\subset S$ , то

$$\xi(C; S) = (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_k(x)) + 1. \quad (2)$$

Соотношение

$$\max_{x \in C} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in C} (-\lambda_{n+1}(x)) \quad (3)$$

эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $C$ , т. е. каждая  $(n-1)$ -мерная грань этого симплекса содержит точку  $C$ . В случае  $C = Q_n$  равенство (2) приводится к виду

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1, \quad (4)$$

а (3) эквивалентно соотношению

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (5)$$

Для произвольного невырожденного симплекса  $S$  справедливо равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (6)$$

В статье [13] (см. также [6; гл. 1]) даются два доказательства, а также ряд интересных следствий этого равенства.

Пусть  $x^{(j)} \in Q_n$  — вершины невырожденного симплекса  $S$ . Интерполяционный проектор  $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  по набору узлов  $x^{(j)}$  определяется равенствами  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ . Норма проектора  $P$  как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$  вычисляется по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$



Обозначим через  $\theta_n$  минимальную величину  $\|P\|$ .

В [5] доказано, что для любого проектора  $P$  и соответствующего ему симплекса  $S$  справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1 \quad (7)$$

и дано необходимое и достаточное условие того, что правое соотношение является равенством. Из (7) следует, что для любого  $n$

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1. \quad (8)$$

Подробнее о соотношениях (7), (8) и их обобщениях см. [2], [3], [5], [6]. Начиная с некоторого  $n$ , правое неравенство в (8) становится строгим. Однако для  $n = 1, 2, 3, 7$  оно обращается в равенство. По предположению авторов (см. [8]), минимальное  $n$ , при котором  $\xi_n < \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1$ , равно 4.

Если  $S \subset Q_n$ , то  $d_i(S) \leq 1$ . Из равенства (6) сразу следует, что

$$n \leq \alpha(S) \leq \xi(S). \quad (9)$$

Если  $\xi(S) = n$ , то (9) даёт  $\alpha(S) = \xi(S)$ . Последнее равенство эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $Q_n$ , и также эквивалентно (5).

Применяя (8) и (9), имеем

$$\xi_n \geq n, \quad \theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \quad (10)$$

Первым автором доказаны соотношения  $\theta_n \asymp n^{1/2}$ ,  $\xi_n \asymp n$ . Если  $n+1$  — число Адамара, то  $\xi_n = n$  (одно из доказательств этого утверждения приводится в п. 4 настоящей статьи). Большой материал, посвящённый числам  $\xi_n$  и  $\theta_n$ , содержится в [6]. Отметим здесь общие оценки

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} \quad (n > 2); \quad \frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}.$$

Были получены оценки и для конкретных  $n$ . Некоторые из них были улучшены в первой статье авторов [8]. В настоящей статье мы приведём новые оценки и систематизируем материал, имеющийся к данному моменту.

### 3. Об одном неравенстве для $\xi(S)$ и $\alpha(S)$

В этом пункте мы сначала докажем две теоремы.

**Теорема 1.** Для любого невырожденного отрезка  $S \subset Q_1$  выполняется неравенство

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \frac{1}{2} (\xi(S) - \xi_1) \quad (11)$$

с точной константой  $\frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = [x_1, x_2]$ ,  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ . Так как центром  $S$  является точка  $\frac{x_1+x_2}{2}$ , то по определению  $\xi(S)$  имеем:

$$\begin{aligned} \xi(S) &= \min\{\sigma \geq 1 : [0, 1] \subset \sigma S\} = \max\left\{\frac{1 - \frac{x_1+x_2}{2}}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}, \frac{0 - \frac{x_1+x_2}{2}}{x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}}\right\} = \\ &= \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тот же результат даёт и применение общей формулы (4). В нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1(x) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2(x) = \frac{-x + x_1}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

В соответствии с (4)

$$\begin{aligned} \xi(S) &= 2 \max\{-\lambda_1(0), -\lambda_1(1), -\lambda_2(0), -\lambda_2(1)\} + 1 = \\ &= 2 \max\left\{\frac{x_2}{x_1 - x_2}, \frac{-1 + x_2}{x_1 - x_2}, \frac{-x_1}{x_1 - x_2}, \frac{1 - x_1}{x_1 - x_2}\right\} + 1 = \\ &= 2 \max\left\{\frac{1 - x_2}{x_2 - x_1}, \frac{x_1}{x_2 - x_1}\right\} + 1 = \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

что совпадает с (12). Заметим, что числитель последней дроби всегда  $\geq 1$ , а знаменатель  $\leq 1$ , причём они обращаются в 1 лишь при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Это соответствует тому, что всегда  $\xi(S) \geq 1$ , причём  $\xi(S) = 1$  только в случае  $S = [0, 1] = Q_1$ .

Пусть  $d(S)$  — осевой диаметр  $S$ . Очевидно,  $d(S) = x_2 - x_1$ , значит,

$$\alpha(S) = \frac{1}{d(S)} = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку  $\xi_1 = 1$ , то (11) записывается в виде

$$\frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1} - 1 \right). \quad (13)$$

Это эквивалентно неравенству

$$\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\} \leq 2 - x_2 + x_1. \quad (14)$$

Как нетрудно видеть, (14) равносильно системе неравенств  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \leq 1$ . Поэтому справедливо каждое из неравенств (14), (13) и (11).

Остаётся заметить, что константа  $\frac{1}{2}$ , стоящая в правой части (11), является точной (неуменьшаемой). Действительно, для  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ , т.е.  $S = [0, \frac{1}{2}]$ , каждое из неравенств (14), (13) и (11) обращается в равенство. Теорема доказана.  $\square$

График функции  $\varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1, x_2) - \alpha(x_1, x_2)}{\xi(x_1, x_2) - \xi_1}$  для  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  приведен на рис. 1.

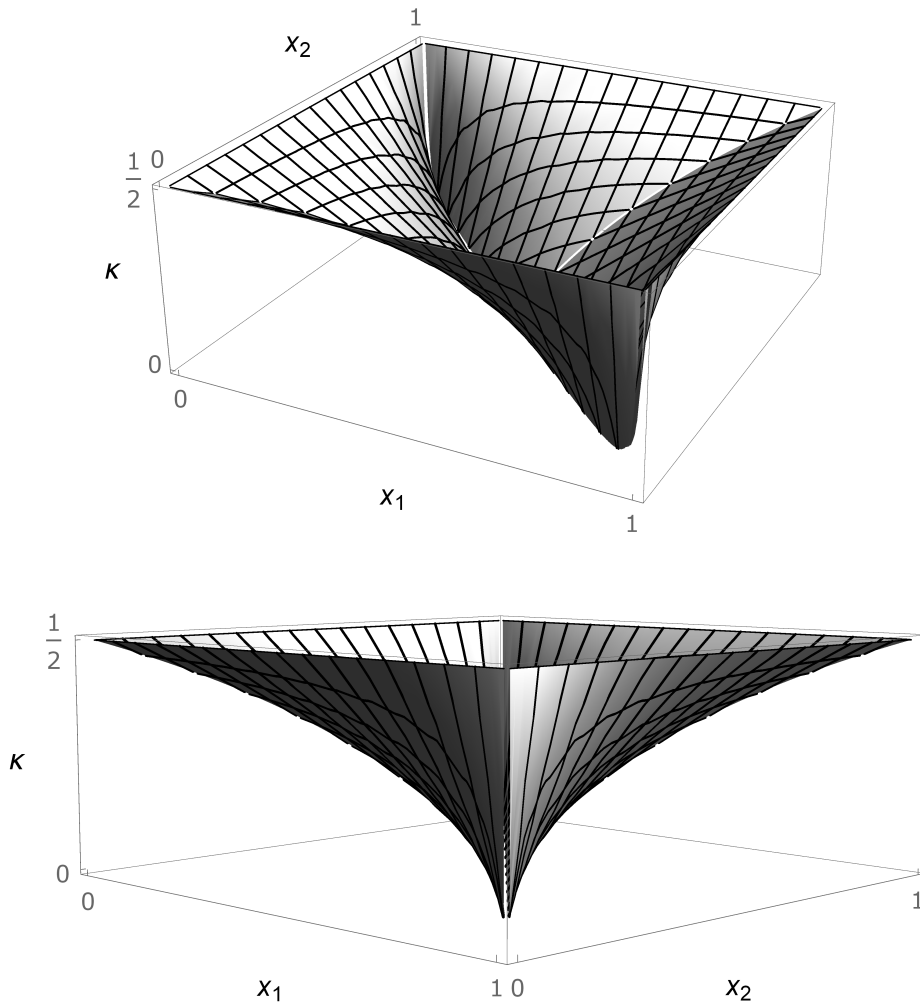


Рис. 1: Поверхность  $\varkappa = \varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1, x_2) - \alpha(x_1, x_2)}{\xi(x_1, x_2) - \xi_1}$  для  $x_1, x_2 \in [0, 1]$   
 Fig. 1: Surface  $\varkappa = \varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1, x_2) - \alpha(x_1, x_2)}{\xi(x_1, x_2) - \xi_1}$  for  $x_1, x_2 \in [0, 1]$

**Теорема 2.** Пусть  $n > 1$ . Предположим, что существует константа  $\gamma > 0$ , такая что для любого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$  справедливо неравенство

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma (\xi(S) - \xi_n). \quad (15)$$

Тогда  $\gamma \geq 1$ . Если  $\xi_n = n$ , то точное значение  $\gamma$  равно 1.

*Доказательство.* Пусть  $S$  — угловой симплекс с вершинами  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 1)$ ,  $(0, 0, \dots, 0)$ . Для этого симплекса в обозначениях п. 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_j(x) = x_j, \quad 1 \leq j \leq n; \quad \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{j=1}^n x_j + 1.$$

Вычислим  $\xi(S)$  по формуле (4):

$$\begin{aligned} \xi(S) &= (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1 = \\ &= -(n+1)\lambda_{n+1}(1, \dots, 1) + 1 = (n+1)(n-1) + 1 = n^2. \end{aligned}$$

Очевидно,  $d_i(S) = 1$ , поэтому

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = n.$$

Применяя к  $S$  неравенство (15), получим  $n^2 - n \leq \gamma(n^2 - \xi_n)$ . При любом  $n$  выполняется  $\xi_n \geq n$ , поэтому, тем более, справедливо и неравенство  $n^2 - n \leq \gamma(n^2 - n)$ . Так как  $n > 1$ , то отсюда следует  $\gamma \geq 1$ .

Интересно заметить, что это рассуждение не подходит к случаю  $n = 1$ , когда  $n^2 - n = 0$ . Одномерный случай — единственный, в котором симплекс  $S$  совпадает с кубом  $Q_n$ . Этот случай специально рассмотрен выше (см. теорему 1).

Предположим теперь, что  $n > 1$  и  $\xi_n = n$ . Поскольку для любого  $S \subset Q_n$  верны неравенства (9), то имеет место соотношение

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \xi(S) - n = \xi(S) - \xi_n.$$

Таким образом, в этой ситуации неравенство (15) выполняется с константой 1. Из предыдущего следует, что эту константу, общую для всех  $S$ , уменьшить нельзя. Поэтому в случае  $\xi_n = n > 1$  точное значение  $\gamma$  равно 1.

Теорема доказана. □

Теперь приведём две гипотезы о числах  $\xi(S)$  и  $\alpha(S)$ , впервые сформулированные в [5] (см. также [6; § 3.10] и [8]).

(Н1) Пусть  $S \subset Q_n$  — невырожденный  $n$ -мерный симплекс. Если  $\xi(S) = \xi_n$ , то  $\xi(S) = \alpha(S)$ .

(Н2) Для любого  $n$  существует константа  $\gamma > 0$ , такая что для каждого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$  выполняется неравенство (15).

Для  $n = 1, 2, 3$  полное описание симплексов с условием  $\xi(S) = \xi_n$  дано в работах первого автора (см. [6; гл. 1].) Для каждого из них  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Справедливость (Н1) для  $n = 4$  пока не ясна, но вычисления, приведённые в [8], означают, что в четырёхмерной ситуации эта гипотеза, по-видимому, верна.

Если  $\xi_n = n$ , то в силу соотношений  $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$  (см.(9)) условие  $\xi(S) = \xi_n$  сразу даёт  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Поэтому утверждение (Н1) верно для всех  $n$ , при которых  $\xi_n = n$ . К этой совокупности относятся, в частности, те  $n$ , для которых  $n + 1$  — число Адамара (см. п. 4), но не только они. Например, как будет доказано ниже,  $\xi_5 = 5$ ; следовательно, (Н1) верно для  $n = 5$ .

Очевидно, из справедливости (Н2) следует справедливость (Н1). Обозначим через  $\varkappa_n$  минимальное  $\gamma > 0$ , с которым (15) выполняется для любого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$ . Иными словами,  $\varkappa_n$  есть точная константа в неравенстве

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \varkappa_n (\xi(S) - \xi_n), \quad S \subset Q_n.$$

Утверждение (Н2) равносильно свойству: для любого  $n$

$$\varkappa_n := \sup_{S \subset Q_n} \frac{\xi(S) - \alpha(S)}{\xi(S) - \xi_n} < \infty. \quad (16)$$

Точная верхняя грань в (16) берётся по совокупности симплексов  $S$ , содержащихся в  $Q_n$  и таких, что  $\xi(S) \neq \xi_n$ .

В настоящей работе в определении  $\varkappa_n$  мы снимаем ограничение  $\varkappa_n \geq 1$ , которое присутствовало в [5], [6] и [8]. Это изменение сказывается только на значении  $\varkappa_1$ . Теперь в соответствии с теоремой 1 имеем  $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$ ; для  $n > 1$  из теоремы 2 следует, что  $\varkappa_n \geq 1$ . Если же  $n > 1$  таково, что  $\xi_n = n$ , то  $\varkappa_n = 1$ . Это выполняется, в частности, когда  $n + 1$  — число Адамара, большее 2.

В статье [8] с помощью компьютерных методов установлено, что

$$\varkappa_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\dots$$

(это подтверждает гипотезу, высказанную первым автором в [5]). На основе вычислений высказано предположение, что

$$\varkappa_4 = \frac{4 + \sqrt{13}}{5} = 1.5211\dots$$

В настоящей статье мы покажем, что  $\varkappa_5 = 1$ .

#### 4. Если $n + 1$ — число Адамара, то $\xi_n = n$

Матрицей Адамара порядка  $m$  называется невырожденная  $(m \times m)$ -матрица  $\mathbf{H}_m$ , каждый элемент которой равен 1 или  $-1$  и такая, что

$$\mathbf{H}_m^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T.$$

Некоторые сведения о матрицах Адамара содержатся в монографии Холла [9]. Если  $\mathbf{H}_m$  существует, то  $m = 1$ ,  $m = 2$  или  $m$  кратно 4. Для бесконечного множества чисел вида  $m = 4k$ , включая степени  $m = 2^l$ , существование  $\mathbf{H}_m$  давно установлено. Наименьшее  $m$ , для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка  $m$ , с 1985 г. равняется 428. Если для натурального  $m$  матрица Адамара существует, то  $m$  будем называть *числом Адамара* или *адамаровым числом*.

В случае, когда  $n + 1$  — число Адамара, и только тогда, существует правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_n$  таким образом, что его вершины находятся в вершинах  $Q_n$  (см. [10; теорема 4.5]). В статье [5] и монографии [6; § 3.2] разными способами доказано, что  $\xi(S) = n$ , что даёт  $\xi_n = n$ . Мы приведём здесь иное, нежели в [5] и [6], доказательство этого факта, непосредственно связанное с матрицами Адамара. Это доказательство мы дополним другими сведениями о симплексе  $S$ .

**Теорема 3.** Пусть  $n + 1$  — число Адамара,  $S$  — правильный симплекс, вписанный в куб  $Q_n$ . Тогда  $\xi_n = \xi(S) = n$ .

*Доказательство.* Пользуясь соображениями подобия, будем решать задачу для куба  $Q'_n := [-1, 1]^n$ . Так как число  $n + 1$  — адамарово, существует *нормализованная матрица Адамара* порядка  $n + 1$ , т. е. такая, у которой первая строка и первый столбец состоят из 1 (см. [9; гл. 14]). Запишем строки этой матрицы в обратном порядке и рассмотрим получившуюся матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая также будет матрицей Адамара порядка  $n + 1$ . Пусть  $S'$  —  $n$ -мерный симплекс, координаты вершин которого записаны в первых  $n$  позициях строк  $\mathbf{H}$ . Очевидно, вершины  $S'$  совпадают с некоторыми вершинами  $Q'_n$ , следовательно, этот симплекс вписан в куб. Покажем, что симплекс  $S'$  является правильным, причём длина любого его ребра равна  $\sqrt{2(n + 1)}$ . Пусть  $a, b$  — две различные строки  $\mathbf{H}$ . Поскольку  $\mathbf{H}$  состоит из  $\pm 1$ , имеем  $\|a\|^2 = \|b\|^2 = n + 1$ . В силу попарной ортогональности строк матрицы Адамара

$$\|a - b\|^2 = (a - b, a - b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a, b) = 2(n + 1).$$

Обозначим через  $u$  и  $w$  вершины  $S$ , которые получаются соответственно из  $a$  и  $b$  отбрасыванием последней компоненты, равной 1. Ясно, что  $n$ -мерная длина вектора  $u - w$  совпадает с  $(n + 1)$ -мерной длиной вектора  $a - b$ , т. е. также равна  $\sqrt{2(n + 1)}$ .

Обозначим через  $\lambda_j$  базисные многочлены Лагранжа, соответствующие симплексу  $S'$ . В силу равенства  $\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{n+1}\mathbf{H}^T$  коэффициенты многочленов  $(n + 1)\lambda_j$  содержатся в строках  $\mathbf{H}$ . Свободные члены этих многочленов попадают в последний столбец  $\mathbf{H}$  и поэтому равны 1. Значит, свободные члены многочленов  $-(n + 1)\lambda_j$  равны  $-1$ . По этой причине при любом  $j = 1, \dots, n + 1$  выполняется равенство

$$(n + 1) \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) = n - 1.$$

Так как коэффициенты многочленов  $-(n + 1)\lambda_j$  равны  $\pm 1$ , то для любого  $j$  вершина  $v$  куба  $Q'_n$ , для которой справедливо  $(n + 1)(-\lambda_j(v)) = n - 1$ , является единственной. Именно,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  определяется равенствами  $v_i = -\text{sign } l_{ij}$ , где  $l_{ij}$  — коэффициенты многочлена  $\lambda_j$ .

Теперь вычислим  $\xi(Q'_n; S')$ , применяя формулу (4) с заменой  $Q_n$  на  $Q'_n$ . Как и (4), эта формула следует из равенства (2) для произвольного выпуклого тела  $C$ . С учётом предыдущего имеем

$$\xi(Q'_n; S') = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Пусть  $S$  — вписанный в  $Q_n$  правильный симплекс, который соответствует  $S'$  при преобразовании подобия, переводящем  $Q'_n$  в  $Q_n$ . Тогда  $\xi(S) = \xi(S'; Q'_n) = n$ . Отсюда

следует, что если  $n + 1$  — адамарово, то  $\xi_n \leq n$ . Как отмечалось выше (см. (10)), для любого  $n$  верна и противоположная оценка  $\xi_n \geq n$ . Поэтому  $\xi_n = \xi(S) = n$ . Так как коэффициент подобия при преобразовании  $Q'_n$  в  $Q_n$  равен  $\frac{1}{2}$ , то длина любого ребра  $S$  равна  $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ .

Заметим, что из соотношения

$$\max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}$$

следует, что симплекс  $nS'$  описан вокруг куба  $Q'_n$ . Наше рассуждение также показывает, что каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $nS'$  содержит лишь одну вершину  $Q'_n$ . Значит, симплекс  $nS$  аналогичным образом описан вокруг куба  $Q_n$ . Поскольку  $nS$  описан вокруг  $Q_n$ , имеем  $\alpha(S) = \xi(S) = n$  и  $d_i(S) = 1$ . Эти равенства также следуют из оценки  $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$  и того, что  $\xi(S) = n$ . Наконец, равенства  $d_i(S) = 1$  и  $\alpha(S) = n$  вытекают и из того, что правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_n$ , имеет максимальный объём (см. [10]), а для любого симплекса в  $Q_n$  максимального объёма все осевые диаметры равны 1. Это свойство симплекса максимального объёма, впервые доказанное Лассаком [11], выводится и из равенства (6) (см. [6; § 1.6]).

Теорема доказана. □

Первый автор в статье [5] (см. также [6; § 3.10]) предположил, что верно и утверждение, обратное к теореме 3: *если  $\xi_n = n$ , то  $n+1$  — число Адамара*. В связи с этим в [5] была высказана гипотеза, содержащая необходимое и достаточное условия того, что число  $n+1$  является адамаровым. Эта гипотеза в 2011 г. была сформулирована в терминах гомотетии симплексов, содержащихся в  $Q_n$ :

(НЗ) *Число  $n+1$  является числом Адамара тогда и только тогда, когда  $\xi_n = n$ .*

Однако позднее выяснилось, что утверждение, обратное к теореме 3, а значит, и гипотеза (НЗ) не верны. Компьютерные вычисления, проделанные в 2016 г. вторым автором, позволили доказать, что существуют такие  $n$ , для которых  $\xi_n = n$  и число  $n+1$  не является адамаровым. Минимальное  $n$  с таким свойством равно 5. Это свойство описывается в следующем пункте.

## 5. Точное значение $\xi_5$

Напомним, что  $Q_5$  обозначает куб  $[0, 1]^5$ .

**Теорема 4.** *Существует симплекс  $S \subset Q_5$ , такой что симплекс  $5S$  описан вокруг куба  $Q_5$ , причём граница симплекса  $5S$  содержит все вершины куба.*

*Доказательство.* Пусть  $S \subset \mathbb{R}^5$  — симплекс с вершинами  $(1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{47}{100})$ ,  $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{47}{100})$ ,  $(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{59}{100})$ ,  $(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 0)$ ,  $(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 1)$ ,  $(1, \frac{1}{3}, 1, 0, \frac{47}{100})$ . Очевидно,  $S \subset Q_5$ . Легко убедиться, что центр тяжести  $S$  есть точка  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  для симплекса  $S$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{47}{100} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{47}{100} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{59}{100} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{47}{100} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{77}{300} & -\frac{23}{300} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{41}{100} & \frac{59}{100} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{59}{100} & -\frac{59}{100} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Выпишем для  $S$  базисные многочлены Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= -x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1, & \lambda_2(x) &= \frac{2}{3}x_1 + x_4 - \frac{2}{3}, \\ \lambda_3(x) &= -\frac{2}{3}x_1 - x_2 + 1, & \lambda_4(x) &= -\frac{77}{300}x_1 + \frac{41}{100}x_2 - x_5 + \frac{59}{100}, \\ \lambda_5(x) &= -\frac{23}{300}x_1 + \frac{59}{100}x_2 + x_5 - \frac{59}{100}, & \lambda_6(x) &= \frac{1}{3}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Величину  $\xi(S)$  найдём с помощью формулы (4). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)) = \frac{2}{3}. \quad (17)$$

Применяя (4), получим

$$\xi(S) = 6 \max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)) + 1 = 6 \cdot \frac{2}{3} + 1 = 5.$$

Так как  $\xi(S) = 5$ , что совпадает с размерностью пространства, то  $\alpha(S) = \xi(S)$  (см. п. 1). Поэтому симплекс  $5S$  описан вокруг куба  $Q_5$ . Так как  $\alpha(S) = 5$ , то в силу (6) все осевые диаметры симплекса  $S$  равны 1.

Максимум (17) достигается следующим образом: при  $k = 1$  — на вершинах  $(0, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ; при  $k = 2$  — на вершинах  $(0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0, 1)$ ; при  $k = 3$  — на вершинах  $(1, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ; при  $k = 4$  — на вершинах  $(1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 1)$ ; при  $k = 5$  — на вершинах  $(1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 0)$ ; при  $k = 6$  — на вершинах  $(0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 1)$ . Таким образом, выполняется соотношение (5), которое здесь имеет вид

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_6(x)) = \frac{2}{3}.$$

Это также эквивалентно тому, что симплекс  $5S$  описан вокруг куба  $Q_5$ .

Заметим теперь, что приведённый выше список вершин куба, на которых достигается максимум (17), содержит все вершины  $Q_5$ . Следовательно,  $(n - 1)$ -мерные



грани симплекса  $5S$ , составляющие его границу, содержат все вершины куба. Последний результат может быть получен и посредством вычисления многочленов Лагранжа симплекса  $5S$ .

Теорема доказана. □

**Следствие 1.** *Справедливо равенство  $\xi_5 = 5$ .*

*Доказательство.* Пусть  $S$  — симплекс из условия теоремы 4. Тогда  $\xi_5 \leq \xi(S) = 5$ . В силу (10) справедлива и обратная оценка  $\xi_5 \geq 5$ . Поэтому  $\xi_5 = 5$ . □

**Следствие 2.** *Имеет место равенство  $\varkappa_5 = 1$ .*

*Доказательство.* Сразу следует из теоремы 2 и определения  $\varkappa_5$ . □

Симплекс  $S$ , использованный при доказательстве теоремы 4, не является единственным симплексом, содержащимся в  $Q_5$ , для которого  $\xi(S) = 5$ .

Рассмотрим симплекс  $R = R(t)$  с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, t, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1 - t, 1, 0)$ ,  $(0, 1, t, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1 - t, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1)$ . Заметим, что при любом  $t$  центром симплекса  $R$  является точка  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Матрица  $\mathbf{A}(t)$  для симплекса  $R$  имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы  $\mathbf{A}(t)$  удобно вычесть из первой строки последнюю и разложить полученный определитель по первой строке.

$$\det(\mathbf{A}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Таким образом, объем симплекса  $R$  не зависит от  $t$ :

$$\text{vol}(R) = \frac{|\det(\mathbf{A}(t))|}{5!} = \frac{1}{40},$$

поэтому  $R$  является невырожденным. Для  $t \in [0, 1]$  симплекс  $R$  принадлежит  $Q_5$ .

**Теорема 5.** *При  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  справедливы равенства  $\alpha(R) = \xi(R) = 5$ . Иначе говоря, при  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$  симплекс  $5R$  описан вокруг куба  $Q_5$ .*

*Доказательство.* Для симплекса  $R$  матрица  $[\mathbf{A}(t)]^{-1}$  имеет вид

$$[\mathbf{A}(t)]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3t-1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2-3t \\ 3t-2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1-3t \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1-3t & 1 & 1 & -2 & 1 & 3t-2 \\ 2-3t & -1 & -1 & -1 & 2 & 3t-1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа симплекса  $R$  суть

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \frac{1}{3}((3t-1)x_1 + (3t-2)x_2 - 3x_3 + (1-3t)x_4 + (2-3t)x_5 + 2), \\ \mu_2(x) &= \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - 1), & \mu_3(x) &= \frac{1}{3}(-x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 + 2), \\ \mu_4(x) &= \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 + 2), & \mu_5(x) &= \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 - 1), \\ \mu_6(x) &= \frac{1}{3}((2-3t)x_1 + (1-3t)x_2 + 3x_3 + (3t-2)x_4 + (3t-1)x_5 - 1). \end{aligned}$$

По формулам (1) и (6) п. 2 находим величины  $d_i(R)$  и  $\alpha(R)$ :

$$\begin{aligned} d_i(R) &= \frac{6}{|1-3t| + |2-3t| + 5} \quad \text{для } i = 1, 2, 4, 5; \quad d_3(R) = 1; \\ \alpha(R) &= \frac{2}{3} \left( |1-3t| + |2-3t| + \frac{13}{2} \right). \end{aligned}$$

При  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  выполняются равенства  $d_i(R) = 1$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) и, следовательно,

$$\alpha(R) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{d_i(R)} = 5.$$

Теперь вычислим  $\xi(R)$ . Заметим, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_2(x)) &= \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_3(x)) = \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_4(x)) = \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_5(x)) = \frac{2}{3}, \\ \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_1(x)) &= \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_6(x)) = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1-t, t, 2t - \frac{2}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя (4), получаем следующее выражение для  $\xi(R)$ :

$$\begin{aligned} \xi(R) &= 6 \max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_k(x)) + 1 = 6 \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1-t, t, 2t - \frac{2}{3} \right\} + 1 = \\ &= \begin{cases} 5, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ 9 - 12t, & t < \frac{1}{3}, \\ 12t - 3, & t > \frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, при  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$  имеем  $\alpha(R) = \xi(R) = 5$ . Выполнение этих равенств означает, что симплекс  $5R$  описан вокруг куба  $Q_5$ . Теорема доказана.  $\square$

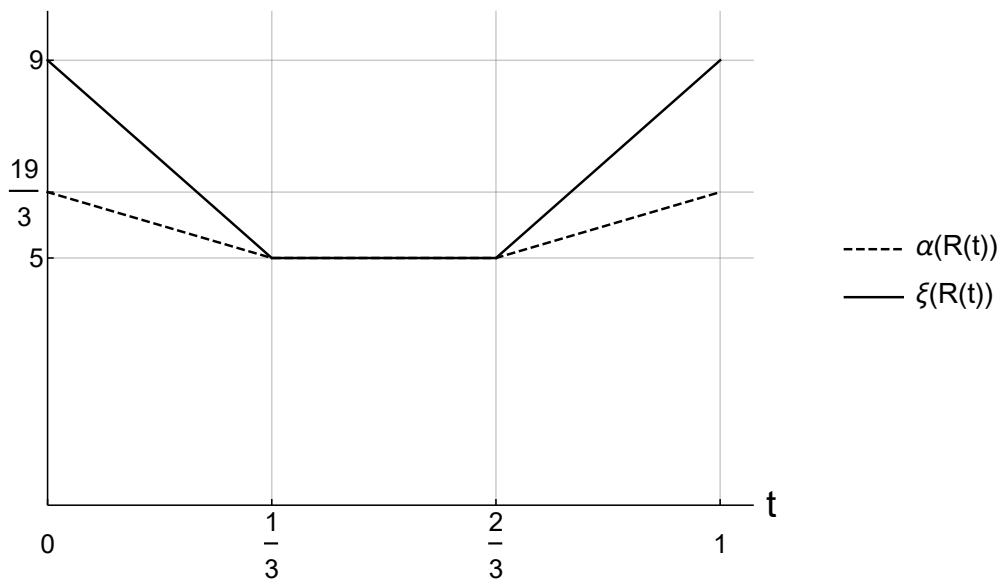


Рис. 2: Графики функций  $\alpha(R(t))$  и  $\xi(R(t))$   
 Fig. 2: Graphs of the functions  $\alpha(R(t))$  and  $\xi(R(t))$

Графики функций  $\alpha(R(t))$  и  $\xi(R(t))$  при  $t \in [0, 1]$  приведены на рис. 2.

Симплекс  $S$  не принадлежит семейству симплексов  $R$ , поскольку  $S$  и  $R$  имеют различные объемы (именно,  $\text{vol}(S) = \frac{1}{120}$ ,  $\text{vol}(R) = \frac{1}{40}$ ). Симплекс  $5R$  при  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$  описан вокруг куба  $Q_5$ . При разных значениях  $t$  число вершин куба, принадлежащих границе симплекса  $5R$ , может быть различным.

Симплексы  $S$  и  $R$  были найдены с помощью комбинации символьных и численных вычислений. Для этого использовались специально написанные программы на языке Wolfram Language (см., например, [1] и [12]).

## 6. Уточнение оценки $\theta_5$

В [6; гл. 3] приведена оценка  $\frac{7}{3} = 2.33\dots \leq \theta_5 \leq 2.6$ . С помощью численной минимизации выражения в правой части равенства

$$\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} \sum_{j=1}^6 |\lambda_j(x)|$$

эту оценку нам удалось уточнить. Меньшая верхняя граница  $\theta_5$  получается из рассмотрения симплекса  $S$  с вершинами  $(1, 1, 1, 0.282777, 0.662421)$ ,  $(0, 0.282777, 0.662421, 0, 1)$ ,  $(0.337578, 0, 1, 1, 0.282777)$ ,  $(0, 1, 0.282777, 0.662421, 0)$ ,  $(0.717222, 0.662421, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 0)$ . Для проектора  $P$  по узлам в вершинах  $S$  имеем

$$\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} \sum_{j=1}^6 |\lambda_j(x)| = 2.4488039\dots$$

Максимум достигается на вершине куба  $(1, 0, 1, 1, 1)$ . Следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{7}{3} = 2.33\dots \leq \theta_5 \leq 2.448804.$$

Таблица 1: Оценки  $\xi_n$ ,  $\theta_n$  и  $\varkappa_n$   
 Table 1: Estimates of  $\xi_n$ ,  $\theta_n$ , and  $\varkappa_n$

$n$	$\xi_n$	$\theta_n$	$\varkappa_n$
1	1	1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\dots$	$\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\dots$	$\frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.15\dots$ (?)
3	3	2	1
4	$4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\dots$ $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\dots$ (?)	$2.2 \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3} = 2.33\dots$ $\theta_4 = \frac{7}{3} = 2.33\dots$ (?)	$\frac{4+\sqrt{13}}{5} = 1.52\dots$ (?)
5	5	$\frac{7}{3} = 2.33\dots \leq \theta_5 \leq 2.448804$	1
6	$6 \leq \xi_6 < 6.0166$	$\frac{17}{7} = 2.42\dots \leq \theta_6 \leq 3$	
7	7	2.5	1

## 7. Уточнение оценки $\xi_6$

Из общей оценки  $n \leq \xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$  ( $n > 2$ ), приведённой в п. 2, следует, что  $6 \leq \xi_6 \leq 6.6$ . С помощью численной минимизации функции  $\xi(S)$  авторам удалось существенно сузить промежуток, содержащий  $\xi_6$ . Длина нового промежутка  $< 0.0166$ .

Более точная оценка  $\xi_6$  сверху получается из рассмотрения симплекса  $S$  с вершинами  $(1, 0.657259, 1, 0, 0.823603, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 0, 0.490244)$ ,  $(0, 1, 1, 0.176397, 0.657259, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(0.490244, 1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0.823603, 0, 0.342741, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0.490244, 1, 1, 0)$ . Вычисления по формулам п. 2 дают значения  $\alpha(S) = 6.016585\dots$ ,  $\xi(S) = 6.016587\dots$ . Таким образом, справедливы неравенства

$$6 \leq \xi_6 < 6.0166.$$

## 8. Оценки чисел $\xi_n$ , $\theta_n$ и $\varkappa_n$

В табл. 1 приводятся оценки первых семи чисел  $\xi_n$ ,  $\theta_n$  и  $\varkappa_n$ , полученные авторами к моменту написания статьи. Таблица содержит результаты работ [6], [8] и настоящей статьи. Для величин, точные значения которых неизвестны, приводятся лучшие из полученных неравенств. Знаком вопроса отмечаются числа, которые, по предположению авторов, являются точными значениями. Эти величины были получены с помощью компьютерных вычислений.

## Список литературы / References

- [1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2014; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2014, (in Russian).]
- [2] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15**:3 (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:3 (2008), 28–37, (in Russian).]
- [3] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]
- [4] Невский М. В., “Об одном свойстве  $n$ -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of  $n$ -dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.
- [5] Невский М. В., “О геометрических характеристиках  $n$ -мерного симплекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18**:2 (2011), 52–64; [Nevskii M. V., “On geometric characteristics of an  $n$ -dimensional simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **18**:2 (2011), 52–64, (in Russian).]
- [6] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpoljacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]
- [7] Невский М. В., “Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:2 (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., “Computation of the longest segment of a given direction in a simplex”, *Journal of Math. Sciences*, **203**:6 (2014), 851–854.
- [8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical characteristics of a simplex and their estimates”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619, (in Russian).]
- [9] Холл М., *Комбинаторика*, Москва: Мир, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusetts) – Toronto – London, 1967, (in English).]
- [10] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest  $j$ -simplices in  $d$ -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.
- [11] Lassak M., “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.
- [12] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O’Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.

- [13] Nevskii M., "Properties of axial diameters of a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **46:2** (2011), 301–312.
- [14] Scott P. R., "Lattices and convex sets in space", *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.
- [15] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

---

**Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu.**, "New Estimates of Numerical Values Related to a Simplex ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:1** (2017), 94–110.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-94-110

**Abstract.** Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $Q_n = [0, 1]^n$ . For a nondegenerate simplex  $S \subset \mathbb{R}^n$ , by  $\sigma S$  we denote the homothetic copy of  $S$  with center of homothety in the center of gravity of  $S$  and ratio of homothety  $\sigma$ . By  $\xi(S)$  we mean the minimal  $\sigma > 0$  such that  $Q_n \subset \sigma S$ . By  $\alpha(S)$  denote the minimal  $\sigma > 0$  such that  $Q_n$  is contained in a translate of  $\sigma S$ . By  $d_i(S)$  we denote the  $i$ th axial diameter of  $S$ , i. e. the maximum length of the segment contained in  $S$  and parallel to the  $i$ th coordinate axis. Formulae for  $\xi(S)$ ,  $\alpha(S)$ ,  $d_i(S)$  were proved earlier by the first author. Define  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . We always have  $\xi_n \geq n$ . We discuss some conjectures formulated in the previous papers. One of these conjectures is the following. *For every  $n$ , there exists  $\gamma > 0$ , not depending on  $S \subset Q_n$ , such that an inequality  $\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma(\xi(S) - \xi_n)$  holds.* Denote by  $\varkappa_n$  the minimal  $\gamma$  with such a property. We prove that  $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$ ; for  $n > 1$ , we obtain  $\varkappa_n \geq 1$ . If  $n > 1$  and  $\xi_n = n$ , then  $\varkappa_n = 1$ . The equality  $\xi_n = n$  holds if  $n + 1$  is an Hadamard number, i. e. there exists an Hadamard matrix of order  $n + 1$ . This proposition is known; we give one more proof with the direct use of Hadamard matrices. We prove that  $\xi_5 = 5$ . Therefore, there exists  $n$  such that  $n + 1$  is not an Hadamard number and nevertheless  $\xi_n = n$ . The minimal  $n$  with such a property is equal to 5. This involves  $\varkappa_5 = 1$  and also disproves the following previous conjecture of the first author concerning the characterization of Hadamard numbers in terms of homothety of simplices:  *$n + 1$  is an Hadamard number if and only if  $\xi_n = n$ .* This statement is valid only in one direction. There exists a simplex  $S \subset Q_5$  such that the boundary of the simplex  $5S$  contains all the vertices of the cube  $Q_5$ . We describe a one-parameter family of simplices contained in  $Q_5$  with the property  $\alpha(S) = \xi(S) = 5$ . These simplices were found with the use of numerical and symbolic computations. Another new result is an inequality  $\xi_6 < 6.0166$ . We also systematize some of our estimates of numbers  $\xi_n$ ,  $\theta_n$ ,  $\varkappa_n$  derived by now. The symbol  $\theta_n$  denotes the minimal norm of interpolation projection on the space of linear functions of  $n$  variables as an operator from  $C(Q_n)$  to  $C(Q_n)$ .

**Keywords:** simplex, cube, homothety, axial diameter, interpolation, projection, numerical methods

**On the authors:**

Mikhail V. Nevskii, [orcid.org/0000-0002-6392-7618](https://orcid.org/0000-0002-6392-7618), doctor of science,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Yu. Ukhalov, [orcid.org/0000-0001-6551-5118](https://orcid.org/0000-0001-6551-5118), PhD,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-ukhalov@yandex.ru

©Морозов А. Н., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-1-111-120

УДК 517.5

# Пополнение ядра оператора дифференцирования

Морозов А. Н.

получена 15 ноября 2016

**Аннотация.** При изучении кусочно-полиномиальных приближений в пространствах  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ , автором было рассмотрено распространение  $k$ -й производной (оператора) с болевских пространств  $W_1^k$  на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы. Данная статья продолжает работы автора по исследованию свойств, обретаемых оператором дифференцирования  $\Lambda$  при распространении его за границы пространства  $W_1^k / \Lambda : W_1^k \mapsto L_1$ ,  $\Lambda f = f' /$ . Исследования проводятся с помощью введения семейства пространств  $Y_p^1$ ,  $0 < p < 1$ , имеющего аналогию с семейством  $W_p^1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Пространства  $Y_p^1$  снабжены квазинормами, построенными на основе квазинорм соответствующих пространств  $L_p$ , и для них выполняется  $\Lambda : Y_p^1 \mapsto L_p$ . Такой подход даёт новый взгляд на свойства производной. Например, была показана аддитивность относительно интервала продолженного оператора дифференцирования:

$$\bigcup_{n=1}^m \Lambda(f_n) = \Lambda\left(\bigcup_{n=1}^m f_n\right).$$

Здесь для функции  $f_n$ , заданной на  $[x_{n-1}; x_n]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , определено  $\Lambda(f_n)$ . Одной из наиболее важных характеристик линейного оператора является состав ядра. При распространении оператора дифференцирования с пространства  $C^1$  на пространства  $W_p^1$  его ядро не изменяется. В статье конструктивно показано, что функции скачков и сингулярные функции  $f$  принадлежат всем пространствам  $Y_p^1$ , и для них  $\Lambda f = 0$ . Следовательно, пространство функций ограниченной вариации  $H_1^1$  содержится в каждом  $Y_p^1$ , и оператор  $\Lambda$  на  $H_1^1$  удовлетворяет соотношению  $\Lambda f = f'$ . Также приходим к выводу, что сингулярной логично назвать каждую функцию из добавленной части ядра.

**Ключевые слова:** оператор дифференцирования, ядро, квазинорма

**Для цитирования:** Морозов А. Н., "Пополнение ядра оператора дифференцирования", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:1** (2017), 111–120.

**Об авторах:**

Морозов Анатолий Николаевич, orcid.org/0000-0001-9940-159X, канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

## 1. Введение и основные обозначения

Как обычно,  $L_p[I]$  обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени  $p$  ( $0 < p < \infty$ ) по Лебегу на отрезке  $I = [a; b]$ , с величиной элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left( \int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

$C[I]$  – пространство непрерывных на  $I$  функций,

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до  $L_p$  и  $\|f\|_p$  или соответственно до  $C$  и  $\|f\|_\infty$ .

Также используются пространства ( $1 \leq p < \infty$ )

$$W_p^1 = W_p^1[I] = \left\{ f : f \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f' \in L_p \right\}$$

и пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке  $I$  функций  $C^1 = C^1[I]$  (для  $p = \infty$ ) с нормами  $\|f\|_p + \|f'\|_p$ .

При изучении кусочно-полиномиальных приближений в пространствах  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ , автором было рассмотрено распространение  $k$ -й производной (оператора) с пространств  $W_1^k$  на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы (см. [1], [2].) В статьях [3], [4] структура введённых пространств и свойства получаемых производных подробнее изучались в случае  $k = 1$ , представляющем самостоятельный интерес. Данная статья является продолжением этих исследований.

Идею распространения производных удобно прокомментировать следующим образом. Множества функций, образующих пространства  $W_p^1$ , можно рассматривать как замыкания множества непрерывно дифференцируемых функций в метриках, порождаемых нормами  $\|\cdot\|_p + \|(\cdot)'\|_p$ , а определение производных в этих пространствах – как соответствующие распространения оператора дифференцирования  $\Lambda : C^1 \mapsto C$  на  $W_p^1$ , т.е. построение  $\Lambda : W_p^1 \mapsto L_p$ . Относящиеся к этому рассуждению теоремы см. в [5] на с. 240.

Для охвата случаев, когда нижний индекс меньше 1, отметим хорошо известные соотношения: для  $f \in W_p^1$  выполняется

$$\|f'\|_p = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p = \sup_{t > 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p,$$

где

$$\omega_1(f, t)_p = \sup_{0 < \delta < t} \|\Delta_\delta^1 f\|_{L_p[a, b-\delta]} \quad \left( \Delta_\delta^1 f(x) = f(x + \delta) - f(x) \right)$$

– модуль гладкости первого порядка в  $L_p$  (в  $C$  при  $p = \infty$ ). Иначе говоря, нормы на пространствах  $W_p^1$  совпадают с нормами

$$\|\cdot\|_{H_p^1} = \|\cdot\|_p + \sup_{t > 0} t^{-1} \omega_1(\cdot, t)_p.$$

Чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, в дальнейшем будет использоваться буква  $r$ , т.е. всюду ниже  $0 < r < 1$ .

Рассмотрим на пространстве  $C^1$  семейство квазинорм (определение и основные свойства квазинорм см., например, [6], с. 79):

$$\|\cdot\|_{H_r^1} = \|\cdot\|_r + |\cdot|_r, \quad \text{где } |\cdot|_r = \sup_{t > 0} t^{-1} \omega_1(\cdot, t)_r.$$



Определим [2] для каждого  $r$  пространство  $Y_r^1$  как пополнение  $C^1$  в метрике, порождаемой квазинормой пространства  $H_r^1$ .

О существовании метрики, ассоциированной с квазинормой, см. [6], с. 80. Так, метрику на  $H_r^1$  определяет функционал

$$\|\cdot\|_r^r + |\cdot|_r^r.$$

Отметим, что

$$|f|_r^r = \sup_{t>0} \left( t^{-r} \int_a^{b-t} |\Delta_t^1 f(x)|^r dx \right). \quad (1)$$

## 2. Предварительные результаты

Выделим приоритетные утверждения из предшествующих работ.

Из неравенств между метриками пространств  $H_1^1$  и  $H_r^1$  сразу следует, что  $W_1^1 \subset Y_r^1$  для каждого  $r$ .

**Теорема 1.** Оператор дифференцирования  $\Lambda : C^1 \mapsto C$ ,  $(\Lambda f)(x) = f'(x)$ , имеет единственное линейное непрерывное распространение до оператора из  $Y_r^1$  в  $L_r$ . Это распространение обладает свойствами:

- i)  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r = \|\Lambda f\|_r$ ,
- ii) если  $f \in W_1^1[c; d]$ ,  $[c; d] \subset [a; b]$ , тогда  $\Lambda f|_{[c; d]} = f'$ .

Примерами функций из  $Y_r^1$ , не входящих в  $W_1^1$ , являются функции с монотонной неинтегрируемой производной. Они позволяют также выделить из семейства  $Y_r^1$  (и  $H_r^1$ ) конкретное пространство.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L_r[a; b] \cap W_1^1[a; b - \epsilon]$  для любого  $\epsilon > 0$ ,  $f'$  неотрицательна на  $[a; b]$  и не убывает, тогда, если конечна величина  $\|f'\|_r$ ,  $f \in Y_r^1[a; b]$ . При этом

$$\sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r = \|f'\|_r.$$

Функции из  $Y_r^1$  могут быть разрывны, причём, как вытекает из теоремы 2 и следующих результатов, могут иметь бесконечные разрывы. Пусть  $\{x_n\}$  – монотонная последовательность чисел из  $[a; b]$ , для определённости возрастающая и сходящаяся к  $b$  :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots \rightarrow b$ .

**Теорема 3.**

$$\text{Если } f \in Y_r^1[x_{n-1}; x_n], n \in \mathbf{N}, \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \|\bar{f}\|_{L_r[x_{n-1}; x_n]}^r + |f|_{L_r[x_{n-1}; x_n]}^r \right) < \infty,$$

$$\text{где } \|\bar{f}\|_{L_r[c; d]} = \left\| \frac{f}{d-c} \right\|_{L_r[c; d]}, \text{ то } f \in Y_r^1[a; b].$$

**Следствие 1.** Условие  $f \in Y_r^1$  равносильно тому, что  $f$  кусочно принадлежит этому пространству.

Под кусочной принадлежностью подразумевается, что для заданного набора точек  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  выполняется  $f \in Y_r^1[x_{n-1}; x_n]$ ,  $1 \leq n \leq m$ .

**Следствие 2.** Если  $f \in Y_{r_n}^1[x_{n-1}; x_n]$ ,  $1 \leq n \leq m$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_m = b$ , то  $f \in Y_{r_*}^1[a; b]$ , где  $r_* = \min\{r_1, \dots, r_m\}$ .

**Замечание.** Следствие 2 означает аддитивность продолженного оператора дифференцирования относительно интервала:

$$\bigcup_{n=1}^m \Lambda(f_n) = \Lambda\left(\bigcup_{n=1}^m f_n\right).$$

**Теорема 4.** Ступенчатая функция  $f$ , имеющая ограниченную вариацию, принадлежит всем пространствам  $Y_r^1$ , и для неё выполняется  $\Lambda f = 0$ .

### 3. О функциях ограниченной вариации

При распространении оператора дифференцирования с пространства  $C^1$  на пространства  $W_p^1$  его ядро не изменяется. Утверждение теоремы 4, являющейся определённым дополнением к теореме 3, вполне естественное с точки зрения классических результатов, показывает, что при дальнейшем распространении данного оператора в его ядро попадают, например, кусочно-постоянные функции. Аналогичным образом может быть получена принадлежность функций скачков ядру продолженного оператора дифференцирования.

**Теорема 5.** Функция скачков  $f$  принадлежит всем пространствам  $Y_r^1$ , при этом  $\Lambda f = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $[a; b] = [-1; 1]$  и  $f$  – некоторая функция скачков на этом отрезке. Поскольку описание пространств  $Y_r^1$  осуществляется на основе метрик пространств  $L_r$ , то без потери общности можно рассматривать сразу полное изменение функции  $f$  в каждой точке скачка и считать функцию непрерывной слева. Таким образом, по условию точкам  $x_n$  некоторого счётного множества из  $[-1; 1)$  сопоставлены числа  $h_n$  такие, что

$$\sum_n |h_n| < \infty, \quad f(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Данную функцию удобно представить в виде:  $f(x) = \sum_n h_n \cdot \chi(x - x_n)$ , где

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Оценим сначала в метрике  $H_r^1[-1; 1]$  разность между функцией, состоящей из одной «ступеньки», и её «склежкой», осуществлённой при помощи линейной функции. По

функции  $h \cdot \chi$ , где для удобства дальнейшей записи рассмотрим  $h > 0$ , и заданному числу  $0 < s < 1$  построим кусочно-линейную функцию

$$g_{h,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{h}{s} \cdot x, & 0 \leq x < s, \\ h, & x \geq s. \end{cases}$$

Обозначим  $\rho_{h,s} = h \cdot \chi - g_{h,s}$ . Имеем

$$\rho_{h,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ h \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right), & 0 \leq x < s, \\ 0, & x \geq s. \end{cases}$$

Очевидно,  $\|\rho_{h,s}\|_{L_r[-1;1]}^r < h^r \cdot s$ . Рассмотрим величину  $|\rho_{h,s}|_{L_r[-1;1]}^r$  (см. (1)). Если  $s < t < 1$ , то

$$\begin{aligned} t^{-r} \int_{-1}^{1-t} |\Delta_t^1 \rho_{h,s}(x)|^r dx &\leq t^{-r} \left( \int_{-t}^{-t+s} |\rho_{h,s}(x+t)|^r dx + \int_0^s |\rho_{h,s}(x)|^r dx \right) < \\ &< 2 \cdot t^{-r} \cdot h^r \cdot s < 2 \cdot h^r \cdot s^{1-r}. \end{aligned}$$

Если  $0 < t \leq s$ , тогда

$$\begin{aligned} t^{-r} \int_{-1}^{1-t} |\Delta_t^1 \rho_{h,s}(x)|^r dx &\leq t^{-r} \left( \int_{-t}^0 |\rho_{h,s}(x+t)|^r dx + \int_0^{s-t} |\Delta_t^1 \rho_{h,s}(x)|^r dx + \int_{s-t}^s |\rho_{h,s}(x)|^r dx \right) < \\ &< t^{-r} \left( h^r \cdot t + \left(\frac{h}{s} \cdot t\right)^r (s-t) + h^r \cdot t \right) < 2 \cdot h^r \cdot t^{1-r} + h^r \cdot s^{1-r} < 3 \cdot h^r \cdot s^{1-r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\rho_{h,s}\|_r^r + |\rho_{h,s}|_r^r < 4 \cdot h^r \cdot s^{1-r}. \quad (2)$$

Чтобы завершить доказательство принадлежности класса функций скачков пространству  $Y_r^1$ , по заданной функции

$$f(x) = \sum_n h_n \cdot \chi(x - x_n), \quad \sum_n |h_n| = M,$$

и заданному числу  $s > 0$  построим подходящую функцию  $g_s \in W_1^1$ . Каждой точке  $x_n$  сопоставим число  $s_n > 0$  так, чтобы  $x_n + s_n \leq 1$  и  $\sum_n s_n \leq s$ . Для функции  $h_n \cdot \chi(x - x_n)$  и числа  $s_n$  определим (как выше) кусочно-линейную функцию

$$g_{s_n}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < x_n, \\ \frac{h_n}{s_n} \cdot (x - x_n), & x_n \leq x < x_n + s_n, \\ h_n, & x_n + s_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Положим

$$g_s(x) = \sum_n g_{s_n}(x).$$

Все члены функционального ряда принадлежат пространству  $W_1^1$ . Ясно, что

$$\sum_n \|g_{s_n}\|_1 < 2 \sum_n \|g_{s_n}\|_\infty = 2M \quad \text{и}$$

$$\sum_n \|g'_{s_n}\|_1 = \sum_n \int_{x_n}^{x_n+s_n} \frac{|h_n|}{s_n} dx = M,$$

поэтому функция  $g_s$  принадлежит пространству  $W_1^1$ . Рассмотрим

$$f(x) - g_s(x) = \sum_n \left( h_n \cdot \chi(x - x_n) - g_{s_n}(x) \right) = \sum_n \rho_{s_n}(x).$$

Используя оценку (2), имеем

$$\begin{aligned} \|f - g_s\|_r^r + |f - g_s|_r^r &\leq \sum_n \left( \|\rho_{s_n}\|_r^r + |\rho_{s_n}|_r^r \right) < 4 \sum_n |h_n|^r \cdot s_n^{1-r} \leq \\ &\leq 4 \left( \sum_n |h_n| \right)^r \left( \sum_n s_n \right)^{1-r} \leq 4 \cdot M^r \cdot s^{1-r}. \end{aligned}$$

В преобразованиях было применено неравенство Гёльдера с показателями  $\frac{1}{r}$  и  $\frac{1}{1-r}$ . Устремляя  $s$  к 0, получаем принадлежность функции  $f$  пространствам  $Y_r^1$ .

Производная функции  $g_s$  равна 0 всюду, кроме множества, покрываемого системой интервалов, суммарная длина которых не превосходит  $s$ , а оператор  $\Lambda : Y_r^1 \mapsto L_r$ , является непрерывным при любом  $0 < r < 1$  (см. теорему 1):

$$\|\Lambda g_\alpha - \Lambda g_\sigma\|_r^r = \|(g_\alpha - g_\sigma)'\|_r^r = \left( \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(g_\alpha - g_\sigma, t)_r \right)^r \leq \left( \sup_{t > 0} t^{-1} \omega_1(g_\alpha - g_\sigma, t)_p \right)^r.$$

Поскольку  $f$  – предел в  $Y_r^1$  функций  $g_s$  при  $s \rightarrow 0$ , то получается

$$\Lambda f = \lim_{s \rightarrow 0} g'_s = 0 \quad (\text{сходимость в } L_r).$$

Теорема доказана.

Ещё одним классическим типом функций, производная которых равна 0 почти всюду, являются сингулярные функции. Покажем, что они тоже попадают при распротранении оператора  $\Lambda$  в его ядро. При доказательстве будем опираться на более общий подход к определению сингулярных функций, рассмотренный в [7].

Пусть

$$\text{Var} f \Big|_a^b = \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_m=b} \sum_{n=1}^m |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

– «полное изменение» или вариация по Жордану функции  $f$  на  $[a; b]$ .

Назовём ([7], с. 375) отличную от постоянной функцию ограниченной вариации  $f$  сингулярной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует система интервалов  $(a_n; b_n) \subset [a; b]$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ , такая, что

$$\sum_{n=1}^m (b_n - a_n) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^m |f(b_n) - f(a_n)| > \text{Var} f \Big|_a^b - \varepsilon.$$

Из утверждений, доказанных в книге, выделим два критерия:

«Для того чтобы отличная от постоянной функция ограниченной на  $[a; b]$  вариации

была сингулярной, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде разности двух неубывающих на этом отрезке сингулярных функций» (теорема 7.5, с. 378);

«Для того чтобы отличная от постоянной неубывающая на  $[a; b]$  функция была сингулярной, необходимо и достаточно, чтобы её производная почти всюду на этом отрезке равнялась нулю» (теорема 7.6, с. 381).

**Теорема 6.** Сингулярная функция  $f$  принадлежит всем пространствам  $Y_r^1$ , при этом  $\Lambda f = 0$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $f$  – неубывающая на  $[a; b]$  функция, имеющая почти всюду производную, равную 0 (сингулярная). Тогда для каждого заданного  $\varepsilon > 0$  существует множество  $U_\varepsilon$ , являющееся объединением конечного или счётно-го числа непересекающихся интервалов суммарной длины меньше  $\varepsilon$ , вне которого производная функции  $f$  равна 0:

$$U_\varepsilon = \bigcup_n (a_n; b_n), \quad (a_k; b_k) \cap (a_j; b_j) = \emptyset / k \neq j/, \quad \sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon; \quad f'(x) = 0, \quad x \in [a; b] \setminus U_\varepsilon.$$

Зафиксируем  $\varepsilon$ . Пусть  $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $h_n = f(b_n) - f(a_n)$ . Определим

$$g_\varepsilon(x) = f(a) + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Неубывающая функция скачков  $g_\varepsilon(x)$  по теореме 5 принадлежит всем пространствам  $Y_r^1$ , и  $g_\varepsilon(x) = f(x)$ ,  $x \in [a; b] \setminus U_\varepsilon$ .

Функцию  $f - g_\varepsilon$  представим в виде  $(f - g_\varepsilon)(x) = \sum_n \rho_n(x)$ , где

$$\rho_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a_n; b_n), \\ f(x) - g_\varepsilon(x), & x \in (a_n; b_n). \end{cases}$$

Оценим  $\|\rho_n\|_r^r + |\rho_n|_r^r$ . Рассуждение сходно с оценкой соответствующей величины для  $\rho_{n,s}$  в доказательстве теоремы 5.

Пусть  $b_n - a_n = s_n$ , тогда  $\|\rho_n\|_r^r < h_n^r \cdot s_n$ . Рассмотрим  $|\rho_n|_r^r$ .

Если  $t > s_n$ , то

$$t^{-r} \int_a^{b-t} |\Delta_t^1 \rho_n(x)|^r dx < 2 \cdot h_n^r \cdot s_n^{1-r}.$$

Если  $0 < t \leq s_n$ , тогда

$$t^{-r} \int_a^{b-t} |\Delta_t^1 \rho_n(x)|^r dx < 2 \cdot h_n^r \cdot t^{1-r} + t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |\Delta_t^1 (f - g_\varepsilon)(x)|^r dx.$$

Поскольку

$$t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |\Delta_t^1 (f - g_\varepsilon)(x)|^r dx \leq t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |\Delta_t^1 f(x)|^r dx + t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |\Delta_t^1 g_\varepsilon(x)|^r dx,$$

то достаточно оценить каждое слагаемое в правой части неравенства.

$$\begin{aligned} t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |f(x+t) - f(x)|^r dx &\leq t^{-r} \left( \int_{a_n}^{b_n-t} |f(x+t) - f(x)| dx \right)^r (b_n - a_n - t)^{1-r} < \\ &< t^{-r} \left( \text{Var} f \Big|_{a_n}^{b_n} \cdot t \right)^r (b_n - a_n)^{1-r} = h_n^r \cdot s_n^{1-r}. \end{aligned}$$

Здесь в преобразованиях последовательно использованы интегральное неравенство Гёльдера с показателями  $p = \frac{1}{r}$ ,  $q = \frac{1}{1-r}$  и известное рассуждение об оценке модуля гладкости функции в  $L_1$  через её вариацию (см., например, [8], с. 140). Очевидно,

$$t^{-r} \int_{a_n}^{b_n-t} |g_\varepsilon(x+t) - g_\varepsilon(x)|^r dx = t^{-r} \cdot h_n^r \cdot t \leq h_n^r \cdot s_n^{1-r}.$$

Таким образом,  $|\rho_n|_r^r < 4 \cdot h_n^r \cdot s_n^{1-r}$  и при  $s_n < 1$

$$\|\rho_n\|_r^r + |\rho_n|_r^r < h_n^r \cdot s_n + 4 \cdot h_n^r \cdot s_n^{1-r} < 5 \cdot h_n^r \cdot s_n^{1-r}.$$

Приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_r^r + |f(x) - g_\varepsilon(x)|_r^r &\leq \sum_n (\|\rho_n\|_r^r + |\rho_n|_r^r) < 5 \sum_n h_n^r \cdot s_n^{1-r} \leq \\ &\leq 5 \left( \sum_n h_n \right)^r \left( \sum_n s_n \right)^{1-r} < 5 \cdot (f(b) - f(a))^r \cdot \varepsilon^{1-r}. \end{aligned}$$

В преобразованиях снова было применено неравенство Гёльдера. Из произвольности  $\varepsilon$  следует принадлежность функции  $f$  всем пространствам  $Y_r^1$  и  $\Lambda f = 0$ .

Если  $f$  – сингулярная функция общего вида, то она может быть представлена в виде разности двух неубывающих сингулярных функций. Из доказанного выше получается, что  $f \in Y_r^1$  для всех  $0 < r < 1$  и  $\Lambda f = 0$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** Функция ограниченной вариации  $f$  принадлежит всем пространствам  $Y_r^1$ . Другими словами,  $H_1^1 \subset Y_r^1$  при каждом  $0 < r < 1$ .

*Доказательство.* Как функция ограниченной вариации  $f$  представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции, функции скачков и (непрерывной) сингулярной функции (или суммы абсолютно непрерывной и сингулярной в смысле [7] функций), поэтому  $f \in Y_r^1$  для всех  $0 < r < 1$  и  $\Lambda f = f'$ . С другой стороны, хорошо известно (см., например, [8], с. 139), что

$$\text{Var} f \Big|_a^b = \sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_{L_1[a;b]}.$$

**Замечание.** При  $1 < p < \infty$  имеет место  $H_p^1 = W_p^1$ .

В заключение отметим, что на основе результатов теоремы 2 можно указать функции неограниченной вариации (имеющие сходную структуру с некоторыми, рассмотренными выше), попадающие в ядро продолженного оператора дифференцирования. Поэтому, развивая идеи из [7], приходим к такому определению сингулярной функции. Назовём отличную от постоянной функцию  $f$  сингулярной, если  $\Delta f = 0$ . Другими словами, считаем сингулярными все функции из добавляемой при пополнении части ядра.

## Список литературы / References

- [1] Морозов А. Н., “Локальные приближения дифференцируемых функций”, *Мат. заметки*, **100**:2 (2016), 248–255; English transl.: Morozov A. N., “Local Approximations of Differentiable Functions”, *Math. Notes*, **100**:2 (2016), 256–262.
  - [2] Морозов А. Н., “Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах  $L_p$  ( $0 < p < 1$ )”, *Модел. и анализ информ. систем*, **12**:1 (2005), 18–21; [Morozov A. N., “Kusochno-polinomialnye priblizheniay i differentsiruemost v prostranstvakh  $L_p$  ( $0 < p < 1$ )”, *Modeling and analysis of inform. systems*, **12**:1 (2005), 18–21, (in Russian).]
  - [3] Морозов А. Н., “Счётная аддитивность распространения оператора дифференцирования”, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:3 (2014), 81–90; [Morozov A. N., “Countable Additivity of spread of the Differentiation Operator”, *Modeling and analysis of inform. systems*, **21**:3 (2014), 81–90, (in Russian).]
  - [4] Морозов А. Н., “О гладкости в  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ ”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:3 (2012), 97–104; [Morozov A. N., “On Smoothness in  $L_p$  ( $0 < p < 1$ )”, *Modeling and analysis of inform. systems*, **19**:3 (2012), 97–104, (in Russian).]
  - [5] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984; English transl.: Kantorovich L. V., Akilov G. P., *Functional analysis*, ed. Howard L. Silcock, Pergamon Press, Oxford, New York, 1982.
  - [6] Berg J., Lofstrom J., *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, 1976; Russian transl.: Берг Й., Лёфстрём Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, ред. Крючков В. С., Лизоркин П. И., Мир, М., 1980.
  - [7] Smolin U. N., *Vvedenie v teoriyu funktsy deistvitelnoi peremennoi*, FLINTA, M., 2012, (in Russian).]
  - [8] Тиман А. Ф., *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960; English transl.: Timan A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Courier Dover Publications, 1994.
-

**Morozov A. N.**, "Completion of the Kernel of the Differentiation Operator", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 111–120.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-1-111-120

**Abstract.** When investigating piecewise polynomial approximations in spaces  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ , the author considered the spreading of  $k$ -th derivative (of the operator) from Sobolev spaces  $W_1^k$  on spaces that are, in a sense, their successors with a low index less than one. In this article, we continue the study of the properties acquired by the differentiation operator  $\Lambda$  with spreading beyond the space  $W_1^1 / \Lambda : W_1^1 \mapsto L_1$ ,  $\Lambda f = f'$ . The study is conducted by introducing the family of spaces  $Y_p^1$ ,  $0 < p < 1$ , which have analogy with the family  $W_p^1$ ,  $1 \leq p < \infty$ . This approach gives a new perspective for the properties of the derivative. It has been shown, for example, the additivity property relative to the interval of the spreading differentiation operator:

$$\bigcup_{n=1}^m \Lambda(f_n) = \Lambda\left(\bigcup_{n=1}^m f_n\right).$$

Here, for a function  $f_n$  defined on  $[x_{n-1}; x_n]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ,  $\Lambda(f_n)$  was defined. One of the most important characteristics of a linear operator is the composition of the kernel. During the spreading of the differentiation operator from the space  $C^1$  on the space  $W_p^1$  the kernel does not change. In the article, it is constructively shown that jump functions and singular functions  $f$  belong to all spaces  $Y_p^1$  and  $\Lambda f = 0$ . Consequently, the space of the functions of the bounded variation  $H_1^1$  is contained in each  $Y_p^1$ , and the differentiation operator on  $H_1^1$  satisfies the relation  $\Lambda f = f'$ . Also, we come to the conclusion that every function from the added part of the kernel can be logically named singular.

**Keywords:** differentiation operator, kernel, quasinorma

**On the authors:**

Anatoly N. Morozov, [orcid.org/0000-0001-9940-159X](https://orcid.org/0000-0001-9940-159X), PhD,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru