ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 24 № 3(69) 2017

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №3. 2017

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 – 66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 19.06.2017. Дата выхода в свет 30.06.2017. Формат $60 \text{x} 84^1/_8$. Усл. печ. л. 15,8. Уч.-изд. л. 13,5. Объем 134 с. Тираж 46 экз. Свободная цена. Заказ 034/017. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 24 No 3(69) 2017

Founded in 1999
6 issues per year

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia
Website: http://mais-journal.ru, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3. 2017

От редакторов специального выпуска

Бутузов В. Ф., Глызин С. Д., Нефедов Н. Н.

С 31 октября по 3 ноября 2016 года в Москве проходила международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», приуроченная к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова.

Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993 гг.) – выдающийся ученый XX века, заложивший основы целого ряда научных направлений в области математической физики и вычислительной математики. А.Н. Тихонов был одним из главных участников советского атомного проекта, в течение многих лет возглавлял Институт прикладной математики АН СССР, по его инициативе в Московском университете был образован факультет вычислительной математики и кибернетики, первый факультет такого типа в Советском Союзе. Андрей Николаевич стал первым деканом этого факультета. За свои выдающиеся заслуги перед отечеством А.Н. Тихонов был дважды удостоен звания Героя социалистического труда.

На конференции работали 4 секции, тематика которых непосредственно связана с основополагающими работами А.Н. Тихонова.

Перечислим названия секций:

1. Уравнения математической физики.
2. Вычислительная математика и математическое моделирование.
3. Обратные и некорректно поставленные задачи.
4. Асимптотические методы.

В настоящем выпуске журнала представлены работы, доложенные на секции «Асимптотические методы». Большинство этих работ относится к теории сингулярных возмущений и ее приложениям. Активное исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений началось после появления в середине прошлого века трех статей А.Н. Тихонова в журнале «Математический сборник». Им была сформулирована и доказана теорема о предельном переходе в решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, часть которых содержит малые параметры при производной. В последующие годы из этих работ А.Н. Тихонова выросло большое научное направление, получившее название «теория сингулярных возмущений». Такие понятия, как «система тихоновского типа», «теорема о предельном переходе», стали классическими понятиями этой теории.

В статьях данного выпуска журнала отражены последние достижения, связанные с теорией сингулярных возмущений.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 259–279
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 259–279

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279

УДК 517.957

Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия

Антипов Е. А., Волков В. Т.[1], Левашова Н. Т.[1], Нефедов Н. Н.[1]

получена 15 декабря 2016

Аннотация. В настоящей работе проведено исследование решения вида движущегося фронта начально-краевой задачи реакция-диффузия с малым коэффициентом диффузии. Задачи в таких постановках можно использовать для моделирования физических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов, в частности в биофизике или при описании процессов горения. Решение вида фронта – это функция, которая характеризуется тем, что в области её определения существует подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. В нестационарном случае положение переходного слоя изменяется со временем, что, как известно, затрудняет численное решение задачи, а также обоснование корректности численных расчетов. В таком случае необходимым компонентом исследования является аналитический подход. В настоящей работе для аналитического исследования решения поставленной задачи применены асимптотические методы. В частности, при помощи алгоритма Васильевой построено асимптотическое приближение решения в виде разложения по степеням малого параметра, а доказательство существования решения вида движущегося фронта проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств. Используемые методы также позволяют получить уравнение, описывающее движение фронта. С этой целью в области переходного слоя осуществляется переход к локальным координатам. В настоящей работе по сравнению с известными ранее публикациями, касающимися двумерных задач с внутренними переходными слоями, метод перехода к локальным координатам в окрестности фронта был модифицирован, что привело к упрощению алгоритма определения уравнения движения кривой.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия, двумерный движущийся фронт, асимптотическое представление, малый параметр, асимптотический метод дифференциальных неравенств

Для цитирования: Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 259–279.

Об авторах: Антипов Евгений Александрович, orcid.org/0000-0001-6734-683X, зам. нач. упр. информатизации, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Волков Владимир Тарасович, orcid.org/0000-0002-4205-4141, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: volkovvt@mail.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

В настоящей работе проведено исследование решения вида движущегося фронта начально-краевой задачи реакция-диффузия с малым коэффициентом диффузии. Задачи в таких постановках можно использовать для моделирования физических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов, в частности в биофизике или при описании процессов горения. Решение вида фронта – это функция, которая характеризуется тем, что в области её определения существует подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. В нестационарном случае положение переходного слоя изменяется со временем, что, как известно, затрудняет численное решение задачи, а также обоснование корректности численных расчетов. В таком случае необходимым компонентом исследования является аналитический подход. В настоящей работе для аналитического исследования решения поставленной задачи применены асимптотические методы. В частности, при помощи алгоритма Васильевой [1] построено асимптотическое приближение решения в виде разложения по степеням малого параметра, а доказательство существования решения вида движущегося фронта проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого для параболических уравнений продемонстрировано в работах [2–7]. Используемые методы также позволяют получить уравнение, описывающее движение фронта. С этой целью в области переходного слоя осуществляется переход к локальным координатам. В настоящей работе по сравнению с известными ранее публикациями [8–11], касающимися двумерных задач с внутренними переходными слоями, метод перехода к локальным координатам в окрестности фронта был модифицирован, что привело к упрощению алгоритма определения уравнения движения кривой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения реакция-диффузия.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u,x,y,\varepsilon), \quad x\in\mathbb{R},\;\; y\in(0,a),\;\; t\in(0,T],\\
&u_y(x,0,t,\varepsilon) = u_y(x,a,t,\varepsilon) = 0, \;\; x\in\mathbb{R},\;\; t\in[0,T],\\
&u(x,y,t,\varepsilon) = u(x+L,y,t,\varepsilon), \;\; x\in\mathbb{R},\;\; y\in[0,a],\;\; t\in[0,T],\\
&u(x,y,0,\varepsilon) = u_{init}(x,y), \;\; x\in\mathbb{R},\;\; y\in[0,a].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функция $f(u,x,y,\varepsilon)$ – L – периодическая по переменной x, достаточно гладкая в области $I_u\times\bar{D}$, где I_u – допустимый интервал значений u, $\bar{D} = \{(x,y) : \mathbb{R}\times[0,a]\}$, $u_{init}(x,y)$ – непрерывная функция в $\bar{D}$, L – периодическая по переменной x.

Будем рассматривать задачу в постановке (1), считая что выполнен ряд условий.

Условие C1.

Пусть функция $f(u,x,y,\varepsilon)$ такова, что вырожденное уравнение $f(u,x,y,0)=0$ имеет в области $\bar{D}$ три изолированных корня $u=\varphi^{(\mp)}(x,y)$, $u=\varphi^{(0)}(x,y)$, причем всюду в области $\bar{D}$ выполняются неравенства $\varphi^{(-)}(x,y) < \varphi^{0}(x,y) < \varphi^{(+)}(x,y)$ и

$f_u\left(\varphi^{(\mp)}(x,y),x,y,0\right)>0,\ f_u\left(\varphi^0(x,y),x,y,0\right)<0.$

Мы будем исследовать решение задачи (1), которое имеет вид движущегося фронта, а именно, такое решение, которое в каждый момент времени вблизи прямой $y=0$ близко к поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$, а в близи прямой $y=a$ близко к поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ и резко изменяется от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности некоторой кривой $y=h(x,t)$, достаточно удаленной от границ $y=0$ и $y=a$. В этом случае говорят, что решение задачи (1) содержит внутренний переходный слой в окрестности этой кривой.

Будем считать, что $y=h(x,t)$ – это та кривая, на которой решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1) в каждый момент времени принимает значение, равное $\varphi^0(x,y)$.

Кривая $y=h(x,t)$ в каждый момент времени делит область $\bar{D}$ на две части: $\bar{D}^{(-)}=\{(x,y):\mathbb{R}\cup[0;h(x,t)]\}$ и $\bar{D}^{(+)}=\{(x,y):\mathbb{R}\cup[h(x,t);a]\}$.

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l,r) с помощью соотношений

$$x=l-r\sin\alpha\quad y=h(l,t)+r\cos\alpha, \tag{2}$$

где

$$\sin\alpha=\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \tag{3}$$

α – угол между осью y и нормалью к кривой $y=h(x,t)$, проведенной в область $y>h(x,t)$ в каждый момент времени t, r – расстояние от этой кривой по нормали к ней. Будем считать что $r>0$ в области $D^{(+)}$, $r<0$ в области $D^{(-)}$, $r=0$ на кривой $y=h(x,t)$, l – x – координата точки на этой кривой, из которой нормаль проводится; производные функции $h(x,t)$ в выражении (3) берутся при $x=l$.

Перепишем дифференциальные операторы, входящие в уравнение (1), в переменных r,l,t.

$$\nabla=\left\{-\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}}\frac{\partial}{\partial l};\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{h_x\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}}\frac{\partial}{\partial l}\right\}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)=\\&=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}}\left(rh_{xt}-h_th_x\sqrt{1+h_x^2}\right)\frac{\partial}{\partial l};\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta=&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{h_{xx}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}}\frac{\partial}{\partial r}+\\&+\frac{1+h_x^2}{\left(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}\right)^3}\left(2rh_xh_{xx}^2+h_xh_{xx}\left(1+h_x^2\right)^{\frac32}-rh_{xxx}\left(1+h_x^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial l}+\\&+\frac{\left(1+h_x^2\right)^2}{\left(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac32}\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

Производные функции $h(x,t)$, входящие в выражения (4) – (6), берутся при $x = l$. Введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}. \tag{7}$$

В переменных ξ, l, t дифференциальный оператор в уравнении (1) принимает вид

$$\varepsilon^2\Delta - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2}\varepsilon^i L_i,$$

где L_i – дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным ξ и l.

1.1. Присоединенные системы

Запишем так называемое присоединенное уравнение для задачи (1):

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0),$$

которое будем рассматривать отдельно на каждой из полупрямых $\xi \le 0$ и $\xi \ge 0$, считая переменные x и t, а также функцию $h(x,t)$ параметрами. В каждом случае можно свести это уравнение к соответствующей присоединенной системе уравнений:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = \Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = W\Phi + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \tag{8}$$

где через W обозначено следующее выражение:

$$W = \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}. \tag{9}$$

Точки $(\varphi^{(-)}, 0)$ и $(\varphi^{(+)}, 0)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ являются точками покоя типа седла системы (8) в силу неравенства $f_u\left(\varphi^{(\mp)}(x,y), x, y, 0\right) > 0$ из условия C2.

Разделив второе уравнение системы (8) на первое, а затем домножив обе части полученного равенства на Φ, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{u}, h(x,t), W)$.

При всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\begin{aligned}&\Phi^{(-)}\frac{\partial\Phi^{(-)}}{\partial\tilde{u}} = W\Phi^{(-)} + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \quad \varphi^{(-)}(x, h(x,t)) < \tilde{u} \leqslant \varphi^0(x, h(x,t)),\\ &\Phi^{(-)}\left(\varphi^{(-)}(x, h(x,t)), h(x,t), W\right) = 0\end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned}&\Phi^{(+)}\frac{\partial\Phi^{(+)}}{\partial\tilde{u}} = W\Phi^{(+)} + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \quad \varphi^0(x, h(x,t)) \leqslant \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x,t)),\\ &\Phi^{(+)}\left(\varphi^{(+)}(x, h(x,t)), h(x,t), W\right) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Условие C2.

Пусть при всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ существует такое семейство кривых $h(x,t)$, что определены решения задач Коши (10) и (11), где через W обозначено выражение (9), причем выполняются неравенства:

$$\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W) > 0, \quad \varphi^{(-)}(x, h(x,t)) < \tilde{u} \leqslant \varphi^0(x, h(x,t));$$
$$\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W) > 0, \quad \varphi^0(x, h(x,t)) \leqslant \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x,t)).$$

Условия существования решения задач типа (10) и (11) сформулированы в [12].

Условие C2 гарантирует существование на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ сепаратрисы $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$, выходящей из седла $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$, и сепаратрисы $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$, входящей в седло $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$.

Введем функцию

$$H_0(h(x,t), t, W) = \Phi^{(-)}(\varphi^0(x, h(x,t)), h(x,t), W) - \Phi^{(+)}(\varphi^0(x, h(x,t)), h(x,t), W).$$

Для каждого набора параметров x, t, $h(x,t)$ и W величина $H_0(h(x,t), t, W)$ равна расстоянию между сепаратрисами $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ при $\tilde{u} = \varphi^0(x, h(x,t))$.

Условие C3.

Пусть для всех значений $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ существует функция $h_0(x,t)$ – решение уравнения

$$H_0(h_0(x,t), t, W_0) = 0, \quad \text{где} \quad W_0 = \frac{h_{0t}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}}. \tag{12}$$

Условие C3 означает пересечение при $h(x,t) = h_0(x,t)$ сепаратрис $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

В некоторых случаях, например, если функция $f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0)$ представляет собой кубический многочлен, уравнение кривой $h_0(x,t)$ можно получить в явном виде [11]. В остальных случаях задачу можно решать численно.

2. Построение асимптотического приближения решения

Асимптотическое приближение $U(x,y,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$:

$$U = \begin{cases} U^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}^{(-)} \times [0,T], \\ U^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}^{(+)} \times [0,T]. \end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ будем представлять в виде сумм трех слагаемых

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}(x, \eta^{(\mp)}, \varepsilon). \tag{13}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического представления, $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, ξ – растянутая переменная вблизи кривой локализации переходного слоя, определенная равенством (7),

$\Pi^{(\mp)}(x, \eta^{(\mp)}, \varepsilon)$ – функции, описывающие поведение решения вблизи границ $y = 0$ и $y = a$, соответственно. Здесь $\eta^{(-)} = \dfrac{y}{\varepsilon}$, $\eta^{(+)} = \dfrac{y-a}{\varepsilon}$. Каждое слагаемое в (13) представляет собой разложение по степеням малого параметра ε, в частности:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x, y) + \dots, \tag{14}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) + \dots \tag{15}$$

Кривую $y = h(x, t)$ также будем искать в виде разложения по степеням параметра ε:

$$h(x, t) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \varepsilon^2 h_2(x, t) + \dots \tag{16}$$

Функции $U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon)$ и их производные по направлению нормали к кривой $y = h(x, t)$ будем непрерывно сшивать на этой кривой в каждый момент времени t:

$$U^{(-)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = U^{(+)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = \varphi^0(x, h(x,t)), \tag{17}$$

$$\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon). \tag{18}$$

2.1. Регулярная часть асимптотики

Представляя разложения (14) в равенства

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y^2} \right) = f(\bar{u}^{(\mp)}, x, y, \varepsilon),$$

раскладывая функции в правой части по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать уравнения для функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y), i = 0, 1 \dots$.

В порядке ε^0 получим вырожденное уравнение

$$f(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, y, 0) = 0.$$

Согласно условию C1 это уравнение разрешимо, и функции $\varphi^{(-)}(x, y)$ и $\varphi^{(+)}(x, y)$ являются L-периодическими по переменной x решениями этого уравнения.

Положим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x, y) = \varphi^{(-)}(x, y),\ (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad \bar{u}_0^{(+)}(x, y) = \varphi^{(+)}(x, y),\ (x, y) \in \bar{D}^{(+)}.$$

Далее для сокращения записей введем обозначение

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y) := f_u(\varphi^{(\mp)}(x, y), x, y, 0), \tag{19}$$

а также обозначение $\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x, y)$, имеющее аналогичный смысл. Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}, i = 1, 2 \dots$ определяются как решения уравнений

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y) \bar{u}_i^{(\mp)} = \bar{f}_i^{(\mp)}(x, y),$$

где $\bar{f}_i^{(\mp)}(x, y)$ – известные функции. В частности, $\bar{f}_1^{(\mp)}(x, y) = -\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x, y)$.

2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2}\varepsilon^i L_i\right) Q^{(\mp)} = \\
&= f\left(\bar{u}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha, \varepsilon\right) - \\
&- f\left(\bar{u}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha), l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha, \varepsilon\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя в эти равенства суммы (14) и (15), раскладывая входящие в эти равенства функции по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$, $\quad i = 0, 1, \ldots$ В качестве дополнительных условий потребуем убывания на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0, \tag{21}$$

а также выполнение условий при $\xi = 0$, которые следуют из равенства (17). Заметим, что в силу достаточной удаленности кривой $h(x,t)$ от границ $y = 0$ и $y = a$, пограничные функции в окрестности этой кривой и, в частности, при $\xi = 0$ экспоненциально малы и не влияют на условия непрерывного сшивания. Подставим в равенство (17) суммы (14) и (15), перепишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_0^{(-)}(l,h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(l,h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(-)}(0,l,h(l,t),t) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0,l,h(l,t),t) + \ldots = \\
&= \bar{u}_0^{(+)}(l,h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(+)}(l,h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(+)}(0,l,h(l,t),t) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0,l,h(l,t),t) + \ldots = \\
&= \varphi^0(l,h(l,t)).
\end{aligned} \tag{22}$$

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в равенствах (20) и (22) с учетом условия (21), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi^2} - W\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi} = f\left(\varphi^{(\mp)}(l,h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}, l, h(l,t), 0\right), \\
&\varphi^{(\mp)}(l,h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}(0,l,h(l,t),t) = \varphi^0(l,h(l,t)), \\
&Q_0^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где использовано обозначение (9).

Задачу для функции $Q_0^{(-)}$ будем рассматривать при $\xi \leqslant 0$, а для функции $Q_0^{(+)}$ – при $\xi \geqslant 0$.

Введем обозначение

$$\tilde{u}(\xi, h(l,t)) := \begin{cases} \varphi^{(-)}(l,h(l,t)) + Q_0^{(-)}(\xi,l,h(l,t),t), & \xi \leqslant 0, \\ \varphi^{(+)}(l,h(l,t)) + Q_0^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t), & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{24}$$

Перепишем уравнения и условия при $\xi = 0$ задач (23), используя это обозначение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}, l, h(l,t), 0), \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)). \tag{25}$$

Уравнение (25) будем решать отдельно на полупрямой $\xi < 0$ с условием

$$\tilde{u}(-\infty, h(l,t)) = \varphi^{(-)}(l, h(l,t)) \tag{26}$$

и на полупрямой $\xi > 0$ с условием

$$\tilde{u}(+\infty, h(l,t)) = \varphi^{(+)}(l, h(l,t)). \tag{27}$$

От дифференциальных уравнений второго порядка в задачах (25), (26) и (25), (27) перейдем к эквивалентным системам уравнений первого порядка, совпадающим с системами (8), а от них тем же способом, что и в пункте 1.1., придем к дифференциальным уравнениям первого порядка относительно функций $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$. Эти функции мы определим как

$$\begin{aligned} \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \leqslant 0, \\ \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \geqslant 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$ совпадают с уравнениями из задач Коши (10) и (11) соответственно. Определим эти функции как решения указанных задач Коши.

Из существования функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$ вытекает существование решений начальных задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(l,t), W), \ \ \xi < 0, \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(l,t), W), \ \ \xi > 0, \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)), \end{aligned}$$

для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\xi \to \mp\infty} \left|\tilde{u}(\xi, h(l,t)) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l,t))\right| = 0.$$

Кроме того, можно доказать справедливость следующих оценок:

$$\left|\tilde{u}(\xi, h(l,t)) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l,t))\right| < Ce^{-\varkappa_0 \xi},$$

где C, $\varkappa_0$ – положительные константы.

Для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$ (см. (24)) справедливы оценки

$$Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) < Ce^{-\varkappa_0 \xi} \tag{29}$$

и аналогичные оценки имеют место для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$.

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W) := \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W).$$

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Приравнивая слагаемые при ε^1 в равенствах (20), получим следующие уравнения для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi, l, t) Q_1^{(\mp)} = \tilde{f}_1^{(\mp)}(\xi, l, t), \tag{30}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi, l, t) = f_u(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), l, h(l,t), 0) \tag{31}$$

и

$$\tilde{f}_1^{(\mp)}(\xi, l, t) = \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial l} + \tilde{f}_u(\xi, l, t)\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l,t)) +$$
$$+ \left(\tilde{f}_u(\xi, l, t) - \bar{f}_u^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\left(-\varphi_x^{(\mp)}(l, h(l,t))\xi \sin\alpha + \varphi_y^{(\mp)}(l, h(l,t))\xi\cos\alpha\right) -$$
$$- \left(\tilde{f}_x(\xi, l, t) - \bar{f}_x^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\xi\sin\alpha + \left(\tilde{f}_y(\xi, l, t) - \bar{f}_y^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\xi\cos\alpha + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, l, t).$$

Здесь обозначения $\tilde{f}_x(\xi, l, t)$, $\tilde{f}_y(\xi, l, t)$, $\tilde{f}_\varepsilon(\xi, l, t)$ имеют смысл, аналогичный (31), а $\bar{f}_x(l, h(l,t))$, $\bar{f}_y(l, h(l,t))$ – смысл, аналогичный (19).

Из равенства (22) в порядке ε^1 следуют краевые условия

$$Q_1^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) + \bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l,t)) = 0. \tag{32}$$

Добавим также условия на бесконечности

$$Q_1^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0. \tag{33}$$

Решения задач (30), (32), (33) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W)}{\Phi^{(\mp)}(0, h(l,t), W)} +$$
$$+ \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W)\int\limits_0^\xi \frac{\mathrm{e}^{Ws}ds}{(\Phi^{(\mp)}(s, h(l,t), W))^2}\int\limits_{\mp\infty}^s \mathrm{e}^{-W\eta}\Phi(\eta, h(l,t), W)\tilde{f}_1^{(\mp)}(\eta, l, t)d\eta. \tag{34}$$

2.2.3. Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции переходного слоя произвольного порядка $k = 2, 3, \ldots$ определяются как решения задач

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi, l, t) Q_k^{(\mp)} = \tilde{f}_k^{(\mp)}(\xi, l, t), \\ Q_k^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) + \bar{u}_k^{(\mp)}(l, h(l,t)) = 0, \quad Q_k^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0,\end{gathered} \tag{35}$$

где $\tilde{f}_k^{(\mp)}(\xi, l, t)$ – известные функции. Решая задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» на полупрямой $\xi \leqslant 0$, и задачи с верхним индексом «$(+)$» на полупрямой $\xi \geqslant 0$, можно получить явные выражения для функций $Q_k^{(\mp)}$, аналогичные (34).

2.3. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $h_i(l,t) \quad i=1,2,\dots$ разложения (16) будем определять из условий сшивания (18) производных по направлению нормали к кривой $h(x,t)$. Оператор дифференцирования по направлению нормали имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n}=(\mathbf{n},\nabla)=-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y},$$

где $\mathbf{n}=\{-\sin\alpha,\quad \cos\alpha\}$, (см. (3)).

Запишем этот оператор в переменных $r,\ l,\ t$ и $\xi,\ l,\ t$, учитывая выражение (4) для оператора ∇ в этих координатах:

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

С учетом последнего выражения и разложений (14), (15) перепишем условия сшивания производных (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))-\varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\ldots=\\
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))-\varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\ldots.
\end{aligned}\tag{36}$$

Введем функцию $H(l,h(l,t),t,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
H(l,h(l,t),t,\varepsilon)&:=\varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon)=\\
&=H_0(l,h(l,t),t)+\varepsilon H_1(l,h(l,t),t)+\varepsilon^2H_2(l,h(l,t),t)+\ldots
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&H_0(l,h(l,t),t)=\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)-\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t),\\
&H_1(l,h(l,t),t)=-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)-\\
&-\left(-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)\right)
\end{aligned}\tag{37}$$

и т.д.

Условие (36) C^1-сшивания выражается равенством

$$H(l,h(l,t),t,\varepsilon)=0.$$

В порядке ε^0 с учетом обозначений (24) и (28) это условие дает равенство

$$H_0(l,h(l,t),t)=\Phi^{(-)}\left(\varphi^0(l,h(l,t)),h(l,t),W\right)-\Phi^{(+)}\left(\varphi^0(l,h(l,t)),h(l,t),W\right)=0. \quad (38)$$

Согласно условию C3 существует функция $h_0(l,t)$ – решение этого уравнения. Будем считать, что эта функция является первым слагаемым в разложении (16).

Запишем условия сшивания (37) в порядке ε^1 с учетом разложения (16):

$$h_{1t}(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(l,h_0(l,t),t)+h_{1x}(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(l,h_0(l,t),t)+h_1(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h}(l,h_0(l,t),t)+ \\ +H_1(l,h_0(l,t),t)=0.$$

Здесь была учтена зависимость функции H_0 от параметров h_t и h_x, входящих в выражение для W, (см. (9)).

Определим функцию $h_1(x,t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t)+\frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t)+h_1\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t)+ \\ +H_1(x,h_0(x,t),t)=0. \quad (39)$$

с дополнительными условиями

$$h_1(x,t)=h_1(x+L,t); \quad h_1(x,0)=0. \quad (40)$$

Условие C4. Пусть при $(x,t)\in D$ существует решение уравнения (39) с условиями (40) и пусть при всех $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\dfrac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t)>0$.

Уравнения для коэффициентов $h_k(x,t)$ разложения (16) получаются из условий гладкого сшивания (36). Функции $h_k(x,t)$ определяются как решения задач

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t)+\frac{\partial h_k}{\partial x}\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t)+h_k\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t)+ \\ +G_k(x,h_0(x,t),t)=0,\ \ h_k(x,t)=h_k(x+L,t);\quad h_k(x,0)=0,$$

где $G_k(x,h_0(x,t),t)$ – известные функции.

2.4. Функции пограничных слоев

Функции $\Pi^{(-)}(x,\eta^{(-)},\varepsilon)$ пограничного слоя в окрестности прямой $y=0$ и $\Pi^{(+)}(x,\eta^{(+)},\varepsilon)$ пограничного слоя в окрестности прямой $y=a$ строятся стандартным образом [1] в виде разложения по степеням ε. Эти разложения не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана. Функции $\Pi_i^{(-)}(x,\eta^{(-)})$, $i=1,2,\ldots$ экспоненциально убывают при $\eta^{(-)}\to+\infty$, а функции $\Pi_i^{(+)}(x,\eta^{(+)})$, $i=1,2,\ldots$ экспоненциально убывают при $\eta^{(+)}\to-\infty$.

2.5. Асимптотическое представление решения

Определим члены рядов (14) – (15), а также функции $\Pi_i^{(\mp)}$ до номера k включительно и положим

$$\hat{h}_k(x,t) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i h_i(x,t). \tag{41}$$

В окрестности кривой $\hat{h}_k(x,t)$ перейдем к локальным координатам $(l,\hat{r})$ с помощью соотношений, аналогичных (2), и введем растянутую переменную $\hat{\xi} = \dfrac{\hat{r}}{\varepsilon}$. Кривая $\hat{h}_k(x,t)$ разделяет область $\bar{D}$ на подобласти $\bar{D}_k^{(-)} : \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R} \times [0;\hat{h}_k(x,t)] \times [0;T]\right\}$ и $\bar{D}_k^{(+)} : \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R} \times [\hat{h}_k(x,t),a] \times [0;T]\right\}$.

Составим суммы

$$U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x,y) + Q_i^{(-)}\left(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t\right) + \Pi_i^{(-)}\left(x, \eta^{(-)}\right)\right),$$
$$(x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0,T],$$

$$U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x,y) + Q_i^{(+)}\left(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t\right) + \Pi_i^{(+)}\left(x, \eta^{(+)}\right)\right),$$
$$(x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0,T]. \tag{42}$$

Положим

$$U_k = \begin{cases} U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0,T], \\ U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0,T]. \end{cases}$$

Функция $U_k(x,y,t,\varepsilon)$ по своему построению удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ всюду в области $\bar{D}$, за исключением кривой $h(x,t)$, на которой она и её производная претерпевают разрывы – скачки порядков $O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$ и $O\left(\varepsilon^{k}\right)$ соответственно.

3. Обоснование асимптотики

Для доказательства существования решения задачи (1) и оценки точности его асимптотического приближения используется асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [2–7]). Согласно этому методу решение задачи (1) существует, если существуют непрерывные функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$, называемые соответственно нижним и верхним решениями задачи (1), для которых выполняется следующая система неравенств [13, 14]:

(У1) Условие упорядоченности нижнего и верхнего решений:

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,y,t,\varepsilon), \quad (x,y,t) \in \bar{D} \times [0,T],\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

(У2) Действие дифференциального оператора уравнения (1) на нижнее и верхнее решения:

$$L[\beta] := \varepsilon^2 \Delta\beta - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} + f(\beta, x, y, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant L[\alpha]$$

для почти всех точек $(x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T]$, за исключением тех подмножеств нулевой меры, на которых функции $\alpha(x, y, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, y, t, \varepsilon)$ не являются гладкими.

(У3) Условия на границах области D :

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, 0, t, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, 0, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, a, t, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, a, t, \varepsilon),$$
$$x \in \mathbb{R},\ t \in [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

$$\alpha(x, y, t, \varepsilon) = \alpha(x + L, y, t, \varepsilon), \quad \beta(x, y, t, \varepsilon) = \beta(x + L, y, t, \varepsilon),$$
$$(x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

(У4) Условия в начальный момент времени:

Пусть функция $u_{init}(x, y, \varepsilon)$ в начальном условии задачи (1) такова, что выполнены следующие неравенства:

$$\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leqslant u_{init}(x, y, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, 0, \varepsilon),\ (x, y) \in \bar{D},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

(У5) Условия скачка производных нижнего и верхнего решений по направлению нормали к кривым, на которых эти решения не являются гладкими:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n}\,(x, h_\alpha(x, t) + 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \alpha}{\partial n}\,(x, h_\alpha(x, t) - 0, t, \varepsilon) \geqslant 0,$$

где $h_\alpha(x, t)$ – кривая, на которой нижнее решение не является гладким,

$$\frac{\partial \beta}{\partial n}\,(x, h_\beta(x, t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \beta}{\partial n}\,(x, h_\beta(x, t) + 0, t, \varepsilon) \geqslant 0,$$

где $h_\beta(x, t)$ – кривая, на которой верхнее решение не является гладким.

Известно [13, 14], что при выполнении условий (У1) – (У5) существует функция $u(x, y, t, \varepsilon)$ – решение задачи (1), для которой выполняются неравенства

$$\alpha(x, y, t, \varepsilon) \leqslant u(x, y, t, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условий (С1) – (С4) для любой достаточно гладкой начальной функции* $u_{init}(x, y, \varepsilon)$*, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leqslant u_{init}(x, y, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, 0, \varepsilon),$$

существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ *задачи* (1)*, которое при любом* $t \in [0; T]$ *заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция* $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ *является равномерным в области* $\bar{D}$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$.

3.1. Построение верхнего и нижнего решений

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию асимптотических представлений (42). Будем считать, что кривая $h_\beta(x,t)$, определяющая положение внутреннего переходного слоя для верхнего решения, задается следующим образом:

$$h_\beta(x,t) = \hat{h}_{n+1}(x,t) - \varepsilon^{n+1}\delta(x,t), \tag{43}$$

где $\hat{h}_{n+1}(x,t)$ – сумма (41) при $k = n+1$, $\delta(x,t)$ – положительная функция, которая выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие (У5) для верхнего решения.

В окрестности кривой $h_\beta(x,t)$ перейдем к локальным координатам (l, r_β) согласно следующим равенствам:

$$x = l - r_\beta \sin\alpha_\beta, \quad y = h_\beta(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta = \hat{h}_{n+1}(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta - \varepsilon^{n+1}\delta(l,t),$$

где r_β – расстояние от кривой $h_\beta(x,t)$ вдоль нормали к ней, l – координата точки на оси x, из которой эта нормаль проводится, $\cos\alpha_\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(h_\beta)^2_x}}$, $\sin\alpha_\beta = \dfrac{(h_\beta)_x}{\sqrt{1+(h_\beta)^2_x}}$, а производные функции h_β в каждый момент времени t берутся при $x = l$.

Верхнее решение задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}_\beta$: $\Big\{(x,y,t) \in \mathbb{R}\times[0;\hat{h}_\beta(x,t)]\times[0;T]\Big\}$ и $\bar{D}^{(+)}_\beta$: $\Big\{(x,y,t)\in\mathbb{R}\times[\hat{h}_\beta(x,t),a]\times[0;T]\Big\}$, на которые кривая $h_\beta(x,t)$ делит область $\bar{D}$:

$$\beta(x,y,t,\varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}^{(-)}_\beta\times[0,T], \\ \beta^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}^{(+)}_\beta\times[0,T]. \end{cases}$$

Функции $\beta^{(-)}(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x,y,t,\varepsilon)$ будем сшивать на кривой $h_\beta(x,t)$, так чтобы функция $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ была непрерывна на этой кривой и принимала значение, равное $\varphi^0(l, h_\beta(l,t))$:

$$\beta^{(-)}(l,h_\beta(l,t),t,\varepsilon) = \beta^{(+)}(l,h_\beta(l,t),t,\varepsilon) = \varphi^0(l,h_\beta(l,t)). \tag{44}$$

В окрестности кривой $h_\beta(x,t)$ введем растянутую переменную $\xi_\beta = \dfrac{r_\beta}{\varepsilon}$.

Функции $\beta^{(-)}$ и $\beta^{(+)}$ будем строить как модификации асимптотических представлений (42).

$$\begin{aligned} \beta^{(-)} &= U^{(-)}_{n+1}\Big|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(-)} + q^{(-)}(\xi_\beta,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi^{(-)}_\beta\left(x,\eta^{(-)}\right), \\ &\qquad (x,y,t)\in\bar{D}^{(-)}_\beta\times[0,T],\ \xi_\beta\leqslant 0,\ \eta^{(-)}\geqslant 0; \\ \beta^{(+)} &= U^{(+)}_{n+1}\Big|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(+)} + q^{(+)}(\xi_\beta,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi^{(+)}_\beta\left(x,\eta^{(+)}\right), \\ &\qquad (x,y,t)\in\bar{D}^{(+)}_\beta\times[0,T],\ \xi_\beta\geqslant 0,\ \eta^{(+)}\leqslant 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь через $U^{(\mp)}_{n+1}$ обозначены функции (42) при $k = n+1$, в которых аргумент ξ Q-функций заменен на ξ_β, а функция $\hat{h}_{n+1}(x,t)$ – на $h_\beta(x,t)$.

Величины $\mu^{(\mp)}$ выбираются далее таким образом, чтобы выполнялись условия (У1) и (У2).

Функции $\Pi_\beta^{(\mp)}\left(x, \eta^{(\mp)}\right)$ определяются из тех же уравнений, что и $\Pi_i^{(\mp)}\left(x, \eta^{(\mp)}\right)$. Краевые условия при $\eta^{(\mp)} = 0$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись равенства в условиях (У3).

Функции $q^{(\mp)}(\xi_\beta, t)$ устраняют невязки порядка ε^{n+1} в выражении $L[\beta]$ и в условии непрерывного сшивания верхнего решения (44), возникшие в результате модификации регулярной части – добавок $\mu^{(\mp)}$. Определим их как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 q^{(\mp)}}{\partial {\xi_\beta}^2} - \frac{(h_\beta)_t}{\sqrt{1+(h_\beta)_x^2}} \frac{\partial q^{(\mp)}}{\partial \xi_\beta} - \tilde{f}_u(\xi_\beta, l, t) q^{(\mp)} = \left(\tilde{f}_u(\xi_\beta, l, t) - \bar{f}_u^{(\mp)}(l, h_\beta(l,t))\right)\mu^{(\mp)},$$

где производные функции h_β в каждый момент времени t берутся при $x = l$.

Граничные условия для $q^{(\mp)}(\xi_\beta, t)$ при $\xi_\beta = 0$ следуют из условия непрерывного сшивания верхнего решения (44) с учетом условий при $\xi_\beta = 0$ для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi_\beta, l, h(l,t))$, $i = 0, 1, ..., n+1$ (см. (22)):

$$q^{(\mp)}(0, t) = -\mu^{(\mp)}, \quad t \in [0; T].$$

Потребуем еще выполнения условий на бесконечности:

$$q^{(\mp)}(\xi_\beta, t) \to 0 \text{ при } \xi_\beta \to \mp\infty, \quad t \in [0; T].$$

Функции $q^{(\mp)}(\xi_\beta, t)$ имеют экспоненциальные оценки типа (29).

Нижнее решение $\alpha(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1) построим аналогично верхнему. Зададим кривую $h_\alpha(x,t)$, определяющую положение внутреннего переходного слоя для нижнего решения, следующим образом:

$$h_\alpha(x,t) = \hat{h}_{n+1}(x,t) + \varepsilon^{n+1}\delta(x,t),$$

где $\delta(x,t)$ – та же функция, что и в (43).

В окрестности кривой $h_\alpha(x,t)$ перейдем к локальным координатам (l, r_α), согласно равенствам

$$x = l - r_\alpha \sin\alpha_\alpha, \quad y = h_\alpha(l,t) + r_\alpha \cos\alpha_\alpha = \hat{h}_{n+1}(l,t) + r_\alpha\cos\alpha_\alpha + \varepsilon^{n+1}\delta(l,t),$$

где величины $\sin\alpha_\alpha$ и $\cos\alpha_\alpha$ определяются по аналогии с такими же величинами для верхнего решения.

Нижнее решение задачи (1) будем строить отдельно в областях $\bar{D}_\alpha^{(-)}$ и $\bar{D}_\alpha^{(+)}$, на которые кривая $h_\alpha(x,t)$ делит область $\bar{D}$:

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon) = \begin{cases} \alpha^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_\alpha^{(-)} \times [0,T], \\ \alpha^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_\alpha^{(+)} \times [0,T]. \end{cases}$$

Области $\bar{D}_\alpha^{(\mp)}$ определяются по аналогии $\bar{D}_\beta^{(\mp)}$.

Функции $\alpha^{(-)}(x,y,t,\varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x,y,t,\varepsilon)$ будем сшивать на кривой $h_\alpha(x,t)$, так чтобы функция $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ была непрерывна на этой кривой и принимала значение, равное $\varphi^0(l, h_\alpha(l,t)$:

$$\alpha^{(-)}(l, h_\alpha(l,t), t, \varepsilon) = \alpha^{(+)}(l, h_\alpha(l,t), t, \varepsilon) = \varphi^0(l, h_\alpha(l,t)).$$

Нижнее решение будем строить таким образом, чтобы при том же самом $\delta(x,t)$, что и для верхнего решения, выполнялось условие (У5) для нижнего решения.

Функции $\alpha^{(-)}$, $\alpha^{(+)}$ будем строить как модификацию сумм из (42), при $k = (n+1)$:

$$\begin{aligned}
\alpha^{(-)} &= U_{n+1}^{(-)}\Big|_{\xi_\alpha} - \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(-)} + q^{(-)}(\xi_\alpha,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\alpha^{(-)}\left(x,\eta^{(-)}\right),\\
&\qquad (x,y,t)\in \bar{D}_\alpha^{(-)}\times[0,T],\ \xi_\alpha\leqslant 0,\ \eta^{(-)}\geqslant 0;\\
\alpha^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)}\Big|_{\xi_\alpha} - \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(+)} + q^{(+)}(\xi_\alpha,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\alpha^{(+)}\left(x,\eta^{(+)}\right),\\
&\qquad (x,y,t)\in \bar{D}_\alpha^{(+)}\times[0,T],\ \xi_\alpha\geqslant 0,\ \eta^{(+)}\leqslant 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь $\mu^{(\mp)}$ – те же величины, что и в выражениях для верхнего решения, а $q^{(\mp)}(\xi_\alpha,t)$ определяются из таких же задач, что и для верхнего решения, в которых переменная ξ_β заменена на переменную $\xi_\alpha = \dfrac{r_\alpha}{\varepsilon}$.

Функции $\Pi_\alpha^{(\mp)}\left(x,\eta^{(\mp)}\right)$ определяются из тех же уравнений, что и $\Pi_i^{(\mp)}\left(x,\eta^{(\mp)}\right)$. Краевые условия при $\eta^{(\mp)} = 0$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись равенства в условиях (У3).

3.2. Проверка дифференциальных неравенств

Лемма. Функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (У1) – (У5), то есть являются верхним и нижним решениями задачи (1).

Для доказательства леммы следует проверить выполнение для функций $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ условий (У1) – (У5).

Проверим выполнение условия (У1) упорядоченности нижнего и верхнего решения.

Установим связь между параметрами, от которых зависят функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$.

Из равенств

$$\begin{aligned}
y &= h_\beta(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta = h_\alpha(l,t) + r_\alpha\cos\alpha_\alpha =\\
&= \hat{h}_{n+1}(l,t) - \varepsilon^{n+1}\delta(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta = \hat{h}_{n+1}(l,t) + \varepsilon^{n+1}\delta(l,t) + r_\alpha\cos\alpha_\alpha,
\end{aligned}$$

справедливых в окрестности кривой $h(x,y)$, а также из оценок

$$\cos\alpha_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\hat{h}_{n+1})_x^2}} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), \quad \cos\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(\hat{h}_{n+1})_x^2}} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

которые вытекают из определения кривых $h_\alpha(x,t)$ и $h_\beta(x,t)$ и величин $\cos\alpha_\alpha$ и $\cos\alpha_\beta$, с учетом определения растянутых переменных ξ_α и ξ_β следует равенство

$$\xi_\beta - \xi_\alpha = 2\varepsilon^n\delta(l,t)\sqrt{1+(\hat{h}_{n+1})_x^2} + O(\varepsilon^{n+1}).$$

В каждый момент времени рассмотрим три области, где разность верхнего и нижнего решений выражается различным образом:

$$\beta-\alpha=\begin{cases}\beta^{(-)}-\alpha^{(-)}, & x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y<h_\beta(x,t),\ t\in[0,T],\\ \beta^{(+)}-\alpha^{(-)}, & x\in\mathbb{R},\ h_\beta(x,t)\leqslant y\leqslant h_\alpha(x,t),\ t\in[0,T],\\ \beta^{(+)}-\alpha^{(+)}, & x\in\mathbb{R},\ h_\alpha(x,t)<y\leqslant a,\ t\in[0,T].\end{cases}$$

Рассмотрим область $x\in\mathbb{R},\ h_\beta(x,t)\leqslant y\leqslant h_\alpha(x,t),\ t\in[0,T]$. В этой области

$$0\leqslant\xi_\beta\leqslant 2\varepsilon^n\delta(l,t)\sqrt{1+(\hat h_{n+1})_x^2}\,;\quad -2\varepsilon^n\delta(l,t)\sqrt{1+(\hat h_{n+1})_x^2}\leqslant\xi_\alpha\leqslant 0,$$

а для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение:

$$\begin{aligned}\beta^{(+)}-\alpha^{(-)}=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar u_i^{(+)}(x,y)+Q_i^{(+)}(\xi_\beta,l,h_\beta(l,t),t)\right)-\\ -\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar u_i^{(-)}(x,y)-Q_i^{(-)}(\xi_\alpha,l,h_\alpha(l,t),t)\right)+O(\varepsilon^{n+1}).\end{aligned}\tag{47}$$

На рассматриваемом множестве старшие слагаемые в (47) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\varphi^{(\mp)}(x,y)+Q_0^{(\mp)}(\xi_{\alpha,\beta},l,h_{\alpha,\beta}(l,t),t)=\\ &=\varphi^{(\mp)}(l,\hat h_{n+1}(l,t))+Q_0^{(\mp)}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)+\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)\cdot\xi_{\alpha,\beta}+O(\varepsilon^{n+1})=\\ &=\varphi^0(l,\hat h_{n+1}(l,t))+\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)\cdot\xi_{\alpha,\beta}+O(\varepsilon^{n+1}).\end{aligned}$$

Учитывая, что в рассматриваемой области $\xi_\beta=O(\varepsilon^n)$, $\xi_\alpha=O(\varepsilon^n)$, а также условие (32) и условия при $\xi=0$ задач (35), для остальных слагаемых из (47) можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned}&\bar u_i^{(\mp)}(x,y)+Q_i^{(\mp)}(\xi_{\alpha,\beta},l,h_{\alpha,\beta}(l,t),t)=\\ &\qquad=\bar u_i^{(\mp)}(l,\hat h_{n+1}(l,t))+Q_i^{(\mp)}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)+O(\varepsilon^n)=O(\varepsilon^n),\quad i=1,2,\ldots\end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в выражение (47), для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области получим выражение:

$$\begin{aligned}&\beta^{(+)}-\alpha^{(-)}=\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)\cdot\xi_\beta-\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,\hat h_{n+1}(l,t),t)\cdot\xi_\alpha+O(\varepsilon^{n+1})=\\ &=\Phi^{(+)}(0,h_0(l,t),W_0)(\xi_\beta-\xi_\alpha)+O(\varepsilon^{n+1})=\\ &=2\varepsilon^n\delta(l,t)\sqrt{1+(\hat h_{n+1})_x^2}\cdot\Phi^{(+)}(0,h_0(l,t),W_0)+O(\varepsilon^{n+1}).\end{aligned}\tag{48}$$

Здесь использовано обозначение (28), равенство (38), а также учтено, что в рассматриваемой области $\xi_\beta=O(\varepsilon^n)$, $\xi_\alpha=O(\varepsilon^n)$.

Согласно условию C2 выполнено неравенство $\Phi^{(+)}(0, h_0(l,t), W_0) > 0$, поэтому при положительных значениях δ и для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta - \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R},\ h_\beta(l,t) \leqslant y \leqslant h_\alpha(l,t),\ t \in [0,T].$$

Рассмотрим теперь разность верхнего и нижнего решений при $x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$, $t \in [0,T]$, где $\xi_\alpha \geqslant 0$, $\xi_\beta = \xi_\alpha + 2\varepsilon\delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2}$.

$$\beta - \alpha = \beta^{(+)} - \alpha^{(+)} = 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(Q_i^{(+)}(\xi_\beta, l, h_\beta, t) - Q_i^{(+)}(\xi_\alpha, l, h_\alpha, t) \right) +$$
$$+ \varepsilon^{n+1} \left(q^{(+)}(\xi_\beta, t) - q^{(+)}(\xi_\alpha, t) \right) + O(\varepsilon^{n+2}) = 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(\xi_\alpha, l, h_\alpha, t)(\xi_\beta - \xi_\alpha) +$$
$$+ O(\varepsilon^{n+1}) \exp(-\varkappa_1 \xi_\alpha) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где $\varkappa_1 > 0$ – некоторое число. Здесь мы учли экспоненциальные оценки функций $Q_i^{(+)}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $q^{(+)}$.

Отсюда, учитывая оценку (29) и равенство $\xi_\beta - \xi_\alpha = O(\varepsilon^n)$, получаем следующую оценку для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области:

$$\beta - \alpha \leqslant 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \left\{ C_0 \varepsilon^n \exp(-\varkappa_0 \xi_\alpha) - C_1 \varepsilon^{n+1} \exp(-\varkappa_1 \xi_\alpha) \right\} + O(\varepsilon^{n+2}), \tag{49}$$

где $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ – некоторые числа.

Если $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_1$, то выражение, стоящее в фигурных скобках в (49) положительно, так как $C_0 > C_1\varepsilon$ для достаточно малых ε. Следовательно, $\beta - \alpha > 0$.

Пусть $\varkappa_0 > \varkappa_1$. Рассмотрим область $x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha \leqslant y \leqslant h_\alpha + N\varepsilon \cos\alpha_\alpha$, $t \in [0; T]$, где $N > 0$. В этой области величина r_α изменяется на отрезке $[0; N\varepsilon]$ и выполняется неравенство $\exp(-\varkappa_0 \xi_\alpha) \geqslant \exp(-\varkappa_0 N)$, поэтому выражение в фигурных скобках в (49) положительно при достаточно малых ε за счет слагаемого $C_0 \varepsilon^n \exp(-\varkappa_0 \xi_\alpha)$. Следовательно, в этой области $\beta - \alpha > 0$.

Выберем теперь число N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $C_1 \exp(-\varkappa_1 N) < 2\mu^{(+)}$.

При $h_\alpha + N\varepsilon \cos\alpha_\alpha \leqslant y \leqslant a$ выполняется неравенство

$$2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} - C_1 \varepsilon^{n+1} \exp(-\varkappa_1 \xi_\alpha) \geqslant \varepsilon^{n+1} \left(2\mu^{(+)} - C_1 \exp(-\varkappa_1 N) \right) > 0$$

благодаря выбору числа N. Значит, в области $h_\alpha + N\varepsilon \cos\alpha_\alpha \leqslant y \leqslant a$, $t \in [0; T]$, $x \in \mathbb{R}$, также имеет место неравенство $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$.

Итак, $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$ всюду при $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$.

Доказательство справедливости неравенства $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$ при $0 \leqslant y \leqslant h_\beta$ проводится так же, как и при $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$.

В выполнении условия (У2) можно убедиться, подставив нижнее и верхнее решения, соответственно в виде (46) и (45) в уравнение (1). Исходя из самого способа построения верхнего и нижнего решений, получим равенства

$$L\left[\alpha^{(\mp)}\right] = \varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\mp)}(l, h_\alpha(l,t))\mu^{(\mp)} + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),$$
$$L\left[\beta^{(\mp)}\right] = -\varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\mp)}(l, h_\beta(l,t))\mu^{(\mp)} + O\left(\varepsilon^{n+2}\right).$$

Необходимый знак в дифференциальных неравенствах условия (У2) обеспечивается за счет выбора достаточно больших положительных величин $\mu^{(\mp)}$.

Условия (У3) оказываются выполненными при выбранном способе построения функций $\Pi^{(\mp)}_{\alpha,\beta}(x,\eta^{(\mp)})$.

Проверим выполнение неравенства (У5) для верхнего решения. Разложим разность

$$\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)-\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)$$

по формуле Тейлора по степеням ε с центром $(l,h_0(l,t),l,0)$. В силу проведенного сшивания формальных асимптотик (а именно, в силу равенства (36)) коэффициенты при ε^i для $i=0,\ldots,n-1$ равны нулю, а коэффициент при ε^n включает только те слагаемые, которые возникают в результате модификации асимптотики.

$$\begin{gathered}\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)-\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)=\varepsilon^n\delta_t(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(l,h_0(l,t),t)+\\+\varepsilon^n\delta_x(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(l,h_0(l,t),t)+\varepsilon^n\delta(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h}(l,h_0(l,t),t)+\\+\varepsilon^n\left(\frac{\partial q^{(-)}}{\partial\xi_\beta}(0,t)-\frac{\partial q^{(+)}}{\partial\xi_\beta}(0,t)\right)+O(\varepsilon^{n+1}),\quad t\in[0;T],\quad l\in\mathbb{R}.\end{gathered}\tag{50}$$

Определим функцию $\delta(x,t)$ как решение начальной задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t)\cdot\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t)\cdot\frac{\partial\delta}{\partial x}+\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t)\cdot\delta=\sigma-F(x,t),\\x\in\mathbb{R},\quad t\in(0;T],\quad \delta(x,0)=\delta^0(x),\quad \delta(x+L,t)=\delta(x,t),\end{gathered}\tag{51}$$

где σ – достаточно большая положительная величина, $\delta^0(x)$ – функция принимающая положительные значения для всех $x\in\mathbb{R}$, а

$$F(x,t)=\frac{\partial q^{(-)}}{\partial\xi_\beta}(0,t)-\frac{\partial q^{(+)}}{\partial\xi_\beta}(0,t).$$

Уравнение (51) – квазилинейное в частных производных. В силу условия C4 его решение существует и принимает положительные значения при $\delta^0(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$ и достаточно большом положительном значении σ.

При указанном выборе функции $\delta(x,t)$ равенство (50) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)-\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial n}\left(x,h_\beta(x,t),t,\varepsilon\right)=\varepsilon^n\sigma+O(\varepsilon^{n+1}).$$

Выражение в правой части положительно при достаточно малых ε, поскольку $\sigma>0$.

При том же выборе функции $\delta(x,t)$ выполнено неравенство условия (У5) для нижнего решения.

Построенные верхнее и нижнее решения гарантируют существование решения $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющего неравенствам (см. [13,14]):

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon) \leqslant u(x,y,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,y,t,\varepsilon), \quad (x,y,t) \in \bar{D} \times t \in [0,T], \quad \varepsilon \in (0;\varepsilon_0].$$

Поскольку $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$ (см. (48)), то

$$u(x,y,t,\varepsilon) = \alpha(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_{n+1}(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_{n-1}(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

заменив в этом равенстве n на $n+1$, получаем результат теоремы.

Список литературы / References

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[2] Нефедов Н. Н., “Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость”, *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 262–269; English transl.: Nefedov N. N., “An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability”, *Differential Equations*, **36**:2 (2000), 298–305.

[3] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., “Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., “Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:4 (2006), 585–593.

[4] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol'nov Yu. V., Nefedov N. N., “Front motion in a parabolic reaction-diffusion problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.

[5] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N.N., “Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[6] Nefedov N., Yagremtsev A., “On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers”, *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 62–72.

[7] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Melnikova A. A., “Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations”, *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[8] Нефедов Н.Н., “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сгулярно возмущенных задач с внутренними слоями”, *Дифференц. уравнения*, **31**:7 (1995), 1142–1149; English transl.: Nefedov N.N., “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1077–1085.

[9] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:5 (2012), 738–748; English transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., “Contrast structures in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Differential Equations*, **48**:5 (2012), 745–755.

[10] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:9 (2013), 9–29; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Melnikova A.A., "A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:9 (2013), 1239–1259.

[11] Volkov V. T., Nefedov N. N., Antipov E. A., "Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems", *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 408–416.

[12] Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A., *Traveling wave solutions of parabolic systems*, American Mathematical Soc., 1994.

[13] Sattinger D. H., "Monotone Methods in Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, **21**:11 (1972), 979–1001.

[14] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., "Moving Front Solution of the Reaction-Diffusion Problem", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 259–279.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279

Abstract. In this paper, we study the moving front solution of the reaction-diffusion initial-boundary value problem with a small diffusion coefficient. Problems in such statements can be used to model physical processes associated with the propagation of autowave fronts, in particular, in biophysics or in combustion. The moving front solution is a function the distinctive feature of which is the presence in the domain of its definition of a subdomain where the function has a large gradient. This subdomain is called an internal transition layer. In the nonstationary case, the position of the transition layer varies with time which, as it is well known, complicates the numerical solution of the problem as well as the justification of the correctness of numerical calculations. In this case the analytical method is an essential component of the study. In the paper, asymptotic methods are applied for analytical investigation of the solution of the problem posed. In particular, an asymptotic approximation of the solution as an expansion in powers of a small parameter is constructed by the use of the Vasil'eva algorithm and the existence theorem is carried out using the asymptotic method of differential inequalities. The methods used also make it possible to obtain an equation describing the motion of the front. For this purpose a transition to local coordinates takes place in the region of the front localization. In the present paper, in comparison with earlier publications dealing with two-dimensional problems with internal transition layers the transition to local coordinates in the vicinity of the front has been modified, that led to the simplification of the algorithm of determining the equation of the curve motion.

Keywords: reaction-diffusion problem, two-dimensional moving front, asymptotic representation, small parameter, asymptotic method of differential inequalities

On the authors:
Evgeny A. Antipov, orcid.org/0000-0001-6734-683X, Deputy Head of the Informatization Department
Lomonosov Moscow State University,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Vladimir T. Volkov, orcid.org/0000-0002-4205-4141, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: volkovvt@mail.ru

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, professor, Dr. Sci.,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 280–287
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 280–287

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-280-287

УДК 519.632.34

Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с трехзонным пограничным слоем

Белошапко В. А.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Исследована сингулярно возмущенная эллиптическая задача с граничными условиями Дирихле в случае кратного корня вырожденного уравнения. Возникает трехзонный пограничный слой с различным масштабом погранслойных переменных и различным характером поведения решения в разных зонах, асимптотическое разложение решения ведется по дробным степеням малого параметра. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное эллиптическое уравнение, случай кратного корня вырожденного уравнения, асимптотическое разложение решения погранслойного типа, трехзонный пограничный слой, оценочная функция

Для цитирования: Белошапко В. А., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с трехзонным пограничным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 280–287.

Об авторах:
Белошапко Вера Александровна, orcid.org/0000-0002-7847-4113, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: postvab@rambler.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = u^0(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}$ – оператор Лапласа, Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Известно [1], [2], что если вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет простой корень $u = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}$, причем $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0, x \in \bar{\Omega}$, функции f, $u^0(x)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие, $u^0(x)$ принадлежит области притяжения корня $\varphi(x)$, то задача (1), (2) для достаточно малых ε имеет решение $u(x,\varepsilon)$, асимптотика решения состоит из регулярной и погранслойной частей, разложение ведется по целым степеням малого параметра.

В данной работе задача (1), (2) исследуется при следующих условиях.

Условие А1. *Пусть функция f имеет вид*

$$f(u,x,\varepsilon) = h(u,x)(u-\varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon), \tag{3}$$

причем функции h, φ, f_1 достаточно гладкие.

В отличие от [3], функция h зависит не только от переменной x, но и от искомой функции u. Таким образом, результаты данной работы являются обобщением результатов работы [3] на более широкий класс задач. Здесь корень $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения является двукратным и, так же как в работах [3] – [7], это приводит к качественному изменению асимптотики (при малых ε) решения задачи (1), (2) по сравнению со случаем простого корня: изменяется масштаб погранслойных переменных, пограничный слой является многозонным, а регулярный и погранслойный ряды становятся рядами не по целым, а по дробным степеням ε. Кроме того, существенное влияние на вид асимптотики решения оказывает теперь член порядка ε, входящий в правую часть (3), а именно функция $\bar{f}_1(x)$. В связи с этим введем следующее условие.

Условие А2. *Пусть* $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x),x,0) > 0,$ *при* $x \in \bar{\Omega}$.

Условие А3. *Пусть существует функция* $\psi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, *такая, что*

$$\begin{gathered} \psi(x) > \varphi(x), \quad h(\psi(x),x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \bar{\Omega} \quad \textit{и} \\ h(u,x) > 0 \quad \textit{при} \quad \varphi(x) \le u < \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \end{gathered} \tag{4}$$

Случай, когда $h(u,x) > 0$ при $u > \varphi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, более простой, поэтому остановимся на рассмотрении задачи (1), (2) при условии А3.

Отметим, что при $u < \varphi(x)$ и $u > \psi(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ знак функции $h(u,x)$ не имеет значения, так как решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) удовлетворяет неравенствам (см. ниже)

$$\varphi(x) < u(x,\varepsilon) < \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Условие А4. *Пусть* $0 < \Pi^0(x) := u^0(x) - \varphi(x) < \psi(x) - \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$.

2. Построение асимптотики решения

Как и в случае простого корня вырожденного уравнения, асимптотика решения задачи (1), (2) при условиях А1 – А3 будет состоять из регулярной $\bar{u}(x,\varepsilon)$ и погранслойной $\Pi(\rho,l,\varepsilon)$ частей, причем регулярная часть будет теперь рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, погранслойная часть рядом по степеням $\varepsilon^{1/4}$ (а не ε для обеих частей асимптотики), пограничный слой будет иметь трехзонный характер, и в связи с этим наряду с $\rho = r/\varepsilon$ появится еще одна погранслойная переменная $\zeta = r/\varepsilon^{3/4}$.

2.1. Регулярная часть асимптотики решения

Регулярную часть $\bar{u}(x,\varepsilon)$ асимптотики решения будем строить в виде

$$\bar{u}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x). \tag{5}$$

Уравнения для коэффициентов $\bar{u}_i(x)$ этого ряда получаются стандартным способом, т. е. путем подстановки ряда (5) в уравнение (1) вместо u и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства. В результате получаем: $\bar{u}_0=\varphi(x)$, функция $\bar{u}_1\,(x)=\left[\bar{h}^{-1}\,(x)\,\bar{f}_1\,(x)\right]^{1/2}>0,\ \ x\in\bar{\Omega}$. Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$ ряда (5) последовательно определяются как решения линейных алгебраических уравнений

$$\left[2\bar{h}(x)\bar{u}_1\,(x)\right]\bar{u}_i\,(x)=F_i\,(x)\,,\qquad i\geq 2, \tag{6}$$

где $F_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j(x), j<i$, а коэффициент при $\bar{u}_i(x)$ отличен от нуля в силу (4) и $\bar{u}_1\,(x)>0,\ \ x\in\bar{\Omega}$.

2.2. Погранслойная часть асимптотики решения

Перейдя к локальным координатам (r,l) в окрестности границы $\partial\Omega$ рассматриваемой области $\bar{\Omega}$ и произведя растяжение переменной r, получив при этом погранслойные переменные $\rho=r/\varepsilon$ и $\zeta=r/\varepsilon^{3/4}=\varepsilon^{1/4}\rho$ (отметим, что масштаб погранслойных переменных ρ и ζ отличается от масштаба погранслойных переменных задач Неймана [5], [6]) оператор $\varepsilon^2\Delta$ запишем в следующем виде:

$$\varepsilon^2\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\sum_{j=4}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{4}}L_j\right), \tag{7}$$

где L_j – линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ζ, l, содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$.

Погранслойную часть асимптотики $\Pi\,(\rho,l,\varepsilon)$ будем строить в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\Pi\,(\rho,l,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i\,(\rho,l)\,. \tag{8}$$

Отметим, что в отличие от случая граничных условий Неймана [5], [6] слагаемые погранслойной части асимптотики возникают уже в нулевом приближении $(\Pi_0\,(\rho,l))$.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho,l)$ ряда (8) будем извлекать из стандартного для метода пограничных функций равенства (см. [1])

$$\varepsilon^2\Delta\Pi=\Pi f, \tag{9}$$

где в силу (7) и (8) $\varepsilon^2\Delta\Pi=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\sum\limits_{j=4}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{4}}L_j\right)\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i\,(\rho,l)\,,$ а функция $\Pi f=\left[f\left(\bar{u}(r,l,\varepsilon)+\Pi(\rho,l,\varepsilon),r,l,\varepsilon\right)-f\left(\bar{u}(r,l,\varepsilon),r,l,\varepsilon\right)\right]_{r=\varepsilon^{3/4}\zeta}$. Здесь и далее используется обозначение $\bar{u}(r,l,\varepsilon) := \bar{u}\left(x(r,l),\varepsilon\right)$ и аналогичные обозначения для других функций.

Граничные условия для функций $\Pi_i(\rho,l)$ при $\rho = 0$ обусловлены тем, что погранслойная часть асимптотики совместно с регулярной частью должны удовлетворять заданному граничному условию (2), т. е.

$$\bar{u}(0,l,\varepsilon) + \Pi(0,l,\varepsilon) = u^0(l) := u^0(x)|_{x\in\partial\Omega}, \quad 0 \le l \le l_0. \tag{10}$$

Кроме того, потребуем, чтобы члены погранслойного ряда удовлетворяли стандартному условию при $\rho \to \infty$:

$$\Pi_i\left(\infty,l\right) = 0. \tag{11}$$

Для корректного описания поведения решения в пограничном слое будем использовать тот же алгоритм формирования уравнений для функций $\Pi_i(\rho,l)$, что и в работе [3], отличающийся от стандартного алгоритма. Функция $\Pi_0(\rho,l)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\rho^2} = h(\varphi(0,l)+\Pi_0,0,l)\left({\Pi_0}^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\Pi_0\right), \quad \rho > 0, \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\Pi_0(0,l) = \Pi^0(l), \tag{13}$$

$$\Pi_0(\infty,l) = 0, \tag{14}$$

где $\Pi^0(l) = \Pi^0(x)|_{x\in\partial\Omega}$, и переменная $l,\ \ 0 \le l \le l_0$ входит, как параметр.

Заметим, что функция Π_0 и также следующие коэффициенты Π_i ряда (8) будут зависеть не только от ρ и l, но также и от ε, но с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $\Pi_i(\rho,l)$ вместо $\Pi_i(\rho,l,\varepsilon)$.

Уравнение (12) более сложное, чем аналогичное уравнение для $\Pi_0(\rho,l)$ в работе [3], так как функция h теперь зависит и от искомой функции $\Pi_0(\rho,l)$. Однако трехзонный характер решения сохраняется и в этом случае, что будет показано ниже.

Задача (12), (13), (14) стандартным образом сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho} = -\sqrt{2\int_0^{\Pi_0} h(\varphi(0,l)+s,0,l)(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)s)ds}, \quad \rho > 0, \tag{15}$$

с начальным условием (13).

Так как $0 < \Pi^0(l) < \psi(0,l) - \varphi(0,l),\ \ 0 \le l \le l_0$ (условие A4), $h(\varphi(0,l)+s,0,l) > 0$ при $0 \le s \le \Pi^0$ (условие A3), то найдутся такие положительные числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, для которых выполнено неравенство

$${\varkappa_1}^2 \le h(\varphi(0,l)+s,0,l) \le {\varkappa_2}^2 \quad \text{при} \quad 0 \le s \le \Pi^0. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует

$$-\sqrt{2}\varkappa_2\left[\frac{1}{3}\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_0\le\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho}\le-\sqrt{2}\varkappa_1\left[\frac{1}{3}\Pi_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_0.$$

После интегрирования получаем двустороннюю оценку для функции $\Pi_0(\rho,l)$:

$$\Pi_{\varkappa_2}(\rho,l)\le\Pi_0(\rho,l)\le\Pi_{\varkappa_1}(\rho,l),\quad \rho\ge 0, \tag{17}$$

где через $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ обозначено решение задачи $(\varkappa>0)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Pi_\varkappa}{\partial\rho}=-\sqrt{2}\varkappa\left[\frac{1}{3}\Pi_\varkappa+\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)\right]^{1/2}\Pi_\varkappa,\quad \rho>0,\\ \Pi_\varkappa(0,l)=\Pi^0(l),\\ \Pi_\varkappa(\infty,l)=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Решение этой задачи находится в явном виде:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=12\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(0,l)(1+O(\varepsilon^{1/4}))\frac{e^{-\varepsilon^{1/4}k_0\varkappa\rho}}{1-(1-p\varepsilon^{1/4}+O(\sqrt{\varepsilon}))e^{-\varepsilon^{1/4}k_0\varkappa\rho}}, \tag{19}$$

где $k_0=\sqrt{2\bar{u}_1(0,l)}$, $p=\sqrt{\frac{12\bar{u}_1(0,l)}{\Pi^0}}$.

В результате анализа поведения функции $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ на разных промежутках ρ можно выделить 3 зоны пограничного слоя.

В первой зоне, где $0\le\rho\le\varepsilon^{-\gamma}$, γ – любое число из промежутка $0\le\gamma<1/4$, т.е. $0\le r\le\varepsilon^{1-\gamma}$, функция $\Pi_\varkappa(\rho,l)$ убывает степенным образом:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=O\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}\right).$$

Вторая зона, где $\varepsilon^{-\gamma}\le\rho\le\varepsilon^{-1/4}$, т. е. $\varepsilon^{1-\gamma}\le r\le\varepsilon^{3/4}$, является переходной, в ней происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции $\Pi_\varkappa(\rho,l)$.

И, наконец, в третьей зоне, где $\rho\ge\varepsilon^{-1/4}$, т. е. $r\ge\varepsilon^{3/4}$, возникает новая погранслойная переменная $\zeta=r/\varepsilon^{3/4}$, и функция $\Pi_\varkappa$ убывает экспоненциально с ростом ζ:

$$\Pi_\varkappa(\rho,l)=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\exp(-k_0\varkappa\zeta).$$

Решая задачу (18) без использования метода сращивания, получаем функцию $\Pi_\varkappa(\rho,l)$, являющуюся единым решением этой задачи во всех трех зонах пограничного слоя. Двусторонняя оценка (17) обеспечивает такое же трехзонное поведение функции $\Pi_0(\rho,l)$.

Следующие члены пограничного ряда (8) имеют поведение, аналогичное $\Pi_0(\rho,l)$, как мы увидим в дальнейшем.

Уравнения для коэффициентов $\Pi_i(\rho,l)$ погранслойного ряда так же, как и для $\Pi_0(\rho,l)$, получим не стандартным способом, а с определенными модификациями этого способа [3] – [5]. Уравнение для $\Pi_i(\rho,l)$, $\quad i=1,2...$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\rho^2}=\lambda(\rho,l,\varepsilon)\Pi_i+\pi_i(\rho,l,\varepsilon),\qquad \rho>0, \tag{20}$$

где функция

$$\begin{aligned}\lambda(\rho,l,\varepsilon)=\tilde h(\rho,l)\left(2\Pi_0(\rho,l)+2\sqrt{\varepsilon}\bar u_1(0,l)\right)+\\ +\tilde h_u(\rho,l)\left({\Pi_0}^2(\rho,l)+2\sqrt{\varepsilon}\bar u_1(0,l)\Pi_0(\rho,l)\right),\end{aligned} \tag{21}$$

$\tilde h(\rho,l):=h(\varphi(0,l)+\Pi_0(\rho,l),0,l)$, функции $\pi_i(\rho,l,\varepsilon)$ выражаются через $\Pi_j(\rho,l)$, $j<i$ и формируются таким же нестандартным способом, как и в работе [3], в частности $\pi_1(\rho,l,\varepsilon)\equiv 0$.

Граничные условия для пограничных функций $\Pi_i(\rho,l)$, $i=1,2,...$ следуют из (10), (11) и имеют вид:

$$\Pi_i(0,l)=\begin{cases}-\bar u_{i/2}(0,l), & \text{если } i \text{ – четное число},\\ 0, & \text{если } i \text{ – нечетное число}.\end{cases} \tag{22}$$
$$\Pi_i(\infty,l)=0.$$

Введя обозначение $\Phi(\rho,l)=\frac{\partial\Pi_0}{\partial\rho}(\rho,l)$, решение задачи (20), (22) можно записать в виде:

$$\Pi_i(\rho,l)=\Phi(\rho,l)\Phi^{-1}(0,l)\Pi_i(0,l)+\Phi(\rho,l)\int_0^\rho\Phi^{-2}(\rho_1,l)d\rho_1\int_\infty^{\rho_1}\Phi(\rho_2,l)\pi_i(\rho_2,l,\varepsilon)d\rho_2. \tag{23}$$

Для всех $\Pi_i(\rho,l)$ имеет место единообразная оценка

$$|\Pi_i(\rho,l,\varepsilon)|\le c\Pi_\varkappa(\rho,l),\qquad \rho\ge 0, \tag{24}$$

с различными c и $\varkappa$ для разных i, и $\varkappa\le\varkappa_1$. Из этой оценки следует, что все $\Pi_i(\rho,l)$ имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(\rho,l)$. Так как погранслойные функции имеют смысл только в δ окрестности границы $\partial\Omega$, то умножим стандартным образом [1] – [5] погранслойные функции на срезающие функции, сохранив старые обозначения $\Pi_i(\rho,l)$.

3. Обоснование асимптотики

Итак, мы построили регулярный (5) и погранслойный (8) ряды. Для суммы этих рядов обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичную сумму следующего вида:

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar u_i(x)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}\Pi_i(\rho,l). \tag{25}$$

Теорема 1. *При условиях A1 – A4 для достаточно малых ε задача* (1), (2) *имеет решение $u(x,\varepsilon)$, для которого функция* (25) *является равномерным в $\bar{\Omega}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, т.е. для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{26}$$

Теорема доказывается с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств [8], [9], т.е. путем построения подходящих нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) с использованием суммы (25).

Функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ берется в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2} z(x,\varepsilon), \tag{27}$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ определено формулой (25), $n \geq 2$, $z(x,\varepsilon) = M + P(\rho, l)$. Достаточно большое, не зависящее от ε число M и функция P выбираются таким образом, чтобы функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$, определенная формулой (27), была нижним решением задачи (1), (2). В отличие от [3], нижнее решение имеет более сложный вид.

Аналогично функция

$$\bar{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2} z(x,\varepsilon)$$

при достаточно большом M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (2). Построенные нижнее и верхнее решения являются упорядоченными. Следовательно, существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам $\underline{U}(x,\varepsilon) \leq u(x,\varepsilon) \leq \bar{U}(x,\varepsilon), \quad x \in \bar{\Omega}$. Из этих неравенств и вида нижнего и верхнего решений стандартным образом следует оценка (26).

Список литературы / References

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., Vysshaya shkola, Moskva, 1990, (in Russian).]

[2] Paul C. Fife, "Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52** (1973), 205–232.

[3] Бутузов В. Ф., Белошапко В. А., "Сингулярно возмущенная эллиптическая задача Дирихле с кратным корнем вырожденного уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:5 (2016), 515–528; [Butuzov V. F., Beloshapko V. A., "Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 515–528, (in Russian).]

[4] Бутузов В. Ф., "Об устойчивости и области притяжения стационарного решения сингулярно возмущенной параболической задачи с кратным корнем вырожденного уравнения", *Дифференциальные уравнения*, **51**:12 (2015), 1593–1605; English transl.: Butuzov V. F., "On the Stability and the Attraction Domain of the Stationary Solution of a Singularly Perturbed Parabolic Equation with a Multiple Root of the Degenerate Equation", *Differential Equations*, **51**:12 (2015), 1569–1582.

[5] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Асимптотика решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехзонным пограничным слоем”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:8 (2016), 1428–1440; English transl.: Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “Asymptotics of the solution of a singularly perturbed elliptic problem with three-band boundary layer”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:8 (2016), 1414–1425.

[6] Белошапко В. А., Бутузов В. Ф., “Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:8 (2013), 1291–1301; English transl.: Beloshapko V. A., Butuzov V. F., “A singularly perturbed elliptic problem in the case of a multiple root of the degenerate equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:8 (2013), 1117–1127.

[7] Бутузов В. Ф., “Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., “On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

[8] Нефедов Н. Н., “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:4 (1995), 719–723; English transl.: Nefedov N. N., “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1142–1149.

[9] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Beloshapko V. A., "Singularly Perturbed Elliptic Dirichlet Problem with Three-band Boundary Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 280–287.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-280-287

Abstract. A singularly perturbed elliptic problem with Dirichlet boundary conditions is considered in the case of multiple roots of the degenerate equation. A three-zone boundary layer arises in the vicinity of the domain boundary with a different scale of boundary-layer variables and a different behaviour of the solution in different zones. The asymptotic expansion of the solution being in fractional powers of the small parameter, boundary-layer series are constructed using a non-standard algorithm. A complete asymptotic expansion of the solution is constructed and justified.

Keywords: singularly perturbed elliptic equation, case of multiple root of the degenerate equation, asymptotic expansion of boundary layer type solution, three-band boundary layer

On the authors:
Vera A. Beloshapko, orcid.org/0000-0002-7847-4113, graduate student,
Lomonosov Moscow State University
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia,
e-mail: postvab@rambler.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 288–308
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 288–308

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

УДК 517.228.4

О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем

Бутузов В. Ф.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённого дифференциального уравнения второго порядка в двух случаях, в каждом из которых один из корней вырожденного уравнения является двукратным. Доказано, что в первом случае образуется узкий внутренний слой, в котором происходит быстрый переход решения от двукратного корня вырожденного уравнения к простому корню, а во втором случае во внутреннем слое происходит «всплеск» решения. Такие решения называются соответственно контрастной структурой типа ступеньки (КСТС) и контрастной структурой типа всплеска (КСТВ). В каждом случае построено асимптотическое разложение контрастной структуры, существенно отличающееся от известного разложения в случае, когда все корни вырожденного уравнения – простые, в частности, внутренний слой оказывается многозонным.

Ключевые слова: сингулярно возмущённое уравнение, внутренний переходный слой, контрастные структуры типа ступеньки и типа всплеска, асимптотическое разложение решения

Для цитирования: Бутузов В. Ф., "О контрастных структурах с многозонным внутренним слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 288–308.

Об авторах:
Бутузов Валентин Фёдорович, orcid.org/0000-0002-8715-5720, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

1. Введение. Постановка задач

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (0; 1), \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ – искомая скалярная функция, $f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция.

Пусть вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0, \tag{3}$$

имеет ровно три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, причём

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x), \quad x \in [0; 1], \tag{4}$$

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 3; \quad f_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0, \quad x \in [0; 1],$$

(эти неравенства показывают, что все корни $u = \varphi_i(x)$ – простые), и пусть уравнение

$$I(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(u, x, 0) du = 0 \tag{5}$$

имеет корень $x = x_0 \in (0; 1)$, причём $I'(x_0) \neq 0$.

Тогда для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее предельному равенству (см. [1])

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [0, x_0), \\ \varphi_3(x), & x \in (x_0, 1]. \end{cases} \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что в малой окрестности точки x_0 происходит быстрый переход решения $u(x, \varepsilon)$ от корня $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения к корню $\varphi_3(x)$, т.е. это решение представляет собой контрастную структуру типа ступеньки (КСТС).

Может случиться так, что уравнение (5) выполняется для любого $x \in [0; 1]$, т.е. $I(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$. В таком случае (он называется случаем *сбалансированной нелинейности*) также может существовать КСТС, удовлетворяющая предельному равенству (6), но x_0 определяется как корень другого (более сложного) уравнения.

В каждом из этих случаев с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой было построено разложение КСТС в виде ряда по целым степеням ε (см. [1]), при этом функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon \leq 0$, $x_* = x_0 + O(\varepsilon)$ и $Q_i^{(+)}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, описывающие быстрое изменение решения в переходном слое слева и справа от точки x_* имели экспоненциальные оценки

$$|Q_i^{(\mp)}(\sigma)| \leq c \exp(-\kappa|\sigma|), \tag{7}$$

где c и κ – здесь и далее подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Можно сказать, что слева и справа от точки x_* внутренний переходный слой был однозонным с экспоненциальным убыванием функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\sigma)$ во всей зоне.

В работе [2] задача (1), (2) рассмотрена в том случае, когда

$$f(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi_1(x))^2 (u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)) - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon). \tag{8}$$

В этом случае корни $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения (3) – простые, а корень $\varphi_1(x)$ – двукратный. Пусть эти корни удовлетворяют условию (4), и пусть $x = x_0$ – корень уравнения (5). В [2] доказано, что при этих условиях в задаче (1), (2) существует КСТС, удовлетворяющая предельному равенству (6), и построено асимптотическое разложение этой КСТС, которое существенно отличается на отрезке $[0; x_*]$, где $x_* = x_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$, от разложения в случае, когда все корни $u = \varphi_i(x)$ вырожденного уравнения – простые. Слева от точки x_* переходный слой оказывается трёхзонным с различным характером быстрого изменения функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$

внутреннего слоя в разных зонах, асимптотическое разложение решения ведётся по дробным (а не по целым) степеням ε, и алгоритм построения асимптотики существенно отличается от известного алгоритма А.Б. Васильевой.

В данной работе задача (1), (2) рассматривается в п. 2 в том случае, когда функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид (8), но при этом $I(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$, т.е. имеет место случай сбалансированной нелинейности. При этих и ещё двух условиях (условия A3 и A4) в п. 2 построена асимптотика КСТС, в частности, получено уравнение, из которого определяется теперь точка x_0. Это – первая из рассмотренных здесь задач.

Вторая задача, рассмотренная в п. 3, связана с контрастной структурой типа всплеска (КСТВ). Предполагается, что функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi(x))^2(\psi(x) - u) - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \tag{9}$$

причём

$$\varphi(x) < \psi(x), \quad x \in [0; 1]. \tag{10}$$

Доказано, что при этом и ещё двух условиях (условия B2 и B3 в п. 3) задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0, 1], \quad x \neq \bar{x_0}, \\ \varphi(\bar{x_0}) + \frac{4}{3}a(\bar{x_0}), & x = \bar{x_0}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\bar{x_0} \in (0; 1)$ – корень уравнения $a'(x_0) = 0$, $a(x_0) := \psi(x_0) - \varphi(x_0) > 0$ (см. (10)).

Равенство (11) показывает, что в малой окрестности точки $\bar{x_0}$ происходит «всплеск» решения $u(x, \varepsilon)$, иными словами, это решение является контрастной структурой типа всплеска. Построена асимптотика этой КСТВ, имеющая особенности, характерные для сингулярно возмущённых задач с кратным корнем вырожденного уравнения (см. [2, 3]), в частности, внутренний слой (малая окрестность точки $\bar{x_0}$) оказывается шестизонным.

2. Контрастная структура типа ступеньки

2.1. Условия

Пусть выполнены следующие условия.

Условие A1. Функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид (8), причём функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ и $f_1(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими, и выполнены неравенства (4).

Поскольку речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать указанные функции бесконечно дифференцируемыми.

Условие A2. $I(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$ ($I(x)$ определено в (5)).

Условие A3. $\bar{f_1}(x) := f_1(\varphi_1(x), x, 0) > 0$, $x \in [0; 1]$.

2.2. Вид асимптотики

Обозначим через x_* неизвестную пока точку интервала $(0; 1)$, в которой искомое решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) пересекается с корнем $\varphi_2(x)$, т.е.

$$u(x_*, \varepsilon) = \varphi_2(x_*).$$

Решение $u(x,\varepsilon)$ представим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0, x_*], \\ u^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [x_*, 1]. \end{cases} \tag{12}$$

Функцию $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ будем рассматривать как решение вспомогательной краевой задачи для уравнения (1) на отрезке $[0, x_*]$ с краевыми условиями

$$\frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) = 0, \quad u^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \tag{13}$$

а функцию $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ – как решение краевой задачи для уравнения (1) на отрезке $[x_*, 1]$ с краевыми условиями

$$u^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \varphi_2(x_*), \quad \frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

В п. 2.3 и 2.4 построим асимптотики решений $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ в виде, традиционном для метода пограничных функций:

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon), \tag{15}$$

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{16}$$

где $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $Q^{(\mp)}(\sigma,\varepsilon)$ – части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки x_*, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon$; $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$ и $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики, $\xi = x/\varepsilon^{\frac{3}{4}}$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$, различие в масштабах погранслойных переменных ξ и $\tilde{\xi}$ связано с тем, что главным членом регулярной части асимптотики для $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ будет двукратный корень $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения, а для $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ – однократный корень $\varphi_3(x)$. В п. 2.3 каждое слагаемое в (15) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε (дробные степени также обусловлены кратностью корня $\varphi_1(x)$), а в п. 2.4 каждое слагаемое в (16) будет построено в виде ряда по целым степеням ε. После этого в п. 2.5 будет доказано (при дополнительном условии A4), что существует $x_* = x_*(\varepsilon) \in (0;1)$, такое, что

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon). \tag{17}$$

Тем самым будет доказано, что функция $u(x,\varepsilon)$, определённая равенством (12), является решением задачи (1), (2) (контрастной структурой типа ступеньки) с переходным слоем в окрестности точки $x_*(\varepsilon)$. Для самой этой точки с помощью равенства (17) будет получено асимптотическое разложение в ряд по дробным степеням ε.

2.3. Асимптотика решения первой вспомогательной задачи

Асимптотика решения $u^{(-)}(x,\varepsilon)$ задачи (1), (13) состоит из трёх частей (см. (15)).

Регулярную часть построим в виде ряда

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(-)}(x). \tag{18}$$

Стандартным способом, подставив этот ряд в уравнение (1) вместо u и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях равенства, получим последовательно уравнения для функций $\bar{u}_i(x)$. Для $\bar{u}_0(x)$ получается вырожденное уравнение $f(\bar{u}_0^{(-)}, x, 0) = 0$. В качестве $\bar{u}_0^{(-)}(x)$ возьмём корень $\varphi_1(x)$:

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x).$$

Для $\bar{u}_1^{(-)}$ получается квадратное уравнение

$$\bar{h}(x)(\bar{u}_1^{(-)})^2 - \bar{f}_1(x) = 0,$$

где

$$\bar{h}(x) := (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))(\varphi_1(x) - \varphi_3(x)) > 0, \quad x \in [0, 1]. \tag{19}$$

Так как $\bar{f}_1(x) > 0$ (см. условие A3), то уравнение для $\bar{u}_1^{(-)}$ имеет два корня. В качестве $\bar{u}_1^{(-)}(x)$ возьмём положительный корень (такой выбор будет играть важную роль при построении рядов $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$:

$$\bar{u}_1^{(-)}(x) = \left[\bar{h}^{-1}(x)\bar{f}_1(x)\right]^{\frac{1}{2}} > 0, \quad x \in [0; 1].$$

Следующие функции $\bar{u}_i^{(-)}$, $i \geq 2$ однозначно определяются как решения линейных уравнений

$$\left[2\bar{h}(x)\bar{u}_1^{(-)}(x)\right] \bar{u}_i^{(-)} = F_i(x), \quad i = 2, 3, \ldots,$$

где $F_i(x)$ выражается рекуррентно через $\bar{u}_j^{(-)}(x)$ с номерами $j < i$. Таким образом, ряд (18) построен.

Ряд $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ построим в виде

$$Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma), \quad \sigma = (x - x_*)/\varepsilon \leq 0. \tag{20}$$

Забегая вперёд, отметим, что функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будут зависеть не только от σ, но также от ε и x_*, однако для упрощения записи будем писать $Q_i^{(-)}(\sigma)$ вместо $Q_i^{(-)}(\sigma, \varepsilon, x_*)$.

Задачу для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будем формировать с помощью уравнения, в котором наряду с σ введена ещё одна растянутая переменная $\zeta = (x - x_*)/\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sigma$:

$$\frac{d^2 Q^{(-)}}{d\sigma^2} = Q^{(-)} f := f\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon) + Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon\right) -$$
$$- f\left(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon), x_* + \varepsilon^{\frac{3}{4}}\zeta, \varepsilon\right), \tag{21}$$

и граничных условий

$$Q^{(-)}(0, \varepsilon) = \varphi_2(x_*) - \bar{u}^{(-)}(x_*, \varepsilon), \quad Q^{(-)}(-\infty, \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Однако извлекать из равенства (21) уравнения для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$ будем не стандартным способом (он непригоден в случае кратного корня вырожденного уравнения), а с помощью специального алгоритма, описанного в [2, 3].

Уравнение для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ возьмём в виде (ε и x_* входят в качестве параметров)

$$\frac{d^2 Q_0^{(-)}}{d\sigma^2} = h(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}, x_*)\left[(Q_0^{(-)})^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}\right], \qquad \sigma \le 0, \tag{23}$$

где

$$h(u, x) := (u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)),$$

а граничные условия получаем из (21):

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*), \qquad Q_0^{(-)}(-\infty) = 0. \tag{24}$$

Отметим, что при стандартном алгоритме правая часть уравнения (23) не будет содержать второго слагаемого в квадратных скобках, и в этом случае решение задачи (23), (24) стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$ как $O(\sigma^{-2})$, что не соответствует истинному поведению решения задачи (1), (13) в окрестности точки x_*.

Задача (23), (24) сводится стандартным способом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma} = \left[2\int_0^{Q_0^{(-)}} h(\varphi_1(x_*) + s, x_*)(s^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)s)ds\right]^{1/2}, \qquad \sigma \le 0 \tag{25}$$

с начальным условием

$$Q_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*). \tag{26}$$

Несложный анализ показывает, что решение $Q_0^{(-)}(\sigma)$ задачи (25), (26) монотонно стремится к нулю при $\sigma \to -\infty$, причём убывание $Q_0^{(-)}(\sigma)$ имеет различный характер на разных промежутках изменения σ. Можно выделить три зоны.

Первой зоной является отрезок $[-\varepsilon^{-\gamma} \le \sigma \le 0]$, где в качестве γ можно взять число из интервала $0 < \gamma < 1/4$, сколь угодно близкое к $1/4$. В этой зоне $Q_0^{(-)}(\sigma) = O(1/(1+\sigma^2))$, т.е. $Q_0^{(-)}(\sigma)$ убывает с ростом σ степенным образом.

Отрезок $[-\varepsilon^{-1/4} \le \sigma \le -\varepsilon^{-\gamma}]$ является второй (переходной) зоной. Здесь происходит постепенное изменение характера убывания функции $Q_0^{(-)}(\sigma)$ и масштаба растянутой переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\sigma \le -\varepsilon^{-1/4}$, функция $Q_0^{(-)}(\sigma)$ имеет оценку

$$0 < Q_0^{(-)}(\sigma) \le c\sqrt{\varepsilon}\exp(\kappa\zeta),$$

где $\zeta = (x - x_*)/\varepsilon^{3/4}$, а через c и κ, как уже было сказано, обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Таким образом, в третьей зоне возникает новая растянутая переменная ζ, имеющая иной масштаб, нежели σ, и функция $Q_0^{(-)}$ убывает экспоненциально при $\zeta \to -\infty$. Отметим, что положительность $\bar{u}_1^{(-)}(x_*)$ является важным фактором, обеспечивающим описанное поведение функции $Q_0^{(-)}(\sigma)$.

Для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ нетрудно получить единую оценку на всей полупрямой $\sigma \le 0$:

$$0 < Q_0^{(-)}(\sigma) \le c\exp Q_\kappa(\sigma), \quad \sigma \le 0,$$

где

$$Q_\kappa(\sigma) = \sqrt{\varepsilon}\exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)\left[1 + \varepsilon^{1/4} - \exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma)\right]^{-2}, \qquad \sigma \le 0. \tag{27}$$

Функция $Q_\kappa(\sigma)$ будет эталонной (оценочной) функцией для всех коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$ ряда (20) подобно тому, как в случае, когда все корни вырожденного уравнения – простые, роль эталонной играла функция $\exp(-\kappa|\sigma|)$ (см. (7)).

При $\sigma = 0$ из (25), сделав в интеграле замену переменной $\varphi_1(x_*)+s = u$, получаем

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} \left\{f(u,x_*,0) + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x_*)h(u,x_*)(u-\varphi_1(x_*))\right\} du\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$=: I^{(-)}(x_*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} g_i(x_*), \tag{28}$$

где

$$I^{(-)}(x_*) = \left[2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u,x_*,0)du\right]^{1/2}, \tag{29}$$

$$g_1(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} \bar{u}_1^{(-)}(x_*) m_1(x_*), \tag{30}$$

$$m_1(x_*) = 2\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} (u-\varphi_1(x_*))(u-\varphi_2(x_*))(u-\varphi_3(x_*))du, \tag{31}$$

$g_i(x_*)$, $i = 1, 2, \ldots$, – бесконечно дифференцируемые функции. Задачи для следующих коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i \geq 1$ ряда (20) имеют вид

$$\frac{d^2Q_i^{(-)}}{d\sigma^2} = k(\sigma,\varepsilon)Q_i^{(-)} + q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon), \qquad \sigma \leq 0,$$

$$Q_i^{(-)}(0) = \begin{cases} -\bar{u}_{i/2}^{(-)}(x_*), & \text{если } i - \text{чётное число}, \\ 0, & \text{если } i - \text{нечётное число}, \end{cases} \qquad Q_i^{(-)}(-\infty) = 0,$$

где

$$k(\sigma,\varepsilon) := h_u(\sigma)\left[\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)\right] +$$

$$+2h(\sigma)\left[Q_0^{(-)}(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right],$$

$$h_u(\sigma) := \frac{\partial h}{\partial u}(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}(\sigma), x_*) = 2Q_0^{(-)}(\sigma) - A(x_*) - B(x_*),$$

$$h(\sigma) := h(\varphi_1(x_*) + Q_0^{(-)}(\sigma), x_*) = (A(x_*) - Q_0^{(-)}(\sigma))(B(x_*) - Q_0^{(-)}(\sigma)),$$

$$A(x_*) := \varphi_2(x_*) - \varphi_1(x_*), \ \ B(x_*) := \varphi_3(x_*) - \varphi_1(x_*),$$

а функции $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(-)}(\sigma)$ с номерами $j < i$ и формируются нестандартным способом, описанным в [2, 3] и позволяющим последовательно для $i = 2, 3, \ldots$ получить оценки

$$|q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)| \leq c(Q_\kappa^2(\sigma) + \sqrt{\varepsilon}Q_\kappa(\sigma)), \tag{32}$$

$$|Q_i^{(-)}(\sigma)| \leq cQ_\kappa(\sigma), \qquad \sigma \leq 0, \tag{33}$$

с различными c и κ для разных i и функцией $Q_\kappa(\sigma)$, определённой формулой (27).

Выпишем в качестве примера выражения для $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ при $i=1,2,3$, сформированные в соответствии с алгоритмом, описанным в [2, 3]: $q_1^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=0$,

$$q_2^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=q_{20}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{21}^{(-)}(\sigma),\ \ q_3^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=\varepsilon^{1/4}\left(q_{30}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{31}^{(-)}\right),$$

где

$$q_{20}^{(-)}(\sigma)=\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\left(2Q_0^{(-)}(\sigma)-A(x_*)-B(x_*)\right)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2,$$

$$q_{21}^{(-)}(\sigma)=2A(x_*)B(x_*)\bar{u}_1^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-3\left(A(x_*)+B(x_*)\right)(\bar{u}_1^{(-)}(x_*))^2Q_0^{(-)}(\sigma)+$$
$$+2h(\sigma)\bar{u}_2^{(-)}(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-\left(f_1(\varphi_1(x_*)+Q_0^{(-)}(\sigma),x_*,0)-f(\varphi_1(x_*),x_*,0)\right),$$

$$q_{30}^{(-)}(\sigma)=\left[(AB)'(x_*)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2-(A'(x_*)+B'(x_*))\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^3\right]\sigma,$$

$$q_{31}^{(-)}(\sigma)=2\left[A(x_*)B(x_*)u_1^{(-)\prime}(x_*)+(AB)'(x_*)\bar{u}_1^{(-)}(x_*)\right]Q_0^{(-)}(\sigma)\sigma.$$

Аналогичный вид имеют следующие функции $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $i=4,5,\ldots$, в частности,

$$q_4^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=q_{40}^{(-)}(\sigma)+\sqrt{\varepsilon}q_{41}^{(-)}(\sigma,\varepsilon),$$

нетрудно вписать явное выражение для этой функции. Так как $q_1^{(-)}(\sigma,\varepsilon)=0$ и $Q_1^{(-)}(0)=0$, то $Q_1^{(-)}(\sigma)=0$, а при $i\geq 2$ функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ выражаются формулой

$$Q_i^{(-)}(\sigma)=\Phi(\sigma)\Phi^{-1}(0)Q_i^{(-)}(0)+\Phi(\sigma)\int_0^\sigma\Phi^{-2}(s)\int_{-\infty}^s\Phi(t)q_i^{(-)}(t,\varepsilon)dtds, \tag{34}$$

где

$$\Phi(\sigma)=\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(\sigma).$$

Отсюда получается оценка (33) на основе оценки (32) таким же образом, как в [3].

Кроме того, учитывая равенство $\frac{d\Phi}{d\sigma}(0)=0$, из (34) получаем

$$\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0)=\Phi^{-1}(0)\int_{-\infty}^0\Phi(t)q_i^{(-)}(t,\varepsilon)dt. \tag{35}$$

Используя эту формулу, а также формулу (29) и выражение для $q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $i=2,3,4$, находим

$$\begin{gathered}\sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0)=\sqrt{\varepsilon}\left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)m_2(x_*)+\varepsilon I_2(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),\\ \varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0)=\varepsilon I_3(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),\quad \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0)=\varepsilon I_4(x_*)+O(\varepsilon^{3/2}),\end{gathered} \tag{36}$$

где

$$m_2(x_*)=\int_{\varphi_1(x_*)}^{\varphi_2(x_*)}\left(2u-\varphi_2(x_*)-\varphi_3(x_*)\right)(u-\varphi_1(x_*))^2du, \tag{37}$$

$$I_2(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} \int_{-\infty}^{0} \Phi(\sigma) \left[q_{21}^{(-)}(\sigma) - \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} g_1(x_*) q_{20}^{(-)}(\sigma)\right] d\sigma, \qquad (38)$$

$$I_i(x_*) = \left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1} \int_{-\infty}^{0} \Phi(\sigma) q_{i0}(\sigma) d\sigma, \quad i = 3, 4, \qquad (39)$$

$I^{(-)}(x_*)$ и $g_1(x_*)$ определены формулами (29) – (31). Полученные выражения для $\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0)$, $i = 0, 2, 3, 4$ будут использованы в п. 2.5 при рассмотрении уравнения (17).

Итак, ряд (20) построен, причём коэффициенты $Q_i^{(-)}(\sigma)$ этого ряда зависят от неизвестной пока точки x_*. Чтобы функции $Q_i^{(-)}(\sigma)$ не вносили невязок в граничное условие при $x = 0$, проделаем стандартную процедуру [1]: умножим каждую из них на срезающую функцию, что никак не повлияет на построенную асимптотику. То же самое сделаем в дальнейшем, не оговаривая каждый раз, с членами рядов $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$, $Q^{(+)}(\sigma, \varepsilon)$ и $\Pi^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon)$.

Ряд $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$, где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, построим в виде

$$\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(-)}(\xi).$$

Уравнения для функций $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ будем извлекать стандартным способом из равенства

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{d^2\Pi^{(-)}}{d\xi^2} = \Pi^{(-)} f := f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{3/4}\xi, \varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon), \varepsilon^{3/4}\xi, \varepsilon\right) -$$

$$- f\left(\bar{u}^{(-)}(\varepsilon^{3/4}\xi, \varepsilon), \varepsilon^{3/4}\xi, \varepsilon\right), \qquad \xi \geq 0,$$

граничные условия при $\xi = 0$ – из второго равенства в (13), которое запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(0) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \frac{d\Pi_i^{(-)}}{d\xi}(0) = 0, \qquad (40)$$

и добавим стандартное условие на бесконечности

$$\Pi_i^{(-)}(\infty) = 0. \qquad (41)$$

В результате для $\Pi_i^{(-)}(\xi)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно получаются уравнения

$$\frac{d^2\Pi_i^{(-)}}{d\xi^2} = b^2 \Pi_i^{(-)} + \pi_i^{(-)}(\xi), \qquad \xi \geq 0, \qquad (42)$$

где $b = [2\bar{h}(0)\bar{u}_1^{(-)}(0)]^{1/2} > 0$, $\bar{h}(0)$ определено в (19), функции $\pi_i(\xi)$ выражаются рекуррентно через $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ с номерами $j < i$, в частности, $\pi_0^{(-)}(\xi) = 0$, а граничное условие при $\xi = 0$ следует из (40):

$$\frac{d\Pi_i^{(-)}}{d\xi}(0) = \begin{cases} -\frac{d\bar{u}_{i/2}^{(-)}}{dx}(0), & \text{если } i - \text{чётное число}, \\ 0, & \text{если } i - \text{нечётное число}. \end{cases} \qquad (43)$$

Решения задач (41) - (43) последовательно находятся в явном виде, в частности,

$$\Pi_0^{(-)}(\xi) = \varphi_1'(0) b^{-1} \exp(-b\xi), \qquad \xi \geq 0.$$

Все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i^{(-)}(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \qquad \xi \ge 0.$$

Итак, ряд $\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon)$ построен.

Обозначим через $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ следующую частичную сумму построенного разложения (15):

$$U_n^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(-)}(x) + \sum_{i=0}^{4n+3} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{4n} \varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(-)}(\xi). \tag{44}$$

Теорема 1. *Если выполнены условия A1, A3, то для достаточно малых ε и любого $x_* \in (0;1)$ краевая задача (1), (13) имеет решение $u^{(-)}(x,\varepsilon)$, для которого при $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо асимптотическое равенство*

$$u^{(-)}(x,\varepsilon) = U_n^{(-)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [0, x_*].$$

Доказательство этой теоремы можно провести так же, как доказательство аналогичной теоремы в [3].

Следствие. *Для производной $\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon)$ справедливо равенство*

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \qquad x \in [0, x_*]. \tag{45}$$

Доказательство проводится так же, как доказательство аналогичного утверждения в [2].

2.4. Асимптотика решения второй вспомогательной задачи

Асимптотика решения $u^{(+)}(x,\varepsilon)$ задачи (1), (14) состоит из трёх частей (см. (16)). Поскольку главным членом регулярной части асимптотики будет взят простой корень $\varphi_3(x)$ вырожденного уравнения, построение каждой из трёх частей производится стандартным способом (см. [1]) в виде ряда по целым степеням ε:

$$\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(x), \quad Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(+)}(\sigma), \quad \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}),$$

где

$$\bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x), \quad \sigma = (x - x_*)/\varepsilon \ge 0, \quad \tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon \ge 0.$$

Главный член $Q_0^{(+)}(\sigma)$ ряда $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ является решением задачи

$$\frac{d^2 Q_0^{(+)}}{d\sigma^2} = f(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}, x_*, 0), \qquad \sigma \ge 0,$$

$$Q_0^{(+)}(0) = \varphi_2(x_*) - \varphi_3(x_*), \;\; Q_0^{(+)}(\infty) = 0.$$

Отсюда следует экспоненциальная оценка

$$|Q_0^{(+)}(\sigma)| \le c\exp(-\kappa\sigma), \qquad \sigma \ge 0,$$

а для $\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0)$ получается выражение

$$\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) = \left[2\int_{\varphi_3(x_*)}^{\varphi_2(x_*)} f(u, x_*, 0)du\right]^{1/2} =: I^{(+)}(x_*). \tag{46}$$

Следующие коэффициенты $Q_i^{(+)}(\sigma)$ ряда $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ являются решениями линейных задач

$$\frac{d^2Q_i^{(+)}}{d\sigma^2} = f_u^{(+)}(\sigma)Q_i^{(+)} + q_i^{(+)}(\sigma), \qquad \sigma \geq 0,$$
$$Q_i^{(+)}(0) = -\bar{u}_i^{(+)}(x_*), \;\; Q_i^{(+)}(\infty) = 0,$$

где

$$f_u^{(+)}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi_3(x_*) + Q_0^{(+)}(\sigma), x_*, 0).$$

Решения этих задач находятся в явном виде, имеют экспоненциальную оценку, как и $Q_0^{(+)}(\sigma)$, а для производных $\frac{dQ_i^{(+)}}{d\sigma}(0)$ получается выражение, аналогичное (35):

$$\frac{dQ_i^{(+)}}{d\sigma}(0) = \Psi^{-1}(0)\int_{\infty}^{0}\Psi(\sigma)q_i^{(+)}(\sigma)d\sigma, \quad \Psi(\sigma) = \frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(\sigma). \tag{47}$$

Коэффициенты $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ ряда $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)$ определяются последовательно как решения линейных задач

$$\frac{d^2\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}^2} = f_u(\varphi_3(1), 1, 0)\Pi_i^{(+)} + \pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}), \qquad \tilde{\xi} \geq 0,$$
$$\frac{d\Pi_i^{(+)}}{d\tilde{\xi}}(0) = -\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(1), \;\; \Pi_i^{(+)}(\infty) = 0,$$

все $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ находятся в явном виде и имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})| \leq c\exp(-\kappa\tilde{\xi}), \qquad \tilde{\xi} \geq 0.$$

Обозначим через $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ частичную сумму построенного разложения (16):

$$U_n^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left[\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\sigma) + \Pi_{i-1}^{(+)}(\tilde{\xi})\right], \tag{48}$$

где $\Pi_{-1}^{(+)}(\tilde{\xi}) = 0$.

Теорема 2. *Если выполнено условие A1, то для достаточно малых ε и любого $x_* \in (0;1)$ краевая задача (1), (14) имеет решение $u^{(+)}(x,\varepsilon)$, для которого при $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо асимптотическое равенство*

$$u^{(+)}(x,\varepsilon) = U_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [x_*, 1].$$

Следствие. *Для производной $\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon)$ справедливо равенство*

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \qquad x \in [x_*, 1]. \tag{49}$$

Доказательство теоремы 2 и следствия из неё можно провести так же, как для теоремы 1.

2.5. Доказательство существования КСТС в задаче (1), (2)

Докажем, что при условиях A1 – A3 и ещё одном условии (см. ниже условие A4) для достаточно малых ε существует $x_*(\varepsilon) \in (0;1)$, для которого выполнено равенство (17). Запишем это равенство в виде

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) - \frac{du^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon) = 0,$$

умножим на ε и подставим вместо $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ разложения (15) и (16), учитывая, что в точке x_* все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$, $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$, а также точка $Q_1^{(-)}(\sigma)$ и их производные равны нулю. Получим уравнение относительно x_* в виде

$$\varepsilon\left(\frac{d\varphi_1}{dx}(x_*) + \ldots\right) + \left(\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0) + \cdots\right) -$$

$$- \varepsilon\left(\frac{d\varphi_3}{dx}(x_*) + \cdots\right) - \left(\frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0) + \cdots\right) = 0. \tag{50}$$

Покажем сначала, что сумма

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) - \frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) \tag{51}$$

является величиной порядка ε. Используя формулы (28), (30), (36) и (46), запишем эту сумму в виде

$$I^{(-)}(x_*) - I^{(+)}(x_*) + \sqrt{\varepsilon}\left(I^{(-)}(x_*)\right)^{-1}\bar{u}_1^{(-)}(x_*)(m_1(x_*) + m_2(x_*)) +$$

$$+\varepsilon(g_2(x_*) + I_2(x_*)) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Используя выражения (29) и (46) для $I^{(-)}(x_*)$ и $I^{(+)}(x_*)$, а также выражения (31) и (37) для $m_1(x_*)$ и $m_2(x_*)$, нетрудно убедиться в том, что для любого x_* справедливы равенства:

$$I^{(-)}(x_*) - I^{(+)}(x_*) = 0 \ \text{ в силу условия A2},$$

и также

$$m_1(x_*) + m_2(x_*) = 0.$$

Следовательно, сумма (51) равна

$$\varepsilon(g_2(x_*) + I_2(x_*)) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Будем теперь искать x_* в виде ряда

$$x_* = x_0 + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}x_i. \tag{52}$$

Подставим ряд (52) в уравнение (50), разложим левую часть уравнения по степеням $\varepsilon^{1/4}$ и будем приравнивать нулю коэффициенты этого разложения. Главный член разложения состоит из слагаемых порядка ε, входящих в сумму

$$\varepsilon\frac{d\varphi_1}{dx}(x_*) + \frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0) + \sqrt{\varepsilon}\frac{dQ_2^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon^{3/4}\frac{dQ_3^{(-)}}{d\sigma}(0) + \varepsilon\frac{dQ_4^{(-)}}{d\sigma}(0) -$$

$$-\varepsilon\frac{d\varphi_3}{dx}(x_*) - \frac{dQ_0^{(+)}}{d\sigma}(0) - \varepsilon\frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0)$$

и взятых при $x_* = x_0$, т.е. он равен $\varepsilon J(x_0)$, где

$$J(x_0) = \frac{d\varphi_1}{dx}(x_0) + g_2(x_0) + I_2(x_0) + I_3(x_0) + I_4(x_0) - \frac{d\varphi_3}{dx}(x_0) - \frac{dQ_1^{(+)}}{d\sigma}(0)$$

(см. (28), (36), (38), (39), (48)).

Введём следующее требование.

Условие А4. Пусть уравнение

$$J(x_0) = 0 \tag{53}$$

имеет корень $x_0 = \bar{x}_0 \in (0;1)$, и пусть

$$J'(\bar{x}_0) \neq 0. \tag{54}$$

Для следующих коэффициентов x_i, $i = 1, 2, \ldots$ ряда (52) последовательно получаются линейные уравнения

$$J'(\bar{x}_0)x_i + k_i = 0, \tag{55}$$

где k_i – известные числа, выражающиеся через найденные уже x_j с номерами $j < i$. В силу (54) из уравнения (55) однозначно определяется x_i. Обозначим решение через $\bar{x}_i$.

Вернёмся теперь к вспомогательным краевым задачам (1), (13) и (1), (14) и рассмотрим их, положив

$$x_* = x_\delta := \bar{x}_0 + \varepsilon^{1/4}\bar{x}_1 + \cdots + \varepsilon^{m-1/4}\bar{x}_{4m-1} + \varepsilon^m(\bar{x}_{4m} + \delta), \tag{56}$$

где $m \geq 2$, а δ – произвольное число, которое может зависеть от ε, но является ограниченным при $\varepsilon \to 0$.

В силу теорем 1 и 2 для достаточно малых ε существуют решения $u^{(-)}(x, \varepsilon, \delta)$ и $u^{(+)}(x, \varepsilon, \delta)$ этих задач, имеющие асимптотические разложения (15) и (16), в которых функции $Q_i^{(-)}$ и $Q_i^{(+)}$ зависят от $\sigma_\delta = (x - x_\delta)/\varepsilon$ и также от ε и x_δ, а для производных $\frac{du^{(-)}}{dx}(x, \varepsilon, \delta)$ и $\frac{du^{(+)}}{dx}(x, \varepsilon, \delta)$ справедливы равенства (45) и (49) для любого n. Используя равенства (45) и (49) для $n = m + 2$, составим умноженную на ε разность производных функций $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$, взятых в точке x_δ, и разложим полученное выражение по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$. В результате придём к равенству

$$\varepsilon\left(\frac{du^{(-)}}{dx}(x_\delta, \varepsilon, \delta) - \frac{du^{(+)}}{dx}(x_\delta, \varepsilon, \delta)\right) = \varepsilon J(\bar{x}_0) +$$

$$+ \sum_{i=5}^{4m+4} \varepsilon^{i/4}(J'(\bar{x}_0)\bar{x}_{i-4} + k_{i-4}) + \varepsilon^{m+1}J'(\bar{x}_0)\delta + O(\varepsilon^{m+5/4}). \tag{57}$$

Так как $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ являются решениями уравнений (53) и (55), то в правой части (57) остаются только два последних слагаемых, причём последнее слагаемое $O(\varepsilon^{m+5/4})$ зависит также от δ, но является величиной указанного порядка малости равномерно относительно δ из фиксированной окрестности точки $\delta = 0$. А поскольку

$J'(\bar{x}_0) \neq 0$ (см. (54)), то существует такое $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/4})$, для которого правая часть равенства (57) равна нулю, т.е.

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}) = \frac{du^{(+)}}{dx}(x_{\bar{\delta}}, \varepsilon, \bar{\delta}).$$

Отсюда следует, что функция

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x \in [0, x_{\bar{\delta}}], \\ u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x \in [x_{\bar{\delta}}, 1] \end{cases}$$

является решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $x_{\bar{\delta}}$. Согласно теоремам 1 и 2 при $m \geq 2$ частичная сумма $U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением для $u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta})$ с точностью порядка $O(\varepsilon^{m-1})$, а частичная сумма $U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon)$ – асимптотическим приближением для $u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta})$ с такой же точностью. Если заменить $x_{\bar{\delta}}$ на $X_m = \sum_{i=0}^{4m-1} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i$ (т.е. отбросить в выражении (56) для x_δ слагаемое $\varepsilon^m(\bar{x}_{4m} + \delta)$), σ_δ заменить на $\sigma_m = (x - X_m)/\varepsilon$, то указанная точность сохранится, т.е.

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-1}), & x \in [0, X_m], \\ U^{(+)}_{m-2}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-1}), & x \in [X_m, 1], \end{cases} \tag{58}$$

где функции $Q^{(\pm)}_i$, входящие в $U^{(\pm)}_{m-2}$ зависят от σ_m. Равенство (58) доказано для любого $m \geq 2$. Обозначив $m-2$ через n, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема 3. *Если выполнены условия A1 – A4, то для достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого при любом натуральном n справедливо неравенство (c зависит от n)*

$$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{n+1}, \qquad x \in [0;1], \tag{59}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}_n(x,\varepsilon), & x \in [0, X_{n+2}], \\ U^{(+)}_n(x,\varepsilon), & x \in [X_{n+2}, 1], \end{cases} \tag{60}$$

$$X_{n+2} = \sum_{i=0}^{4n+7} \varepsilon^{i/4}\bar{x}_i,$$

а функции $U^{(-)}_n(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}_n(x,\varepsilon)$ определены формулами (44) и (48), в которых $\sigma = \sigma_{n+2} = (x - X_{n+2})/\varepsilon$.

Следствие. *Решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) удовлетворяет предельному равенству (6).*

Действительно, если $x \in [0; x_0)$, то для достаточно малых ε выполняется неравенство $x < X_{n+2}$, поэтому из (59) и (60) следует, что

$$u(x,\varepsilon) = U^{(-)}_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma_{n+2} = (x - X_{n+2})/\varepsilon \to -\infty$ при $\varepsilon \to 0$, и, значит, $Q_0^{(-)}(\sigma_{n+2}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = \varphi_3(x), \quad \text{если } \ x \in (x_0, 1].$$

Таким образом, равенство (6) выполнено.

3. Контрастная структура типа всплеска

3.1. Условия

Пусть выполнены следующие условия.

Условие B1. Функция $f(u,x,\varepsilon)$ имеет вид (9), причём функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f_1(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими, и выполнено неравенство (10).

Условие B2. $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0) > 0$, $x \in [0;1]$.

Условие B3. Уравнение

$$a'(x_0) = 0,$$

где $a(x) = \psi(x) - \varphi(x)$, имеет корень $x_0 = \bar{x}_0$, причём $a''(\bar{x}_0) \neq 0$.

3.2. Вид асимптотики

Обозначим через x_* неизвестную пока точку интервала $(0;1)$, в окрестности которой происходит «всплеск» решения. Саму точку x_* определим как точку, в которой искомое решение $u(x,\varepsilon)$ (КСТВ) имеет максимальное значение, и, следовательно,

$$\frac{du}{dx}(x_*, \varepsilon) = 0. \tag{61}$$

Асимптотику КСТВ построим в виде

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + Q(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon), \quad x \in [0;1],$$

где

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) \tag{62}$$

– регулярная часть асимптотики,

$$Q(\sigma,\varepsilon) = \begin{cases} Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(-)}(\sigma), \quad 0 \le x \le x_*, \\ \\ Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(+)}(\sigma), \quad x_* \le x \le 1, \end{cases}$$

$Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon \le 0$ и $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$, $\sigma \ge 0$ – ряды, описывающие «всплеск» решения слева и справа от точки x_*,

$$\Pi^{(-)}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(-)}(\xi), \ \ \xi = x/\varepsilon^{3/4}$$

и

$$\Pi^{(+)}(\tilde{\xi},\varepsilon)=\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}),\ \ \tilde{\xi}=(1-x)/\varepsilon^{3/4}$$

– погранслойные ряды.

3.3. Построение асимптотики

Регулярный ряд (62) строится таким же образом, как в п. 2.3. При этом

$$\bar{u}_0(x)=\varphi(x),\ \ \bar{u}_1(x)=[a^{-1}(x)\bar{f}_1(x)]^{1/2}>0,\ \ x\in[0;1],$$

где $a(x):=\psi(x)-\varphi(x)>0$ в силу (10), $\bar{f}_1(x)>0$ в силу условия B2. Следующие коэффициенты $\bar{u}_i(x)$, $i\geq 2$ являются решениями линейных уравнений

$$k(x)\bar{u}_i=F_i(x),$$

где

$$k(x)=2a(x)\bar{u}_1(x)>0,\ \ x\in[0;1]. \tag{63}$$

Уравнения для коэффициентов $Q_i^{(-)}(\sigma)$ ряда $Q_i^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ извлекаются с помощью такого же алгоритма, как в п. 2.3, из уравнения, в котором используется ещё одна растянутая переменная $\zeta=(x-x_*)/\varepsilon^{3/4}$:

$$\frac{d^2Q^{(-)}}{d\sigma^2}=Q^{(-)}f:=f\left(\bar{u}(x_*+\varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon)+Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon),x_*+\varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon\right)-$$

$$-f\left(\bar{u}(x_*+\varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon),x_*+\varepsilon^{3/4}\zeta,\varepsilon\right),\ \ \sigma\leq 0,$$

а граничные условия – из равенств

$$\frac{dQ^{(-)}}{d\sigma}(0,\varepsilon)+\varepsilon\frac{d\bar{u}}{dx}(x_*,\varepsilon)=0,\ \ Q^{(-)}(-\infty),\varepsilon)=0. \tag{64}$$

Для $Q_0^{(-)}(\sigma)$ получается задача

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}}{d\sigma^2}=\left(a(x_*)-Q_0^{(-)}\right)\left[(Q_0^{(-)})^2+2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x_*)Q_0^{(-)}\right]=:q_0^{(-)}\left(Q_0^{(-)},x_*,\varepsilon\right),\ \ \sigma\leq 0, \tag{65}$$

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(0)=0,\ \ Q_0^{(-)}(-\infty)=0. \tag{66}$$

У этой задачи имеется тривиальное решение $Q_0^{(-)}(\sigma)=0$, однако такой «главный» член ряда $Q_0^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$ не соответствует искомому решению задачи (1), (2), имеющему «всплеск» в окрестности точки x_*. В качестве $Q_0^{(-)}(\sigma)$ возьмём решение уравнения (65) с граничными условиями

$$Q_0^{(-)}(0)=Q^0 \tag{67}$$

и

$$Q_0^{(-)}(-\infty)=0,$$

где $Q^0 = Q^0(x_*, \varepsilon)$ – положительный корень уравнения

$$\int_0^{Q^0} q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon) ds = 0. \qquad (68)$$

Это уравнение получается таким образом: стандартным способом от уравнения (65) переходим к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma} = \left[2 \int_0^{Q_0^{(-)}} q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon) ds \right]^{1/2}, \quad \sigma \leq 0, \qquad (69)$$

полагая в котором $\sigma = 0$, учитывая граничное условие (66) при $\sigma = 0$ и обозначая $Q_0^{(-)}(0)$ через Q^0, получаем уравнение (68). Используя вид функции $q_0^{(-)}(s, x_*, \varepsilon)$ (см. (65)), нетрудно усмотреть, что правую часть уравнения (69) можно представить в виде

$$\left[\frac{1}{2} \left(Q^0 - Q_0^{(-)} \right) \left(Q_0^{(-)} + m\sqrt{\varepsilon} \right) \right]^{1/2} Q_0^{(-)},$$

где $m = 2k(x_*)/Q^0$, $k(x)$ определено в (63), а для $Q^0(x_*, \varepsilon)$ из уравнения (68) получается асимптотическое разложение

$$Q^0(x_*, \varepsilon) = \frac{4}{3} a(x_*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2} r_i(x_*), \qquad (70)$$

коэффициенты $r_i(x_*)$ которого можно последовательно найти, подставив ряд (70) в уравнение (68), в частности, $r_1(x_*) = \frac{1}{3}\bar{u}_1(x_*)$.

Решение задачи (69), (67) находится в явном виде

$$Q_0^{(-)}(\sigma) = \frac{4\sqrt{\varepsilon} Q^0 m E(\sigma)}{Q^0(1 - E(\sigma))^2 + \sqrt{\varepsilon} m (1 + E(\sigma))^2}, \quad \sigma \leq 0,$$

где $E(\sigma) = \exp(\varepsilon^{1/4} p \sigma)$, $p := \sqrt{k(x_*)}$.

Задачи для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i \geq 1$ имеют вид

$$\frac{d^2 Q_i^{(-)}}{d\sigma^2} = \alpha^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) Q_i^{(-)} + q_i^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon), \quad \sigma \leq 0, \qquad (71)$$

$$\frac{dQ_i^{(-)}}{d\sigma}(0) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3, 5, 7, \ldots, \\ -d\bar{u}_{(i-4)/2}/dx(x_*), & i = 4, 6, 8, \ldots, \end{cases} \qquad Q_i^{(-)}(-\infty) = 0, \qquad (72)$$

где $\alpha^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = \frac{\partial q_0^{(-)}}{\partial Q_0^{(-)}}(Q_0^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$, а функции $q_i^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$ формируются с помощью такого же алгоритма, как в п. 2.3, и выражаются через $Q_j^{(-)}(\sigma)$ с номерами $j < i$, в частности, $q_1^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = 0$ (отсюда и из (72) при $i = 1$ следует, что $Q_1^{(-)}(\sigma) = 0$, $\sigma \leq 0$),

$$q_2^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon) = -\bar{u}_1(x_*) \left(Q_0^{(-)}(\sigma) \right)^2 +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left[-\bar{u}_1^2(x_*)Q_0^{(-)}+2a(x_*)\bar{u}_2(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)-Q_0^{(-)}f_1\right], \tag{73}$$

$$q_3^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)=a'(x_*)(Q_0^{(-)}(\sigma))^2(\varepsilon^{1/4}\sigma)+2\sqrt{\varepsilon}(au)'(x_*)Q_0^{(-)}(\sigma)(\varepsilon^{1/4}\sigma). \tag{74}$$

Решение задачи (71), (72) находится в явном виде

$$Q_i^{(-)}(\sigma)=\tilde{Q}_i^{(-)}(\sigma)+\gamma_i^{(-)}U_1^{(-)}(\sigma), \tag{75}$$

где

$$\tilde{Q}_i(\sigma)=U_2^{(-)}(\sigma)\int_{-\infty}^{\sigma}U_1^{(-)}(s)q_i^{(-)}(s,x_*,\varepsilon)ds+U_1^{(-)}(\sigma)\int_{\sigma}^{0}U_2^{(-)}(s)q_i^{(-)}(s,x_*,\varepsilon)ds,$$

$$U_1^{(-)}(\sigma)=\frac{dQ_0^{(-)}}{d\sigma}(\sigma),\ \ U_2^{(-)}(\sigma)=U_1^{(-)}(\sigma)\int_{-1}^{\sigma}(U_1^{(-)}(s))^2ds$$

($U_1^{(-)}(\sigma)$ и $U_2^{(-)}(\sigma)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего (71)), а число $\gamma_i^{(-)}$ выбирается так, чтобю было выполнено первое условие из (72).

Для функций $Q_i^{(-)}(\sigma)$, $i=0,1,2,\ldots$ нетрудно доказать оценку (с различными c и κ для разных i)

$$\left|Q_i^{(-)}(\sigma)\right|\le cQ_\kappa^{(-)}(\sigma),\ \ \sigma\le 0, \tag{76}$$

где

$$Q_\kappa^{(-)}(\sigma)=\frac{\sqrt{\varepsilon}E_\kappa(\sigma)}{(1-E_\kappa(\sigma))^2+\sqrt{\varepsilon}},\ \ E_\kappa(\sigma)=\exp(\varepsilon^{1/4}\kappa\sigma).$$

Функция $Q_\kappa^{(-)}(\sigma)$ выступает в качестве эталонной функции для коэффициентов ряда $Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, а оценка (76) отражает тот факт, что внутренний слой слева от точки x_* состоит из трёх зон так же, как и в случае КСТС (см. п. 2.3).

Из (75) получаем равенство

$$Q_i^{(-)}(0)=-\left(q_0^{(-)}(Q^0,x_*,\varepsilon)\right)^{-1}\int_{-\infty}^{0}U_1^{(-)}(\sigma)q_i^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)d\sigma,\ \ i\ge 2. \tag{77}$$

Ряд $Q^{(+)}(\sigma,\varepsilon)$ строится таким же образом, как и ряд $Q^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, в частности, при $\sigma=0$ он удовлетворяет условию, аналогичному (64):

$$\frac{dQ^{(+)}}{d\sigma}(0,\varepsilon)+\varepsilon\frac{d\bar{u}}{dx}(x_*,\varepsilon)=0, \tag{78}$$

коэффициенты ряда имеют оценки типа (76), отражающие трёхзонность внутреннего слоя справа от точки x_*.

Для $Q_0^{(+)}(\sigma)$ и $Q_1^{(+)}(\sigma)$ справедливы равенства

$$Q_0^{(+)}(\sigma)=Q_0^{(+)}(-\sigma),\ \ Q_1^{(+)}(\sigma)=0, \tag{79}$$

а для $Q_i^{(+)}(0)$, $i\ge 2$ имеют место формулы вида (77) с заменой верхнего индекса (-) на (+). Используя выражения для $q_i^{(-)}(\sigma,x_*,\varepsilon)$ при $i=2,3,4$ (в частности (73) и (74)), в формуле (77), а также аналогичную формулу для $Q_i^{(+)}(0)$ при $i = 2, 3, 4$, приходим к равенствам

$$Q_2^{(+)}(0) = Q_2^{(-)}(0), \;\; Q_3^{(+)}(0) = -Q_3^{(-)}(0), \;\; Q_4^{(+)}(0) = Q_4^{(-)}(0). \tag{80}$$

Равенства (79) и (80) понадобятся нам в п. 3.4.

Погранслойные ряды $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i(\xi)$, $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$ и $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ строятся так же, как ряд $\Pi^{(-)}(\xi, \varepsilon)$ в п. 2.3, их коэффициенты находятся в явном виде, например,

$$\Pi_0^{(-)}(\xi) = b_0^{-1}\varphi'(0)\exp(-b_0\xi), \;\; b_0 = [k(0)]^{1/2}, \;\; \xi \geq 0,$$

$$\Pi_0^{(+)}(\tilde{\xi}) = -b_1^{-1}\varphi'(1)\exp(-b, \tilde{\xi}), \;\; b_1 = [k(1)]^{1/2}, \;\; \tilde{\xi} \geq 0,$$

$k(x)$ определено в (63).

Все функции $\Pi_i^{(-)}(\xi)$ и $\Pi_i^{(+)}(\tilde{\xi})$ имеют экспоненциальные оценки такого же вида, как в п. 2.3.

3.4. Доказательство существования КСТВ в задаче (1), (2)

В силу условий (64) и (78) для рядов $Q^{(-)}(\sigma, \varepsilon)$ и $Q^{(+)}(\sigma, \varepsilon)$ при любом $x_* \in (0; 1)$ выполняется равенство производных в точке $\sigma = 0$:

$$\frac{dQ^{(-)}}{d\sigma}(0, \varepsilon) = \frac{dQ^{(+)}}{d\sigma}(0, \varepsilon).$$

Приравняв сами ряды в этой точке, получим уравнение относительно x_*, которое запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\left(Q_i^{(-)}(0) - Q_i^{(+)}(0)\right) = 0.$$

В силу равенств (79), (80) и с учётом того, что $Q_1^{(-)}(\sigma) = 0$, это уравнение принимает вид

$$2\varepsilon^{3/4}Q_3^{(-)}(0) + \sum_{i=5}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\left(Q_i^{(-)}(0) - Q_i^{(+)}(0)\right) = 0. \tag{81}$$

Будем искать x_* в виде ряда

$$x_* = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i/4}x_i. \tag{82}$$

Подставив это выражение для x_* в левую часть уравнения (81) и разложив её в ряд по степеням $\varepsilon^{1/4}$, стандартным способом получим уравнения для последовательного определения коэффициентов x_i, $i = 0, 1, \ldots$. Используя выражение для $Q_3^{(-)}(0)$ (см. (77) при $i = 3$) и вид (74) функции $q_3^{(-)}(\sigma, x_*, \varepsilon)$, нетрудно усмотреть, что главным членом в разложении левой части уравнения (81) является слагаемое порядка ε, а коэффициент при ε равен

$$I(x_0) := \left[\frac{1}{3}\left(q_0^{(-)}(Q^0, x_*, \varepsilon)\right)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\left(Q_0^{(-)}(\sigma)\right)^3 d\sigma\right]\Bigg|_{\substack{x_*=x_0\\ \varepsilon=0}} \cdot a'(x_0).$$

Приравнивая $I(x_0)$ нулю и учитывая, что выражение в квадратных скобках отлично от нуля, получаем уравнение

$$a'(x_0) = 0.$$

В силу условия B3 это уравнение имеет корень $x_0 = \bar{x}_0$, причём $a''(\bar{x}_0) \neq 0$.

Уравнения для следующих коэффициентов x_i, $i = 1, 2, \dots$ ряда (82) имеют вид

$$I'(\bar{x}_0) \cdot x_i + h_i = 0, \tag{83}$$

где $I'(\bar{x}_0) \neq 0$ в силу неравенства $a''(\bar{x}_0) \neq 0$, а h_i выражаются через уже найденные $x_j = \bar{x}_j$ с номерами $j < i$. Из уравнения (83) однозначно определяются x_i:

$$x_i = \bar{x}_i := -(I'(\bar{x}_0))^{-1} h_i.$$

Таким образом, построена (формальная) асимптотика КСТВ в задаче (1), (2).

Доказательство существования КСТВ с построенной асимптотикой проводится таким же способом, как и в п. 2.5. При условиях B1 – B3 рассматриваются две вспомогательные краевые задачи для уравнения (1): первая задача – на отрезке $[0, x_\delta]$ с краевыми условиями

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(x_\delta, \varepsilon) = 0,$$

вторая – на отрезке $[x_\delta, 1]$ с краевыми условиями

$$\frac{du}{dx}(x_\delta, \varepsilon) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0,$$

где

$$x_\delta = \sum_{i=0}^{4n+4} \varepsilon^{i/4} \bar{x}_i + \varepsilon^{n+5/4} (\bar{x}_{4n+5} + \delta).$$

Построив асимптотики решений $u_\delta^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $u_\delta^{(+)}(x, \varepsilon)$ этих задач, содержащие ряды $Q_i^{(-)}(\sigma_\delta, \varepsilon)$ и $Q_i^{(+)}(\sigma_\delta, \varepsilon)$, $\sigma_\delta = (x - x_\delta)/\varepsilon$, построенные в п. 3.3, и приравняв эти асимптотики в точке x_δ, получим уравнение относительно δ, имеющее решение $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/4})$.

Составленная из решений двух вспомогательных задач функция

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} u_{\bar{\delta}}^{(-)}(x, \varepsilon), & x \in [0, \bar{\delta}], \\ u_{\bar{\delta}}^{(+)}(x, \varepsilon), & x \in [\bar{\delta}, 1] \end{cases}$$

является контрастной структурой типа всплеска в задаче (1), (2). Для неё имеет место теорема, аналогичная теореме 3 из п. 2.5.

Предельное равенство (11) доказывается таким же образом, как было доказано предельное равенство (6) в п. 2.5. При этом используется тот факт, что $\lim_{\varepsilon \to 0} Q^0(x_*, \varepsilon) = \frac{4}{3} a(x_0)$ (см. (70)).

В заключение отметим, что трёхзонное поведение функций $Q_i^{(\mp)}(\delta)$ делает внутренний слой в рассмотренной задаче шестизонным.

Список литературы / References

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990; [Vasilieva A. B., Butuzov V. F., *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*, Visshaya shkola, Moskva, 1990, (in Russian).]

[2] Бутузов В. Ф., "Сингулярно возмущённая краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:1 (2015), 5–22; [Butuzov V. F., "Singularly perturbed boundary value problem with multizonal interior transitional layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:1 (2015), 5–22, (in Russian).]

[3] Бутузов В. Ф., "Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения", *Математические заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., "On the special properties of the boundary layer in singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation", *Mathematical Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

Butuzov V. F., "On Contrast Structures with a Multizonal Interior Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 288–308.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-288-308

Abstract. A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of second order is considered in two cases, when one root of the degenerate equation is two-tuple. It is proved that in the first case the problem has a solution with the transition from the two-tuple root of the degenerate equation to one-tuple root in the small neighbourhood of an internal point of the interval, and in the second case the problem has a solution which has the spike in the interior layer. Such solutions are named, correspondingly, a contrast structure of step-type and a contrast structure of spike-type. In each case the asymptotic expansion of the contrast structure is constructed. It distinguishes from the known expansion in the case, when all the roots of the degenerate equation are one-tuple, in particular, the interior layer is multizonal.

Keywords: singularly perturbed equation, interior transitional layer, contrast structures of step type and spike type, asymptotic expansion of solution

On the authors:
Valentin F. Butuzov, orcid.org/0000-0002-8715-5720, phys-math d-r, professor,
Lomonosov Moscow State University, 1/2 Leninskie Gori, Moscow 119991, Russia, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №3 (2017), с. 309–321
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 309–321

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-309-321

УДК 517.9

Решения уравнений нестационарного фронта реакции с вырожденными точками равновесия

Быков А. А.[1], Ермакова К. Е.

получена 22 мая 2017

Аннотация. Мы рассматриваем нестационарный процесс распространения некоторой субстанции в одномерной среде с диффузией и источниками, плотность которых зависит от концентрации (так для определенности будем называть исследуемую величину). Предполагается, что изменение концентрации $u(x, t)$ в данной точке со временем t определяется разностью потоков слева и справа, а также плотностью источников, которая зависит от x и от u. Такая модель приводит к начально-краевой задаче для квазилинейного уравнения параболического типа, которое называют уравнением реакции–диффузии. В частности, наша модель пригодна для описания нестационарного процесса передачи информации в одномерной системе объектов, которые могут быть описаны величиной, характеризующей степень информированности о некотором событии. Предполагается, что плотность источников обращается в нуль (меняя знак) при трех значениях концентрации, два из которых (крайние) являются устойчивыми, имеется еще промежуточное неустойчивое состояние с нулевой плотностью источников, в котором тоже имеет место перемена знака. Особенность нашей модели состоит в том, что мы предполагаем, что два крайних корня функции плотности источников являются вырожденными (с целым или дробным показателем, большим единицы). Такая модель соответствует ситуации, при которой плотность источников в окрестности стационарного значения концентрации является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем для стандартной модели, в которой эта величина имеет первый порядок малости. Мы намерены показать аналитически и методом компьютерного моделирования, что данная модель приводит к тому, что скорость асимптотического стремления концентрации к равновесным значениям для движущегося фронта становится степенной вместо экспоненциальной, имеющей место для стандартных моделей. Построена формальная асимптотика решения начально-краевой задачи в однородной среде со степенной зависимостью плотности источников от концентрации, построены верхнее и нижнее решения, дано строгое обоснование формальной асимптотики. Построены точные решения уравнения реакции–диффузии для широкого класса функций плотности источников.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы, контрастные структуры, дифференциальные неравенства, горение

Для цитирования: Быков А. А., Ермакова К. Е., "Решения уравнений нестационарного фронта реакции с вырожденными точками равновесия", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 309–321.

Об авторах: Быков Алексей Александрович, orcid.org/0000-0002-9399-7115, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: abkov@yandex.ru
Ермакова Кристина Евгениевна, orcid.org/0000-0002-9279-3762, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: kristinaermakova19@rambler.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00690-а.

1. Введение

В работе рассматриваются одномерные нестационарные эволюционные системы, в которых распространение некоторой субстанции описывается уравнением реакции–диффузии

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\kappa(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) - f(u,x), \\ u(x,0) = \psi_0(x), \ \ u_x(a,t) = \psi_1(t), \ \ u_x(b,t) = \psi_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

величину u будем называть для определенности концентрацией. Мы в данной работе рассматриваем уравнение (1) в однородной среде, для которой плотность источников в окрестности корней пропорциональна некоторой степени концентрации:

$$f(u) = f_0(u)\big(u-\varphi_1\big)^{\star\theta_1}\big(\varphi_2-u\big)\big(\varphi_3-u\big)^{\star\theta_3}, \tag{2}$$

где использовано обозначение

$$u^{\star\theta} = \begin{cases} u^{\theta} & \text{при} \quad u \geq 0, \\ -(-u)^{\theta} & \text{при} \quad u \leq 0, \end{cases} \tag{3}$$

так что имеются два особенных значения концентрации, каждая из которых характеризуется своими значениями константы $\theta_1 > 1$ и $\theta_3 > 1$. Такие корни функции плотности источников будем называть вырожденными точками равновесия, поскольку при таких значениях концентрации плотность источников равна нулю, значение плотности источников стремится к нулю как степенная функция с показателем, который больше 1 и не обязательно целочислен. Значения φ_1 и φ_3 есть пороговые значения. Два множителя функции $f(u)$ описывают плотность источников в окрестностях точек устойчивого равновесия, средний множитель описывает плотность источников в окрестности корня φ_2, причем $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$. В работах [1], [2], [3] аналогичная задача рассматривалась для случая целочисленного показателя $\theta = 2$. Наш метод отличается от использованного в этих работах и позволяет включать любые вещественные значения. Похожий метод был использован в [4] для доказательства существования решения типа бегущей волны для нелинейного уравнения Соболевского типа.

Имеется немало работ, посвященных контрастным структурам, которые являются решениями сингулярно возмущенных задач, возникающих при изучении или описании химической кинетики [5], астрофизики [6], [7], [8], биофизики или геофизической плазмы. Мы рассматриваем важный на практике случай, когда температура в реагирующей среде описывается уравнением реакции–диффузии с малым параметром при старших производных. Наличие малого параметра отражает характерные особенности практически важных задач, в которых, во-первых, реакция происходит в неоднородной среде, но ширина фронта реакции много меньше диаметра области, а во-вторых, скорость перемещения фронта достаточно мала, так что можно считать, что пространственный профиль фронта медленно меняется со временем. Введение параметра позволяет также использовать понятие вырожденного уравнения, которое получается формально при значении параметра, равном нулю. Мы используем метод построения асимптотического ряда для решения этого уравнения, описанный в работе [9]. Решение представляется суммой регулярной функции $\overline{u}$ и функции внутреннего переходного слоя (ВПС) Q.

В настоящей работе нами построена формальная асимптотика нулевого порядка решения начально-краевой задачи для уравнения реакции–диффузии в однородной среде со степенной зависимостью плотности источников от концентрации, построены верхнее и нижнее решения, дано строгое обоснование формальной асимптотики. Построены точные решения уравнения реакции–диффузии для класса функций плотности источников, пропорциональной некоторой степени температуры.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную начально-краевую задачу для уравнения реакции–диффузии в однородной среде:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u,\varepsilon), \;\; x \in (a,b), \;\; t \in (0,T), \\ u_x(a,t,\varepsilon) = 0, \;\; u_x(b,t,\varepsilon) = 0, \;\; t \in (0,T], \\ u(x,0,\varepsilon) = \psi_0(x,\varepsilon), \;\; x \in [a,b], \end{cases} \tag{4}$$

где ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$. Выполним переход к растянутым переменным:

$$u(x,t) = v(\xi), \;\; \frac{x - x^\star(t)}{\varepsilon} = \xi, \;\; \frac{t}{\varepsilon} = \tau, \;\; \frac{dx^\star}{dt} = W, \tag{5}$$

где $x^\star(t)$ – точка, характеризующая положение внутреннего переходного слоя при заданном фиксированном t, – определяется условием $u(x^\star,t,\varepsilon) = 0$. Рассмотрим вместе с задачей (4) задачу нахождения решения, имеющего вид бегущей квазиволны с некоторой скоростью W. Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} -Wv_\xi = \kappa v_{\xi\xi} - f(v), \\ v(\xi) \to \varphi_1 \text{ при } \xi \to -\infty, \;\; v(\xi) \to \varphi_3 \text{ при } \xi \to +\infty, \end{cases} \tag{6}$$

граничные условия заменены условиями примыкания к значениям устойчивого равновесия реакции. Выполним теперь операцию понижения порядка: $v_\xi = p$, $v_{\xi\xi} = pp_v$,

$$-Wp = \kappa pp_v - f(v). \tag{7}$$

Получить точное явное решение уравнения (7) при сколько-нибудь широком классе физически оправданных функций $f(v)$ не удается. Это уравнение решается явно, например, при выборе f в виде кубической функции с симметрично расположенными корнями, но для вырожденных корней найти решение и даже доказать существование, вообще говоря, не удается. Поэтому мы в данной работе пойдем другим путем. Зададим достаточно гладкую функцию $p(v)$ и значение W, из уравнения (7) найдем функцию плотности источников $f(v)$:

$$f(v) = Wp(v) + \kappa p(v)p_v. \tag{8}$$

Для того, чтобы построить класс правых частей, с одной стороны, достаточно широкий, чтобы в нем можно было найти функцию, достаточно близкую к физически оправданной модели, и, с другой стороны, такой, что данное уравнение может быть решено аналитически, мы рассматриваем класс физически оправданных функций вида

$$f(v) = f_0(v) \cdot f_1\big(v - \varphi_1\big) \cdot \big(v - \varphi_2\big) \cdot f_3\big(\varphi_3 - v\big), \tag{9}$$

где

$$f_1(v) = \sum\nolimits_k C_{1,k} v^{\star\theta_{1,k}}, \quad f_3(v) = \sum\nolimits_k C_{3,k} v^{\star\theta_{3,k}}, \tag{10}$$

$f_0(v)$ – гладкая функция, $f_0 > 0$. При этом кратность корня (целочисленная, дробная, иррациональная) определяется наименьшим значением $\min(\theta_{1,k}) > 1$ (и соответственно $\min(\theta_{3,k}) > 1$). Формальную асимптотику, верхнее и нижнее решения мы построим для этого общего случая, а конкретный пример приведем такой, чтобы получить явное выражение для функции переходного слоя нулевого порядка. Для этого нам потребуется задать явное выражение $p(v)$. В окрестности вырожденных корней $v = \varphi_1$ и $v = \varphi_3$ мы зададим эту функцию в явном виде, так чтобы обеспечить выполнение (9) и (10). Рассмотрим сначала окрестность значения $v = \varphi_1$. Пусть

$$p(v) = -W\omega + \frac{C}{W}\omega^{\star\star\theta_1}, \quad \varphi_1 - \delta v < v < \varphi_1 + \delta v, \tag{11}$$

где $\delta v > 0$, δv достаточно мало, чтобы окрестности значений φ_1 и φ_3 не перекрывались. $\omega = v - \varphi_1$ и по определению $\omega^{\star\star\theta} = |\omega|^\theta$, так что $d\omega^{\star\star\theta}/d\omega = \theta\omega^{\star\theta}$, это последнее выражение определено формулой (3). Легко убедиться в том, что выражение (8) тогда дает функцию плотности источников, удовлетворяющую всем ранее сформулированным требованиям, и к тому же в области $\varphi_1 - \delta v < v < \varphi_1 + \delta v$ функцию $f(v)$ можно представить в виде (9), (10). Все дальнейшие выкладки будем проводить для $W < 0$, что означает перемещение фронта в левую сторону (это не принципиально, случай $W > 0$ рассматривается аналогично). Для этого случая в силу равенства $dv/d\xi = p$ можно найти неявное решение $\xi(v)$ уравнения (7) с учетом (11):

$$\int_0^v \frac{d\hat{v}}{p(\hat{v})} = \xi - \xi_2, \tag{12}$$

причем из (12) следует, что $v \to \varphi_1 + 0$ при $\xi \to -\infty$, $v(\xi_2) = 0$, $v \to \varphi_3 - 0$ при $\xi \to +\infty$, так как интеграл (12) расходится в точках $\varphi_{1,3}$. Теперь рассмотрим окрестность значения $v = \varphi_3$. Из (8) следует, что при задании $f(v)$ в виде (7) выполнены условия $f(v) > 0$ при $\varphi_1 < v < \varphi_2$ и $f(v) < 0$ при $\varphi_2 < v < \varphi_3$. Покажем, что найдется такое $\delta\varphi > 0$, что функция $f(v)$, найденная из (8), удовлетворяет также условиям

$$\begin{cases} f(u) > 0 & \text{при} \quad \varphi_3 < u < \varphi_3 + \delta\varphi_3, \\ f(u) < 0 & \text{при} \quad \varphi_3 - \delta\varphi_3 < u < \varphi_3. \end{cases} \tag{13}$$

В самом деле, в некоторой окрестности φ_3 верно равенство $p(v) = C_3(v)(\varphi_3 - v)^{\star\star\theta_3}$, где $C_3(v) > 0$. Переобозначим $v - \varphi_3 = w$, тогда $f(w) = C_3 w^{\star\theta_3}\big(-W + \kappa C_3\theta_3 w^{\star\star(\theta_3-1)}\big)$. Так как всегда фронт КС задается возрастающей функцией и $W < 0$, то при $|w| < \big(-W/\kappa C_3\theta_3\big)^{1/(\theta_3-1)}$ верно (13). Мы задали $p(v)$ в окрестностях значений φ_1 и φ_3. Теперь определим $p(v)$ на промежутке $\varphi_1 + \delta v < v < \varphi_3 - \delta v$ как любую гладкую функцию, такую, что $p(v) > 0$, $p(v)$ возрастает на $\varphi_1 + \delta v < v < v^\star$, убывает на $v^\star < v < \varphi_3 - \delta v$, причем $v^\star$ – некоторое число, $\varphi_1 + \delta v < v^\star < \varphi_3 - \delta v$. Пусть $p(v) > 0$, $dp/dv < 0$ на $-\infty < v < \varphi_1 - \delta v$, $p(v) \to +\infty$ при $v \to -\infty$, $p(v) > 0$, $dp/dv > 0$ на $\varphi_3 + \delta v < v < +\infty$, $p(v) \to +\infty$ при $v \to +\infty$. Тогда выполнены все требуемые условия, функция f имеет вид (9), верно (10), где $f_0 > 0$, на интервале (φ_1, φ_3) имеется еще ровно один корень φ_2 кратности 1. Вместе с тем, условия на

$p(v)$ достаточно слабые для того, чтобы можно было строить разнообразные модели $f(v)$ с указанными ранее свойствами.

Обобщение данной методики на случай неоднородной среды также возможно.

3. Численное моделирование

Для наглядного представления рассматриваемой модели рассмотрим задачу (4) для плотности источников (2) при показателе кратности корня $\theta_{1,3} = 3$. На рис. 1 показан пример функции $f(u)$, обладающей нужными нам свойствами, полученной из (2).

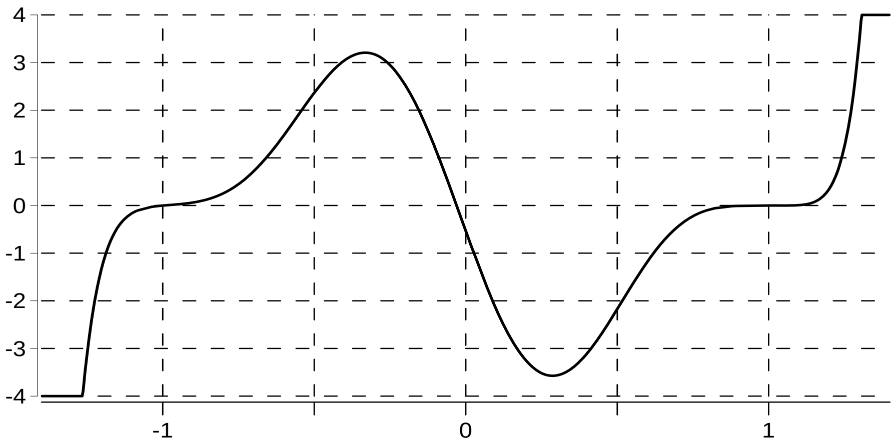


Рис. 1. Функция плотности источников $f(u)$ с вырожденными корнями для $\theta_1 = 3$, $\theta_3 = 3$
Fig. 1. The source density function $f(u)$ with the degenerate roots for $\theta_1 = 3$, $\theta_3 = 3$

Семейство графиков $u(x, t_m)$ профиля ВПС в однородной среде для последовательности значений $t_m = m\tau$ при $\theta_1 = \theta_3 = 3$ показано на рис. 2, движение фронта справа налево. Результаты получены применением итерационного метода решения симметрической разностной схемы для задачи (4) на равномерной сетке. Мы не будем вдаваться в детальное пояснение процесса численного решения, укажем только, что все последующие выводы сделаны при гарантированной точности результатов, которая оценена как аналитическими оценками скорости сходимости, так и практической проверкой сходимости путем сравнения результатов, полученных на семействе сгущающихся сеток. Рис. 2 при тщательном изучении показывает, что передняя и задняя части ВПС (движущегося справа налево) стремятся к своим предельным значениям соответственно φ_1 и φ_3 по различным законам.

На рис. 3 показан график функции $u(x, t^\star)$ для передней части ВПС для фиксированного значения $t^\star$ в полулогарифмическом масштабе, по вертикальной оси отложено значение $F(x) = \ln\big(u(x, t^\star) - \varphi_1\big)$, по горизонтальной оси x. График показывает, что зависимость $F(x)$ линейная и позволяет найти показательную функцию

$$u(x, t^\star) = \varphi_1 + C_1 e^{q_1(x - x_1)}(1 + \zeta_1(x)), \tag{14}$$

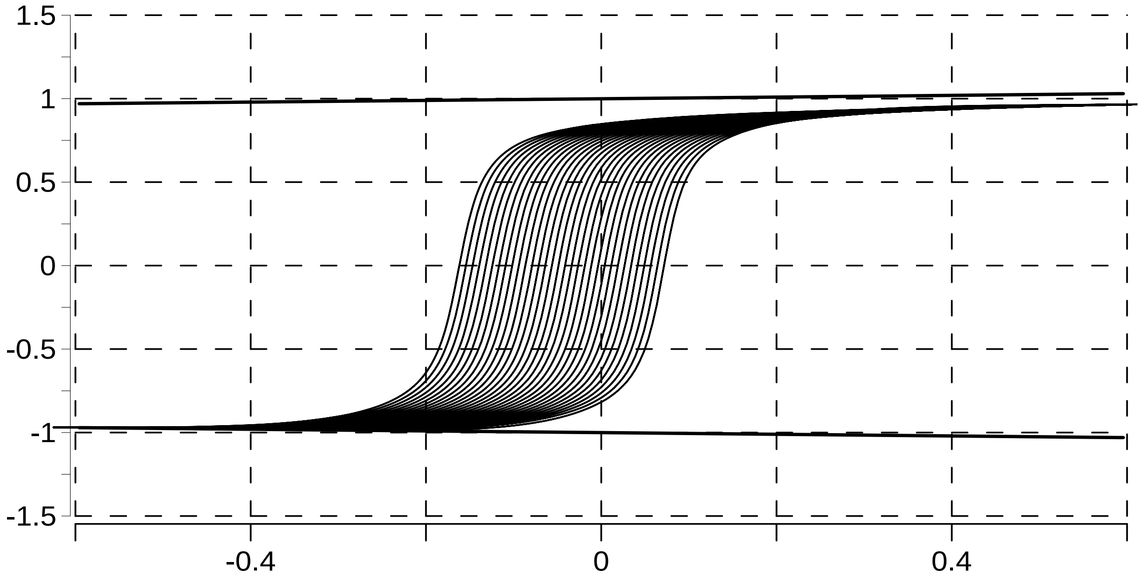


Рис. 2. Последовательность графиков $u(x, t_m)$, профиля ВПС в однородной среде для последовательности значений $t_m = m\tau$ при $\theta_1 = \theta_3 = 3$
Fig. 2. The sequence of the Internal Transitional Layer $u(x, t_m)$ plots in the homogemeous media for the time sequence $t_m = m\tau$ in case of $\theta_1 = \theta_3 = 3$

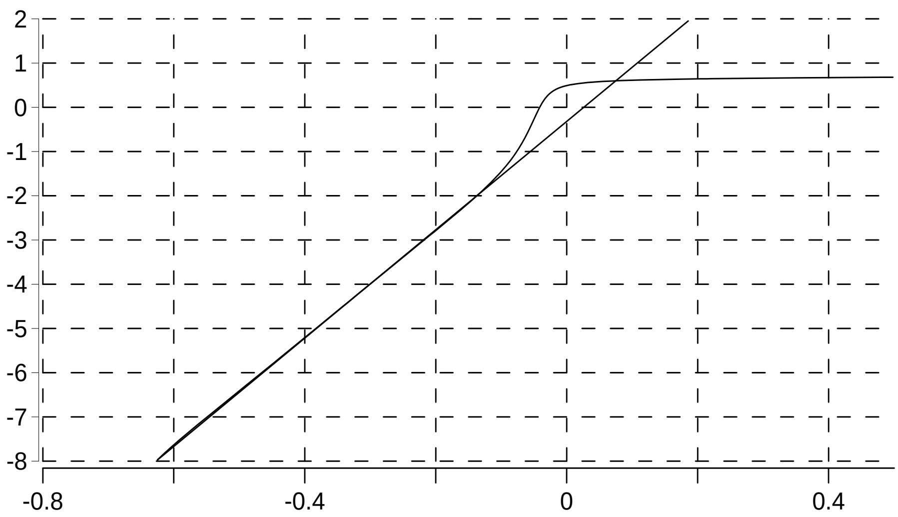


Рис. 3. График $F(x) = \ln\big(u(x, t^\star) - \varphi_1(x)\big)$, полученный в результате компьютерного моделирования и линейная функция, коэффициенты которой найдены методом наименьших квадратов
Fig. 3. The plot of $F(x) = \ln\big(u(x, t^\star) - \varphi_1(x)\big)$ function calculated as a result of the computer modelling, and the linear function with the coefficients calculated with the Least Squares method

причем $q_1 > 0$, $u \to \varphi_1{+}0$, $\zeta_1 \to 0$ при $x \to -\infty$. Значения констант в выражении (14) мы нашли методом наименьших квадратов (МНК) и найдем далее аналитически. Таким образом, мы ожидаем получить экспоненциальный профиль передней части ВПС.

На рис. 4 показан аналогичный график функции $u(x,t^\star)$ для задней части фронта ВПС, но теперь в полном логарифмическом масштабе, по вертикальной оси отложено значение $G(x) = \ln\bigl(\varphi_3 - u(x,t^\star)\bigr)$, по горизонтальной оси – значение $s = \ln(x - x_3)$. Зависимость $G(s)$ также линейная и позволяет найти степенную функцию

$$u(x,t^\star) = \varphi_3(x) - C_3(x - x_3)^{-\nu_3}(1 + \zeta_3(x)), \tag{15}$$

причем теперь $u \to \varphi_3 - 0$, $\zeta_3 \to 0$ при $x \to +\infty$.

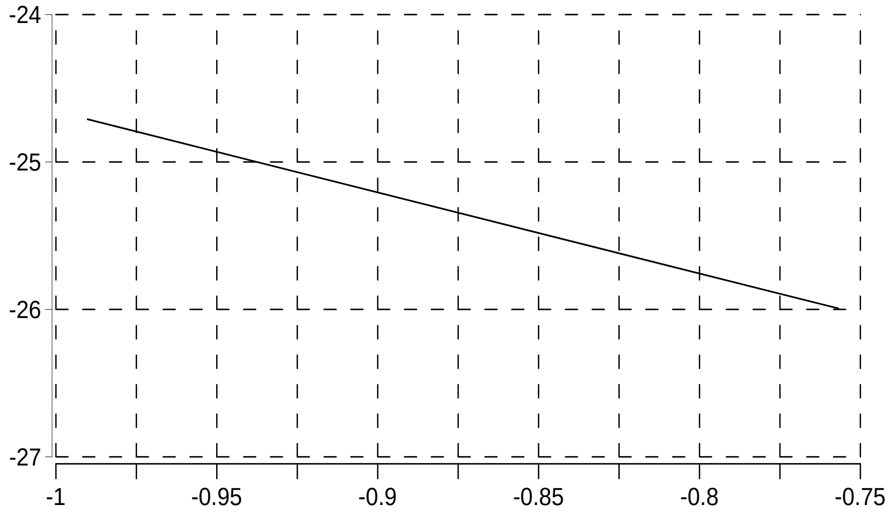


Рис. 4. График зависимости $G = \ln\bigl(\varphi_3(x) - u(x,t^\star)\bigr)$ от $s = \ln(x - x_3)$, полученный в результате компьютерного моделирования, и линейная функция, коэффициенты которой найдены методом наименьших квадратов
Fig. 4. The plot of $G = \ln\bigl(\varphi_3(x) - u(x,t^\star)\bigr)$ function wia $s = \ln(x - x_3)$ argument, both calculated by the computer modelling, and the linear function with the coefficients calculated with the Least Squares method

Значения констант $C_3 > 0$, x_3, $\nu_3 > 0$ для рис. 4 мы нашли также с помощью МНК и опять найдем далее аналитически. Таким образом, мы ожидаем получить степенной профиль задней части ВПС. Разумеется, результаты численного моделирования не доказывают корректности вывода об экспоненциальном и степенном характере передней и задней части ВПС, это утверждение мы теперь строго обоснуем методом дифференциальных неравенств.

4. Исследование фронта контрастной структуры

4.1. Исследование передней части фронта

Результаты компьютерного моделирования показывают, что поведение передней и задней частей фронта различаются. Начнем с передней части фронта. Мы используем метод разложения решения уравнения (4) в асимптотический ряд по степеням малого параметра ε для строгого обоснования отмеченных в численном моделировании особенностей поведения фронта КС. Рассмотрим сначала профиль ВПС в окрестности передней части фронта, примыкающей к уровню φ_1 в однородной среде. Пусть фронт дрейфует справа налево со скоростью $W < 0$, причем функция $u(x, t)$ при всех t есть возрастающая функция x. Пусть $u = \varphi_1 + w$, $w > 0$, и в некоторой окрестности значения $u = \varphi_1$ верно равенство

$$f(u) = C_1(u - \varphi_1)^{\star\theta_1}(1 + C_1'(u)), \tag{16}$$

$C_1' \to 0$ при $u \to \varphi_1$. Мы не требуем равенства $f(u) = C_1(u - \varphi_1)^{\star\theta_1}$, это позволяет получить более общие результаты. Тогда для w получим задачу $-w_t + \kappa w_{xx} - f(\varphi_1 + w) = 0$, решение которой будем искать в виде бегущей квазиволны: $w(x, t) = w(x - Wt)$. Выполним процедуру понижения порядка: $w' = p > 0$, получим уравнение $\kappa p p_w = -Wp + Cw^{\star\theta_1}$. Используя метод дифференциальных неравенств, легко показать, что решение краевой задачи

$$\begin{cases} \kappa p p_w = -Wp + Cw^{\star\theta_1}, \\ \lim_{w\to+0} p(w) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

имеет вид $p = -\dfrac{W}{\kappa}w + wp_1(w)$, где $p_1(w)$ – гладкая функция, и $\lim\limits_{w\to 0} p_1(w) = 0$. Поэтому для любого решения задачи

$$\begin{cases} Ww' + \kappa w'' - Cw^{\star\theta_1} = 0, \\ w \to +0 \text{ при } x \to -\infty \end{cases} \tag{18}$$

(с одним граничным условием) существует

$$\lim_{x\to-\infty} w(x) \cdot e^{(W/\kappa)x} = e^{(W/\kappa)x_1}$$

(это равенство является также определением x_1) и для любого $\delta > 0$ найдутся такие значения x_1' и x_1'', $x_1' < x_1 < x_1''$, что решение задачи (17) при всех $w : |w| < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$e^{-(W/\kappa)(x - x_1')} < w < e^{-(W/\kappa)(x - x_2'')}, \tag{19}$$

причем $x_1' \to x_1$ и $x_1'' \to x_1$ при $\delta \to +0$, напомним, что $W < 0$. Таким образом, передний фронт квазиволны имеет экспоненциальный характер.

4.2. Исследование задней части фронта

Рассмотрим теперь ВПС в окрестности задней части фронта, примыкающей к уровню φ_3 в однородной среде. Пусть в некоторой окрестности значения $u = \varphi_3$ верно

$$f(u) = C_3(u - \varphi_3)^{\star\theta_3}(1 + C_3'(u)), \tag{20}$$

$C_3' \to 0$ при $u \to \varphi_3$. Выполнив замену $u = \varphi_3 - \tilde{w}$, $\tilde{p} = \tilde{w}'$, получим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} \kappa \tilde{p}\tilde{p}_{\tilde{w}} = W\tilde{p} + C\tilde{w}^{\theta_3}, \\ \tilde{p}(+0) = +0, \end{cases} \tag{21}$$

решение которой (в отличие от задачи (17)) имеет вид $\tilde{p} = -\dfrac{C}{W}\tilde{w}^{\theta_3} + w\tilde{p}_1(\tilde{w})$, где $\tilde{p}_1(w)$ – гладкая функция и $\lim_{\tilde{w}\to 0}\tilde{p}_1 = 0$. Поэтому для любого решения задачи

$$\begin{cases} W\tilde{w}' + \kappa\tilde{w}'' - C\tilde{w}^{\star\theta_3} = 0, \\ \tilde{w} \to +0 \text{ при } x \to +\infty, \end{cases} \tag{22}$$

и для любого $\delta > 0$ найдутся x_3' и x_3'' такие, что для всех x таких, что $|\tilde{w}(x)| < \delta$ верно

$$\tilde{w}_0(x - x_3') < \tilde{w}(x) < \tilde{w}_0(x - x_3''), \tag{23}$$

где

$$\tilde{w}_0(s) = \left(\frac{-W}{C(\theta_3 - 1)}\right)^{1/(\theta_3-1)} s^{-1/(\theta_3-1)}, \tag{24}$$

$$u(x,t) = \varphi_3 - \tilde{w}(x - Wt), \tag{25}$$

напомним, что $W < 0$. Таким образом, задний фронт имеет степенной характер с показателем $1/(\theta_3 - 1)$. Заметим также, что из (24) следует $\tilde{w}_0(s) \to +0$ при $s \to +\infty$. Мы показали, что уравнение (4) имеет решение, которое в окрестности вырожденных корней ведет себя как бегущая квазиволна и стремится к равновесным значениям определенным образом. Найденные аналитические выражения для переднего и заднего фронта ВПС точно совпадают с результатами численного эксперимента, представленными соответственно на рис. 3 и рис. 4. Однако это еще не доказывает, что решение начально–краевой задачи с заданным начальным профилем имеет вид КС. Теперь мы докажем это, используя метод дифференциальных неравенств.

5. Построение формальной асимптотики

Построим формальную асимптотику решения задачи (4) в виде суммы регулярной функции $\overline{u}(x, x^\star(t))$ и функции внутреннего переходного слоя (ВПС) $Q(\xi, x^\star)$.

Построение в соответствии с методикой, разработанной в [9], начинается с обоснования существования такого значения W, при котором задача (6) имеет решение типа КС, примыкающее к равновесным значениям φ_1 и φ_3 при соответственно $\xi \to -\infty$ и $\xi \to +\infty$. В [9] это обоснование вытекает из свойств задачи (6), в том числе из предположения о том, что корни уравнения $f(v) = 0$ простые, поэтому мы в данной работе использовать это предположение не будем. Вместо этого мы предположим, что функция плотности источников f задана выражением (8), причем функция $p(v)$ задана выражением (11), а $v(x)$ задана неявно выражением (12). Тогда для $f(v)$ верно (9), и существует точное решение уравнения (7), которое имеет вид

$$u(x,t) = v_0\left(\frac{x - x_0^\star(t)}{\varepsilon}, x_0^\star(t)\right), \quad x_0^\star(t) = x_{00}^\star + W_0 t. \tag{26}$$

В приближении нулевого порядка регулярная функция разрывна, ее точка разрыва движется со скоростью дрейфа ВПС нулевого порядка W_0 :

$$\overline{u}_0(x,t) = \begin{cases} \varphi_3(x) & \text{при} \quad x > x_0^\star(t), \\ \varphi_1(x) & \text{при} \quad x < x_0^\star(t), \end{cases} \tag{27}$$

а полное приближение нулевого порядка является гладкой функцией и имеет вид

$$u_0(x,t) = \begin{cases} \varphi_3(x) + Q_0^{(+)}(\xi,t) & \text{при} \quad x > x_0^\star(t), \\ \varphi_1(x) + Q_0^{(-)}(\xi,t) & \text{при} \quad x < x_0^\star(t). \end{cases} \tag{28}$$

Здесь $\xi = \dfrac{x - x_0^\star(t)}{\varepsilon}$ – растянутая переменная, в которой функция плотности источников задана выражением (8), причем функция $p(v)$ задана выражением (11), а $u(x,t)$ задана неявно выражением (12). Тогда для $f(v)$ верно (9), и существует точное решение уравнения (7), которое имеет вид (26), заданная величина $x_{00}^\star$ задает начальное положение фронта КС. Однако для физических приложений важно исследовать вопрос о том, является ли это решение устойчивым по отношению к небольшому изменению начальных условий. Для ответа на этот вопрос мы используем методику, разработанную в [9] и основанную на построении верхнего и нижнего решений эволюционного уравнения (4). Построим верхнее решение $\beta(x,t,\varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x,t,\varepsilon)$. Введем оператор

$$L[u] = -\varepsilon u_t + \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u,\varepsilon), \tag{29}$$

действующий на дважды непрерывно дифференцируемые в области $\Pi = (a,b) \times (0,T)$, непрерывные в области $\overline{\Pi} = [a,b] \times [0,T)$ функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи (4), и построим такие β, α, чтобы выполнялись условия

$$L[\alpha] > 0, \;\; L[\beta] < 0, \;\; \alpha < \beta \tag{30}$$

в Π. Будем искать α и β следующим образом:

$$\alpha(x,t) = v_0\big(\xi_\alpha, x^\star(t)\big) - \varepsilon^\mu r, \;\; \xi_\alpha = \frac{x - x_\alpha^*(t)}{\varepsilon}, \tag{31}$$

$$\beta(x,t) = v_0\big(\xi_\beta, x^\star(t)\big) + \varepsilon^\mu r, \;\; \xi_\beta = \frac{x - x_\beta^*(t)}{\varepsilon}, \tag{32}$$

где $x_\alpha^*(t) = x_0^\star(t) + \varepsilon^\gamma qt$, $x_\beta^*(t) = x_0^\star(t) - \varepsilon^\gamma qt$, $x_0^\star(t) = x_{00}^\star + W_0 t$ (это в однородной среде, в неоднородной координату точки перехода находим из интегрального уравнения $x_0^\star(t) = x_{00}^\star + \int_0^t W_0(x^\star(\tau))d\tau$). Покажем, что условия (30) выполняются. Проведем доказательство для верхнего решения, для нижнего решения доказательство аналогично. Подействуем оператором L на функцию β:

$$L[\beta] = W v_{\xi_\beta} - \varepsilon^\gamma q v_{\xi_\beta} + \kappa v_{\xi_\beta \xi_\beta} - f\big(v(\xi_\beta) + \varepsilon^\mu r\big). \tag{33}$$

Проанализируем получившееся выражение и докажем, что найдутся такие значения каждого из параметров μ, r, q, γ, при которых $L[\beta]$ будет строго меньше нуля.

Теорема 1. Для любых $\theta_1 > 1$, $\theta_3 > 1$ $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists r > 0$, $\exists q > 0$, $\exists \mu > 0$, $\exists \gamma > 0 : L[\beta] < 0$, $L[\alpha] > 0$ и $\alpha < \beta$ в Π.

Доказательство. Все параметры в выражении (33) мы считаем положительными: $q > 0$, $r > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$. Рассмотрим поведение $f_v(v)$. Разобьем область определения функции $f(v)$ на три области: $G_1 = \{\varphi_1 - \delta\varphi_1 \le v \le \varphi_1 + \delta\varphi_1\}$, $G_2 = \{\varphi_1 + \delta\varphi_1 \le v \le \varphi_3 - \delta\varphi_3\}$, $G_3 = \{\varphi_3 - \delta\varphi_3 \le v \le \varphi_3 + \delta\varphi_3\}$, используя условия (9), (10), неравенства (16), (20), и последовательно покажем, что $L[\beta] < 0$ на каждом из участков.

Из (33) найдем

$$L[\beta] = \big[W v_\xi + \kappa v_{\xi\xi} - f\big(v(\xi)\big)\big] - \varepsilon^\gamma q v_\xi + \big[f\big(v(\xi)\big) - f\big(v(\xi) + \varepsilon^\mu r\big)\big]. \tag{34}$$

Первые три слагаемых в силу (4) в сумме равны нулю. Обозначим $\varepsilon^\mu r = 2\triangle v(\xi)$, тогда

$$L[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - \big[f\big(v(\xi) + 2\triangle v(\xi)\big) - f\big(v(\xi)\big)\big]. \tag{35}$$

Необходимо доказать, что $L[\beta] < 0$. Начнем с области G_1. Очевидно, в области G_1 верно неравенство $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \le -\varepsilon^\gamma q D_1 \le 0$, где $D_1 = \partial v/\partial\xi \ge 0$, производная берется в некоторой точке области G_1. Найдем минимальное значение второго слагаемого (35) при заданном фиксированном значении $\triangle v(\xi)$ и всех возможных значениях $v \in G_1$. Из (20) следует, что наименьшее значение $f(v + 2\triangle v) - f(v)$ достигается при $v = -\triangle v$, причем

$$\min\big(f(v + 2\triangle v) - f(v)\big) \ge f\big(\varphi_1 + \triangle v\big) - f\big(\varphi_1 - \triangle v\big) \ge 2C_1 \varepsilon^{\mu\theta_1} r^{\theta_1}. \tag{36}$$

Тогда в области G_1 получим:

$$L[\beta] \le -\varepsilon^\gamma q D_1 - 2C_1 \varepsilon^{\mu\theta_1} r^{\theta_1} < 0. \tag{37}$$

Аналогично можно построить оценку и в G_3 :

$$L[\beta] \le -\varepsilon^\gamma q D_3 - 2C_3 \varepsilon^{2\mu\theta_3} r^{\theta_3} < 0, \tag{38}$$

где D_3 и C_3 – положительные константы.

Рассмотрим $L[\beta]$ в области G_2. Представим выражение (35) внутри этой области в виде:

$$L[\beta] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - \big[f\big(v(\xi) + 2\triangle v(\xi)\big) - f\big(v(\xi)\big)\big] = -\varepsilon^\gamma q v_\xi - f_v(v^\star)\varepsilon^\mu r, \tag{39}$$

где $v^\star$ – некоторое значение v из промежутка $v(\xi) < v^\star < v(\xi) + 2\triangle v(\xi)$. Заметим, что v_ξ вычисляется для некоторого значения ξ, принадлежащего области G_2, поэтому найдется такое число $D_2 > 0$, что $v_\xi > D_2$ в области G_2. При обосновании этого утверждения мы использовали монотонность функции $v(\xi)$ и условие отделенности области G_2 от корней $\varphi_{1,3}$ функции f. Запишем оценку первого слагаемого: $-\varepsilon^\gamma q v_\xi \le -\varepsilon^\gamma q D_2$ и оценку второго: $|f_v(v^\star)\varepsilon^\mu r| \le M\varepsilon^\mu r$, где $M = \max(f_v) > 0$ вычисляется по всей области G_2, $M > 0$. Из условий задачи следует, что это некоторое положительное число. Тогда мы можем получить требуемую оценку

$$L[\beta] \le -\varepsilon^\gamma q D_2 + M\varepsilon^\mu r < 0, \tag{40}$$

полагая $\mu = \gamma$ и получаем ограничение на параметр сдвига q :

$$q > \frac{rM}{D}. \tag{41}$$

Мы построили верхнее решение β в виде (32) и показали, что при выполнении оценки (41) верно неравенство $L[\beta] < 0$, выражающее знакоопределенность оператора L на верхнем решении. По аналогии можно построить нижнее решение α в виде (31) и доказать, что для него выполняется условие $L[\alpha] > 0$. Упорядоченность верхнего и нижнего решений, т.е. третье условие (30), очевидна из построения α и β (31), (32). Существование упорядоченной пары верхнего и нижнего решений доказано. Таким образом, выполнены все условия теоремы, которая является модификацией соответствующей теоремы из [10]:

Теорема 2. Для задачи (4) существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ соответственно. Если начальное условие заключено между ними, т.е. $\alpha(x,0,\varepsilon) < u^0(x,\varepsilon) < \beta(x,0,\varepsilon)$, то задача (4) имеет единственное классическое решение $u(x,t,\varepsilon)$, причем

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \le u(x,t,\varepsilon) \le \beta(x,t,\varepsilon)$$

для всех $x \in [a,b]$ и $t \in [0,T)$.

6. Заключение

Мы показали, что задняя часть фронта внутреннего переходного слоя для уравнения реакции–диффузии со степенной зависимостью плотности источников от концентрации имеет степенной характер. Это приводит к тому, что затухание переходного процесса со временем имеет степенной характер вместо экспоненциального. Таким образом, след от прохождения переходного слоя остается заметным в течение значительно большего промежутка времени, чем для стандартной модели корня первой степени. Это может иметь практическое значение для анализа информационных систем, так как позволяет обнаружить завершившийся переходный процесс по его следам, которые проявляются в некотором (малом) отличии концентрации от равновесного значения на протяжении длительного времени.

Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., “О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 44–55; English transl.: Butuzov V. F., “On Periodic Solutions to Singularly Perturbed Parabolic Problems in the Case of Multiple Roots of the Degenerate Equation”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **51**:1 (2011), 40–50.

[2] Butuzov V. F. et al , “On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation”, *Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl.*, **83** (2013), 1–11.

[3] Бутузов В. Ф., “Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения”, *Мат. заметки*, **94**:1 (2013), 68–80; English transl.: Butuzov V. F., “On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation”, *Math. Notes*, **94**:1 (2013), 60–70.

[4] Альшин А. Б., Корпусов М. О., Юшков Е. В., “Бегущая волна как решение нелинейного уравнения в полупроводниках с сильной пространственной дисперсией”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 808–812; English transl.: Alshin A. B., et al., “The traveling wave as a solution of a nonlinear equation in semiconductors with strong spatial dispersion”, *Comp. Math. Math Phys.*, **48**:5 (2008), 764–768.

[5] Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R., “Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities”, *J. Math. Sci.*, **121**:1 (2004), 1973–2079.

[6] Vasil’eva A., Nikitin A., Petrov A., “Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **78**:1–4 (1994), 261–279.

[7] Bykov A. et al, “Anomalous Persistence of bisymmetric Magnetic Structures in Spiral Galaxies”, *MNRAS*, **292**:1 (1997), 1–10.

[8] Moss D., Petrov A., Sokoloff D. et al, “The motion of magnetic fronts in spiral galaxies”, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **92**:1–2 (2000), 129–149.

[9] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol’nov Yu. V., Nefedov N. N., “Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.

[10] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum, New York, 1992.

Bykov A. A., Ermakova K.E., "Nonstationary Equations for the Reaction Layer with the Degenerate Equilibrium Points", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 309–321.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-309-321

Abstract. We consider a nonstationary process of spreading some substance in a one-dimensional spatially inhomogeneous system of cells. It is assumed that a change in the concentration of $u_n(t)$ in a cell with the number n with time t is determined by the difference in concentration in this cell and in its two neighbors on the left and on the right, as well as the source density, which depends on n and depends on $u_n(t)$. Such a model leads to the initial-boundary value problem for the differential-difference equation (differentiation with respect to t variable, the difference expression with respect to n). With a sufficiently small difference in concentration in each pair of neighboring cells we can replace the difference expression by the second partial derivative with respect to the spatial coordinate, and describe the propagation by the reaction-diffusion equation. This equation belongs to the class of quasilinear parabolic equations. It is assumed that the density of the sources vanishes (with changing the sign) at three values of the concentration, two of which, lower and upper, are stable. There is also an intermediate unstable state with zero source density, in which the sign reversal also takes place. The peculiarity of our model is that we assume, that two extreme roots of the source density function are degenerate (with an integer or fractional exponent). We intend to show analytically and by the computer simulation, that this model leads to the fact, that the rate of asymptotic aspiration of concentration to equilibrium values for a moving front becomes power-law instead of exponential, which takes place for standard models. In the paper, we have constructed a formal asymptotics solution of the initial-boundary value problem for the reaction-diffusion equation in a homogeneous medium with a power-law dependence of the source density on the temperature, an upper and lower solutions are constructed, a rigorous justification of the formal asymptotics is given. Precise solutions of the diffusion reaction equation are constructed for a wide class of source density functions.

Keywords: nonlinear differential equations, asymptotic methods, contrast structures, differential inequalities, combustion

On the authors: Aleksei A. Bykov, orcid.org/0000-0002-9399-7115, professor, Lomonosov Moscow State University, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: abkov@yandex.ru; Kristina E. Ermakova, graduate student, orcid.org/0000-0002-9279-3762, Lomonosov Moscow State University, e-mail: kristinaermakova19@rambler.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project 16-01-00690-a.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 322–338
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 322–338

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-322-338

UDC 519.6

Dynamically Adapted Mesh Construction for the Efficient Numerical Solution of a Singular Perturbed Reaction-diffusion-advection Equation

Lukyanenko D. V.[1], Volkov V. T.[2], Nefedov N. N.[2]

Received December 15, 2016

Abstract. This work develops a theory of the asymptotic-numerical investigation of the moving fronts in reaction-diffusion-advection models. By considering the numerical solution of the singularly perturbed Burgers's equation we discuss a method of dynamically adapted mesh construction that is able to significantly improve the numerical solution of this type of equations. For the construction we use *a priori* information that is based on the asymptotic analysis of the problem. In particular, we take into account the information about the speed of the transition layer, its width and structure. Our algorithms are able to reduce significantly complexity and enhance stability of the numerical calculations in comparison with classical approaches for solving this class of problems. The numerical experiment is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

The article is published in the authors' wording.

Keywords: singularly perturbed, interior layer, dynamically adapted mesh

For citation: Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., "Dynamically Adapted Mesh Construction for the Efficient Numerical Solution of a Singular Perturbed Reaction-diffusion-advection Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 322–338.

On the authors:
Dmitry V. Lukyanenko, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
1, bld. 2 Leninskiye Gory,
Moscow, GSP-1, 119991, Russia,
e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Vladimir T. Volkov, orcid.org/0000-0002-4205-4141, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
1, bld. 2 Leninskiye Gory,
Moscow, GSP-1, 119991, Russia,
e-mail: volkovvt@mail.ru

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, professor, Dr. Sci.,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
1, bld. 2 Leninskiye Gory,
Moscow, 119991, Russia,
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by RFBR, projects No. 16-01-00755, 16-01-00437, 17-51-53002 and 17-01-00159.
[2]This work was supported by RFBR, projects No. 16-01-00437.

Introduction

This work is concerned with analytic-numerical methods for singularly perturbed parabolic equations which may be interpreted as models of reaction-diffusion-advection processes in various applications. Such problems often feature narrow boundary and interior layers (stationary or moving fronts), and are extremely difficult for a numerical treatment. Recently, asymptotic analysis is successfully used to investigate such problems (see [8, 15, 14, 13, 18, 16, 17, 10, 11, 12], where special mesh methods used). Note that the special numerical methods for singularly perturbed parabolic equations were practically studied mostly for problems with stationary boundary and interior layers. There are some specific features in constructing special difference schemes in the case of moving interior layers. For singularly perturbed parabolic problems with such type of solutions, special schemes were constructed in [10, 6, 7, 5]. Such schemes are fairly complicated, that calls the necessity to develop simpler schemes and alternative numerical methods (based on *a posteriori* adapted grids). In the presented paper we propose an effective combined analytic-numerical approach, which use some *a priori* information from asymptotic analysis of the moving front type solution, in order to simplify numerical calculations. Numerical methods for nonlinear singularly perturbed interior layer problems using an approximate layer location are developed, particularly, in the works [10, 9] (see, also, the references therein), where different type of refined meshes were proposed.

The motivation to combine asymptotic and numerical methods is that if we use numerical method for a singularly perturbed problem, two opposite phenomena connected with small parameter arise: on the one hand, the smaller this parameter, the more rough and unstable numerical solution we obtain; on the other hand, the smaller this parameter, the more precise *a priori* information about exact solution we are able to get by using asymptotic methods. This fact gives the possibility for a productive combination of asymptotic and numerical approaches. Another reason is that using asymptotic analysis of singularly perturbed problem we can prove the existence of the exact solution with boundary or internal layers (moving fronts) and can decrease the spatial dimension for numerical calculations: the dimension of spatial variables in the equation for the moving front location is lower per unit then the original problem or this equation is not partial, but ODE (or it is not differential equation at all).

The main purpose of this paper is to suggest an algorithm of numerical solution of the singularly perturbed problems with the moving internal layers (fronts) which based on the asymptotic analysis of the problem. Using the rigorous asymptotic analysis, which also state the existence of the moving front type solution and gives the asymptotic expansion of the front location, we construct so called dynamically adapted mesh (DAM).

Our DAM is constructed by the following way. We use the basic (coarse) mesh with the mesh interval choosing in accordance with the width of the interior layer. The information about the location and width of the interior layer (front) we get by the asymptotic analysis. Inside the moving front region two course mesh intervals are divided into some additional subintervals (so inside the moving front region the mesh is a version of a Shishkin mesh). In order to justify the number of these additional intervals some method of the *a posteriori* estimates (e.g. Richardson extrapolation) can be applied. The coarse mesh (and, therefore, the front region intervals) is chosen to guarantee that the front is located inside these intervals.

Note, that our variant of the coarse mesh is ε-dependent. For the problems with moving internal layers this choice of the coarse mesh simplifies the interpolation procedure for the moving refined mesh and allows to save computing resources. Of course, all presented ideas can be realized on the mesh when the total number of nodes (coarse and refined meshes together) not depends of ε (Shishkin mesh), but in this case nodes of the coarse mesh are not fixed because of refined mesh is moving with the front. In this paper we did not investigate *a priori* the convergence of the numerical method, but our variant of the mesh choice allows to simplify the procedure of *a posteriori* error estimates because not requires to do interpolation to the new coarse mesh nodes on each time step.

We also have to note that the problem to define the layer location in our example is explicitly solvable. In more general case we have to create numerical method to solve this problem which is done at the end of Section 1..

The paper is structured as follows. In Section 1. we describe methods which allow to get *a priori* information that will be used for the DAM constructing. In Section 2. we briefly describe the main ideas that are used for constructing the DAM. In Section 3. we perform a numerical experiment for the example and explain some nuances of the mesh constructing. Finally, in Section 4. we discuss some perspectives of our approach.

1. *A priori* information from the asymptotic analysis

We illustrate our approach by considering the following class of problems:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = A(u,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + B(u,x), \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T], \\ u(0,t) = u_{left}, \quad u(1,t) = u_{right}, \\ u(x,0) = u_{init}(x), \end{cases} \tag{1}$$

where functions $A(u,x)$ and $B(u,x)$ are sufficiently smooth for $(x,u) \in [0;1] \times (-\infty;+\infty)$.

The rigorous treatment of problem (1) was obtained in [3], where the existence and asymptotics of the front type solution were established. The main information, which we use for our approach, is:

1. *speed* or *position* of the transition layer;
2. *width* of the transition layer;
3. *structure* of the transition layer (we use the fact that transition layer has the exponential behavior).

We will obtain this information using the asymptotic of the solution of problem (1). The main ideas of the asymptotic procedure are briefly represented below.

Let consider two initial value problems:

$$\begin{aligned} &A(u,x)\frac{du}{dx} + B(u,x) = 0, \quad u(0) = u_{left}, \quad x \in [0,1]; \\ &A(u,x)\frac{du}{dx} + B(u,x) = 0, \quad u(1) = u_{right}, \quad x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2}$$

We suppose, that the solutions of problems (2) exist on $x \in [0,1]$, and denote them as $\varphi^l(x)$ and $\varphi^r(x)$ respectively. Assume, that the following inequalities are fulfilled for all $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} &a) \quad \varphi^l(x) < \varphi^r(x), \\ &b) \quad A(\varphi^l(x), x)) > 0, \quad A(\varphi^r(x), x) < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

The problem of formation of the moving fronts is discussed in [2] and [1]. Particularly, for the reaction-diffusion problem the fast formation stage is described in [2]. We assume that the front is already formed at the moment $t = 0$ and the initial function $u_{init}(x)$ has a thin transition layer between levels $\varphi^l(x)$ and $\varphi^r(x)$ located at the point $x_{00} \in [0,1]$. For our problem this assumption can model a discontinuous-initial-condition situation.

We define the moving front position by the function $x_{t.p.}(t,\varepsilon)$, that is the point of the intersection of the solution of (1) $u(x,t,\varepsilon)$ and the level $\dfrac{1}{2}(\varphi^l(x) + \varphi^r(x))$.

We put $x_{t.p.}(0,\varepsilon) = x_{00}$ and will seek the position and speed of the transition point in the form of power series of ε

$$\begin{aligned} x_{t.p.}(t,\varepsilon) &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... \\ v_{t.p.}(t,\varepsilon) &= v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + ... \quad , \end{aligned} \tag{4}$$

where $v_i(t) = \dfrac{dx_i}{dt}$.

Assume, that the Cauchy problem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\int\limits_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u,x)du}{\varphi^r(x) - \varphi^l(x)}, \qquad x(0) = x_{00} \tag{5}$$

has solution $x(t)$ such that

$$x(t) \in (0,1) \quad \text{for all} \quad t \in [0;T].$$

and the following inequalities are fulfilled

$$\begin{aligned} &a) \quad \int\limits_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u,x)du > 0 \quad \text{for all} \quad x \in [0,1] \\ &b) \quad \int\limits_{\varphi^l(x)}^{s} (A(u,x) - V(x))du > 0 \quad \text{for all} \quad s \in (\varphi^l(x), \varphi^r(x), \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$V(x) = \frac{\int\limits_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u,x)du}{\varphi^r(x) - \varphi^l(x)}.$$

Condition (6), a) guarantee that (1) has no stationary solutions, and (6), b) provides solvability of some equations in the further asymptotic procedure.

We define by $\bar{D}^l_T$ and $\bar{D}^r_T$ the left and right sides with respect to the point $x_{t.p.}(t,\varepsilon)$ respectively and will find the solution of (1) separately in these parts

$$u = \begin{cases} u^l, & (x,t) \in \bar{D}^l_T \\ u^r, & (x,t) \in \bar{D}^r_T \end{cases} . \tag{7}$$

The functions u^l and u^r can be written in the form

$$u^l = \bar{u}^l(x,\varepsilon) + Q^l(\xi,t,\varepsilon), \quad u^r = \bar{u}^r(x,\varepsilon) + Q^r(\xi,t,\varepsilon)\,. \tag{8}$$

Here $\bar{u}^{l,r}(x,\varepsilon)$ – regular functions, which represent the solution far from transition point $x_{t.p.}(t,\varepsilon)$; function $Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon)$, where $\xi = (x - x_{t.p.}(t,\varepsilon))/\varepsilon$, describe transition layer (moving front) near this point ($\xi \le 0$ for the function with the index l and $\xi \ge 0$ for the function with the index r).

The functions $\bar{u}^{l,r}(x,\varepsilon)$ and $Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon)$ we seek as power series of ε:

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{u}^{l,r}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{l,r}_0(x) + \varepsilon\bar{u}^{l,r}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n\bar{u}^{l,r}_n(x) + \ldots \\ &b) \quad Q^{l,r}(\xi,t,\varepsilon) = Q^{l,r}_0(\xi,t) + \varepsilon Q^{l,r}_1(\xi,t) + \ldots + \varepsilon^n Q^{l,r}_n(\xi,t) + \ldots . \end{aligned} \tag{9}$$

Terms of series (9) can be built by the standard procedure (see [3]) separately at two sides of the point $x_{t.p.}(t,\varepsilon)$. We assume that the functions u^l and u^r are joint with the continuous first derivatives ($C^{(1)}$–matching conditions):

$$\begin{aligned} &\bar{u}^l(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) + Q^l(0,t,\varepsilon) = \bar{u}^r(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) + Q^r(0,t,\varepsilon) = \varphi(x_{t.p.}(t,\varepsilon)), \\ &\varepsilon\frac{d\bar{u}^l}{dx}(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) + \frac{\partial Q^l}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon) = \varepsilon\frac{d\bar{u}^r}{dx}(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) + \frac{\partial Q^r}{\partial\xi}(0,t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{10}$$

Substituting (9), a) into (1), at zero order of ε we obtain equations (2). So we have $\bar{u}^l_0(x) = \varphi^l(x)$, $\bar{u}^r_0(x) = \varphi^r(x)$ and

$$\bar{u}_0(x,t) = \begin{cases} \bar{u}^l_0 = \varphi^l(x), & x \in [0, x_{t.p.}(t,\varepsilon)) \\ \bar{u}^r_0 = \varphi^r(x), & x \in (x_{t.p.}(t,\varepsilon), 1] \end{cases} \tag{11}$$

Functions $\bar{u}^{l,r}_k(x)$, $k \ge 1$ are the solutions of the following problems

$$\begin{aligned} &\bar{A}^{l,r}(x)\frac{d\bar{u}^{l,r}_k}{dx} = -\left(\frac{\partial\bar{A}^{l,r}}{\partial u}(x)\frac{d\varphi^{l,r}}{dx} + \frac{\partial\bar{B}^{l,r}}{\partial u}(x)\right)\bar{u}^{l,r}_k + \bar{f}^{l,r}_k(x), \\ &\bar{u}^l_k(0) = 0, \bar{u}^r_k(1) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

where $\bar{A}^{l,r}(x) = A(\varphi^{l,r}(x),x)$, $\bar{B}^{l,r}(x) = B(\varphi^{l,r}(x),x)$ and $\bar{f}^{l,r}_k(x)$ — is known function. Solutions of (12) can be written explicitly.

In order to obtain the transition layer functions (9), b) we must do the change of variables (x,t) by (ξ,t) in (1), where $\xi = (x - x_{t.p.}(t,\varepsilon))/\varepsilon$. Operator $\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ takes the form $\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{1}{\varepsilon}v_{t.p.}(t,\varepsilon)\dfrac{\partial}{\partial\xi} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ where $v_{t.p.}(t,\varepsilon)$ is defined in (4); operator $\dfrac{\partial}{\partial x}$ changes to $\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial\xi}$.

Substituting these expressions and (9), b) into (1) and equating terms with different powers of ε, we obtain equations for functions $Q_i^{l,r}(\xi,t)$, $i=1,2,\dots$

For $Q_0^{l,r}(\xi,t)$ we have the following problem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q_0^{l,r}}{\partial \xi^2} - \Big(A(\varphi^{l,r}(x_{t.p.}(t,\varepsilon)) + Q_0^{l,r}, x_{t.p.}(t,\varepsilon)) - v_{t.p.}(t,\varepsilon)\Big)\frac{\partial Q_0^{l,r}}{\partial \xi} = 0,\\
&Q_0^l(0,t) + \varphi^l(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) = \varphi(x_{t.p.}(t,\varepsilon)),\\
&Q_0^r(0,t) + \varphi^r(x_{t.p.}(t,\varepsilon),\varepsilon) = \varphi(x_{t.p.}(t,\varepsilon)),\\
&Q_0^l(\xi,t) \to 0 \quad \text{for} \quad \xi \to -\infty,\\
&Q_0^r(\xi,t) \to 0 \quad \text{for} \quad \xi \to +\infty.
\end{aligned} \tag{13}$$

Using the continuous function

$$\tilde{Q}(\xi, x_{t.p.}(t,\varepsilon), v_{t.p.}(t,\varepsilon)) = \begin{cases} \varphi^l(x_{t.p.}(t,\varepsilon)) + Q_0^l(\xi,t), & \xi \leqslant 0 \\ \varphi^r(x_{t.p.}(t,\varepsilon)) + Q_0^r(\xi,t), & \xi \geqslant 0 \end{cases} \tag{14}$$

we can rewrite (13) as

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \xi^2} - \Big(A(\tilde{Q}, x_{t.p.}(t,\varepsilon)) - v_{t.p.}(t,\varepsilon)\Big)\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = 0, \qquad \xi \in (-\infty,+\infty),\\
&\tilde{Q}(0, x_{t.p.}(t,\varepsilon), v_{t.p.}(t,\varepsilon)) = \varphi(x_{t.p.}(t,\varepsilon)),\\
&\tilde{Q}(-\infty, x_{t.p.}(t,\varepsilon), v_{t.p.}(t,\varepsilon)) = \varphi^l(x_{t.p.}(t,\varepsilon)),\\
&\tilde{Q}(+\infty, x_{t.p.}(t,\varepsilon), v_{t.p.}(t,\varepsilon)) = \varphi^r(x_{t.p.}(t,\varepsilon)).
\end{aligned} \tag{15}$$

The exponential estimates for the solutions $Q_0^{l,r}(\xi,t)$ of (15) were established in [3]:

$$|Q_0^l(\xi,t)| \leqslant Ce^{\varkappa\xi} \quad (\xi \leqslant 0), \qquad |Q_0^r(\xi,t)| \leqslant Ce^{-\varkappa\xi} \quad (\xi \geqslant 0), \quad t \in [0,T], \tag{16}$$

where C and $\varkappa$ are positive constants.

Using $C^{(1)}$–matching conditions and explicit formulas for $\dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi}$ we obtain the problem (5) for zero order term of the moving front position

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\int\limits_{\varphi^l(x_0)}^{\varphi^r(x_0)} A(u,x_0)du}{\varphi^r(x_0) - \varphi^l(x_0)}, \qquad x_0(0) = x_{00}. \tag{17}$$

Note that for general cases the initial value problem (17) has to be solved numerically. In the example, which we use at Section 3., we can solve it explicitly.

Continuing this procedure we can write the equations for functions $Q_1^{l,r}(\xi,t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q_1^{l,r}}{\partial \xi^2} + v_{t.p.}(t,\varepsilon)\frac{\partial Q_1^{l,r}}{\partial \xi} - \tilde{A}(\xi,t)\frac{\partial Q_1^{l,r}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{A}}{\partial u}(\xi,t)\Phi(\xi, x_{t.p.}, v_{t.p.})Q_1^{l,r} = f_1^{l,r}(\xi,t)\\
&Q_1^l(0,t) = \bar{u}^{l,r}(x_{t.p.}(t,\varepsilon))\\
&Q_1^l(\xi,t) \to 0 \quad \text{for} \quad \xi \to -\infty\\
&Q_1^r(\xi,t) \to 0 \quad \text{for} \quad \xi \to +\infty,
\end{aligned} \tag{18}$$

where $\tilde{A}(\xi,t) = A\left(\tilde{Q}(\xi, x_{t.p.}(t,\varepsilon), v_{t.p.}(t,\varepsilon)), x_{t.p.}(t,\varepsilon)\right)$, $\Phi(\xi,x,v) = \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\xi}(\xi,x,v)$ and $f_1^{l,r}(\xi,t)$ is known functions; index l corresponds to $\xi \leqslant 0$, index r – to $\xi \geqslant 0$.

The solutions of (18) can be found explicitly and for all $t \in [0,T]$ the functions $Q_1^{l,r}(\xi,t)$ satisfy

$$\begin{aligned} |Q_1^l(\xi,t)| \leqslant Ce^{\varkappa\xi} \quad (\xi \leqslant 0),\\ |Q_1^r(\xi,t)| \leqslant Ce^{-\varkappa\xi} \quad (\xi \geqslant 0), \end{aligned} \tag{19}$$

where C and $\varkappa$ are some positive constants. Using $C^{(1)}$–matching conditions (10) at first order of ε and explicit formulas for $Q_1^{l,r}(\xi,t)$ and $\dfrac{\partial Q_1^{l,r}}{\partial\xi}$, we obtain the problem for first order term of the moving front position

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{K(x_0(t))}{\varphi^r(x_0) - \varphi^l(x_0)} \cdot x_1 + G_1(x_0(t),t), \qquad x_1(0) = 0, \tag{20}$$

where $K(x_0(t))$ and $G_1(x_0(t),t)$ are known functions (see [3]).

First two orders in ε of moving front speed $v_0(t)+\varepsilon v_1(t)$ are defined in (17) and (20). So the location of the moving front at two higher orders of asymptotics is defined as the solutions of Cauchy problems (17) and (20).

The width of the transition layer is defined by the estimates (16). It means that interior layer exponentially tends to functions $\varphi^{r,l}(x)$ and its thickness is

$$h = C|\varepsilon \ln\varepsilon|. \tag{21}$$

The structure of the interior layer is defined by the problem (15) and by estimates (16).

In Section 3. we demonstrate our approach by the following particular case of problem (1), where $A(u,x) = -u$, $B(u,x) = u$:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u\dfrac{\partial u}{\partial x} + u, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T],\\ u(0,t) = -5, \quad u(1,t) = 2,\\ u(x,0) = u_{init}(x). \end{cases}$$

For this example we have:

$$\varphi^l(x) = x - 5, \qquad \varphi^r(x) = x + 1, \tag{22}$$

and the conditions (3) and (6) are satisfied for all $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} &\varphi^l(x) = x - 5 < \varphi^r(x) = x + 1,\\ &A(\varphi^l(x),x)) = -(x-5) > 0, \qquad A(\varphi^r(x),x) = -(x+1) < 0,\\ &\int\limits_{\varphi^l(x)}^{\varphi^r(x)} A(u,x)du = \int\limits_{x-5}^{x+1} -udu = 12 - 6x > 0. \end{aligned}$$

From (17) for the zero order term of the moving front speed we have

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\int\limits_{\varphi^l(x_0)}^{\varphi^r(x_0)} A(u,x_0)du}{\varphi^r(x_0) - \varphi^l(x_0)} = \frac{12 - 6x}{(x_0+1) - (x_0-5)} = 2 - x_0. \tag{23}$$

From (20) for the first order term we get

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \qquad x_1(0) = 0, \tag{24}$$

and therefore $x_1(t) \equiv 0$.

If we are not able to calculate position of the transition point analytically (that is possible in some cases of particular $A(u,x)$ and $B(u,x)$),we are able to do this numerically. Here we want to describe corresponding numerical algorithm of $x_{t.p.}$ determination.

At the beginning we introduce uniform mesh X_{N_0} only on x–dimension that has number of nodes N_0+1 (that equals to N_0 intervals): $X_{N_0} = \{x_n,\ 0 \le n \le N_0 :\ x_n = 0 + \big((1-0)/N_0\big)\, n\}$. This mesh will be used for calculation of the solution $q(x)$. Then it is possible to solve equations (2) and find numerically $\varphi^l(x)$ and φ^r(x) on the mesh X_{N_0}. For numerical solving of (2) any suitable scheme can be applied. Then right-hand side of the equation (5) can be calculated on the same mesh X_{N_0}.

After that we have to solve the problem (5). At first, we introduce uniform mesh T_{M_0} only on t–dimension that has number of nodes M_0+1 (that equals to M_0 intervals): $T_{M_0} = \{t_m,\ 0 \le m \le M_0 :\ t_m = 0 + \big((T-0)/M_0\big)\, m\}$. We suggest to use Rosenbrock scheme with complex coefficient (CROS1), which is monotone, stable and has the order of accuracy $O(\tau^2)$ (see [4]):

$$x(t_{m+1}) = x(t_m) + (t_{m+1}-t_m)\, Re\left(\frac{V\Big(x(t_m)\Big)}{1 - \frac{1+i}{2}(t_{m+1}-t_m)V_x\Big(x(t_m)\Big)}\right).$$

Note: It is very important to mention that we have to perform interpolation of the tabulated function $V(x)$ from basic mesh X_{N_0} on each point $x(t_m)$. It is need not to perform interpolation with order of accuracy greater than 3.

So, we have dependence of transition point position x on time t as the solution of (5) (see Figure 1(a)). After that we are able to interpolate corresponding function $t(x)$ on the uniform mesh X, which has intervals equal to $|\varepsilon \log \varepsilon|/C$, $C > 1$ (where $|\varepsilon \log \varepsilon|$ is thickness of the interior layer). This interpolation is possible to perform because of strongly monotonic of the function $x(t)$ (see Figure 1(b)). So, we have grid T_M which is quasi-uniform grid [20].

2. Dynamically adapted mesh construction

The idea of dynamically adapted mesh construction is the following. If we know the width of the transition layer, we can introduce basic uniform mesh with the steps, which are equal to this width, and then refine two intervals that are the nearest to the transition point (see Figure 2–1_0),1)). Then if we know the location of the transition layer on each time step, we can check whether the transition layer is located on these intervals or not. If the transition layer will leave the second interval soon, we refine the next basic interval and perform interpolation of the numerical solution on these additional nodes (see Figure 2–2)). Then we remove from following calculations the nodes of the first refined interval. For appropriate interpolation we should use information about

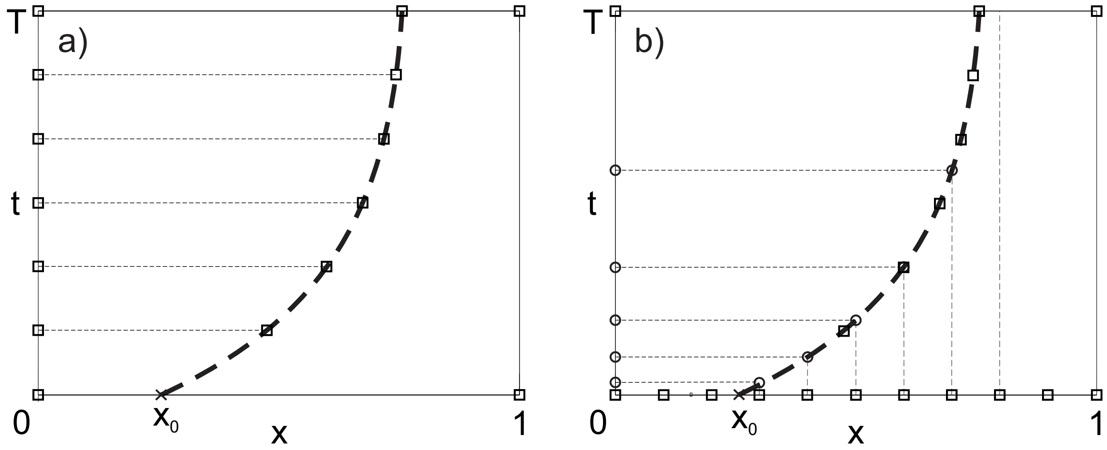


Fig 1. a) Function $x(t)$ as a solution of (5). b) Quasiunidform mesh T_M on t constructing

structure of the transition layer. After this we have only two refined basic intervals again (see Figure 2–3),4)).

The main problem of this process is the possibility to obtain corresponding *a priori* information. This problem for one type of reaction-diffusion-advection equation was discussed above in Section 1.. Now, in Section 3., we will describe some numerical experiment and explain some nuances of the mesh constructing for the particular example.

3. Numerical example

As an example of the application of proposed methods we consider the following Burgers's equation:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u\dfrac{\partial u}{\partial x} + u, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,1], \\ u(0,t) = u_{left}, \quad u(1,t) = u_{right}, \\ u(x,0) = u_{init}(x), \end{cases} \tag{25}$$

where $u_{left} = -5$, $u_{right} = 2$, and the initial condition $u_{init}(x)$ has following form (for example, see Figure 4):

$$u_{init} = \frac{(x+1) + (x-5)e^{-3\xi}}{1+e^{-3\xi}}, \quad \xi = \frac{x-0.5}{\varepsilon}.$$

Method of lines and Rosenbrock scheme with complex coefficient For numerical solution of the equation (25) we apply the stiff method of lines (SMOL) in order to reduce the PDE to the system of ODEs that can be solved by Rosenbrock scheme with complex coefficient, which is significantly efficient for stiff systems of ODEs [4].

At the beginning we introduce piecewise uniform mesh X_N only on x–dimension that has number of nodes $N+1$ (that equals to N intervals): $X_N = \{x_n,\ 0 \leqslant n \leqslant N : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1\}$. So after finite-difference approximations of derivatives with second order of accuracy in (25) we obtain the following system of

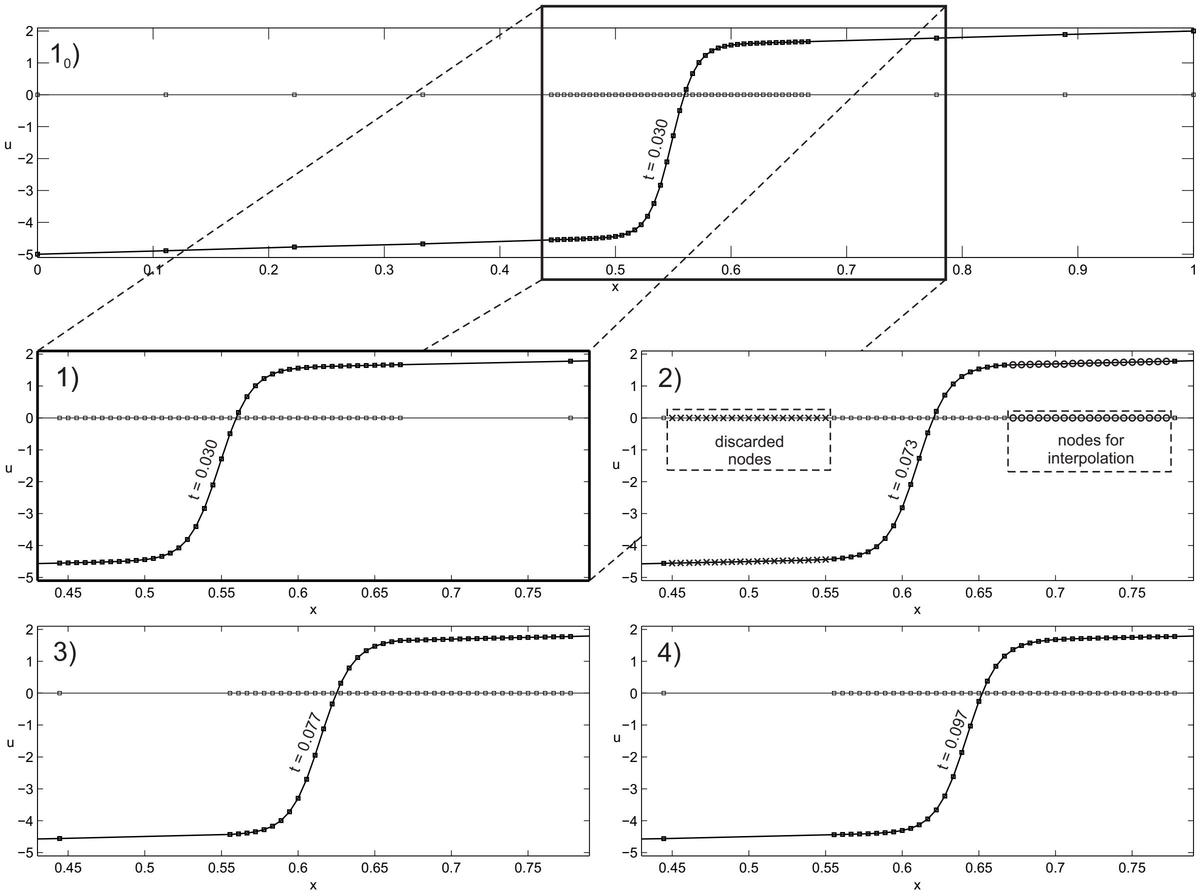


Fig 2. Dynamically adapted mesh construction 1

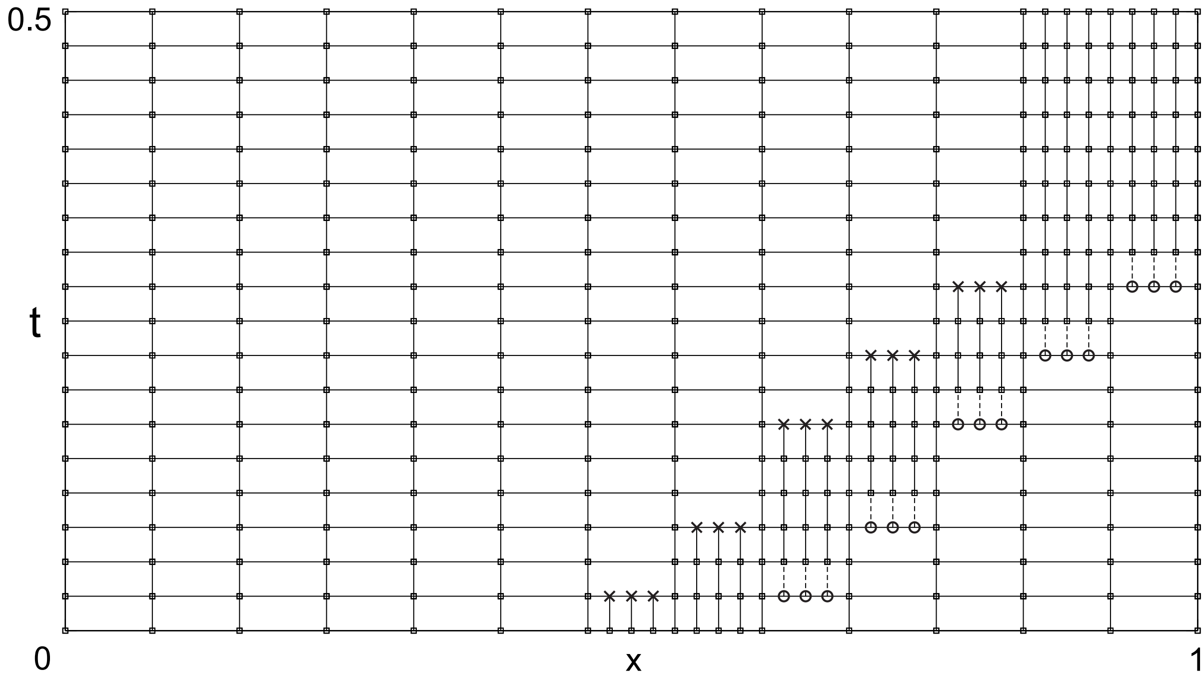


Fig 3. Dynamically adapted mesh construction 2: □ – nodes that are used for calculations; o – nodes in which numerical solution was interpolated; × – nodes that must be removed from the calculations on the next steps

ODEs from which we should determine $N-1$ unknowns functions $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$ ($n = \overline{1, N-1}$, u_0 and u_N given as the boundary conditions):

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = \varepsilon \dfrac{2}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(\dfrac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - \dfrac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) + u_n \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} - u_n, \\ u_0 = -5, \quad u_N = 2, \\ u(x_n, 0) = u_{init}(x_n). \end{cases}$$

This system can be rewritten as

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t), \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_{init}, \end{cases} \tag{26}$$

where $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{N-1} \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}^T$ and $\boldsymbol{u}_{init} = \begin{pmatrix} u_{init}(x_1) & u_{init}(x_2) & u_{init}(x_3) & \dots & u_{init}(x_{N-1}) \end{pmatrix}^T$. The vector-function $\boldsymbol{f}$ has the following structure. For $n = 1$:

$$f_1 = \frac{2\varepsilon}{x_2 - x_0} \left(\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} - \frac{u_1 + 5}{x_1 - x_0} \right) + u_1 \frac{u_2 + 5}{x_2 - x_0} - u_1,$$

for $n = \overline{2, N-2}$:

$$f_n = \frac{2\varepsilon}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{u_n - u_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) + u_n \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} - u_n,$$

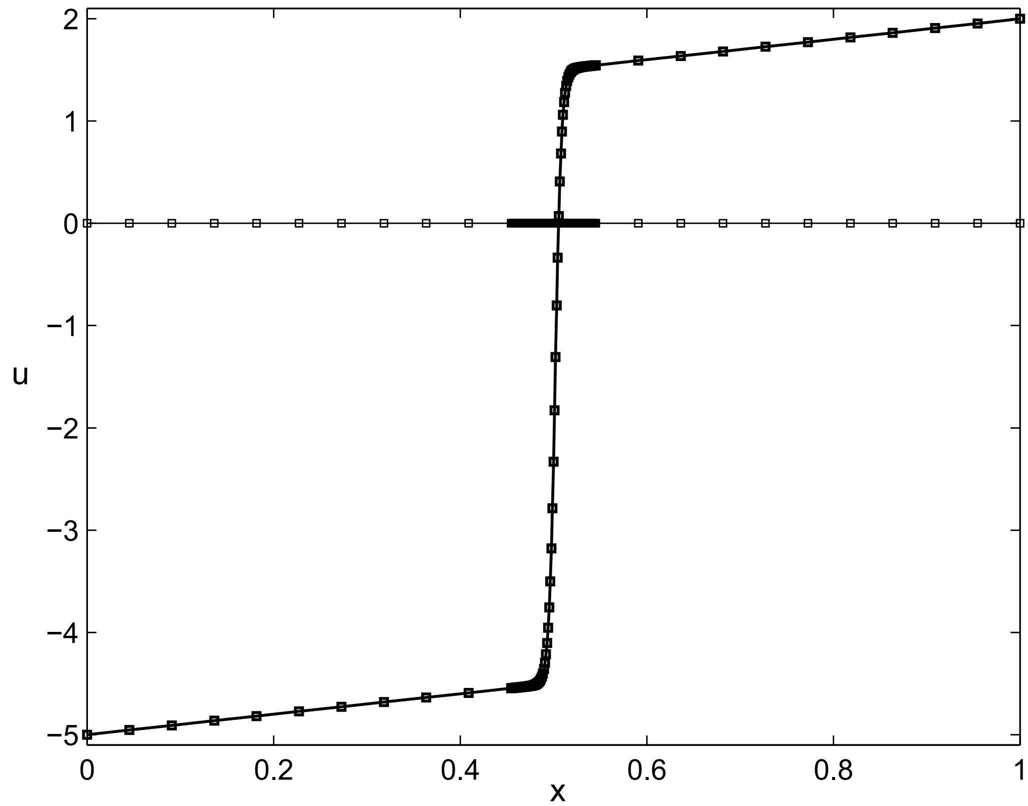


Fig 4. The example of $u_{init}(x)$ for $\varepsilon = 10^{-2}$ (refining of the mesh in a neighborhood of the transition point has been performed)

and for $n = N-1$:

$$f_{N-1} = \frac{2\varepsilon}{x_N - x_{N-2}} \left(\frac{2 - u_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} - \frac{u_{N-1} - u_{N-2}}{x_{N-1} - x_{N-2}} \right) + u_{N-1} \frac{2 - u_{N-2}}{x_N - x_{N-2}} - u_{N-1}.$$

For numerical solution of this system of ODEs (26) we use Rosenbrock scheme with complex coefficient (CROS1), which is monotone and stable and has the order of accuracy $O(\tau^2)$ (see [4]). In order to apply this scheme we introduce quasi-uniform mesh T_M on t–dimension that has number of nodes $M+1$ (that equal to M intervals): $T_M = \{t_m,\ 0 \leqslant m \leqslant M :\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{M-1} < t_M = 1\}$. After that we are able to apply the CROS1 scheme for solving of the system (26):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(t_{m+1}) = \boldsymbol{u}(t_m) + (t_{m+1} - t_m)\, Re\, \boldsymbol{w}, \\ &\text{where } \boldsymbol{w} \text{ is a solution of the SLAE} \\ &\left[E - \frac{1+i}{2}\,(t_{m+1} - t_m)\, \boldsymbol{f_u}\Big(\boldsymbol{u}(t_m), t\Big) \right]\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{u}(t_m), \frac{t_m + t_{m+1}}{2}\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

Here E is the identity matrix, $\boldsymbol{f_u}$ is the Jacobian matrix, where for $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} &= \frac{2\varepsilon}{x_2 - x_0} \left(-\frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{x_1 - x_0} \right) + \frac{u_2 + 5}{x_2 - x_0} - 1, \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} &= \frac{2\varepsilon}{x_2 - x_0} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right) + \frac{u_1}{x_2 - x_0}; \end{aligned}$$

for $n = \overline{2, N-2}$:

$$\frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} = \frac{2\varepsilon}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right) - \frac{u_n}{x_{n+1} - x_{n-1}},$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial u_n} = \frac{2\varepsilon}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(-\frac{1}{x_{n+1} - x_n} - \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \right) + \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} - 1,$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial u_{n+1}} = \frac{2\varepsilon}{x_{n+1} - x_{n-1}} \left(\frac{1}{x_{n+1} - x_n} \right) + \frac{u_n}{x_{n+1} - x_{n-1}};$$

and for $n = N-1$:

$$\frac{\partial f_{N-1}}{\partial u_{N-2}} = \frac{2\varepsilon}{x_N - x_{N-2}} \left(\frac{1}{x_{N-1} - x_{N-2}} \right) - \frac{u_{N-1}}{x_N - x_{N-2}},$$
$$\frac{\partial f_{N-1}}{\partial u_{N-1}} = \frac{2\varepsilon}{x_N - x_{N-2}} \left(-\frac{1}{x_N - x_{N-1}} - \frac{1}{x_{N-1} - x_{N-2}} \right) + \frac{2 - u_{N-2}}{x_N - x_{N-2}} - 1.$$

The other components of $\boldsymbol{f_u}$ for the considered equation equal to zero.

Dynamically adapted mesh construction Now we explain in details how to construct the dynamically adapted mesh $X_N(t) \equiv \{X_N(t_m)\}$, $0 \leqslant m \leqslant M$, and how to use it for the calculations by the scheme (27).

1) At first we introduce a basic uniform mesh $X^{(0)}_{N_0}$ on x with step $h_0 = (1-0)/N_0$ that has number of nodes $N_0 + 1$ (that corresponds to N_0 intervals): $X^{(0)}_{N_0} = \{x^{(0)}_n,\ 0 \leqslant n \leqslant N_0 :\ x^{(0)}_n = 0 + n\, h_0\}$. The number of interval N_0 should be chosen in accordance to the *a priori* information about thickness of the transition layer that can be calculated by formula (21):

$$N_0 = \left[\frac{1-0}{|\varepsilon \ln \varepsilon|} \right].$$

2) Then we introduce the family of piece-wise uniform meshes $\{X^{n,n+1}_{N_0,\,N_{int}}\}$, $0 \leqslant n \leqslant N_0 - 2$, which have the uniform refining on the $(n+1)$–th and $(n+2)$–th intervals of the basic mesh using N_{int} additional intervals and have totally $N = N_0 - 2 + 2N_{int}$ intervals.

$$X^{n,n+1}_{N_0,N_{int}} = \{x_m,\ 0 \leqslant m \leqslant N_0 - 2 + 2N_{int},\ 0 \leqslant n \leqslant N_0 :$$
$$0 = x_0 = x^{(0)}_0 < x_1 = x^{(0)}_1 < \ldots < x_n = x^{(0)}_n < x_{n+1} = x^{(0)}_n + 1\frac{x^{(0)}_{n+1} - x^{(0)}_n}{N_{int}} <$$
$$< x_{n+2} = x^{(0)}_n + 2\frac{x^{(0)}_{n+1} - x^{(0)}_n}{N_{int}} < \ldots < x_{n+N_{int}-1} = x^{(0)}_n + (N_{int} - 1)\frac{x^{(0)}_{n+1} - x^{(0)}_n}{N_{int}}$$
$$< x_{n+N_{int}} = x^{(0)}_{n+1} < x_{n+N_{int}+1} = x^{(0)}_{n+1} + 1\frac{x^{(0)}_{n+2} - x^{(0)}_{n+1}}{N_{int}} < \ldots <$$
$$< x_{n+N_{int}+N_{int}-1} = x^{(0)}_{n+1} + (N_{int} - 1)\frac{x^{(0)}_{n+2} - x^{(0)}_{n+1}}{N_{int}} < x_{n+N_{int}+N_{int}} = x^{(0)}_{n+2} <$$
$$< x_{n+2N_{int}+1} = x^{(0)}_{n+3} < \ldots < x_{N_0-3+2N_{int}} = x^{(0)}_{N_0-1} < x_{N_0-2+2N_{int}} = x^{(0)}_{N_0} = 1\}.$$

At our approach the basic mesh $X^{(0)}_{N_0}$ has to be uniform if we want to perform Richardson extrapolation. In this case it is sufficient to use for extrapolation only nodes of the basic mesh which coincide on every meshes from $\{X^{n,n+1}_{N_0,\,N_{int}}\}$ family.

3) Using the formula (23)– (24) we are able to obtain *a priori* information about transition point location

$$x_{t.p.}(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = 2 - \frac{3}{2}\,e^{-t}, \qquad t \in [0, T] \tag{28}$$

where $T \leqslant \ln\frac{2}{3}$. It is important that in order to have correct information about location and structure of the interior layer we must use also the first term $x_1(t)$ of the asymptotic expansion for $x_{t.p.}(t)$.

Thus we can allocate the interval of the basic mesh which contains $x_{t.p.}(t_0)$. Without loss of generality assume that it is n-th interval $(x^{(0)}_{n-1}, x^{(0)}_n)$ of $X^{(0)}_{N_0}$. If $x_{t.p.}(t_0) \geqslant (x^{(0)}_{n-1} + x^{(0)}_n)/2$ we use $X_N(t_0) = X^{n-1,n}_{N_0,\,N_{int}}$ mesh and let $n = n + 1$, otherwise $X_N(t_0) = X^{n-2,n-1}_{N_0,\,N_{int}}$ mesh and let $n = n$. Let $m = 0$.

4) Using formula (28) we can obtain also *a priori* information about maximal time step τ that do not allow the point of the transition layer location to leave one basic interval in one time steep:

$$\tau = \max_{\substack{t_{m+1},t_m \in T_M \\ x_{t.p.}(t_{m+1}) - x_{t.p.}(t_m) = \frac{1-0}{N_0}}} |x_{t.p.}(t_{m+1}) - x_{t.p.}(t_m)|.$$

From this formula we can obtain corresponding *a priori* information:

$$\tau = \ln \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\,h_0}.$$

5) Let $m = m + 1$. If $x_{t.p.}(t_m) \leqslant (x^{(0)}_{n-1} + x^{(0)}_n)/2$ we use CROS1 scheme (27) for the calculations on mesh $X_N(t_m) = X_N(t_{m-1})$. Otherwise, we use for calculations mesh $X_N(t_m) = X^{n-1,n}_{N_0,\,N_{int}}$ (for this we discard values of the function $\boldsymbol{u}(t_{m-1})$ on the $(n-1)$–th interval of the basic mesh $X^{(0)}_{N_0}$ and interpolate its on the refined $(n+1)$–th basic interval and put $n = n + 1$.

For interpolation we use *a priori* information (19) that gives that interpolating function tend to $\varphi^r(x)$ from (22) exponentially. So we are able to perform it by the formula $|\varphi^r(x) - y| = a\,e^{b\,x}$ (that is equivalent to $\log a + b\,x = \log|\varphi^r(x) - y|$) for the pair of interpolated points (x, y) in order to determine the coefficients a and b of the interpolating function $f(x) = \varphi^r(x) + a\,e^{b\,x}$.

6) If $m = M$ we stop the calculations. Otherwise, go to 5).

Some example of the calculations is represented on the Figure 5.

4. Conclusion

Numerical methods for singularly perturbed problems have serious restrictions because of such problems often feature narrow boundary and interior layers. Contrariwise, the small parameter allows to get *a priori* information about the exact solution, which gives the

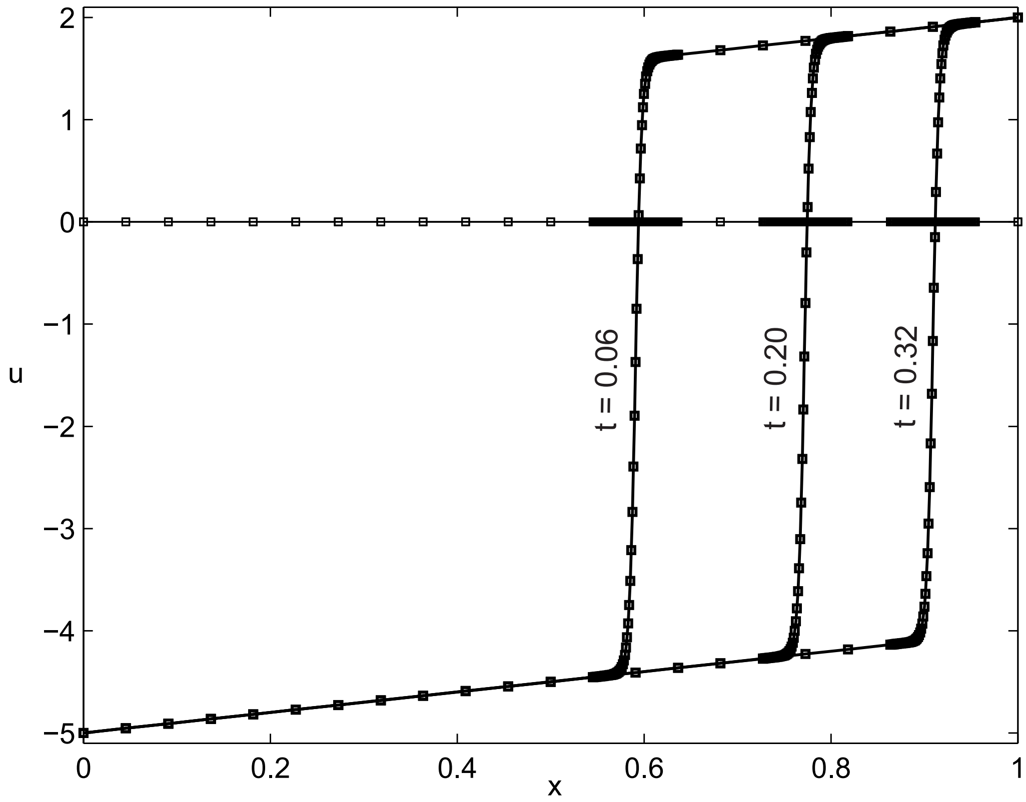


Fig 5. The example of calculation for $\varepsilon = 10^{-2}$. $N_0 = 22$ (has been calculated automatically), $N_{int} = 40$ (control parameter that has been set manually)

possibility for productive combinations of asymptotic and numerical approaches. Using the information, based on the rigorous asymptotic analysis of the problem, we propose an analytic-numerical algorithm for a singularly perturbed reaction-diffusion-advection equations that reduces complexity of the numerical calculations.

The class of the problems that was considered in this work is given to illustrate our approach. Our method is not restricted by only this class of the problems. We plan to extend this approach for periodic-parabolic problems with interior layers solutions and some classes of systems. We also plan to improve our procedure in order to use ε-independent meshes and investigate the convergence of the numerical method.

References

[1] V. T. Volkov, N. N. Nefedov, "Asymptotic-numerical investigation of generation and motion of fronts in phase transition models", *Lecture Notes in Computer Science*, **8236** (2013), 524–531.

[2] V. T. Volkov, N. E. Grachev, N. N. Nefedov, A. N. Nikolaev, "On the formation of sharp transition layers in two-dimensional reaction-diffusion models", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **47**:8 (2007), 1301–1309.

[3] E. A. Antipov, N. T. Levashova, N. N. Nefedov, "Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem,", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[4] A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin, A. B. Koryagina, "Rosenbrock schemes with

complex coefficients for stiff, differential algebraic systems", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **46**:8 (2006), 1320–1340.

[5] G.I. Shishkin, "Necessary conditions for ε-uniform convergence of finite difference schemes for parabolic equations with moving boundary layers", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **47**:10 (2007), 1636–1655.

[6] G. I. Shishkin, L. P. Shishkina, P. W. Hemker, "A Class of Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems with a Moving Interior Layer. An a Posteriori Adaptive Mesh Technique", *Comput. Meth. Appl. Math.*, **4**:1 (2004), 105–127.

[7] G.I. Shishkin, "Grid Approximation of a Singularly Perturbed Parabolic Equation on a Composed Domain with a Moving Interface Containing a Concentrated Source", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **43** (2003), 1738–1755.

[8] G.I. Shishkin, "Grid approximation of a singularly perturbed quasilinear equation in the presence of a transition layer", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **47**:1 (1993), 83–88.

[9] J. Quinn, "A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location", *Journal of Computational, Applied Mathematics*, **290** (2015), 500–515.

[10] E. O'Riordan, J. Quinn, "Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem", *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **81** (2011), 187–195.

[11] E. O'Riordan, J. Quinn, "Parameter-uniform numerical method for some linear, nonlinear singularly perturbed convection-diffusion boundary turning point problems", *BIT Numerical Mathematics*, **51**:2 (2011), 317–337.

[12] N. Kopteva, M. Stynes, "Stabilised approximation of interior-layer solutons of a singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem", *Numerische Mathematik*, **119**:4 (2011), 787–810.

[13] N. Kopteva, "Numerical analysys of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem", *Lecture Notes in Computer Science*, **5434** (2009), 80–91.

[14] S. Franz, N. Kopteva, "Green's function estimates for a singularly perturbed convection-diffusion problem", *J. Differential Equations*, **252** (2012), 1521–1545.

[15] E. O'Riordan, G.I. Shishkin, "Singularly perturbed parabolic problems with non-smooth data", *J. of Computational, Applied Mathematics*, **1** (2004), 233–245.

[16] P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, *Robust computational techniques for boundary layers*, Chapman, Hall/CRC, 2000.

[17] P.A. Farrell, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, "A class of singularly perturbed semilinear differential equations with interior layers", *Mathematics of Computation*, **74**:252 (2005), 1759–1776.

[18] Natalia Kopteva, Eugene O'Riordan, "Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations", *International Journal of Numerical Analysis, Modeling*, **1**:1 (2009), 1–18.

[19] V. T. Volkov, N. N. Nefedov, E. A. Antipov, "Asymptotic-Numerical Method for Moving Fronts in Two-Dimensional R-D-A Problems", *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 408–416.

[20] N. N. Kalitkin, A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, B. V. Rogov, *Computations on Quasi-Uniform Grids*, Fizmatlit, Moscow, 2005, (in Russian).

Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефедов Н. Н., "Построение динамически адаптированной сетки для эффективного численного решения сингулярно возмущенного уравнения типа реакция-адвекция-диффузия", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 322–338.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-322-338

Аннотация. В данной работе на примере численного решения сингулярно возмущенного уравнения Бюргерса мы рассматриваем метод построения динамически адаптированной сетки, который позволяет существенно улучшить численный счет для уравнений такого типа. Для построения данной сетки мы используем априорную информацию, основанную на асимптотическом анализе исходной задачи. В частности, мы используем информацию о скорости внутреннего слоя, его толщине и структуре. Предложенный в работе алгоритм способен существенным образом упростить численную сложность решаемой задачи и улучшить ее устойчивость по сравнению с классическими подходами, используемыми для решения задач такого класса. Приведенный численный эксперимент демонстрирует эффективность предложенного метода.

Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, внутренний слой, динамически адаптированная сетка

Об авторах:
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, канд. физ.-мат. наук,
МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Москва, ГСП-1, 119991, Россия,
e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Волков Владимир Тарасович, orcid.org/0000-0002-4205-4141, канд. физ.-мат. наук,
МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Москва, ГСП-1, 119991, Россия,
e-mail: volkovvt@mail.ru

Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук,
МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Москва, ГСП-1, 119991, Россия,
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00755, 16-01-00437, 17-51-53002 и 17-01-00159).
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00437).

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 339–352
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 339–352

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-339-352

УДК 517.929.8

Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред

Левашова Н. Т.[1], Николаева О. А.

получена 15 декабря 2016

Аннотация. Физические явления, возникающие вблизи границы раздела сред с различными характеристиками, требуют учета некоторых особенностей при их моделировании. Необходимо учитывать тот факт, что на границе раздела параметры окружающей среды претерпевают изменения. Например, экспериментально полученные графики распределения температуры среды вблизи границы раздела вода-воздух имеют излом на границе, поэтому при моделировании производная функции распределения температуры должна быть разрывной. Функция, обладающая такой особенностью, может являться решением задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом температуропроводности и разрывной функцией, описывающей источники тепла. Поскольку коэффициент температуропроводности в переходном слое вода-воздух является малым, в уравнении перед пространственной производной возникает малый параметр, что делает уравнение сингулярно возмущенным. Решение краевой задачи для такого уравнения может иметь вид контрастной структуры, то есть функции, в области определения которой содержится подобласть, где функция обладает большим градиентом. Такая подобласть называется внутренним переходным слоем. Из экспериментальных наблюдений известно, что в случае перепада температур между водой и воздухом (летний день) вблизи границы раздела возникает подобный переходный слой с резким изменением температуры. Существование решения задачи с внутренним переходным слоем нуждается в обосновании, которое можно провести при помощи асимптотического анализа. В настоящей работе было проведено подобное аналитическое исследование, и это позволило доказать существование решения, а также построить его асимптотическое приближение.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, асимптотические методы, малый параметр, разрывный коэффициент теплопроводности, разрывные источники

Для цитирования: Левашова Н. Т., Николаева О. А., "Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 339–352.

Об авторах:
Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Николаева Ольга Александровна, orcid.org/0000-0002-4638-1959, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: o.a.nikolaewa@gmail.com

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

Физические явления, возникающие вблизи границы раздела сред с различными характеристиками, требуют учета некоторых особенностей при их моделировании. Необходимо учитывать тот факт, что на границе раздела параметры окружающей среды претерпевают изменения. Например, экспериментально полученные графики распределения температуры среды вблизи границы раздела вода-воздух имеют излом на границе, поэтому при моделировании производная функции распреления температуры должа быть разрывной [1]. Функция, обладающая такой особенностью, может являться решением задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом температуропроводности и разрывной функцией, описывающей источники тепла. Задачу можно считать одномерной, рассматривая изменение температуры только вдоль оси, направленной перпендикулярно границе раздела сред, и стационарной, если рассматривать не очень продолжительные промежутки времени (в пределах часа). Коэффициент температуропроводности в переходном слое вода-воздух является малым [2], поэтому в уравнении перед пространственной производной возникает малый параметр, что делает уравнение сингулярно возмущенным. Решение краевой задачи для такого уравнения может иметь вид контрастной структуры, то есть функции, в области определения которой содержится подобласть, где функция обладает большим градиентом [3–6]. Такая подобласть называется внутренним переходным слоем. Из экспериментальных наблюдений известно, что в случае перепада температур между водой и воздухом (летний день) на границе раздела сред температура претерпевает резкое изменение. Тем самым для моделирования температуры на границе можно использовать краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом температуропроводности и функцией, описывающей источники. Существование решения с внутренним переходным слоем такой задачи нуждается в обосновании, которое можно провести при помощи асимптотического анализа [7,8]. В настоящей работе было проведено подобное аналитическое исследование, и это позволило доказать существование решения, а также построить его асимптотическое приближение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(u,x,\varepsilon), \quad x \in (-1;1), \qquad \frac{du}{dx}(-1) = \frac{du}{dx}(1) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что выполняются следующие условия:

Условие 1. *Пусть функция $k(x)$ определена и строго положительна при $x \in [-1;1]$, а функция $f(u,x,\varepsilon)$ определена на множестве $u \in I_u \times [-1;1] \times (0;\varepsilon_0]$, где I_u– допустимый интервал изменения u.*

Пусть существует внутренняя точка x_0 отрезка $[-1;1]$, достаточно удаленная от его краев, в которой функция $k(x)$ может претерпевать разрыв первого *рода:*

$$k(x) = \begin{cases} k^{(-)}(x), & -1 \le x \le x_0, \\ k^{(+)}(x), & x_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

причем функции $k^{(\mp)}(x)$ являются достаточно гладкими на отрезках $[-1; x_0]$ и $[x_0; 1]$ соответственно.

Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ претерпевает разрыв первого рода вдоль отрезка прямой $\{u \in I_u,\ x = x_0,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$:

$$f(u,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u,x,\varepsilon), & u \in I_u,\ -1 \le x \le x_0,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]; \\ f^{(+)}(u,x,\varepsilon), & u \in I_u,\ x_0 \le x \le 1,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \end{cases} \quad f^{(-)}(u,x_0,\varepsilon) \ne f^{(+)}(u,x_0,\varepsilon),$$

причем функции $f^{(\mp)}(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими на множествах $I_u \times [-1; x_0] \times (0; \varepsilon_0]$ и $I_u \times [x_0; 1] \times (0; \varepsilon_0]$ соответственно.

Определение 1. *Будем называть решением задачи (1) функцию $u(x, \varepsilon) \in C\left([-1; 1]\right) \cap C^2\left((-1; 1) \setminus x_0\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \in (-1; x_0) \cup (x_0; 1)$, граничным условиям задачи (1), а также условию сопряжения*

$$k^{(-)}(x_0)\frac{du}{dx}(x_0 - 0) = k^{(+)}(x_0)\frac{du}{dx}(x_0 + 0).$$

Условие 2. *Пусть уравнение $f^{(-)}(u, x, 0) = 0$ имеет на отрезке $[-1; x_0]$ изолированное решение $u = \varphi^{(-)}(x)$, а уравнение $f^{(+)}(u, x, 0) = 0$ имеет на отрезке $[x_0; 1]$ изолированное решение $u = \varphi^{(+)}(x)$, причем выполняется неравенство*

$$\varphi^{(-)}(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0).$$

Пусть при $-1 \le x \le x_0$ выполняется неравенство $f_u\left(\varphi^{(-)}, x, 0\right) > 0$, а при $x_0 \le x \le 1$ выполняется неравенство $f_u\left(\varphi^{(+)}, x, 0\right) > 0$.

Далее будем исследовать такое решение задачи (1), которое слева от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, справа от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(+)}(x)$ и резко изменяется от значений $\varphi^{(-)}(x)$ до значений $\varphi^{(+)}(x)$ в окрестности точки x_0.

1.1. Присоединенные уравнения

Для детального описания поведения решения в окрестности точки x_0 введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Определим присоединенные уравнения для задачи (1) следующим образом:

$$k^{(-)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, x_0, 0),\ \xi < 0; \quad k^{(+)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, x_0, 0),\ \xi > 0. \tag{3}$$

Каждое из присоединенных уравнений сведем к эквивалентной присоединенной системе:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi; \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = \left(k^{(\mp)}(x_0)\right)^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0). \tag{4}$$

При выполнении условия 2 каждая из точек $(\varphi^{(\mp)}, 0)$ является точкой покоя типа седла соответствующей присоединенной системы на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$. Разделим второе уравнение каждой из систем на первое и домножим обе части полученных равенств на Φ. В результате получим уравнения, определяющие фазовые траектории $\Phi(\tilde{u})$:

$$\Phi\frac{d\Phi}{d\tilde{u}} = \left(k^{(\mp)}(x_0)\right)^{-1} f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0).$$

Условие 3. *Пусть при $\varphi^{(-)}(x_0) < p \le \varphi^{(+)}(x_0)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p} f^{(-)}(u, x_0, 0)du > 0,$$

а при $\varphi^{(-)}(x_0) \le p < \varphi^{(+)}(x_0)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p} f^{(+)}(u, x_0, 0)du > 0.$$

При выполнении условия 3 на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ существуют сепаратриса $\Phi^{(-)}(\tilde{u})$, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$, и сепаратриса $\Phi^{(+)}(\tilde{u})$, входящая в седло $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$, которые определяются равенствами

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) = \sqrt{2\left(k^{(\mp)}(x_0)\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, x_0, 0)du}. \tag{5}$$

Введем функцию

$$H(\tilde{u}) := k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(\tilde{u}) - k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(\tilde{u}) =$$
$$= \sqrt{2k^{(-)}(x_0)\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0)du} - \sqrt{2k^{(+)}(x_0)\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0)du}.$$

Условие 4. *Пусть существует величина $p_0 \in \left(\varphi^{(-)}(x_0); \varphi^{(+)}(x_0)\right)$ – решение уравнения*

$$k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(\tilde{u}) - k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(\tilde{u}) = 0.$$

Потребуем ещё выполнения следующего условия:

Условие 5.

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) = \frac{k^{(-)}(x_0)f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - k^{(+)}(x_0)f^{(+)}(p_0, x_0, 0)}{k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}} \ne 0.$$

2. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое приближение решения задачи (1) будем строить отдельно слева и справа от точки x_0:

$$U(x,\varepsilon)=\begin{cases}U^{(-)}(x,\varepsilon), x\in[-1;x_0],\\ U^{(+)}(x,\varepsilon), x\in[x_0;1].\end{cases}$$

Функции $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$ будем сшивать в точке x_0, считая, что выполнены равенства

$$U^{(-)}(x_0,\varepsilon)=U^{(+)}(x_0,\varepsilon)=p(\varepsilon),$$

где величина $p(\varepsilon)$ пока неизвестна. Выпишем отдельно задачи для функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k^{(-)}(x)\frac{dU^{(-)}}{dx}\right)=f\left(U^{(-)},x,\varepsilon\right),\quad x\in(-1;x_0),$$
$$\frac{dU^{(-)}}{dx}(-1,\varepsilon)=0,\quad U^{(-)}(x_0,\varepsilon)=p(\varepsilon),\tag{6}$$

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k^{(+)}(x)\frac{dU^{(+)}}{dx}\right)=f\left(U^{(+)},x,\varepsilon\right),\quad x\in(x_0;1),$$
$$\frac{dU^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad U^{(+)}(x_0,\varepsilon)=p(\varepsilon).\tag{7}$$

Каждую из функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем искать в виде суммы трех слагаемых:

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon)+R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right),\tag{8}$$

здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярная часть разложения, функции $Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon)$ описывают поведение решения в окрестности точки x_0, переменная ξ определяется выражением (2), а функции $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1;1]$, $\eta^{(\mp)}=\dfrac{x\pm 1}{\varepsilon}$– растянутые переменные вблизи каждой из точек $x=\mp 1$.

Каждую из функций (8), а также величину $p(\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\mp)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x)+\ldots;\tag{9}$$
$$Q^{(\mp)}(\xi,\varepsilon)=Q_0^{(\mp)}(\xi)+\varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi)+\ldots;\tag{10}$$
$$R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)},\varepsilon\right)=R_0^{(\mp)}(\eta^{(\mp)})+\varepsilon R_1^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}\right)+\ldots;\tag{11}$$
$$p(\varepsilon)=p_0+\varepsilon p_1+\ldots\tag{12}$$

Неизвестные коэффициенты p_i будем определять из условия сшивания производных функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$, которое следует из определения 1 с учетом разложений (9) – (12):

$$k^{(-)}(x_0)\left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_0)+\varepsilon\frac{d\bar{u}_1^{(-)}}{dx}(x_0)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0)+\frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0)+\ldots\right)=$$
$$=k^{(+)}(x_0)\left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(x_0)+\varepsilon\frac{d\bar{u}_1^{(+)}}{dx}(x_0)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0)+\frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0)+\ldots\right). \quad (13)$$

Здесь учтено, что переходный слой находится на достаточном удалении от границ отрезка, а параметр ε достаточно мал, чтобы вклад в условия сшивания в точке x_0 пограничных функций был меньше любой степени ε.

2.1. Регулярная часть асимптотического представления

Уравнения для функций регулярной части получаются согласно стандартному алгоритму [9] из равенств

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}+\ldots\right)\right)=f^{(\mp)}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}+\ldots,x,\varepsilon\right), \quad (14)$$

если разложить функции в правых частях по формуле Тейлора по степеням ε, а затем приравнять в обеих частях каждого равенства коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

Приравнивая нулю единственное слагаемое при ε^0 в каждом из равенств (14), получим уравнения

$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)},x,0)=0. \quad (15)$$

Опираясь на условие 2, положим

$$\bar{u}_0^{(\mp)}=\varphi^{(\mp)}(x). \quad (16)$$

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\bar{f}^{(\mp)}(x):=f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x),x,0)$$

и аналогичные обозначения для производных функции f : $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$. На каждом следующем этапе из равенств (14) будем получать уравнения вида

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_i^{(\mp)}(x)=\bar{h}_i^{(\mp)}(x),$$

где $\bar{h}_i^{(\mp)}(x)$ – функции, известные на каждом шаге $i=1,2,\ldots$ В частности, $\bar{h}_1^{(\mp)}(x)=-\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$.

2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях каждого из равенств

$$k^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(Q_0^{(\mp)}+\varepsilon Q_1^{(\mp)}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{dk^{(\mp)}}{dx}(x_0+\varepsilon\xi)\frac{d}{d\xi}\left(Q_0^{(\mp)}+\varepsilon Q_1^{(\mp)}+\ldots\right)=$$
$$=f^{(\mp)}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+\ldots Q_0^{(\mp)}+\varepsilon Q_1^{(\mp)}+\ldots,x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right)-$$
$$-f^{(\mp)}\left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\xi)+\ldots,x_0+\varepsilon\xi,\varepsilon\right). \quad (17)$$

Граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi)$, $i=0,1,...$ при $\xi=0$ будем получать, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в условии непрерывного сшивания функций $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$ с учетом разложений (9), (10) и (12) :

$$\begin{aligned}\bar{u}_0^{(-)}(x_0)+\varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(x_0)+...+Q_0^{(-)}(0)+\varepsilon Q_1^{(-)}(0)+...=\\ =\bar{u}_0^{(+)}(x_0)+\varepsilon\bar{u}_1^{(+)}(x_0)+...+Q_0^{(+)}(0)+\varepsilon Q_1^{(+)}(0)+...=\\ =p_0+\varepsilon p_1+\dots \quad (18)\end{aligned}$$

Кроме того, потребуем убывания функций переходного слоя на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty)=0,\;\; i=0,1,\dots \tag{19}$$

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Из равенств (17), (18) и (19) в нулевом порядке с учетом равенств (15) и (16) получим следующие задачи для функций переходного слоя нулевого приближения:

$$\begin{aligned}k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2}=f^{(\mp)}\left(\varphi^{(\mp)}(x_0)+Q_0^{(\mp)},x_0,0\right);\\ Q_0^{(-)}(0)+\varphi^{(-)}(x_0)=Q_0^{(+)}(0)+\varphi^{(+)}(x_0)=p_0;\;\; Q_0^{(\mp)}(\mp\infty)=0. \quad (20)\end{aligned}$$

Задачу для функции $Q_0^{(-)}(\xi)$ будем решать на полупрямой $\xi\le 0$, а для функции $Q_0^{(+)}(\xi)$ – на полупрямой $\xi\ge 0$.

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi)=\begin{cases}\varphi^{(-)}(x_0)+Q_0^{(-)}(\xi), & \xi\le 0;\\ \varphi^{(+)}(x_0)+Q_0^{(+)}(\xi), & \xi\ge 0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\Phi^{(-)}(\xi)=\dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi\le 0;\\ \Phi^{(+)}(\xi)=\dfrac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi\ge 0.\end{cases} \tag{21}$$

Перепишем задачи (20) с учетом введенных обозначений:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2}=f^{(\mp)}\left(\tilde{u},x_0,0\right);\;\; \tilde{u}(0)=p_0;\;\; \tilde{u}(\mp\infty)=\varphi^{(\mp)}(x_0).$$

Уравнения, из которых определяется функция $\tilde{u}(\xi)$ на каждой из полупрямых $\xi\le 0$ и $\xi\ge 0$ совпадают с присоединенными уравнениями (3). Согласно выводам пункта 1.1. существуют функции $\Phi^{(\mp)}(\xi)=\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi))$ вида (5), а значит, существуют и решения задач

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi}=\sqrt{2\left(k^{(-)}(x_0)\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}}f^{(-)}(u,x_0,0)du},\; \xi\le 0,\quad \tilde{u}(0)=p_0$$

и

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi}=\sqrt{2\left(k^{(+)}(x_0)\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}}f^{(+)}(u,x_0,0)du},\; \xi\ge 0,\quad \tilde{u}(0)=p_0.$$

С использованием обозначений (21) условия сшивания производных (13) в порядке ε^{-1} принимают вид:

$$k^{(-)}(x_0)\Phi^{(-)}(0) = k^{(+)}(x_0)\Phi^{(+)}(0),$$

поэтому, если выбрать величину p_0 согласно условию 4, то $\tilde{u}(\xi)$ окажется непрерывной функцией, а условия сопряжения (13) выполненными в порядке ε^{-1}.

Можно доказать справедливость оценок

$$\left|\tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0)\right| \le C\mathrm{e}^{-\varkappa|\xi|},$$

где C и $\varkappa$ – не зависящие от ε положительные константы, откуда с учетом равенств (21), связывающих функции $Q_0^{(\mp)}(\xi)$ и $\tilde{u}^{(\mp)}(\xi)$, получаем следующие оценки для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$\left|Q_0^{(\mp)}(\xi)\right| \le C\mathrm{e}^{-\varkappa|\xi|}. \tag{22}$$

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Для краткости введем обозначение

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\xi) := f^{(\mp)}\left(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi), x_0, 0\right). \tag{23}$$

Аналогичный смысл будут иметь обозначения $\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi)$.

Из равенств (17), (18) и (19) в порядке ε^1 получим следующие задачи для функций $Q_1^{(-)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \le 0$ и $Q_1^{(+)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \ge 0$:

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_1^{(\mp)} = Q_1^{(\mp)}f(\xi);$$
$$Q_1^{(-)}(0) + \bar{u}_1^{(-)}(x_0) = Q_1^{(+)}(0) + \bar{u}_1^{(+)}(x_0) = p_1; \quad Q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0,$$

где

$$Q_1^{(\mp)}f(\xi) = \left(\bar{u}_1^{(\mp)}(x_0) + \xi\frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(x_0)\right)\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right) + \xi\left(\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_0)\right) +$$
$$+ \left(\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x_0)\right) - \frac{dk^{(\mp)}}{dx}(x_0)\left(\xi\frac{d^2Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} + \frac{dQ_0^{(\mp)}}{d\xi}\right).$$

Функции $Q_1^{(\mp)}f(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки вида (22). Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)}\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)Q_1^{(\mp)}f(\sigma)d\sigma.$$

Поскольку $Q_1^{(\mp)} f(\xi)$ имеют оценки типа (22), то и $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ имеют аналогичные оценки. Вычислим производные функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ при $\xi = 0$:

$$\frac{dQ_1^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\tilde{f}^{(\mp)}(0)}{k^{(\mp)}(x_0)\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(0)k^{(\mp)}(x_0)} \int\limits_{\mp\infty}^{0} \Phi^{(\mp)}(\xi) Q_1^{(\mp)} f(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Здесь мы использовали равенства для производных $\dfrac{d\Phi^{(\mp)}}{d\xi}$ из системы (4) и учли обозначение (23).

Запишем условие сшивания производных, которое следует из равенства (13) в порядке ε^0:

$$k^{(-)}(x_0)\left(\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0)\right) = k^{(+)}(x_0)\left(\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0)\right).$$

Подставляя сюда выражение для производных функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ и учитывая выражение для производной $dH/d\tilde{u}$ из условия 5, а также равенство из условия 4, получим уравнение для коэффициента p_1 разложения (12):

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) \cdot p_1 = G_1,$$

где

$$G_1 = k^{(+)}(x_0)\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) - k^{(-)}(x_0)\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \bar{u}_1^{(-)}(x_0)\frac{\tilde{f}^{(-)}(0)}{\Phi^{(-)}(0)} - \bar{u}_1^{(+)}(x_0)\frac{\tilde{f}^{(+)}(0)}{\Phi^{(+)}(0)} +$$
$$+ \frac{1}{\Phi^{(+)}(0)} \int\limits_{+\infty}^{0} \Phi^{(+)}(\xi) Q_1^{(+)} f(\xi) d\xi - \frac{1}{\Phi^{(-)}(0)} \int\limits_{-\infty}^{0} \Phi^{(-)}(\xi) Q_1^{(-)} f(\xi) d\xi.$$

Это уравнение разрешимо в силу неравенства из условия 5.

2.2.3. Функции переходного слоя старших порядков

Функции переходного слоя порядков $i = 2, 3...$ определяются из задач

$$k^{(\mp)}(x_0)\frac{d^2 Q_i^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) Q_i^{(\mp)} = Q_i^{(\mp)} f(\xi);$$
$$Q_i^{(-)}(0) + \bar{u}_i^{(-)}(x_0) = Q_i^{(+)}(0) + \bar{u}_i^{(+)}(x_0) = p_i; \;\; Q_i^{(\mp)}(\mp\infty) = 0,$$

где правые части уравнений – функции $Q_i^{(\mp)} f(\xi)$ – известны.

Задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» решаются на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функций с верхним индексом «$(+)$» – на полупрямой $\xi \geq 0$.

Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_i^{(\mp)}(\xi) = \left(p_i - \bar{u}_i^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)} \int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) Q_i^{(\mp)} f(\sigma) d\sigma.$$

Для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi)$ имеют место экспоненциальные оценки вида (22). Коэффициенты p_i разложения (12) определяются из уравнений:

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) \cdot p_i = G_i,$$

где G_i – известные величины. Эти уравнения разрешимы в силу условия 5.

2.3. Пограничные функции

Функции $R^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}, \varepsilon\right)$ пограничного слоя в окрестностях точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно строятся стандартным образом [9, 10] в виде разложения (11) по степеням ε. Эти разложения не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана. Функции $R_i^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots$ экспоненциально убывают, при $\eta^{(\mp)} \to \mp\infty$.

3. Основной результат

Теорема 1. *При выполнении условий 1 – 5 краевая задача* (1) *имеет решение* $u(x, \varepsilon)$ *в смысле определения 1, для которого справедливо следующее асимптотическое представление:*

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}(\xi) + R_i^{(-)}\left(\eta^{(-)}\right)\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), & -1 \le x \le x_0, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\xi) + R_i^{(+)}\left(\eta^{(+)}\right)\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), & x_0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Определим функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $Q_i^{(\mp)}(\xi)$, а также коэффициенты p_i в разложениях (9) – (12) при всех $i = 0, 1, ..., n + 1$.

Составим суммы

$$U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)}(\xi) + R_i^{(\mp)}\left(\eta^{(\mp)}\right)\right).$$

Согласно [9] существуют решения задач (6) и (7), для которых эти суммы являются асимптотическими представлениями, то есть верны равенства

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{25}$$

Определим функцию

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon) & -1 \le x \le x_0, \\ U^{(+)}(x,\varepsilon) & x_0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Функция $u(x, \varepsilon)$ является непрерывной в силу условий при $x = x_0$ задач (6) и (7). Покажем, что можно подобрать значение $p(\varepsilon)$ таким образом, что условие сопряжения из определения 1 окажется выполненным, и тем самым функция $u(x, \varepsilon)$ будет решением задачи (1) по определению.

Представим величину $p(\varepsilon)$ в виде следующей суммы:

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + ... + \varepsilon^{n+1}(p_{n+1} + \delta). \tag{26}$$

где δ – некоторая константа.

Проведем модификацию асимптотических представлений (25) функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ в порядке ε^{n+1} :

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}^{(\mp)}(x) + \tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi)\right) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где положим

$$\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi) = \left(p_{n+1} + \delta - \bar{u}_{n+1}^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{k^{(\mp)}(x_0)}\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi')\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi'}\Phi^{(\mp)}(\sigma)Q_{n+1}^{(\mp)}f(\sigma)d\sigma. \tag{27}$$

Функции $Q_{n+1}^{(\mp)}f(\xi)$ являются известными (см. пункт 2.2.3.). Для производных функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ получим следующие равенства:

$$\frac{dU^{(\mp)}}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(\mp)}}{dx}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n\frac{d\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}}{d\xi}(\xi) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{28}$$

Покажем, что при определенном выборе величины δ в разложении (26) будет выполняться условие

$$k^{(-)}(x_0)\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0) = k^{(+)}(x_0)\frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0). \tag{29}$$

Пусть

$$I(\delta,\varepsilon) = k^{(-)}(x_0)\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0) - k^{(+)}(x_0)\frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0).$$

Подставляя в эту разность выражения (28) для производных функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, учитывая выполнение условия (13), а также явные выражения для производных функций $\tilde{Q}_{n+1}^{(\mp)}(\xi)$, которые можно получить из выражения (27) по аналогии с (24), получим следующее равенство:

$$I(\delta,\varepsilon) = \varepsilon^n\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0)\delta + O(\varepsilon^n).$$

В силу условия 5 выражение $\dfrac{dH}{d\tilde{u}}(p_0)$ отлично от нуля, поэтому найдется величина δ – решение уравнения $I(\delta,\varepsilon) = 0$; тем самым будет выполнено равенство (29) Таким образом, функция $u(x,\varepsilon)$ по определению будет решением задачи (1).

4. Пример

В качестве примера рассмотрим модельную задачу о распределении температуры в приповерхностном слое вода-воздух:

$$\varepsilon^2\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(u,x), \quad x \in (-1;1), \quad \frac{du}{dx}(-1) = \frac{du}{dx}(1) = 0. \tag{30}$$

За границу раздела сред примем точку $x_0 = 0$, считая, что водная среда расположена при $x < x_0$, а воздух – при $x > x_0$. Функция $\varepsilon^2 k(x)$ играет роль коэффициента температуропроводности. Из экспериментальных данных известно, что эта функция претерпевает разрыв первого рода на границе раздела сред [1], поэтому положим

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ 2, & x \in [0; 1]. \end{cases} \tag{31}$$

Функция в правой части уравнения (30) играет роль стока тепла в воде и источника тепла в воздухе, ее можно представить в виде

$$f(u, x) = \begin{cases} u - U_w, & x \in [-1; 0], \\ u - U_a, & x \in [0; 1], \end{cases} \tag{32}$$

где U_w и U_a – температура в воде и в воздухе соответственно. Эти величины будем считать постоянными.

Нетрудно проверить, что для поставленной задачи выполняются условия 1 – 3.

Выпишем для рассматриваемого примера задачи (6) и (7) относительно функций $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$:

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{d^2 U^{(-)}}{dx^2} = U^{(-)} - U_w, \ \ x \in (-1; 0), \quad U^{(-)}(0) = p, \ \ \frac{dU^{(-)}}{dx}(-1) = 0; \\ 2\varepsilon^2 \frac{d^2 U^{(+)}}{dx^2} = U^{(+)} - U_a, \ \ x \in (0; 1), \quad U^{(+)}(0) = p, \ \ \frac{dU^{(+)}}{dx}(1) = 0. \end{gathered}$$

Каждую из этих задач можно решить точно:

$$\begin{gathered} U^{(-)} = U_w + (p - U_w) \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \ x \in [-1; 0]; \\ U^{(+)} = U_a + (p - U_a) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right), \ \ x \in [0; 1]. \end{gathered}$$

Подставив эти выражения для функций $U^{(\mp)}$ в условие сопряжения из определения 1, получим уравнение, из которого найдем величину p :

$$p = \frac{U_w + \sqrt{2} U_a}{1 + \sqrt{2}}.$$

Согласно определению 1 точным решением задачи (30) является функция

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} U_w + \left(\dfrac{\sqrt{2}(U_a - U_w)}{1 + \sqrt{2}}\right) \exp\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), & x \in [-1; 0], \\ U_a + \left(\dfrac{U_w - U_a}{1 + \sqrt{2}}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}\right), & x \in [0; 1]. \end{cases} \tag{33}$$

На рисунке представлен график решения задачи (30) при $U_w = 295$, $U_a = 300$, $\varepsilon = 0,1$.

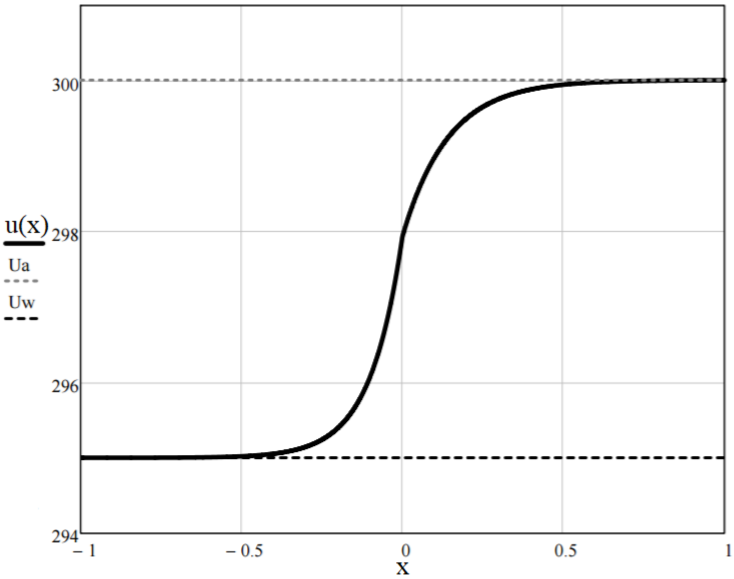


Рис. 1. График точного аналитического решения задачи (30)
Fig. 1. The plot of the exact analytical solution of the problem (30)

Список литературы / References

[1] Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д., "Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур", Сер. 3. Физика. Астрономия, 2015, 12–16; English transl.: Levashova N. T., Nikolaeva O. A., Pashkin A. D., "Simulation of the temperature distribution at the water–air interface using the theory of contrast structures", *Moscow University Physics Bulletin*, **70**:5 (2015), 341–345.

[2] Иванов А.А., *Введение в океанографию*, Мир, М., 1978, 574 с.; [Ivanov A.A., *Vvedenie v okeanografiju*, Mir, Moskva, 1978, 574 pp., (in Russian).]

[3] Васильева А. Б., "Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **35**:4 (1995), 520–531; English transl.: Vasil'eva A. B., "Step-like contrasting structures for a singularly perturbed quasilinear second-order differential equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **35**:4 (1995), 411–419.

[4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., "Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями", *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **268**, 2010, 268–283; English transl.: Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. Nefedov N. N., "Singularly perturbed problems with boundary and internal layers", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 258–273.

[5] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T. Mel'nikova A. A., "Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter", *Comput. Math. Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546.

[6] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Ягремцев А. В., "Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:3 (2013), 365–376; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Yagremtsev A. V., "Contrast structures in the reaction-diffusion-advection

equations in the case of balanced advection", *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:3 (2013), 273–283.

[7] Нефедов Н. Н., Ни М. К., "Внутренние слои в одномерном уравнении реакция–диффузия с разрывным реактивным членом", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:12 (2015), 2042–2048; Nefedov N. N., Ni M., "Internal layers in the one-dimensional reaction–diffusion equation with a discontinuous reactive term", *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**:12 (2015), 2001–2007.

[8] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О., "Стационарное уравнение реакции-диффузии с разрывным реактивным членом", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:5 (2017), 854–866; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O., "Time-independent reaction–diffusion equation with a discontinuous reactive term", *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:5 (2017), 854–866.

[9] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990, 208 pp., (in Russian).]

[10] Давыдова М. А., Левашова Н. Т., Захарова С. А., "Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы", *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:3 (2016), 283–290; [Davydova M. A., Levashova N. T., Zakharova S. A., "The Asymptotical Analysis for the Problem of Modeling the Gas Admixture in the Surface Layer of the Atmosphere", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 283–290, (in Russian)].

Levashova N. T., Nikolaeva O. A., "The Heat Equation Solution Near the Interface Between Two Media", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 339–352.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-339-352

Abstract. Physical phenomena that arise near the boundaries of media with different characteristics, for example, changes in temperature at the water-air interface, require the creation of models for their adequate description. Therefore, when setting model problems one should take into account the fact that the environment parameters undergo changes at the interface. In particular, experimentally obtained temperature curves at the water-air interface have a kink, that is, the derivative of the temperature distribution function suffers a discontinuity at the interface. A function with this feature can be a solution to the problem for the heat equation with a discontinuous thermal diffusivity and discontinuous function describing heat sources. The coefficient of thermal diffusivity in the water-air transition layer is small, so a small parameter appears in the equation prior to the spatial derivative, which makes the equation singularly perturbed. The solution of the boundary value problem for such an equation can have the form of a contrast structure, that is, a function whose domain contains a subdomain, where the function has a large gradient. This region is called an internal transition layer. The existence of a solution with the internal transition layer of such a problem requires justification that can be carried out with the use of an asymptotic analysis. In the present paper, such an analytic investigation was carried out, and this made it possible to prove the existence of a solution and also to construct its asymptotic approximation.

Keywords: heat conduction equation, asymptotic methods, small parameter, discontinuous heat conductivity coefficient, discontinuous sources

On the authors:

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Olga A. Nikolaeva, orcid.org/0000-0002-4638-1959, graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, 1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: o.a.nikolaewa@gmail.com

Acknowledgments:

[1]This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №3 (2017), с. 353–358
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 353–358

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-353-358

УДК 517.9

Замечание об области притяжения стационарного решения одного сингулярно возмущённого параболического уравнения

Терентьев М. А.[1]

получена 15 декабря 2016

Аннотация. В работе рассмотрена начально-краевая задача для одного сингулярно возмущённого параболического уравнения с не зависящей от малого параметра начальной функцией в случае, когда вырожденное стационарное уравнение имеет гладкие, возможно, пересекающиеся корни. Ранее было доказано существование устойчивого стационарного решения этой задачи и исследована его область притяжения — вследствие смены устойчивости стационарное решение асимптотически приближается к некоторому негладкому (но непрерывному) составному корню вырожденного уравнения при уменьшении параметра возмущения, а его области притяжения принадлежат все начальные функции, находящиеся строго по одну сторону от другого негладкого (но непрерывного) составного корня вырожденного уравнения. В работе показано, что если начальная функция выходит за границу указанного семейства начальных функций вблизи некоторой точки, то исходная задача не имеет решения внутри области определения переменных задачи, т.е. эта граница в действительности является границей области притяжения. Доказательство этого факта основано на идеях метода нелинейной ёмкости.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, параболическое уравнение, стационарное решение, область притяжения, пересекающиеся корни, смена устойчивости, несуществование, разрушение, нелинейная ёмкость

Для цитирования: Терентьев М. А., "Замечание об области притяжения стационарного решения одного сингулярно возмущённого параболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 353–358.

Об авторах:
Терентьев Михаил Анатольевич, orcid.org/0000-0003-0006-4314, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, ГСП–1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

Введение

В работе [1] рассматривалась следующая начально-краевая задача для сингулярно возмущённого параболического уравнения:

$$-u_t + \varepsilon^2 u_{xx} = f(u, x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0, t, \varepsilon) = u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а функция $f(u, x)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. *Существуют функции $\underline{u}(x)$ и $\overline{u}(x)$ из класса $C^2[0, 1]$ такие, что в области $D = \{(u, x) : \underline{u}(x) \le u \le \overline{u}(x), 0 \le x \le 1\}$ функция $f(u, x)$ имеет вид*

$$f(u, x) = h(u, x)[u - \varphi_1(x)][u - \varphi_2(x)], \tag{4}$$

где h, φ_1, φ_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции, $h(u, x) > 0$ в D и существует $x_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\begin{gathered}
\underline{u}(x) < \varphi_2(x) < \varphi_1(x) < \overline{u}(x), \quad 0 \le x < x_0, \\
\underline{u}(x_0) < \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) < \overline{u}(x_0), \\
\underline{u}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \overline{u}(x), \quad x_0 < x \le 1.
\end{gathered} \tag{5}$$

Соотношения (5) показывают, что корни $u = \varphi_1(x)$ и $u = \varphi_2(x)$ вырожденного уравнения $f(u, x) = 0$ пересекаются в точке x_0. В отношении пересечения корней введено

Условие 2. $\varphi_1'(x_0) < \varphi_2'(x_0)$.

Из корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ вырожденного уравнения можно образовать два составных непрерывных, но негладких в точке x_0 корня:

$$\check{u}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \le x \le x_0, \\ \varphi_2(x), & x_0 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \hat{u}(x) = \begin{cases} \varphi_2(x), & 0 \le x \le x_0, \\ \varphi_1(x), & x_0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Из условия 1 следует, что

$$\begin{gathered}
\check{u}(x) > \hat{u}(x), \quad x \ne x_0, \quad \check{u}(x_0) = \hat{u}(x_0), \\
f_u(\check{u}(x), x) > 0, \quad f_u(\hat{u}(x), x) < 0, \quad x \ne x_0, \\
f_u(\check{u}(x_0), x_0) = f_u(\hat{u}(x_0), x_0) = 0.
\end{gathered}$$

Эти неравенства позволяют назвать корень $\check{u}(x)$ *устойчивым*, а корень и $\hat{u}(x)$ — *неустойчивым*.

Из результатов работы [2] следует, что уравнение (1) с краевыми условиями (2) имеет при достаточно малых ε стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ такое, что $u_s(x_0, \varepsilon) \ge \check{u}(x_0)$ и $u_s(x, \varepsilon) \to \check{u}(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, т.е. пределом стационарного решения $u_s(x, \varepsilon)$ является негладкий в точке x_0 корень вырожденного уравнения.

Из результатов работы [3] следует, что помимо стационарного решения $u_s(x, \varepsilon)$ уравнение (1) с краевыми условиями (2) имеет при достаточно малых ε ещё одно стационарное решение $\tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ такое, что $\tilde{u}_s(x_0, \varepsilon) < \check{u}(x_0)$ и $\tilde{u}_s(x, \varepsilon) \to \check{u}(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, т.е. пределом стационарного решения $\tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ является тот же самый негладкий в точке x_0 корень вырожденного уравнения. Тем самым стационарное решение не единственно в асимптотически малой окрестности устойчивого корня вырожденного уравнения.

В работе [1] установлена асимптотическая устойчивость (по Ляпунову) стационарного решения $u_s(x, \varepsilon)$ при достаточно малых ε. Ниже будет показано, что стационарное решение $\tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ является неустойчивым в специальном смысле.

Следующий рассмотренный в [1] вопрос касается области притяжения устойчивого стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$, т.е. множества начальных функций $u_0(x)$ таких, что решение $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения (1) с краевыми условиями (2) и начальным условием (3) удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t,\varepsilon) = u_s(x,\varepsilon). \tag{6}$$

Предполагается, что график функции $u = u_0(x)$ расположен в области определения D функции $f(u,x)$, а сама $u_0(x)$ является гладкой.

Условие 3. $\hat{u}(x) < u_0(x) < \overline{u}(x)$ *при* $0 \le x \le 1$.

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Если выполнены условия 1 – 3, то для достаточно малых ε решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) существует и удовлетворяет предельному равенству (6).*[1]

Таким образом, все начальные функции, удовлетворяющие условию 3, принадлежат области притяжения устойчивого стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$. Возникает естественный вопрос о принадлежности области притяжения функций, графики которых выходят за определённые условием 3 границы.

Границы области притяжения

Верхняя граница области притяжения стационарного решения $u_s(x,\varepsilon)$ уравнения (1) связана с областью определения D функции $f(u,x)$ и задаётся функцией $\overline{u}(x)$. Главный вопрос — является ли функция $\hat{u}(x)$ нижней границей области притяжения. Предположим, что вместо условия 3 выполнено противоположное ему

Условие 4. $\underline{u}(x_*) < u_0(x_*) < \hat{u}(x_*)$ *в некоторой точке* $x_* \in [0,1]$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда h не зависит от u. Тогда справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия 1, 2 и 4, то для достаточно малых ε не существует решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3), график которого при всяком $t > 0$ лежит в области D из условия 1.*

Тем самым предельное равенство (6) в условиях теоремы 2 выполняться не может — отсюда следует, что $\hat{u}(x)$ является нижней границей области притяжения.

Доказательство теоремы о несуществовании решения основано на идеях метода нелинейной ёмкости, развитого в [4] для исследования отсутствия и разрушения глобальных решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка x_* отлична от 0, x_0 и 1, иначе по теореме о сохранении знака непрерывной функции найдётся другая точка, достаточно близкая к одному из этих значений, в которой условие 4 выполняется.

[1] В работе [1] эта теорема имеет номер 3.

Допустим теперь, что задача (1)-(3) имеет классическое решение $u(x,t,\varepsilon)$ такое, что $\underline{u}(x) \le u(x,t,\varepsilon) \le \overline{u}(x)$ при всех $t > 0$. Обозначим $a(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ и $b(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$. Тогда уравнение (1) преобразуется в тождество

$$-u_t + \varepsilon^2 u_{xx} = h(x)[u^2 - a(x)u + b(x)], \tag{7}$$

где $h(x) \ge c > 0$ при $0 \le x \le 1$ для некоторой константы c.

Положим $\chi(\xi) = \frac{315}{256}(1-\xi^2)^4$ при $|\xi| \le 1$ — это гладкая функция, причём $\chi(\xi) > 0$ при $|\xi| < 1$, $\chi(\pm 1) = \chi'(\pm 1) = 0$ и $\int_{-1}^{1} \chi \, d\xi = 1$. Положим ещё $\theta(\tau) = 1$ при $0 \le \tau \le \frac{1}{2}$ и $\theta(\tau) = (1 - (2\tau - 1)^2)^2$ при $\frac{1}{2} < \tau \le 1$ — это непрерывно дифференцируемая функция, причём $\theta(\tau) > 0$ при $0 \le \tau < 1$ и $\theta(1) = 0$.

Далее умножим обе части тождества (7) на функцию

$$\psi(x,t) = \delta^{-1}\chi\left(\frac{x - x_*}{\delta}\right)\theta\left(\frac{t}{T}\right)e^{-kh(x_*)t},$$

где δ, T и k — некоторые не зависящие от ε положительные параметры, которые мы подберём ниже, и проинтегрируем по $(x,t) \in [x_* - \delta, x_* + \delta] \times [0,T]$, взяв δ достаточно малым и перебросив производные с u на ψ интегрированием по частям:

$$\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u_0\psi|_{t=0}\,dx + \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u\left[\psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi\right]dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta}\left[u^2 + b\right]h\psi\,dxdt. \tag{8}$$

Оценим двойной интеграл в левой части (8) при помощи неравенства Юнга с параметром $\gamma > 0$:

$$\alpha\beta \le \frac{\gamma}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\gamma}\beta^2,$$

положив $\alpha = u$, $\beta = \psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi$ и $\gamma = 2h\psi$. Имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u\left[\psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi\right]dxdt \le \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u^2h\psi\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta}\frac{\left[\psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi\right]^2}{4h\psi}dxdt,$$

откуда с учётом (8) получаем

$$\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} u_0\psi|_{t=0}\,dx \ge \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} hb\psi\,dxdt - \int\limits_0^T\int\limits_{x_*-\delta}^{x_*+\delta}\frac{\left[\psi_t + \varepsilon^2\psi_{xx} + ha\psi\right]^2}{4h\psi}dxdt. \tag{9}$$

В силу вида функций χ и θ вычитаемый интеграл в правой части неравенства (9) конечен, а само неравенство имеет следующую асимптотику:

$$u_0(x_*) \ge \frac{4b(x_*) - \left[-k + a(x_*)\right]^2}{4k} + O(\delta) + O(e^{-kcT/2}) + O(\varepsilon^2\delta^{-2}).$$

Отношение в правой части полученного неравенства достигает максимального значения при $k = \sqrt{a^2(x_*) - 4b(x_*)}$, откуда после упрощения получаем

$$u_0(x_*) \ge \hat{u}(x_*) + O(\delta) + O(e^{-kcT/2}) + O(\varepsilon^2\delta^{-2}). \tag{10}$$

Из условия 4 следует, что $u_0(x_*) < \hat{u}(x_*) - c_*$, где $c_* = \frac{1}{2}(\hat{u}(x_*) - u_0(x_*)) > 0$. В то же время, наше допущение влечёт неравенство (10), из которого следует неравенство $u_0(x_*) \geq \hat{u}(x_*) - c_*$ при достаточно малом δ, достаточно большом T и всех достаточно малых ε. Полученное противоречие говорит о том, что задача (1) – (3) не имеет решения с указанным в теореме свойством. ■

Замечание 1. *Теорема 2 и её доказательство остаются в силе, если областью определения функции $f(u, x)$ является $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$. В этом случае утверждение теоремы означает, что решение задачи (1) – (3) разрушается за некоторое конечное время (при этом локальное существование решения гарантируется регулярностью исходных данных задачи).*

Замечание 2. *В доказательстве теоремы 2 уравнение (1) исследуется по существу лишь в δ-окрестности точки x_*, т.е. полученный результат является локальным по x и не зависит от граничных условий (2).*

Замечание 3. *Из теорем 1 и 2 следует: или $u_0(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого стационара $u_s(x, \varepsilon)$ и тогда для решения задачи (1) – (3) имеет место предельное равенство (6), или $u_0(x)$ выходит за нижнюю границу области притяжения и тогда график решения не может находиться при всяком $t > 0$ в области определения D функции $f(u, x)$. Это означает, что стационарное решение $\tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ является неустойчивым по отношению к не зависящим от ε возмущениям, представленным начальной функцией $u_0(x)$.*

Заключение

Выше установлено, что найденные в [1] границы области притяжения стационарного решения уравнения (1) с краевыми условиями (2), вообще говоря, не могут быть расширены в классе не зависящих от ε начальных функций $u_0(x)$. Этот результат остаётся справедливым и в случае непересекающихся корней вырожденного уравнения. Однако остаётся открытым вопрос о том, как будет вести себя решение начально-краевой задачи в случае $u_0(x_1) = \hat{u}(x_1)$ для какой-нибудь точки $x_1 \in [0, 1]$, а также в случае зависящей от ε начальной функции (так, например, $u_0(x, \varepsilon) = \tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ выходит за нижнюю границу области притяжения стационара $u_s(x, \varepsilon)$ в точке x_0, однако решение начально-краевой задачи $u(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}_s(x, \varepsilon)$ ввиду стационарности не выходит из области D).

Список литературы / References

[1] Бутузов В. Ф., “Об устойчивости и области притяжения негладкого в пределе стационарного решения сингулярно возмущенного параболического уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:3 (2006), 433–444; English transl.: Butuzov V. F., “On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation”, *Comp. Math. Math. Phys.*, **46**:3 (2006), 413–424.

[2] Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., “Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости”, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 354–362; [Butuzov V. F., Nefedov N. N., “A singularly perturbed boundary value problem for a second-order equation in the case of variation of stability”, *Math. Notes*, **63**:3 (1998), 311–318].

[3] Karali G., Sourdis C., “Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities”, *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, **29**:2 (2012), 131–170.

[4] Митидиери Э., Похожаев С. И., “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; English transl.: Mitidieri E., Pokhozhaev S. I., “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

Terentyev M. A., "A Note on the Domain of Attraction for the Stationary Solution to a Singularly Perturbed Parabolic Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 353–358.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-353-358

Abstract. We consider a boundary-value problem for a singularly perturbed parabolic equation with an initial function independent of a perturbation parameter in the case where a degenerate stationary equation has smooth possibly intersecting roots. Before, the existence of a stable stationary solution to this problem was proved and the domain of attraction of this solution was investigated — due to exchange of stabilities, the stationary solution approaches the non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation as the perturbation parameter gets smaller, and its domain of attraction contains all initial functions situated strictly on one side of the other non-smooth (but continuous) composite root of the degenerate equation. We show that if the initial function is out of the boundary of this family of initial functions near some point, the problem cannot have a solution inside the domain of the problem, i.e. this boundary is the true boundary of the attraction domain. The proof uses ideas of the nonlinear capacity method.

Keywords: small parameter, singular perturbation, parabolic equation, stationary solution, domain of attraction, intersecting roots, exchange of stabilities, nonexistence, blow-up, nonlinear capacity

On the authors:
Mikhail A. Terentyev, orcid.org/0000-0003-0006-4314, PhD, senior researcher
Lomonosov Moscow State University,
1, bld. 2 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation, e-mail: m.terentyev@physics.msu.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by RFBR, project No. 15-01-04619.

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №3 (2017), с. 359–364
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 359–364

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-359-364
УДК 517.9

Исследование динамики класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом

Ахременко Г. А.

получена 18 сентября 2016

Аннотация. В работе изучается динамика одного класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом. Численными методами отыскиваются устойчивые состояния равновесия, а также иные аттракторы. В ходе исследования были разобраны два базовых случая, к которым сводятся все остальные. В пространстве параметров выделены области, отвечающие тем или иным фазовым перестройкам. В частности, было установлено, что для данного класса функций, при условии непрерывности на рассматриваемое отображение, не существует ни одного набора параметров такого, что при заданных ограничениях на функцию существовало хотя бы два аттрактора. В случае наличия разрыва имеется бесконечно много областей, в которых сосуществуют два притягивающих цикла, причем если в области существует два притягивающих цикла, то их периоды отличаются ровно на единицу, и не существует областей, где присутствовало бы три или более аттрактора. Кроме того, было выявлено, что при движении в пространстве параметров вдоль некоторой прямой наблюдаются устойчивые циклы всевозможных периодов, со следующей важной особенностью: каждая область содержит ровно один или ровно два притягивающих цикла, и область, содержащая k притягивающих циклов, соседствует с областями, содержащими $3-k$ притягивающих циклов, причем наборы значений периодов любых двух соседствующих областей имеют ненулевое пересечение.

Ключевые слова: отображение, кусочно-линейная функция, аттрактор

Для цитирования: Ахременко Г. А., "Исследование динамики класса одномерных кусочно-линейных отображений с одним разрывом", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 359–364.

Об авторах: Ахременко Григорий Андреевич, orcid.org/0000-0003-0319-9732, студент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: 79806574742@ya.ru

В работе [1] (см. также [2]) построена общая теория непрерывных одномерных отображений. Установлен универсальный порядок (который называют подряком Шарковского) бифуркаций при изменении параметров отображений. Для приложений важным классом являются кусочно-линейные системы. Как оказалось, они имеют свои бифуркационные особенности.

В настоящей работе рассматривается вопрос о динамике простейших унимодальных кусочно-линейных разрывных отбражений $f : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f_1(x) = k_1x + b_1, & x \in [0, b] \\ f_2(x) = k_2x + b_2, & x \in (b, 1] \end{cases}, \tag{1}$$

где $k_1 < 0, k_2 > 0$, а коэффициенты b_1, b_2 выбираются таким образом, что $f_\varepsilon(x)$ содержит следующие две точки $(0, a), (1, c)$, разрыв происходит в $x = b$ и

$$\left| \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) - \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) \right| = \varepsilon \geqslant 0.$$

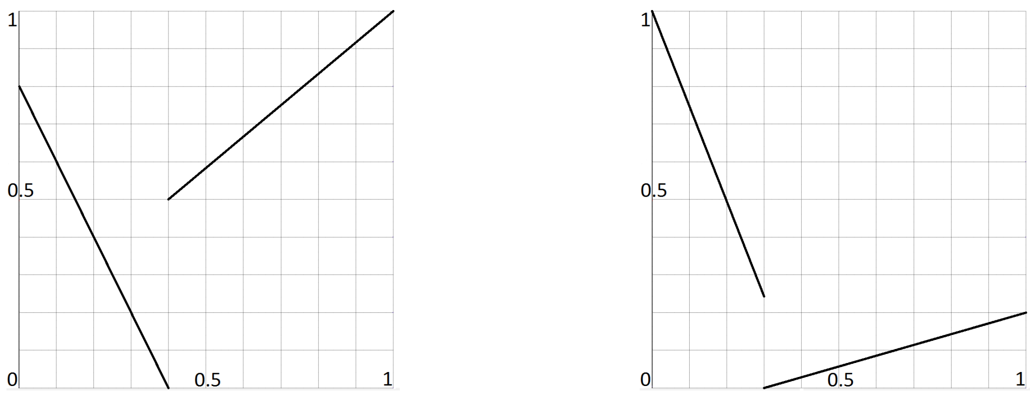
Параметр ε, определяет величину разрыва. Так как всегда можно провести нормировку параметров, можем считать, что существуют всего два случая (см. рис. 1):

1. Функция $f_\varepsilon(x)$ определяется следующим образом:

$$f_\varepsilon(0) = a,\ f_\varepsilon(1) = 1,\ \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) = 0,\ \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) = \varepsilon. \tag{2}$$

2. Функция $f_\varepsilon(x)$ такова, что:

$$f_\varepsilon(0) = 1,\ f_\varepsilon(1) = c,\ \lim_{x \mapsto b-0} f_1(x) = \varepsilon,\ \lim_{x \mapsto b+0} f_2(x) = 0. \tag{3}$$



a) пример функции в первом случае (example of function in the first case)

b) пример фунции во втором случае (example of function in the second case)

Рис. 1. Основные варианты графиков функции (1)

Fig. 1. Main function graphs (1) options

Рассмотрим линейное одномерное отображение:

$$x_{n+1} = f_\varepsilon(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

которое задается начальным условием x_0. Численными методами исследуется динамика отображения (4). Выделены в пространстве параметров области, соответствующие различным динамическим режимам. Стоит отметить, что анализ непрерывных (при $\varepsilon = 0$) кусочно-линейных отображений приведен в работах [3] и [4]. Основной результат состоит в том, что были сформулированы некоторые условия на параметры функции, при которых наблюдаются устойчивые циклы всех натуральных периодов, разделенные областями хаотичности G:

$$2 \Rightarrow G \Rightarrow 3 \Rightarrow G \Rightarrow \cdots \Rightarrow G \Rightarrow k \Rightarrow G \Rightarrow k+1 \Rightarrow G \Rightarrow \ldots$$

В работе [5] была исследована динамика $f_\varepsilon(x)$, но с ограничениями $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Далее рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

1. Случай первый (формула (2))

В этом пункте рассмотрим ситуацию, когда функция $f_\varepsilon(x)$ определяется формулами (2) (см. рис. 1a). Численными методами были проиллюстрированы следующие результаты:

1. Если $a = b$, то существует континуальное количество нейтральных циклов периода 2 для начальных условий $x_0 \in [0, b]$.

2. Если $a > b$, то существует единственное устойчивое состояние равновесия на интервале $(0, b)$.

3. Если $a < b$, то на отрезке $[0, b]$ нет устойчивых режимов.

4. Если $b = \varepsilon$, то любая точка на интервале $x_0 \in (b, 1]$ – нейтральное состояние равновесия.

5. Если $b > \varepsilon$, то на интервале $x_0 \in (b, 1]$ нет устойчивых аттракторов.

6. Если $b < \varepsilon$, то состояние равновесия $x = 1$ устойчиво и для любого начального условия $x_0 > b$ отображение "приходит" в него.

На рис. 2 изображено разбиение плоскости параметров отображения (4) при $\varepsilon = 0.4$ на области с одинаковым качественным поведением.

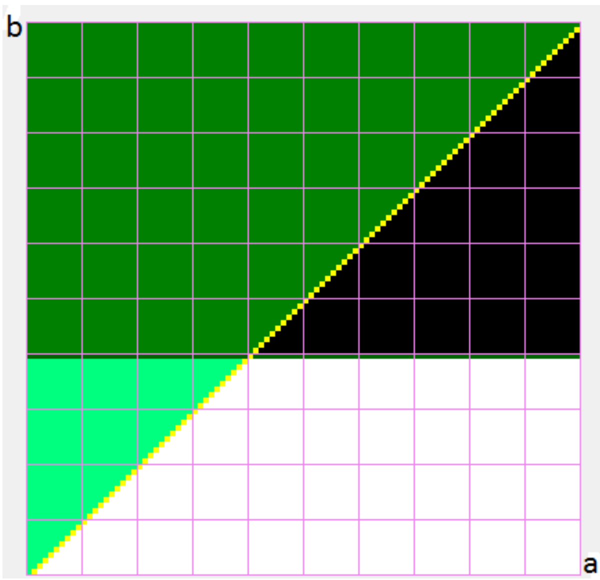


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения (4) при $\varepsilon = 0.4$

Fig. 2. The bifurcation chart display (4) in case of $\varepsilon = 0.4$

2. Случай второй (формула (3))

В этом пункте рассмотрим ситуацию, когда функция $f_\varepsilon(x)$ определяется формулами (3) (см. рис. 1b). В отличие от результатов, полученных в работе [4], где в зонах устойчивых циклов был обнаружен единственный аттрактор, у данного отображения существует бесконечно много областей устойчивости одновременно двух циклов, причем периоды этих циклов отличаются на 1. Как и в работе [5], в данном случае имеется следующая особенность динамики отображения (4): не существует областей, в которых сосуществуют три и более притягивающих цикла. Таким образом, наличие разрыва приводит к появлению следующей закономерности следования периодов:

$$2 \Rightarrow 2,3 \Rightarrow 3 \Rightarrow 3,4 \Rightarrow 4 \Rightarrow \cdots \Rightarrow n \Rightarrow n,n+1 \Rightarrow n+1 \Rightarrow \ldots.$$

Некоторые примеры бифуркационных диаграмм представлены на рис. 3.

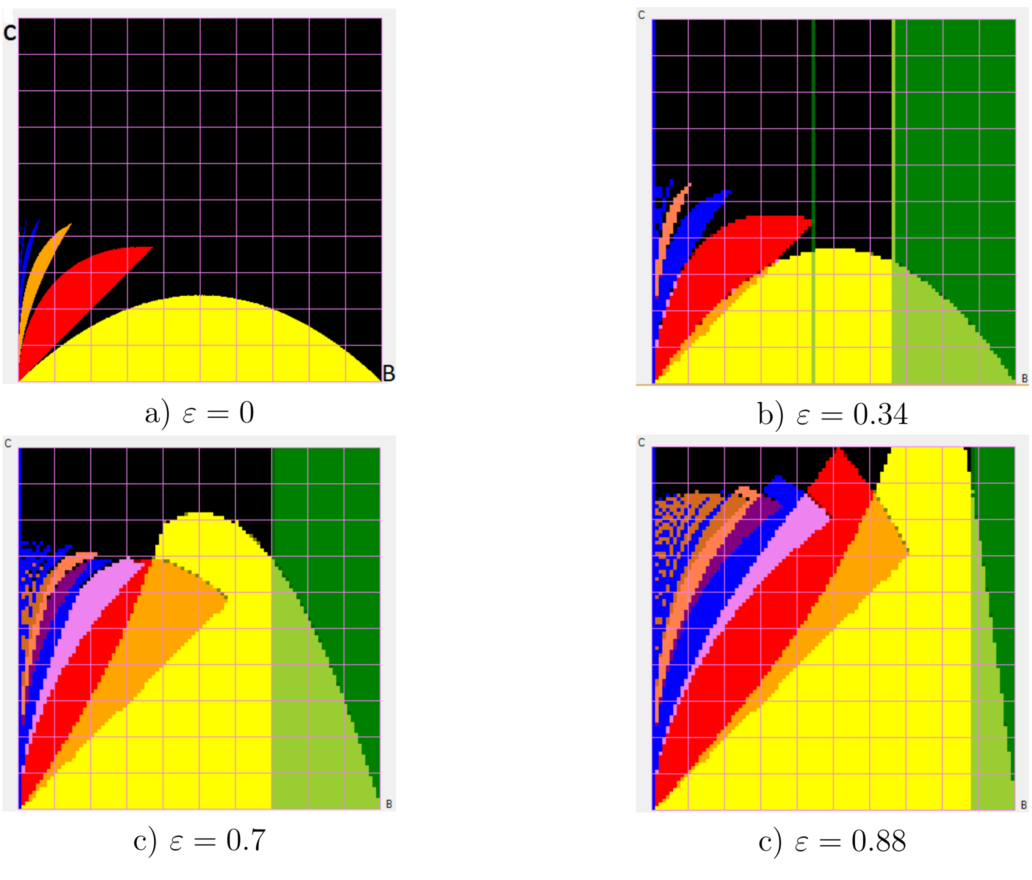


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы отображения (4)

Fig. 3. Bifurcation charts of display (4)

Отметим, что исследование этого случая производилось только численными методами, однако по аналогии с работой [5] многие результаты этого пункта могут быть доказаны аналитически.

Некоторые выводы

Была исследована динамика одномерного линейного отображения простейшего класса кусочно-линейных функций с одним разрывом. В пространстве параметров выделены области, в которых экспериментально были обнаружены аттракторы различных типов. Были сформулированы условия существования и устойчивости соответствующих режимов. Проведен сравнительный анализ с другими работами в этой области. Учитывая, что рассматриваемый класс функций близок к функциям, рассмотренным в [5], результаты данного исследования дают в ряде случаев аналогичные выводы.

Описание использованных алгоритмов

Был разработан комплекс программ для изучения данного отображения, а именно две программы, описанные ниже.

Приложение 1. Требовалось определить, какому режиму будет соответствовать каждая четверка параметров, задающая какую-то функцию из вышеописанного класса. Перебирались всевозможные наборы параметров (b, c, x_0, ε) и (a, b, x_0, ε) для 1 и 2 случая соответственно. Запускалось отображение (4) и численно отыскивался его период. Первые 100 итераций отображения производились без какого-либо анализа получаемых данных, они необходимы, чтоб уйти от неустойчивых режимов и выйти на аттрактор. Далее считалось, что если $|x_i - x_{i+1}| < \delta$, то отображение вошло в режим «состояние равновесия», иначе сохраняем текущее x_k в структуре данных «map» (структура, представляющая собой бинарное дерево, с возможностью поиска по ключу и сохранением момента добавления элемента). Если на очередном шаге мы пытаемся добавить в map элемент, который уже там есть, значит, отображение вошло в режим «цикл». Период цикла можно определить по текущему моменту времени и моменту, когда данный элемент был впервые занесен в структуру данных. Шаг по параметрам a, b, c, x_0, ε составлял 10^{-2}, значение δ принято как 10^{-9}. Количество итераций, после которого, если не нашли цикла, считалось, что режим «хаотический», принято равным 10^4. На выходе программа возвращала текстовый документ, содержащий битовые маски для троек параметров $(a, b, \varepsilon), (b, c, \varepsilon)$ соответственно для каждого случая, i-й бит равен 1 в случае наличия режима цикл-i, иначе равен 0. Нулевой бит соответствовал режиму «хаос».

Приложение 2. Требовалось строить фазовую плоскость (x_n, x_{n+1}) для конкретных значений (a, b, c, ε). Данная программа получала на вход набор параметров, соответствующий конкретной функции данного класса, при нажатии мышкой по начальному условию x_0 выпускала траекторию отображения. В качестве функции перерисовки использовалась стандартная функция языка C# – timer. Также была разработана возможность очистки экрана после какого-то промежутка времени по нажатию на соответствующую клавишу.

Список литературы / References

[1] Шарковский А.Н., "Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя", *Украинский математический журнал*, **16**:1 (1964), 61–71; [Sharkovskiy A.N., "Sosushchestvovanie tsiklov nepreryvnogo preobrazovaniya pryamoy v sebya.", *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*, **16**:1 (1964), 61–71, (in Russian).]

[2] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю., *Разностные уравнения и их приложения.*, Наукова думка, Киев, 1981; [Sharkovskiy A.N., Maystrenko Yu.L., Romanenko E.Yu., *Raznostnye uravneniya i ikh prilozheniya*, Naukova dumka, Kiev, 1981, (in Russian).]

[3] Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O., "Cycles of Chaotic Intervals in a Time-Delayed Chua's Circuit", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**:6 (1993), 1557–1572.

[4] Ахременко Г.А., "Исследование динамики одномерного линейного отображения класса непрерывных кусочно-линейных функций", *Современные проблемы математики и информатики*, **16** (2016), 4–9; [Akhremenko G.A., "Issledovanie dinamiki odnomernogo lineynogo otobrazheniya klassa nepreryvnykh kusochno-lineynykh funktsiy", *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, **16** (2016), 4–9, (in Russian).]

[5] Кащенко Д.С., "Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений.", *Моделирование и анализ информационных систем.*, **19**:3 (2012), 73–81; [Kaschenko D. S., "Dynamics of the Simplest Piecewise Linear Discontinuous Mappings", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:3 (2012), 73–81, (in Russian).]

Akhremenko G.A., "Study of the Dynamics of a Class of One-dimensional Piecewise Linear Displays with One Gap", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 359–364.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-359-364

Abstract. In the paper, the dynamics of a class of one-dimensional piecewise linear displays with one gap is studied. Stable conditions of equilibrium as well as other attractors are found by numerical methods. During the investigation two basic cases to which all remaining ones come down are considered. In the space of parameters, the areas responding to these or those phase reorganizations are selected. In particular, it was ascertained that for this class of functions, under condition of a continuity on the considered display, there is no set of parameters of it that in case of the given restrictions on the function there were at least two attractors. In case of the existence of a gap is there are infinitely many areas in which two attracting cycles coexist, and if in the area there are two attracting cycles, their periods differ exactly by a unit, and there are no areas where there would be three or more attractors. Besides, it was revealed that in case of three-dimensional motion of parameters along a straight line steady cycles of the various periods with the following important feature are watched: each area supports exactly one or exactly two attracting cycles, and the area containing k attracting cycles adjoin to the areas containing $3 - k$ attracting cycles, and sets of values of the periods of any two adjoining areas have a nonzero intersection.

Keywords: mapping, piecewise linear function, attractor

On the authors:
Grigorii Akhremenko, orcid.org/0000-0003-0319-9732, student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: 79806574742@ya.ru

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 3 (2017), с. 365–386
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 365–386

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-365-386

УДК 517.9

Математическая модель эксперимента Николсона

Глызин С.Д.

получена 18 января 2017

Аннотация. Рассматривается математическая модель динамики численности насекомых и предпринимается попытка объяснения с ее помощью классических экспериментальных результатов Николсона. В первой части работы описывается эксперимент Николсона и выбираются динамические уравнения для его моделирования. Априорные оценки параметров модели удается уточнить с помощью локального анализа динамической системы, который выполнен во втором разделе. В нем найдены значения параметров, при которых потеря устойчивости состоянием равновесия задачи приводит к бифуркации устойчивого двумерного тора. Численный счет, выполненный на основе оценок из второго раздела, позволяет объяснить классический эксперимент Николсона, развернутое теоретическое обоснование которого дано в последнем разделе. В нем для аттрактора системы вычислен старший ляпуновский показатель. Характер изменения этого показателя при изменении коэффициента линейного роста задачи позволяет дополнительно сузить область поиска параметров модели. Обоснование данного эксперимента стало возможным лишь в результате сочетания аналитических и численных методов исследования уравнений динамики популяций насекомых. При этом аналитический подход дал возможность проводить численный анализ в достаточно узкой области пространства параметров. Попасть в эту область, исходя лишь из общих соображений, не представляется возможным.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, асимптотика, устойчивость, ляпуновские показатели, динамика популяций насекомых

Для цитирования: Глызин С.Д., "Математическая модель эксперимента Николсона", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 365–386.

Об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия,
ведущий научный сотрудник, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия,
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

1.1. Описание эксперимента

В [1, 2] Николсоном опубликованы наблюдения над лабораторной популяцией австралийской зеленой падальной мухи. Из серии его опытов ниже рассматриваются два. При проведении этих опытов Николсон содержал мух в больших садках, в избытке обеспечивая их кормом (рубленая печень и сахар), так что они откладывали массу яиц. Для личинок же количество пищи было ограничено 25 или 50 граммами мяса на садок в день. (Мухи могли откладывать яйца на это мясо, но питаться им не могли). Через определенный срок мясо обследовали и подсчитывали число жизнеспособных куколок (мухи могли вылупляться из куколок, после чего их добавляли в садок). Каждые двое суток мух пересчитывали. На рис. 1, 2 воспроизведены графики численности мух из [1, 2] (в случае 2 A давалось 50 г мяса, а в случае 2 B — 25 г), а на рис. 3 приводится график численности жизнеспособных куколок, причем один из графиков (3 A) соответствует ситуации, изображенной на рис. 2 A, а второй график отражает эксперимент, в котором постоянно уничтожается 99 % взрослых мух. К сожалению, в данных статьях нет соответствующих графикам числовых таблиц. Кроме того, неизвестны начальные условия опытов (тем самым неизвестны начальные условия соответствующих дифференциальных уравнений). Ясно, однако, что внутривидовая конкуренция шла на стадии личинок, поскольку мух в пище не ограничивали. Отметим, что и в природе внутривидовая борьба наиболее жестко протекает именно среди личинок. Это обстоятельство в некотором смысле сближает данную популяцию с природными. Эксперимент Николсона — единственный в своем роде по продолжительности (несколько лет) и аккуратности проведения. Удачный выбор популяции со сравнительно коротким жизненным циклом позволил проследить за большим количеством колебаний численности. Чистота эксперимента делает его весьма привлекательным для моделирования. Тем более, что удовлетворительного объяснения особенностей экспериментальных графиков, несмотря на многочисленные попытки (см., например, [3, 4]), нет. Таким образом возникает задача построения математической модели процесса. Для этого выберем соответствующие динамические уравнения.

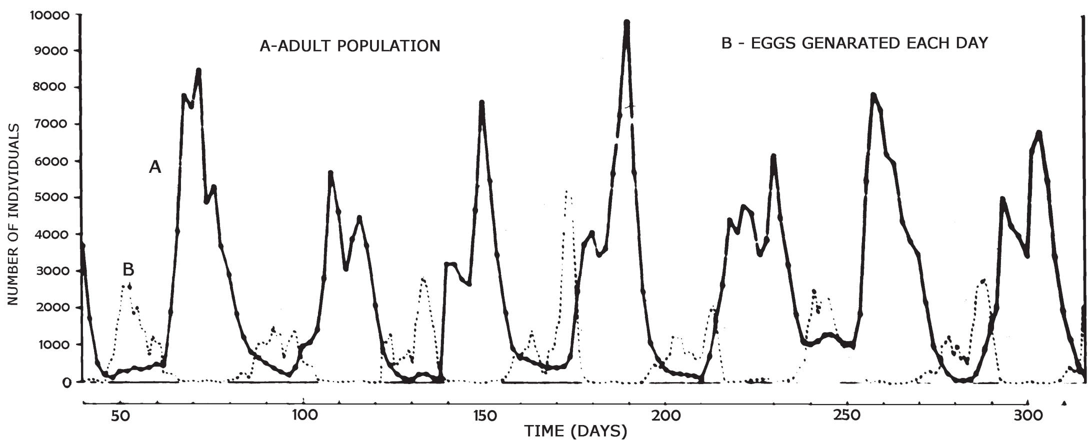


Рис. 1. Популяция *Lucilia cuprina* (взрослые насекомые ограничены 0.5 г печени в день, приводится по [1]). A — численность взрослых особей; B — число откладываемых каждый день яиц

Fig.1. A population of *Lucilia cuprina* governed by the daily supply of 0.5 g of ground liver for the adults (taken from [1]). A is the observed adult population; and in B the number of eggs generated each day

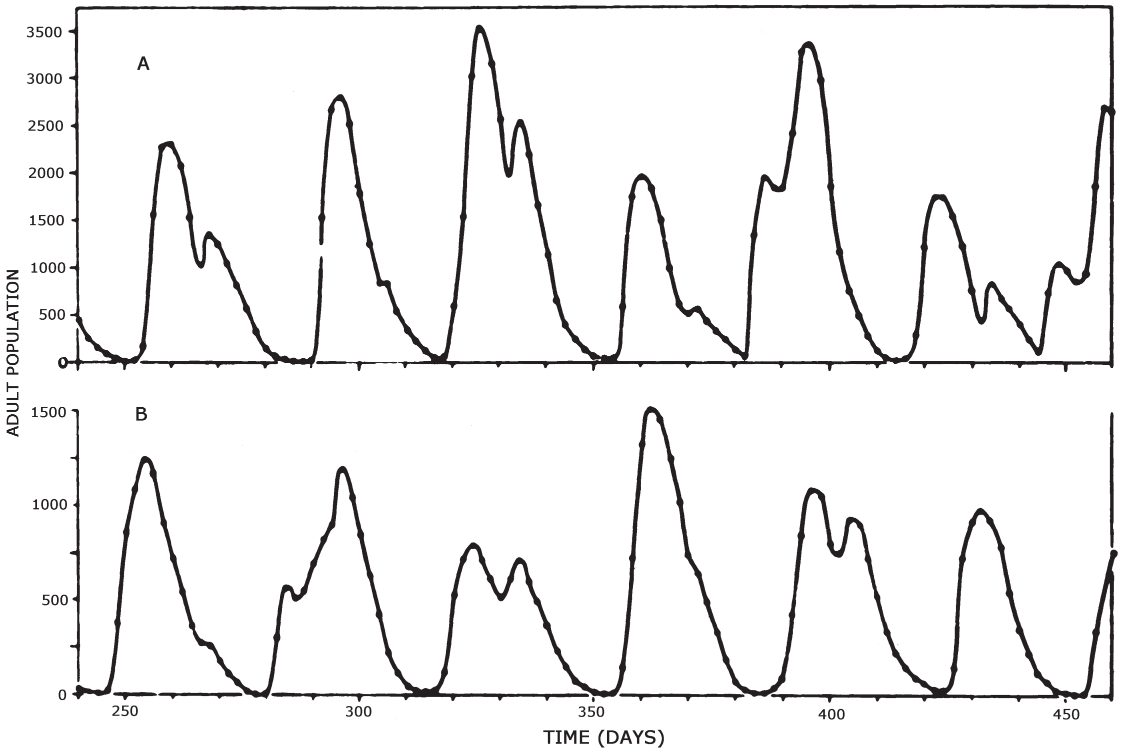


Рис. 2. Численность взрослых особей популяции *Lucilia cuprina* (личинки ограничены в пище, а взрослые насекомые — нет, приводится по [1]).
A — предлагается 50 г печени в день, B — 25 г в день
Fig. 2. Adult populations of *Lucilia cuprina* governed by the supply of meat for the larvae — excess ground liver, water, and sugar being supplied for the adults. In A 50 g of larval food, and in B only 25 g was supplied (taken from [1])

1.2. Динамические уравнения

В ряде работ [5–9] развит единый подход к проблеме моделирования динамики численности насекомых. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1 \left[1 - a \left(1 - \frac{N_2(t-h_1)}{k_2} \right) - \frac{N_1(t-h_2)}{k_1} \right] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2 \left[\frac{N_1(t-(2T-h_1-h_2))}{k_1} - \frac{N_2}{k_2} \right] N_2, \end{aligned} \tag{1}$$

описывающую колебания численности некоторой популяции насекомых. Здесь $N_1 = N_1(t)$ — количество взрослых насекомых, $N_2 = N_2(t)$ — личинок, h_1 — время между появлением личинок и имаго, $T - h_1$ — время между появлением имаго и личинок, T — продолжительность жизненного цикла, h_2 — среднее время жизни имаго в течение одной генерации, k_1 и k_2 — средние численности имаго и личинок соответственно, параметр $a < 1$ характеризует глубину связи популяций имаго и личинок, величина $r_1(1-a)$ — мальтузианский коэффициент линейного роста, параметр r_2 — определяется по скорости появления личинок (во многих приложениях r_2 велико).

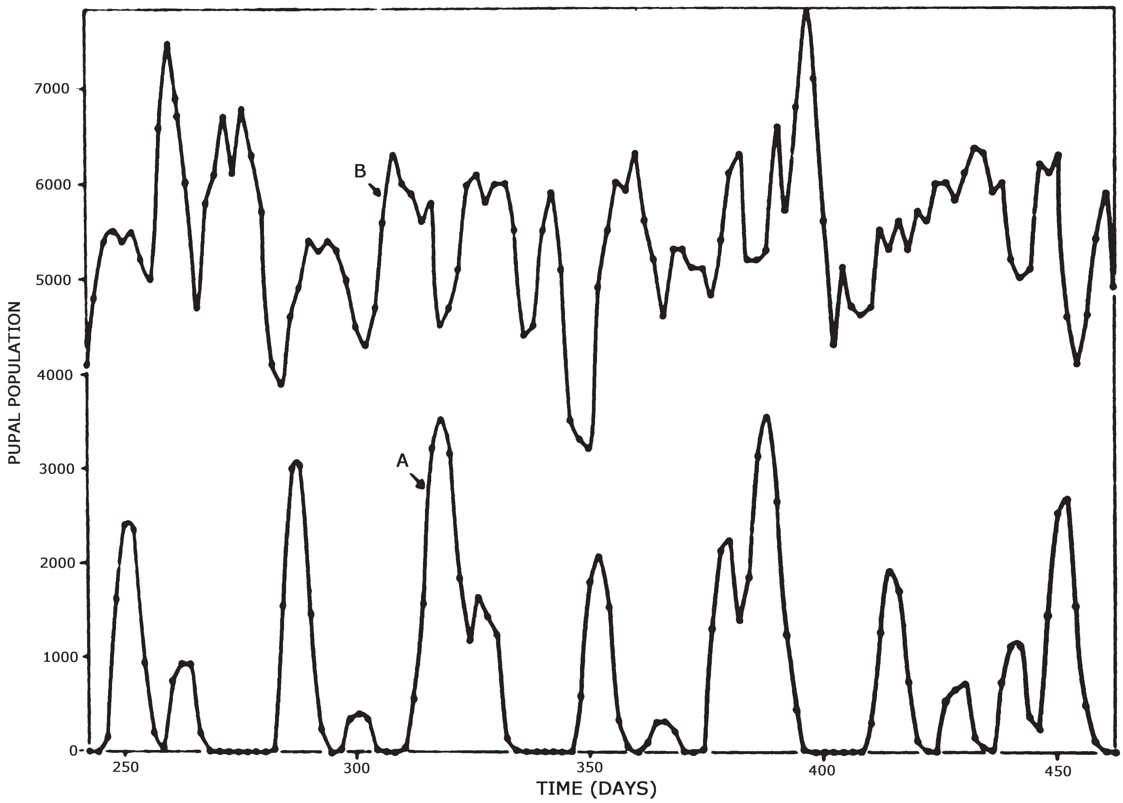


Рис. 3. Численность жизнеспособных куколок (приводится по [1]).
A. Условия эксперимента те же, что и в случае 2 A;
B. Условия эксперимента аналогичны A, за тем исключением, что каждый день уничтожались 99 % взрослых насекомых популяции
Fig. 3. A. the population of viable pupae in the same culture as in Figure 2A;
B. the population of viable pupae in a concurrent culture similar in all respects to A except that 99 per cent of the adults emerging each day were destroyed (taken from [1])

Рассмотрим также несколько более простое уравнение, возникающее из системы (1) при $r_2 \to \infty$. В этом случае задача сводится к дифференциальному уравнению с двумя запаздываниями вида

$$\dot{N} = r\Big[1 - a\big(1 - N(t - (2T - h))\big) - N(t - h)\Big]N, \tag{2}$$

где $N = \dfrac{N_1}{k_1}$, $r = r_1$, $h = h_2$, $\dfrac{N_2}{k_2} = N(t - (2T - h_1 - h_2))$.

Систему (1) и уравнение (2) будем применять для моделирования эксперимента Николсона. При этом возникает задача выбора параметров модели. Учитывая биологический смысл этих величин, можно найти их приближенные значения. Однако такие оценки оставляют ещё чрезмерную свободу выбора и нуждаются в уточнении. Для локализации параметров определим условия существования подходящих стационарных режимов (2) (критерий — хорошее совпадение с экспериментальными графиками).

Сформулируем основные результаты, полученные на этом пути.

1.3. Основные результаты

Выбранную модель следует признать удачной, если её поведение соответствует экспериментальным результатам, а параметрам этих уравнений придан четкий биологический смысл. В соответствии с данными требованиями сделаны априорные оценки параметров системы (1), которые затем уточнялись с помощью аналитических методов, наконец, обширный численный анализ позволил выбрать такие значения параметров, при которых решения (1) или (2) близки к экспериментальным.

Основным результатом локального анализа следует считать доказательство существования (при значениях параметров близких к критическим) устойчивых двухчастотных колебаний модельных уравнений. Обоснование этого утверждения содержится в разделе 2.

При дальнейшем изменении бифуркационного параметра двухчастотные решения перестраиваются в более сложные колебательное режимы, изучить которые удается только численно. Построена зависимость старшего ляпуновского показателя аттрактора системы при изменении этого параметра. Как оказалось, эта зависимость содержит участки, на которых старший ляпуновский показатель отделен от нуля. Наличие такого промежутка означает, что для значений бифуркационного параметра в нем в пределах точности вычислений не удается получить таких точек, где исследуемая система имеет периодические или квазипериодические решения. Тем самым, при достаточно малых возмущениях задача будет иметь аттрактор с близкими свойствами. Исходя из этого обстоятельства, удалось дополнительно уточнить параметры задачи.

Приведенные в третьей части графики решений и качественнее свойства модели позволяют утверждать, что получено удовлетворительное теоретическое объяснение эксперимента Николсона.

2. Локальный анализ модели

2.1. Анализ характеристического уравнения

В эксперименте Николсона колебания численности мух немного напоминают двухчастотный режим, у которого составляющая с большей частотой имеет существенно меньшую амплитуду, поэтому при аналитическом исследовании (2) будем особенно интересоваться двухчастотными колебаниями.

Выполним в (2) замену $t \to (2T-h)t$ и обозначим $h(2T-h)^{-1}$ снова через h, а $r(2T-h)$ — через r. В результате уравнение (2) преобразуется к более удобному виду

$$\dot N = r\big[1 - a(1 - N(t-1)) - N(t-h)\big]N. \tag{3}$$

Отметим, что в статье [10] анализируется уравнение Хатчинсона с учетом нескольких возрастных групп. Уравнение (3) имеет схожую с ним структуру, однако области, из которых выбираются параметры этих двух задач, существенно отличаются, что влечет существенные отличия и в динамических свойствах моделей.

Характеристическим квазимногочленом уравнения (3), линеаризованного на состоянии равновесия $N = 1$, является

$$P(\lambda) = \lambda + r(e^{-\lambda h} - ae^{-\lambda}). \tag{4}$$

Полагая $\lambda = i\omega$, получаем

$$\varphi(\omega) \equiv \cos\omega h - a\cos\omega = 0, \tag{5}$$

$$r = r(\omega) \equiv \omega\big(\sin\omega h - a\sin\omega\big)^{-1}. \tag{6}$$

Пусть $\varphi(\omega_0) = 0, r = r(\omega_0) + \varepsilon, \lambda = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)$, где $\tau(0) = 0, \omega(0) = \omega_0$. Положим

$$\operatorname{sign}\tau_0' = -\operatorname{sign}\varphi'(\omega_0), \ \Big(\tau_0' = \frac{d}{d\varepsilon}\tau(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}\Big). \tag{7}$$

Далее, пусть $\omega_j, j = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (5), занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратности. Из (7) следует, что числа $\pm i\omega_j$ в случае нечетных j при увеличении r приходят из левой полуплоскости, а в случае четных — из правой. Кроме того, при любых фиксированных a, h и при достаточно малом r все корни характеристического квазимногочлена (4) лежат слева от мнимой оси.

Следующее утверждение позволяет узнать, сколько пар корней может одновременно находиться на мнимой оси.

Лемма 1. *Пусть параметр $h > 0$ достаточно мал, тогда существует счетное число таких значений $a_k(h)$, $r_k(h)$, $k = 1, 2, \dots$, что при $a = a_k(h)$ и $r < r_k(h)$ корни характеристического квазимногочлена (4) лежат в левой комплексной полуплоскости, а при $r = r_k(h)$ две пары корней $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ выходят на мнимую ось.*

Кроме того, имеют место асимптотические формулы

$$a_k(h) = 1 - \frac{16\pi^4}{3}k^2(k+1)^2h^4 + O(h^5), \tag{8}$$

$$r_k(h) = \frac{1}{2h}\Big[1 + \frac{2\pi^2}{3}(2k^2 + 2k + 1)h^2 + O(h^3)\Big], \tag{9}$$

$$\omega_1(h) = 2\pi k\Big[1 - h + h^2 + \frac{4\pi^2(k+1)^2 - 3}{3}h^3 + O(h^4)\Big], \tag{10}$$

$$\omega_2(h) = 2\pi(k+1)\Big[1 - h + h^2 + \frac{4\pi^2k^2 - 3}{3}h^3 + O(h^4)\Big], \tag{11}$$

где $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Согласно (6) имеем

$$r = \frac{\omega_1}{\sin\omega_1 h - a\sin\omega_1} = \frac{\omega_2}{\sin\omega_2 h - a\sin\omega_2}. \tag{12}$$

Подставляя в (5) и во второе из равенств (12) асимптотические разложения по h для a, ω_1 и ω_2 и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получаем (8), (10), (11). Кроме того, из первого равенства (12) можно получить разложение (9) для $r_k(h)$. Отметим, что $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (5) (каждому номеру k соответствуют два решения (5)). Такой выбор корней (5) обусловлен тем, что значение $r_k(h)$ для них минимально. Таким образом, найденные корни квазимногочлена (4) $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ первыми пересекают мнимую ось, что и доказывает лемму.

Рассмотрим теперь условия, при которых вырожденные кривые $a = a_k(h)$ могут прерваться. Выше уже отмечалось, что $\omega_{k1}(h)$ и $\omega_{k2}(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (5). Понятно, что при некоторых значениях h нечетное и четное решения (5) могут совпадать, и $\omega_{k1}(h)$ становится в этом случае кратным корнем. При увеличении h соответствующий корень $\omega_{k1}(h)$ перестает существовать. Таким образом, для определения крайних точек описанных кривых можно воспользоваться системой уравнений

$$\varphi(\omega_1) = 0, \quad \varphi(\omega_2) = 0, \quad r(\omega_1) = r(\omega_2), \tag{13}$$

дополненной уравнением, отвечающим за кратность корня ω_1

$$\varphi'(\omega_1) = -h\sin\omega_1 h + a\sin\omega_1 = 0. \tag{14}$$

После несложных преобразований системы (13) и уравнения (14) для отыскания k-й крайней точки получаем систему

$$\begin{aligned} &\cos\omega_2 h - a\cos\omega_2 = 0,\\ &\omega_2(\sin\omega_1 h - a\sin\omega_1) = \omega_1(\sin\omega_2 h - a\sin\omega_2),\\ &\omega_1 = 2\pi k - \arccos\left[\sqrt{\frac{a^2-h^2}{a^2(1-h^2)}}\right],\\ &h\omega_1 = \arccos\left[\sqrt{\frac{a^2-h^2}{1-h^2}}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

которая легко решается численно. В таблице 1 приведены координаты конечных точек первых четырех нейтральных кривых, вычисленные в соответствии с (15).

Таблица 1

номер кривой	h	a	r	ω_1	ω_2
1	0.1868	0.3401	8.7832	6.8369	9.9785
2	0.1069	0.1975	14.9093	13.1290	16.2706
3	0.0749	0.1389	21.1311	19.4144	22.5560
4	0.0576	0.1070	27.3812	25.6984	28.8400

Предполагая k достаточно большим, нетрудно получить асимптотические формулы для координат таких точек.

Лемма 2. *Пусть k — номер нейтральной кривой на плоскости параметров a, h, тогда для конечных точек этих кривых, при достаточно большом k, выполнены следующие асимптотические формулы:*

$$a_k = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{8k}\left(1 - \frac{\pi + 2\omega_*}{4\pi k} + O(k^{-2})\right), \tag{16}$$

$$h_k = \frac{1}{4k} - \frac{\pi + 2\omega_*}{16\pi k^2} + \left(\frac{\pi + 2\omega_0}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{k^3} + O(k^{-4}), \tag{17}$$

где $\omega_* = \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\pi}\right]$, $k = 1, 2, \ldots$ *При этом для* ω_1, ω_2, r *выполнено*

$$\omega_{k1} = 2\pi k + \omega_* + O(k^{-2}), \tag{18}$$

$$\omega_{k2} = (2k+1)\pi + \omega_* + O(k^{-2}), \tag{19}$$

$$r_k = 2\pi k + \frac{\pi}{2} + \omega_* + \frac{\pi^3}{64k} + O(k^{-2}). \tag{20}$$

Доказательство. Для доказательства утверждения в формулы (15) подставим разложения величин a, h, ω_1, ω_2 в ряды по k и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Разложение для r получается после подстановки асимптотик для a, h, ω_1, ω_2 в формулу (6).

С помощью полученных утверждений удается ответить на вопрос о характере потери устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (3).

Теорема 1. *Потеря устойчивости состояния равновесия* $N = 1$ *уравнения* (3) *не может происходить так, чтобы на мнимой оси находились три пары, а при наличии двух пар не может быть младших резонансов.*

На рис. 4 показаны первые четыре нейтральные кривые, для значений параметров a и h, на которых квазимногочлен (4) имеет две пары чисто мнимых корней (окончания кривых отмечены жирными точками, а их координаты соответствуют таблице 1). В соответствии с утверждениями лемм 1, 2 таких кривых имеется счетное число, причем для каждой из них $a \to 1$ при $h \to 0$. При малых h кривые $a_k = a_k(h)$ не пересекаются в силу соотношения (8) леммы 1. Наличие оценок крайних точек кривых, численных для $k = 1, 2, 3, 4$ (см. таблицу 1) и аналитических для достаточно больших k (см. формулы (16), (17)) позволяет утверждать, что кривые не пересекаются при всех h, для которых определена каждая из них.

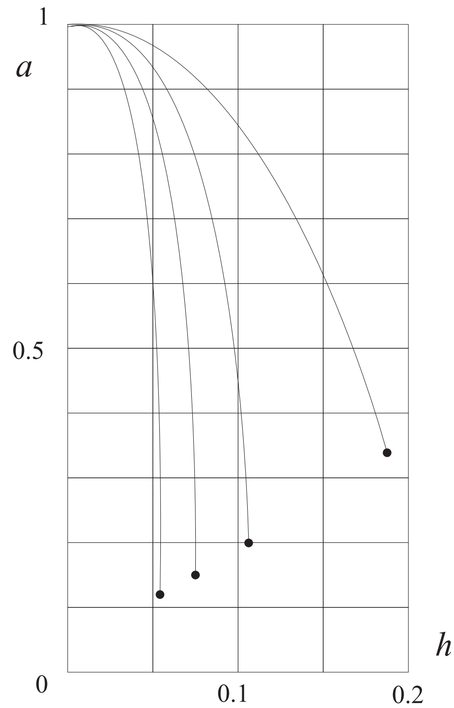


Рис. 4. Нейтральные кривые
Fig. 4. Neutral curves

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть a, h принадлежат одной из построенных выше кривых. Обозначим через $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ корни квазиполинома (4) и проверим отсутствие старших резонансов (1:1, 1:2, 1:3).

Предположим, что имеет место резонанс 1:1, т.е. $i\omega = i\omega_1 = i\omega_2$ — корень кратности два. В этом случае в дополнение к (5), (6) должны выполняться равенства

$$\varphi'(\omega) = 0, \; r(h\cos\omega h - a\cos\omega) = 1. \tag{21}$$

Имеем
$$\varphi''(\omega) = (1-h^2)\cos\omega h. \tag{22}$$
Далее, так как $r>0$, а $0<h<1$, то из (5) и второго равенства (21) следует, что $\cos\omega h<0$. Тем самым, в силу (23), имеем $\varphi'(\omega)<0$. Это означает, что ω — корень (5) с четным номером. Согласно (7) отсюда следует, что при прохождении r через $r(\omega)$ корни из правой полуплоскости подходят к мнимой оси, касаются ее и при дальнейшем увеличении r снова уходят вправо. Поэтому существует такое $r<r(\omega)$, что пара корней (4) находится на мнимой оси. Получили противоречие.

Предположим теперь, что $2\omega_1=\omega_2$. Из (5) имеем
$$a\cos\omega_1 = \cos\omega_1 h, \quad a\cos 2\omega_1 = \cos 2\omega_1 h. \tag{23}$$
Так как $\cos 2\omega_1 = 2\cos^2\omega_1 - 1$, то из (23) следует, что $2a(1-a)\cos^2\omega_1 = -(1-a)$. Пришли к противоречию.

Невозможность резонанса 1:3 доказывается также от противного. Предположим, что $3\omega_1=\omega_2$. Из (5) легко выходит, что
$$4a(1-a^2)\cos^3\omega_1 = 0,$$
учитывая, что $0<a<1$, получаем $\cos\omega_1=0$, а значит, и $\cos\omega_1 h=0$, т.е. $\omega_1 = \pi/2+\pi n$ и $\omega_1 h = \pi/2+\pi m$. Принимая во внимание равенство (6) для ω_1 и ω_2, получаем
$$r(\omega_1) = \frac{\pi(2n+1)}{2((-1)^m - a(-1)^n)}, \quad r(3\omega_1) = \frac{3\pi(2n+1)}{2((-1)^{m+1} - a(-1)^{n+1})}. \tag{24}$$

Очевидно, что заданные соотношениями (24) величины $r(\omega_1)$ и $r(3\omega_1)$ имеют разные знаки, что противоречит положительности параметра r.

Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

2.2. Анализ нелинейного уравнения

Выполняя в уравнении (3) замену $N=1+n$, получаем
$$\dot n = -r(n(t-h) - an(t-1))(1+n). \tag{25}$$

Считая, что
$$r = r_0+\varepsilon_1,\ a = a_0+\varepsilon_2, \tag{26}$$
выполним в (25) замену
$$\begin{gathered} n(t,\varepsilon) = \xi_1\cos\omega_1\tau_1(t) + \xi_2\cos\omega_2\tau_2(t) + \varepsilon_1\xi_1U_1(\tau_1) + \varepsilon_2\xi_2U_2(\tau_2) + \\ +\varepsilon_2\xi_1W_1(\tau_1) + \varepsilon_1\xi_2W_2(\tau_2) + \xi_1\xi_2U_3(\tau_1,\tau_2) + \xi_1^2U_4(\tau_1) + \xi_2^2U_5(\tau_2) + \\ +\xi_1^3U_6(\tau_1) + \xi_2^3U_7(\tau_2) + \xi_1\xi_2^2U_8(\tau_1,\tau_2) + \xi_1^2\xi_2U_9(\tau_1,\tau_2)\,, \end{gathered} \tag{27}$$
приводящую к укороченной нормальной форме вида
$$\begin{aligned} \dot\xi_1 &= (a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2)\xi_1 + (\varphi_{11}\xi_1^2 + \varphi_{12}\xi_2^2)\xi_1, \\ \dot\xi_2 &= (a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2)\xi_2 - (\varphi_{21}\xi_1^2 + \varphi_{22}\xi_2^2)\xi_2, \\ \dot\tau_1 &= 1 + b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2 + c_{11}\xi_1^2 + c_{12}\xi_2^2, \\ \dot\tau_2 &= 1 + b_{21}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2 + c_{21}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2, \end{aligned} \tag{28}$$

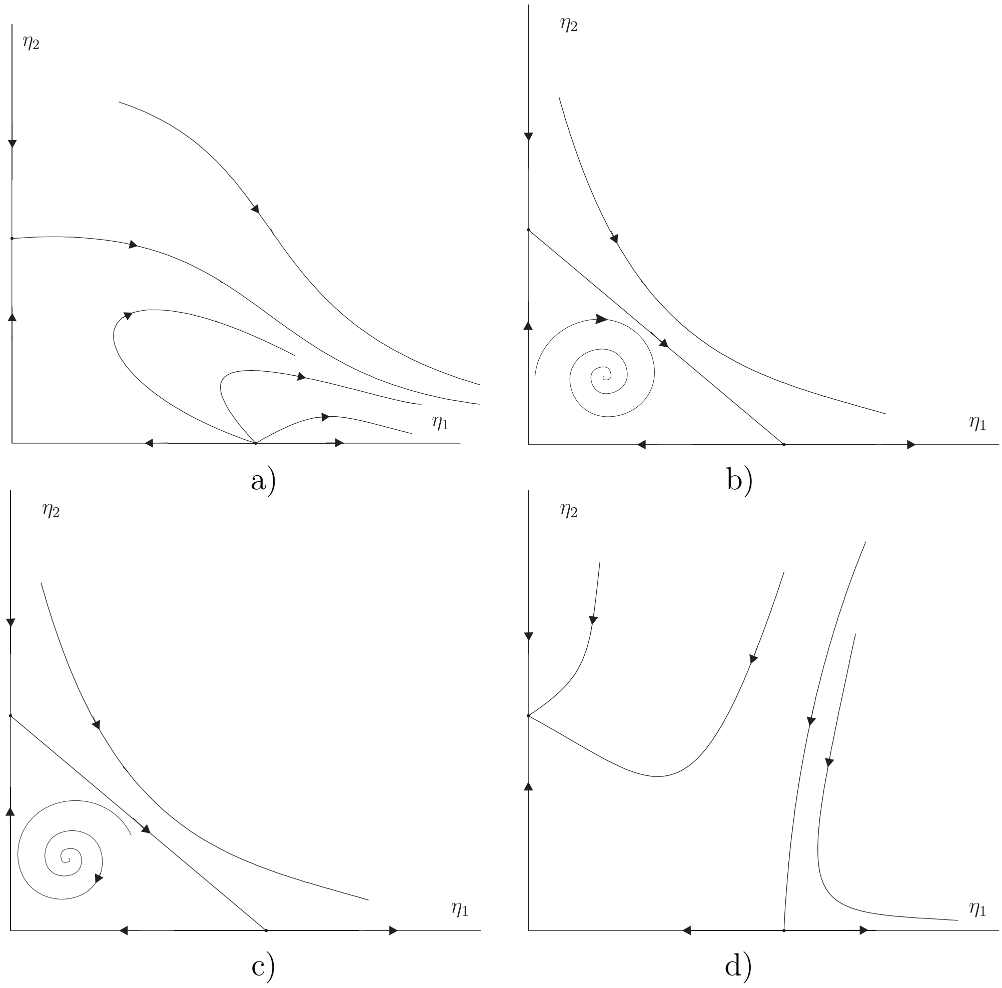


Рис. 5. Фазовые портреты системы (29)
Fig 5. Phase portraits of the system (29)

где

$$a_{11} = \frac{\omega_1\alpha_2(\omega_1)}{r_0(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))}, \quad a_{12} = \frac{1}{a_0(1-h)}\left[1-\frac{\alpha_1(\omega_1)+\alpha_2(\omega_1)\omega_1 h}{\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1)}\right],$$

$$a_{21} = \frac{\omega_2\alpha_2(\omega_2)}{r_0(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2))}, \quad a_{22} = \frac{1}{a_0(1-h)}\left[1-\frac{\alpha_1(\omega_2)+\alpha_2(\omega_2)\omega_2 h}{\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2)}\right],$$

$$\varphi_{11} = -\frac{\omega_1\left[\alpha_1(\omega_1)\gamma_1(2\omega_1)+\alpha_2(\omega_1)(1+\gamma_2(2\omega_1))\right]}{4(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1)},$$

$$\varphi_{12} = -\frac{\omega_1}{2(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))}\Big[\alpha_1(\omega_1)\gamma_1(\omega_1+\omega_2)+\gamma_1(\omega_1-\omega_2)+$$
$$+\alpha_2(\omega_1)(\gamma_2(\omega_1+\omega_2)+\gamma_2(\omega_1-\omega_2)+1)\Big],$$

$$\varphi_{21}=\frac{\omega_2}{2(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2))}\Big[\alpha_1(\omega_2)\gamma_1(\omega_1+\omega_2)-\gamma_1(\omega_1-\omega_2)+ \\ +\alpha_2(\omega_2)(\gamma_2(\omega_1+\omega_2)+\gamma_2(\omega_1-\omega_2)+1)\Big],$$

$$\varphi_{22}=\frac{\omega_2\big[\alpha_1(\omega_2)\gamma_1(2\omega_2)+\alpha_2(\omega_2)(1+\gamma_2(2\omega_2))\big]}{4(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2)},$$

$$b_{11}=\frac{\alpha_1(\omega_1)}{r_0(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))},\quad b_{12}=\frac{\alpha_2(\omega_1)-\alpha_1(\omega_1)\omega_1 h}{\omega_1 a_0(1-h)(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))},$$

$$b_{21}=\frac{\alpha_2(\omega_2)-\alpha_1(\omega_2)\omega_2 h}{\omega_2 a_0(1-h)(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2))},\quad b_{22}=\frac{\alpha_1(\omega_2)}{r_0(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2))},$$

$$c_{11}=\frac{\alpha_2(\omega_1)\gamma_1(2\omega_1)-\alpha_1(\omega_1)(1-\gamma_2(2\omega_1))}{4(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))},\ c_{22}=\frac{\alpha_2(\omega_2)\gamma_1(2\omega_2)-\alpha_1(\omega_2)(1-\gamma_2(2\omega_2))}{4(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2)},$$

$$c_{12}=\frac{1}{2(\alpha_1^2(\omega_1)+\alpha_2^2(\omega_1))}\Big[\alpha_2(\omega_1)\gamma_1(\omega_1+\omega_2)+\gamma_1(\omega_1-\omega_2)- \\ -\alpha_1(\omega_1)(1+\gamma_2(\omega_1+\omega_2)+\gamma_2(\omega_1-\omega_2))\Big],$$

$$c_{21}=\frac{1}{2(\alpha_1^2(\omega_2)+\alpha_2^2(\omega_2))}\Big[\alpha_2(\omega_2)\gamma_1(\omega_1+\omega_2)-\gamma_1(\omega_1-\omega_2)- \\ -\alpha_1(\omega_2)(1+\gamma_2(\omega_1+\omega_2)+\gamma_2(\omega_1-\omega_2))\Big].$$

В перечисленных формулах используются следующие обозначения:

$$\alpha_1(\omega)=1+r_0(1-h)\cos\omega h,\ \alpha_2(\omega)=\omega-r_0(1-h)\sin\omega h,$$

$$\beta_1(\omega)=\omega+r_0(a_0\sin\omega-\sin\omega h),\ \beta_2(\omega)=r_0(a_0\cos\omega-\cos\omega h),$$

$$\gamma_1(\omega)=-\frac{\omega\beta_2(\omega)}{2(\beta_1^2(\omega)+\beta_2^2(\omega))},\ \gamma_2(\omega)=-\frac{\omega\beta_1(\omega)}{2(\beta_1^2(\omega)+\beta_2^2(\omega))}.$$

Считаем, что $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=\alpha\varepsilon$, где α — некоторое число. Выполним в (28) нормирующие замены $\xi_j=\sqrt{\varepsilon}\eta_j$, $t=\varepsilon^{-1}t$ и рассмотрим уравнения для медленных переменных

$$\begin{aligned}\dot\eta_1&=-b_1\eta_1+(\varphi_{11}\eta_1^2+\varphi_{12}\eta_2^2)\eta_1,\\ \dot\eta_2&=b_2\eta_2-(\varphi_{21}\eta_1^2+\varphi_{22}\eta_2^2)\eta_2,\end{aligned}\tag{29}$$

где $b_1=-a_{11}-\alpha a_{12}$, $b_2=a_{21}+\alpha a_{22}$.

В силу симметрии в дальнейшем будем рассматривать поведение системы (29) только в первом квадранте фазовой плоскости. Анализ системы (29) приведен, например, в книге [11], поэтому ограничимся здесь лишь формулировкой основных результатов.

Пусть

$$\Delta_1=b_1\varphi_{22}-b_2\varphi_{12},\ \Delta_2=b_2\varphi_{11}-b_1\varphi_{21},\ \Delta=\varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}\varphi_{21},\ \alpha_1=-\frac{a_{11}}{a_{12}},$$

$$\alpha_2 = -\frac{a_{21}\varphi_{11} + a_{11}\varphi_{21}}{a_{22}\varphi_{11} + a_{12}\varphi_{21}}, \quad \alpha_3 = -\frac{a_{11}\varphi_{22}(\varphi_{11} + \varphi_{21}) + a_{12}\varphi_{11}(\varphi_{22} + \varphi_{12})}{a_{21}\varphi_{22}(\varphi_{11} + \varphi_{21}) + a_{22}\varphi_{11}(\varphi_{22} + \varphi_{12})},$$
$$\alpha_4 = -\frac{a_{11}\varphi_{22} + a_{21}\varphi_{12}}{a_{12}\varphi_{22} + a_{22}\varphi_{12}}, \quad \alpha_5 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Числа $a_{i,j}$ и $\varphi_{i,j}$, $(i,j = 1,2)$ системы (29) при a, h, принадлежащих построенным на рис. 4 кривым и соответствующим им r_0, ω_1, ω_2 — положительны. Кроме того, $\Delta < 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$.

Предположим, что

$$\alpha_1 > \alpha > \alpha_5, \; b_j > 0, \; j = 1, 2,$$

тогда система (29) имеет состояния равновесия

$$(0,0), \left(0, \sqrt{\frac{b_1}{\varphi_{11}}}\right), \left(\sqrt{\frac{b_2}{\varphi_{22}}}, 0\right).$$

При $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$ фазовый портрет (29) имеет вид, показанный на рис. 5 a) (на фазовой плоскости нет устойчивых стационарных режимов). Это означает, что потеря устойчивости состоянием равновесия происходит жестко, а устойчивые режимы возникают нелокально.

В случае $\alpha_2 > \alpha > \alpha_4$ система (29) имеет еще одно состояние равновесия (η_{10}, η_{20}), где $\eta_{10} = \sqrt{\Delta_1 \Delta^{-1}}$, $\eta_{20} = \sqrt{\Delta_2 \Delta^{-1}}$, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$. Это состояние равновесия ответвляется от $(0, \sqrt{b_1 \varphi_{11}^{-1}})$ и устойчиво, пока $\alpha_2 > \alpha > \alpha_3$ (рис. 5 b)). В дальнейшем оно теряет устойчивость (см. рис. 5 c)), а затем при $\alpha = \alpha_4$ сливается с состоянием равновесия $(\sqrt{b_2 \varphi_{22}^{-1}}, 0)$. При $\alpha_4 > \alpha > \alpha_5$ фазовый портрет системы (29) изображен на рис. 5 d).

Как видно из нормирующей замены, состояния равновесия, расположенные на координатных осях, соответствуют $2\pi/\omega_j$-периодическим решениям уравнения (27), а состояние равновесия (η_{10}, η_{20}) — двухчастотным колебаниям со следующей асимптотикой:

$$n(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\eta_{10}\cos\omega_1\tau_1 + \sqrt{\varepsilon}\eta_{20}\cos\omega_2\tau_2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon\eta_{10}^2\Big[\gamma_1(2\omega_1)\sin 2\omega_1\tau_1) +$$
$$+ \gamma_2(2\omega_1)\cos 2\omega_1\tau_1\Big] - \frac{1}{2}\varepsilon\eta_{20}^2\Big[\gamma_1(2\omega_2)\sin 2\omega_2\tau_2 + \gamma_2(2\omega_2)\cos 2\omega_2\tau_2\Big] -$$
$$- \varepsilon\eta_{10}\eta_{20}\Big[\gamma_1(\omega_1+\omega_2)\sin(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2) + \gamma_2(\omega_1+\omega_2)\cos(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2) +$$
$$+ \gamma_1(\omega_1-\omega_2)\sin(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2) + \gamma_2(\omega_1-\omega_2)\cos(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)\Big] + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где

$$\tau_1 = t(1 + (b_{11} + \alpha b_{12} + c_{11}\eta_{10}^2 + c_{12}\eta_{20}^2)\varepsilon) + \varphi_1,$$
$$\tau_2 = t(1 + (b_{21} + \alpha b_{22} + c_{21}\eta_{10}^2 + c_{22}\eta_{20}^2)\varepsilon) + \varphi_2,$$

а φ_1 и φ_2 — начальные фазы.

В дальнейшем будет нужен двухчастотный режим с фоновой второй частотой (мало отношение η_{20} к η_{10}). Непосредственные вычисления показывают, что для этого a_0 и h следует взять вблизи нижнего конца первой кривой вырождения (см. рис. 4 и таблицу 1), а значение α — близким к α_3.

2.3. Некоторые свойства двух уравнений

Перейдем к системе (1). Выполняя в ней нормирующие замены

$$\frac{N_j}{K_j} \to N_j,\ j = 1, 2\,,\ t \to 2Tt\,,$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1\big[1 - a\,(1 - N_2(t - h_1)) - N_1(t - h_2)\big]N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2\big[N_1(t - (1 - h_1 - h_2)) - N_2\big]N_2, \end{aligned} \tag{30}$$

где $2Tr_j,\ \ h_j/(2T),\ \ j = 1, 2$ обозначены снова через $r_j,\ h_j$. Линеаризуем систему (30) на состоянии равновесия $N_1 = N_2 = 1$. Затем составим характеристическое уравнение и положим в нем $\lambda = i\omega$. В результате выйдут два равенства

$$\varphi(\omega) \equiv \left[1 + \left(\frac{\omega_*}{r_2^*}\right)^2\right]\cos\omega_* h - a\left(\cos\omega_* - \frac{\omega_*}{r_2^*}\sin\omega_*\right) = 0, \tag{31}$$

$$r_1^* = r(\omega) \equiv \frac{\omega_*^2}{r_2^*(\cos\omega_* h - a\cos\omega_*) + \omega_*\sin\omega_* h}\,, \tag{32}$$

где $\omega_* = (1 - h_2)\omega$, $h = h_2/(1 - h_2)$, $r_j^* = (1 - h)r_j,\ j = 1, 2\,.$

При $r_2 \to \infty$ система (31) – (32) сводится к (5) – (6). В системе (31) – (32) фиксируем r_2^*, а затем действуем, как и в предыдущем пункте, т.е. строим в плоскости a, h кривые наибольшего вырождения. При достаточно большом r_2^* эти кривые близки к изображенными на рис. 4. При уменьшении r_2^* они приподнимаются и начинают пересекать прямую $a = 1$ (см. рис. 6, на котором показан случай $r_2^* = 15$). Основной результат заключается в том, что, как и ранее, при любом h эти кривые не пересекаются друг с другом и отсутствуют младшие резонансы. Кроме того, сравнивая рис. 4 и рис. 6, убеждаемся, что за счет учета второго уравнения расширяется область существования периодических режимов.

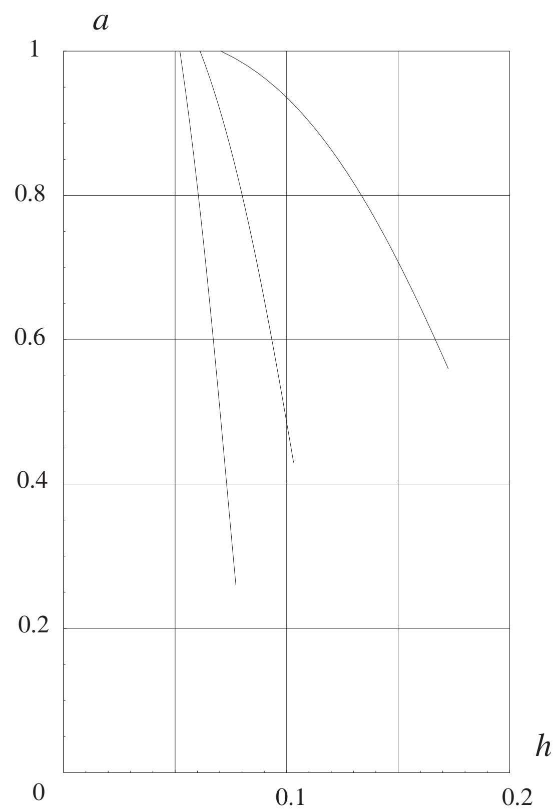


Рис. 6. Нейтральные кривые
Fig. 6. Neutral curves

Сформулированные результаты позволяют при численном исследовании системы (30) использовать факты, установленные при анализе уравнения (2). В частности, при уменьшении r_2 для получения интересующих режимов значения a следует увеличивать (остальные параметры можно фиксировать). В заключение параграфа отметим, что в случае близости параметра a к единице локальный анализ системы (1) выполнен в статье [7].

3. Теоретическое объяснение экспериментального результата Николсона

3.1. Обсуждение начальных данных и параметров модели

В развитии популяции мух хорошо заметны интенсивные осцилляции с высокими пиками и глубокими минимумами численности (см. рис. 1 – 3). Для моделирования этих колебаний будем использовать систему (1), предварительно определив числовые значения параметров и начальные условия. Сначала используем приведенные в [1, 2] факты. Минимальное время от яйца до яйца для данной популяции составляет примерно 16 суток, максимальная долговечность мух — 30 суток. В ситуации, когда популяция лимитировалась 50 граммами мяса, оказалось, что каждый день в среднем рождалось 4287 личинок и 220 мух. Средняя численность мух за время наблюдений равна 1498. Эти данные, не определяя параметры системы (1), позволяют сделать правдоподобные оценки. Среднее время жизни мух h_2 можно, по-видимому, принять примерно равным отношению средний численности к среднему числу появляющихся ежедневно мух, что составляет приблизительно 6.8 суток. Жизненный цикл T примерно равен 23 суткам, h_1 — 11 суткам. (Изменение h_1 в процессе численного анализа в пределах от 7 до 13 суток показало относительно слабую зависимость решений системы (1) от этого параметра.) В [6, 7] отмечалось, что значение параметра a, отражающего глубину связи популяций личинок и имаго, часто относительно близко к единице. В рассматриваемом эксперименте ситуация иная: жесткая конкуренция за пищу между личинками приводит к тому, что до стадии мух доходят лишь немногие. В связи с этим значение a должно быть небольшим. Правдоподобно допущение, что параметр a близок к отношению между средним числом рождающихся ежедневно имаго и личинок. Отсюда и из изложенного выше следует, что $a \approx 0.35$ (при численном анализе получены близкие значения a). Перейдем к определению значения мальтузианского коэффициента линейного роста. Используя приближенную формулу,

$$r_1(1-a) \approx \frac{1}{T} \ln pm,$$

в которой p — доля самок в популяции мух (в соответствии с [1] ее следует принять равной 0.5), а m — среднее число яиц, откладываемых одной мухой (в условиях эксперимента оно доходит до 100–200 штук), нетрудно получить оценку

$$3.9 < r_1 T(1-a) < 4.6. \qquad (33)$$

Параметр r_2, зависящий от скорости рождения личинок, определить сложно. В природных популяциях этот коэффициент вероятно велик по отношению к r_1. Возможно, однако, что в данном случае это не так: лабораторная популяция не должна приспосабливаться к сезонным изменениям внешней среды, а поэтому скорость рождения личинок может быть относительно r_1 невелика. В дальнейшем рассмотрим два случая: r_2 велико и r_2 сравнимо с r_1.

Перейдем к другому сложному вопросу, который касается выбора начальных условий. Разумно допущение, что эксперимент начался с нескольких экземпляров мух или личинок (в [1, 2] по этому поводу нет указаний). Тем самым, начальные функции можно положить нулевыми на всем промежутке, предшествующем нулевому моменту времени, а в нуле — равными нескольким сотым от средней численности мух или личинок.

3.2. Численный анализ одного уравнения

Предположим, что значение r_2 велико. Тогда, как уже отмечалось, система (1) сводится к уравнению (2). Выполняя в (2) несколько отличные от нормировок пункта 2 замены

$$t \to 2Tt,\ h = 2Th_*,\ r = r_*/(2T), \tag{34}$$

получаем уравнение

$$\dot{N} = r_*\big[1 - a(1 - N(t - (1 - h_*))) - N(t - h_*)\big]N. \tag{35}$$

Замены (34) являются более естественными для численного анализа уравнения (35), поскольку время теперь измеряется в жизненных циклах популяции.

Значения параметров уравнения (35) пока заданы в широких пределах. Для их уточнения привлечем результаты предыдущих параграфов. Действительно, колебания численности мух немного напоминают двухчастотный режим с ведущей первой частотой (см. рис. 1 – 3). Учитывая это обстоятельство и действуя, как указано в 2, имеем $a \approx 0.393$, $h_* \approx 0.152$, $r_0 \approx 8.2$, $\alpha \approx 0.0425$ (полученное значение h_* соответствует h_2, равному примерно 7 суткам). Затем, выбирая r_* в соответствии с (33), по формулам (26) находим значения ε и a. Тем самым, все параметры (35) удалось приближенно определить. Полученные числа являются, конечно, лишь отправной точкой дня последующего численного анализа, поскольку априори невозможно что-либо сказать о применимости результатов локального анализа. Численное исследование уравнения (35) проводилось по следующей схеме: фиксировались a, h_* вблизи от одной из критических кривых, описанных в лемме 1, а параметр r_* изменялся в окрестности найденного выше значения так, чтобы выходили режимы, близкие к показанным на рис. 3. Затем a и h_* изменялись, и весь процесс повторялся.

Как уже было указано, колебательные режимы, приведенные на рис. 1 – 3, немного напоминают двухчастотные колебания, следует однако отметить, что колебания при сохранении некоторой ведущей частоты являются неупорядоченными. Это обстоятельство позволяет предложить еще один способ уточнения значений параметров. Этот способ связан с вычислением и последующим сравнением инвариантных характеристик аттрактора уравнения (35) и экспериментальных данных. В первую очередь рассмотрим качественные изменения поведения решений уравнения (35) при увеличении параметра r_*.

Общий сценарий фазовых перестроек уравнения (35) оказался следующим. При значениях r_* близких, но меньших критических из уплотнения траекторий рождается цикл, который на пути к хаотическим колебаниям претерпевает либо ряд бифуркаций удвоения периода, либо колебательно теряет устойчивость с возникновением устойчивого тора, от которого, в свою очередь, в результате некоторого набора бифуркаций система также переходит к хаотическим колебаниям. Некоторое представление о фазовых перестройках в этих случаях дает график старшего

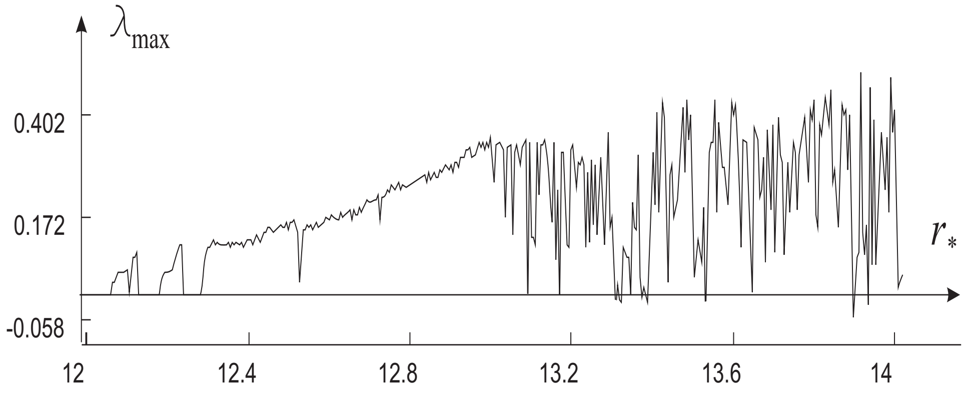


Рис. 7. Зависимость λ_{max} от r_* при $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 7. Dependence of λ_{max} on r_* at $a = 0.25$, $h = 0.15$

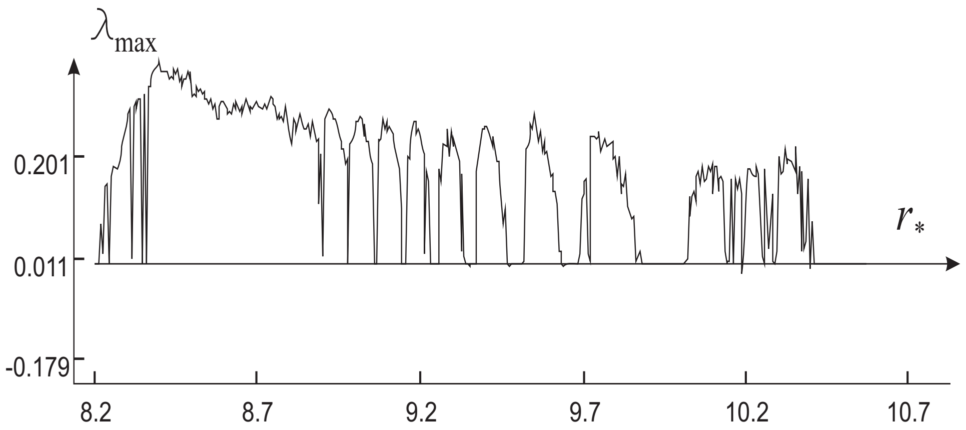


Рис. 8. Зависимость λ_{max} от r_* при $a = 0.2$, $h = 0.12$
Fig. 8. Dependence of λ_{max} on r_* at $a = 0.2$, $h = 0.12$

ляпуновского показателя λ_{max}, вычисленного для $a = 0.25$, $h = 0.15$ на промежутке изменения r_* от 12 до 14 (см. рис. 7) и для $a = 0.2$, $h = 0.12$ на промежутке $r_* \in [8.2, 10.7]$ (см. рис. 8). При вычислениях использовался метод динамических перенормировок (см. [12]).

Общим для зависимостей $\lambda_{max}(r_*)$ в первом и втором случаях является относительно большой промежуток изменения r_*, на котором значение $\lambda_{max}(r_*)$ отделено от нуля. Наличие такого промежутка означает, что для значений r_* в нем в пределах точности вычислений не удается получить таких точек, что уравнение (35) имеет периодические или квазипериодические решения. В частности, это означает, что при достаточно малых возмущениях уравнение (35) будет иметь аттрактор с близкими свойствами. К сожалению никаких утверждений о гиперболичности аттрактора в данной ситуации не выполнено. Следует отметить, что сколь-нибудь эффективное моделирование предложенного эксперимента возможно именно в этой области значений, ибо в противном случае небольшое изменение параметров и правых частей модели может привести к появлению принципиально иных решений. Тем самым, удается еще немного сузить промежуток, из которого выбирается параметр r_*.

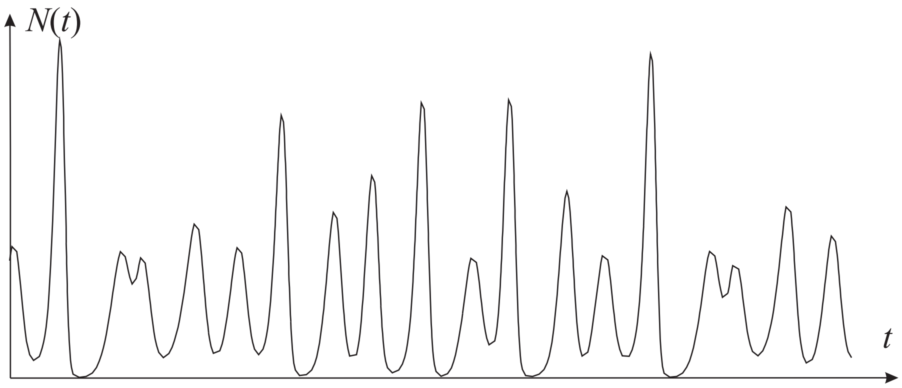


Рис. 9. Решение уравнения (35) при $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 9. The solution of equation (35) at $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

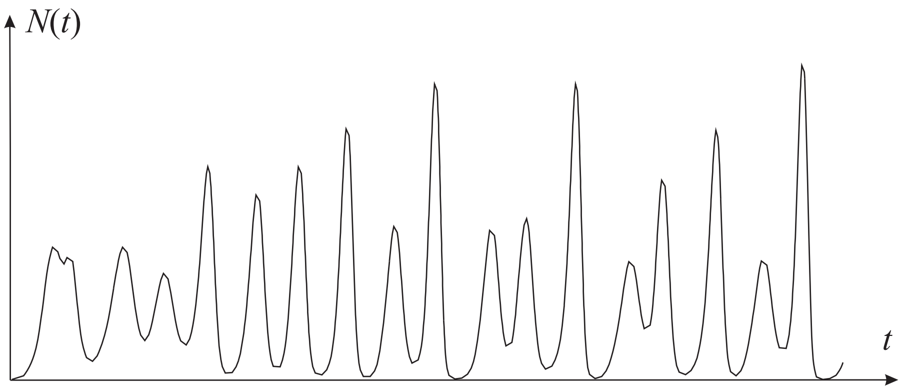


Рис. 10. Решение уравнения (35) при $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 10. The solution of equation (35) at $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

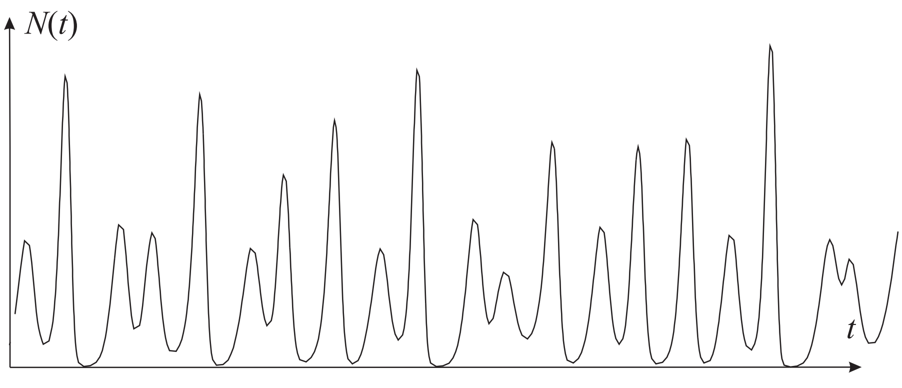


Рис. 11. Решение уравнения (35) при $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 11. The solution of equation (35) at $r = 12.5$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

При условии положительности старшего ляпуновского показателя, он определяет скорость разбегания близких траекторий на аттракторе. В связи с этим точного совпадения решения уравнения (35) и экспериментальных данных ждать не приходится, вместе с тем, при $r_* = 12.5$, $h_* = 0.15$, $a = 0.25$ удалось добиться удовлетворительного совпадения решений с графиком, показанном на рис. 2B (см. рис. 9). На рисунках 10, 11 изображены другие участки решения уравнения (35) при данных значениях параметров. Нетрудно видеть, что на них присутствуют все характерные особенности, встречающиеся на экспериментальных кривых.

Для рис. 1 совпадение выходит хуже (см. рис. 12 – 14, на которых показан случай $r_* = 13.8$, $h_* = 0.15$, $a = 0.25$).

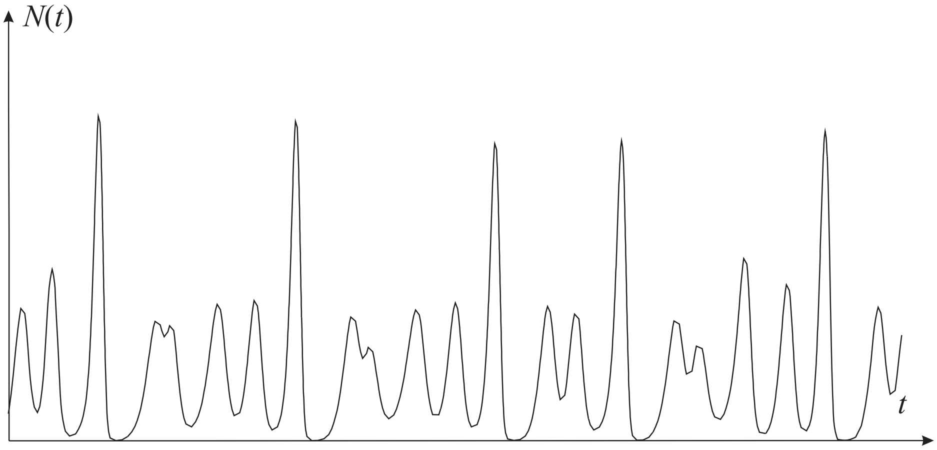


Рис. 12. Решение уравнения (35) при $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 12. The solution of equation (35) at $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

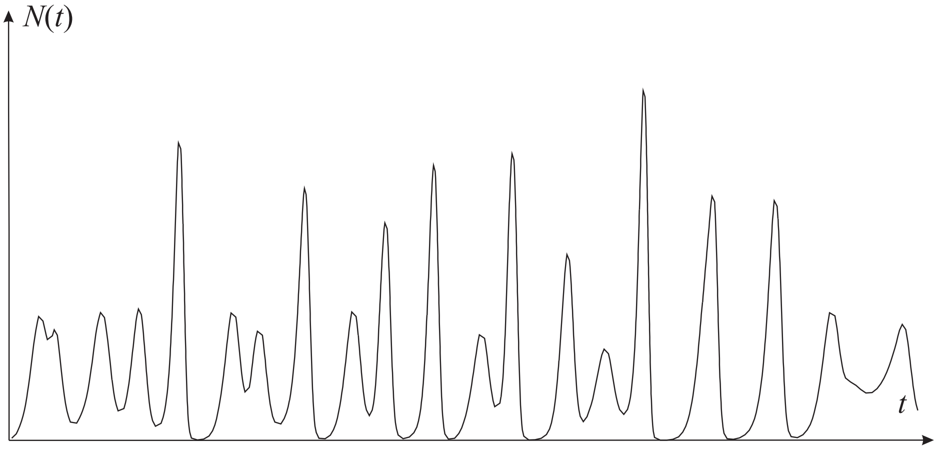


Рис. 13. Решение уравнения (35) при $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 13. The solution of equation (35) at $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

Опишем теперь основные тенденции в изменении решений уравнения (35), полученные при численном анализе. Как уже отмечалось, при фиксированных a, h_* существует область таких значений r_*, что уравнение (35) обладает сложными колебательными режимами, при меньших значениях r_* колебания становятся близкими к периодическим (период колебаний растет с уменьшением a), при бо́льших —

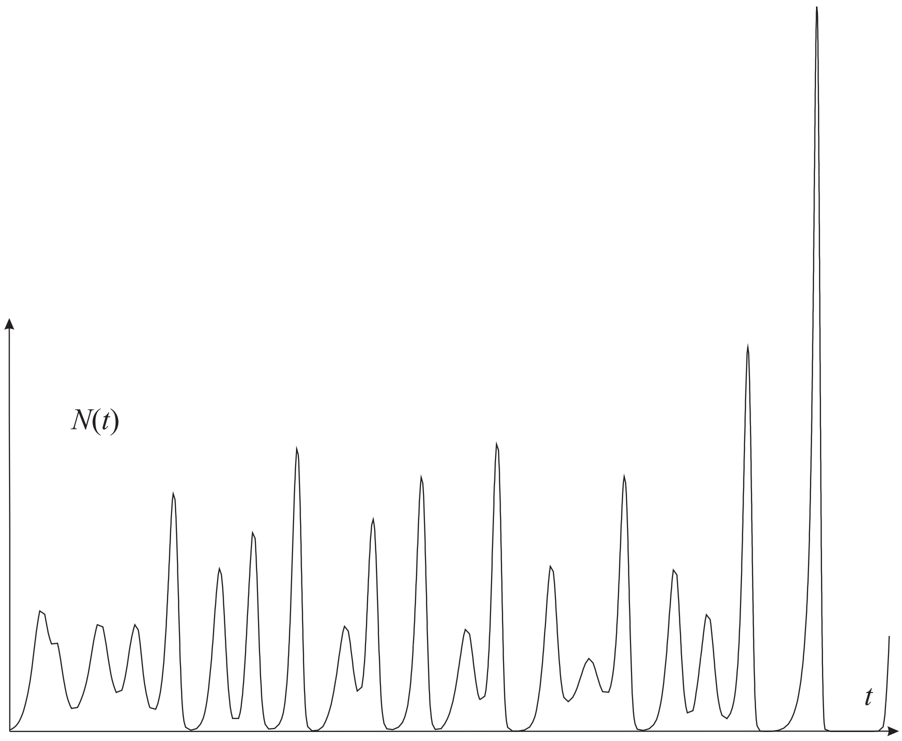


Рис. 14. Решение уравнения (35) при $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$
Fig. 14. The solution of equation (35) at $r = 13.8$, $a = 0.25$, $h = 0.15$

решения уравнения (35) имеют всплески большой амплитуды. Колебания с большой амплитудой, как правило, приводят к вымиранию популяции, так как за большим всплеском следует очень глубокий минимум численности. Отметим, что при $h_* = 0.15$, $a = 0.25$ и $r_* = 13.8$ колебания довольно долго могут не иметь глубоких минимумов (см. рис. 12 – 13), однако по прошествии большого промежутка времени может появиться большой всплеск и, соответственно, глубокий минимум (см. рис. 14).

Таким образом, важная особенность интересующих нас режимов уравнения (35) при увеличении параметра r_* состоит в том, что у них увеличивается максимум и делаются более глубокими минимумы колебаний. Кроме того, существуют такие значения данного параметра, что соответствующий режим имеет большой всплеск лишь по истечении довольно продолжительного промежутка времени (в начальные моменты времени решения близки к решениям уравнении (35) с меньшими значениями r_*). Вполне возможно, что для наилучшего приближения изображенных на рис. 3 колебаний необходимо брать именно такие значения параметров. Последнее означает, что лабораторная популяция, которую изучал Николсон, могла неожиданно вымереть при продолжении эксперимента.

Опишем теперь характер изменения решений уравнения (35) в зависимости от параметра h_*. Если h_* уменьшать от 0.16 до 0.125, то максимальное значение a, при котором уравнение (35) имеет нужный режим, изменяется от 0.28 до 0.31, причем при меньших h_* колебания имеют более глубокие минимумы.

Таким образом, основная трудность состоит в выборе параметров h_* и a, так как решения уравнения (35) очень чувствительны к их изменениям. Так, в случае, показанном на рис. 14, увеличение a всего на 0.002 приводит к режиму с частыми катастрофически большими всплесками численности.

Отметим, наконец, что изменение начальных условий не приводит к изменению качественного характера решений уравнения (35) (количественные изменения, однако, могут быть весьма значительными).

Итак, численный анализ (35) показывает возможность эффективного моделирования динамики популяций с помощью одного уравнения. Трудности с приближением колебаний, изображенных на рис. 1, указывают на необходимость привлечения в этом случае модели из двух уравнений.

3.3. Численный анализ двух уравнений

Предположим, что параметр r_2 конечен и рассмотрим систему (30). В процессе численного анализа этой системы значения параметра r_2 брались сначала настолько большими, что ее решения мало отличались от решений уравнения (35). При этом параметры системы (30) выбирались такими же, что и у (35), а нормированное значение h_1 бралось равным 0.247 (соответствует 11 суткам). Затем параметр r_2 постепенно уменьшался и при каждом его значении система (30) анализировалась по предложенной выше схеме.

В разделе 2 отмечалось, что при уменьшении r_2 увеличивается область существования периодических режимов, близких к изображенным на рис. 2, значение a приходилось брать тем больше, чем меньше r_2. Начальные данные изменялись в пределах от 0.03 до 0.07 средней численности мух или личинок в нулевой момент времени (до начального момента времени популяции не существовало — начальные функции нулевые).

Общий вид начальных кусков решений при значениях параметров, выбранных указанным выше способом, оказывается следующим: сначала короткие участки раскачки вблизи состояния равновесия, затем участки, близкие к периодическим колебаниям (протяженность их тем больше, чем меньше значение r_2), наконец, сложный колебательный режим.

При фиксированном значении r_2 и при изменении остальных параметров решения системы (30) изменяются примерно так же, как и в случае одного уравнения, появляется, однако, и ряд новых эффектов. Добавление второго уравнения начинает сказываться при значениях r_2 порядка 40. Уменьшение r_2 приводит к увеличению тех a, при которых не возникают катастрофически большие всплески, и к сужению области, при значениях a из которой система (30) обладает сложным колебательным режимом. (Например, при $r_2 < 10$ эта область становится практически ненаблюдаемой.)

Остановимся на зависимости решений системы (30) от начальных условий. Количественные изменения только числа мух или числа личинок в нулевой момент времени в пределах от 0.03 до 0.7 средней численности мало меняют общий характер решений. В количественном же отношении (как и в случае одного уравнения) решения могут различаться значительно.

Таким образом, хотя все параметры локализованы в довольно узких интервалах, в системе (30) остается весьма богатый выбор решений. Найти среди них те, графики которых в точности соответствуют показанному на рис. 1 – 3, не представляется возможным в силу хаотичности режимов (30).

В заключение отметим, что проведенное исследование позволяет объяснить и некоторые другие экспериментальные результаты. В самом деле, сопоставляя графики решений системы (30) (при r_2 на промежутке от 10 до 15) в начальные моменты времени с графиками изменения численности некоторых видов жуков в лабораторных опытах Кромби [13, 14] и Бирча (см. в книге [15], с. 24), можно сделать вывод об их близости. Вместе с тем, следует отметить, что упомянутые эксперименты носят качественный характер и содержат слишком малое количество экспериментальных данных.

В результате сочетания аналитического и численного методов исследования уравнений динамики популяций насекомых удалось получить теоретическое объяснение экспериментов Николсона, а также некоторых других. Подчеркнем, что аналитический подход дал возможность проводить численный анализ в достаточно узкой области пространства параметров, попасть в эту область, исходя лишь из общих соображений, не представляется возможным.

Список литературы / References

[1] Nicholson A. J., “An outline of the dinamics of animal populations”, *Aust. J. Zool.*, **2**:1 (1954), 9–65.

[2] Nicholson A. J., “The self-adjustment of populations to change”, *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.*, **22** (1958), 153–173.

[3] May R.M., Conway G.R., Hassel M.P., Southwood T.R.E., “Time delay, density dependence and single oscillations”, *J. Anim. Ecology*, **43** (1974), 747–770.

[4] Oster G., Guckenheimer J., “Bifurcation fenomena in population models”, *The Hopf Bifurcation*, eds. J. Marsden, M. McCracken, Spring-Verlag, Berlin, 1976, 327–345.

[5] Колесов Ю. С., “Моделирование популяции насекомых”, *Биофизика*, **28**:3 (1983), 513–514; [Kolesov Yu. S., “Modelirovanie populyatsii nasekomykh”, *Biofizika*, **28**:3 (1983), 513–514, (in Russian).]

[6] Колесов Ю. С., Кубышкин Е.П., “Некоторые свойства решений дифференциально-разностных уравнений, моделирующих динамику изменения численности популяций насекомых”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1983, 64 – 86; [Kolesov U.S., Kubyshkin Ye.P., “Nekotoryye svoystva resheniy differentsialno-raznostnykh uravneniy, modeliruyushchikh dinamiku izmeneniya chislennosti populyatsiy nasekomykh”, *Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy*, 1983, 64 – 86, (in Russian).]

[7] Кубышкин Е.П., “Локальные методы в исследовании системы дифференциально-разностных уравнений, моделирующих динамику изменения численности популяций насекомых”, *Нелинейные колебания в задачах экологии*, 1985, 70–82; [Kubyshkin Ye.P., “Lokalnyye metody v issledovanii sistemy differentsialno-raznostnykh uravneniy, modeliruyushchikh dinamiku izmeneniya chislennosti populyatsiy nasekomykh”, *Nelineynyye kolebaniya v zadachakh ekologii*, 1985, 70–82, (in Russian).]

[8] Глызин С. Д., “Двухчастотные колебания фундаментального уравнения динамики популяций насекомых”, *Нелинейные колебания и экология*, 1984, 91 – 116; [Glyzin S. D., “Dvukhchastotnyye kolebaniya fundamental’nogo uravneniya dinamiki populyatsiy nasekomykh”, *Nelineynyye kolebaniya i ekologiya*, 1984, 91 – 116, (in Russian).]

[9] Кащенко С. А., “Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:5 (2012), 18–34; [Kaschenko S. A., “Stationary States of a Delay Differentional Equation of Insect Population’s Dynamics”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **19**:5 (2012), 18–34, (in Russian).]

[10] Глызин С. Д., “Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона”, *Модел. и анализ информ. систем*, **14**:3 (2007), 29–42; [Glyzin S. D., “A registration of age groups for the Hutchinson's equation”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **14**:3 (2007), 29–42, (in Russian).]

[11] Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, **42**, Springer, 1983.

[12] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; [Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor”, *Differ. Equ.*, **41**:2 (2005), 284–289].

[13] Crombie A.C., “On competition between different species of graminivoros insects”, *Proc. R. Soc. (B)*, **133** (1946), 362–395.

[14] Crombie A.C., “Further experiments on insect competition”, *Proc. R. Soc. (B)*, **133** (1946), 76–109.

[15] Birch L.C., “Experimental background to study of the distribution and abundance of insects. 1. The influence of temperature, moisture and food on the innate capacity for increase of three grane beatles”, *Ecology*, **34** (1953), 608–611.

Glyzin S. D., "Mathematical Model of Nicholson's Experiment", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 365–386.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-365-386

Abstract. Considered is a mathematical model of insects population dynamics, and an attempt is made to explain classical experimental results of Nicholson with its help. In the first section of the paper Nicholson's experiment is described and dynamic equations for its modeling are chosen. A priori estimates for model parameters can be made more precise by means of local analysis of the dynamical system, that is carried out in the second section. For parameter values found there the stability loss of the problem equilibrium of the leads to the bifurcation of a stable two-dimensional torus. Numerical simulations based on the estimates from the second section allows to explain the classical Nicholson's experiment, whose detailed theoretical substantiation is given in the last section. There for an atrractor of the system the largest Lyapunov exponent is computed. The nature of this exponent change allows to additionally narrow the area of model parameters search. Justification of this experiment was made possible only due to the combination of analytical and numerical methods in studying equations of insects population dynamics. At the same time, the analytical approach made it possible to perform numerical analysis in a rather narrow region of the parameter space. It is not possible to get into this area, based only on general considerations.

Keywords: differential-difference equations, asymptotic behaviour, stability, Lyapunov exponents, insect population dynamics

On the authors:
Sergey D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR (project No 14-21-00158).