

5817343
М44

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова
Ярославское региональное отделение РАЕН

ISSN 1818-1015

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 12 №2 2005

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

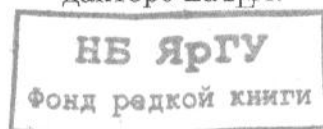
Главный редактор
В.А. Соколов

Редакционная коллегия
О.Л. Бандман, В.А. Бондаренко, М.Г. Дмитриев, А.В. Зафиевский,
Ю.Г. Карпов, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Левин,
И.А. Ломазова, В.В. Майоров, В.Э. Малышкин, В.А. Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А. Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул. Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.



© Ярославский
государственный
университет, 2005

ОРК

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.12, №2. 2005

Приближение в пространствах L_p ($0 < p < 1$) функций с особенностями	
Морозов А.Н.	3
Принципы организации Semantic Web	
Кашалкин Д.Ю., Латамьев А.Н.	7
Принципы создания метаописаний ресурсов во всемирной сети	
Кашалкин Д.Ю., Латамьев А.Н.	12
Об одном уравнении теплопроводности, моделирующем работу термопечатающей головки	
Ануфриенко С.Е., Калинин В.Б.	17
Верификация протокола обмена данными между клиентской и серверной частями программного пакета FTH	
Чернуль А.В.	20
Об асимптотике решений одного разностного уравнения второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами	
Бурд В.Ш., Нестеров П.Н.	24
Трансверсали семейств выпуклых множеств со свойством d -пересечений в $\mathbb{R}^d$	
Карасёв Р.Н.	32
Резонанс 1:2 как причина возникновения колебаний пластинки при двустороннем воздействии потока газа	
Толбей А.О.	40
Теорема Хелли и теорема отделимости	
Дольников В.Л.	46
Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов	
Глызин С.Д.	53

Редактор А.А.Аладьева

Подписано в печать 22.11. 2005. Формат 60x84¹/₈. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 7,44. Уч.-изд.л. 5,74. Тираж 100 экз. **Заказ 077/05**

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

Приближение в пространствах L_p ($0 < p < 1$) функций с особенностями

Морозов А.Н.

Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, Советская, 14

получена 20 августа 2005

Аннотация

В статье продолжается обсуждение кусочно-полиномиальных приближений в пространствах интегрируемых функций одной переменной с показателями меньшими единицы. Рассматриваются функции, сходные со степенными.

1. Основные обозначения

Для $0 < p < \infty$ через $L_p[I]$ обозначаем пространство действительных функций, интегрируемых в степени p по Лебегу на замкнутом слева полуинтервале I (равносильно интервале или отрезке).

При всех таких p для удобства полагаем

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Как обычно,

$$L_\infty[I] = \left\{ f : \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}, \quad \|f\|_{L_\infty[I]} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность возникнуть не может, сокращаем обозначение до $\|f\|_p$.

Также используются пространства ($k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$)

$$W_p^k[I] = \left\{ f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{(k)} \in L_p[I] \right\}.$$

Определим для $f \in L_p[I]$

$$E_k(f; I)_p = \inf \left\{ \|f - \pi_k\|_{L_p[I]} : \pi_k \in P_k \right\}$$

- наилучшее приближение алгебраическими многочленами степени не выше $k-1$ (порядка k) в $L_p[I]$.

Пусть $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, $m \in \mathbb{N}$. Набор полуинтервалов $\{[t_{j-1}, t_j)\}_{j=1}^m$ назовем разбиением полуинтервала $I = [a, b)$. Через u_m будем обозначать разбиение полуинтервала I на m равных по длине полуинтервалов.

Обозначим

$$U_m^k(f; I)_p = \left(\sum_{J \in u_m} E_k(f; J)_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- наилучшее приближение кусочно-полиномиальными функциями степени не выше $k-1$, подчиненными равномерному разбиению u_m полуинтервала I , т.е. на каждом полуинтервале J из u_m приближающая функция - многочлен порядка k . Пусть $|I|$ далее обозначает длину полуинтервала I .

Хорошо известно, что при $p > 1$ кусочно-полиномиальными функциями степени не выше $k-1$ на равномерных разбиениях с порядком $O(m^{-k})$ могут приближаться только функции из W_p^k , т.е. имеющие k -тую производную. Точные асимптотические соотношения даны в [1]-[2].

Несмотря на значительное сходство в общих формулах (см. [3]-[4]), приближение в пространствах L_p ($0 < p < 1$) имеет отличия. В статье [4] показано, что если $f \in W_1^k[I]$ кусочно, то при $0 < p < 1$ выполняется:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^k U_m^k(f, I)_p = c_{k,p} |I|^k \|D^k f\|_{L_p[I]}, \quad (1)$$

где $c_{k,p} = E_k(\frac{1}{k!}, [0, 1])_p$, а через $D^k f$ обозначена такая функция, что если $f \in W_1^k[J]$, $J \subset I$, то $D^k f|_J = f^{(k)}|_J$.

(Более точно, разрывы у функции $f^{(k)}$ могут быть не любой "глубины", должно выполняться $f^{(l)} \in L_\infty[I]$, где l таково, чтобы $1/p + l > k$).

В данной статье соотношение (1) доказывается в несколько иной важной ситуации.

2. Особые черты функций с монотонными производными

Для $f \in L_p[a, b]$ ($0 < p \leq \infty$) определим

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x + ih)$$

- k -тую разность и

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{0 < h < t} \|\Delta_h^k f(x)\|_{L_p[a, b-kh]}$$

- k -тый модуль непрерывности в L_p .

Пусть $0 < p < 1$.

Теорема 1. Если $f \in L_p[a, b] \cap W_1^k[a, b - \epsilon]$ для любого $\epsilon > 0$, $f^{(k)}$ не убывает на $[a, b]$ и неотрицательна, то

$$\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p = \|f^{(k)}\|_p = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p.$$

Доказательство. Несложно получить, что

$$\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p = \sup_{h>0} h^{-k} \left(\int_a^{b-kh} |\Delta_h^k f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Предположим сначала, что $f^{(k)}$ непрерывная на $[a, b]$ функция, тогда справедливы два представления для k -той разности:

$$\Delta_h^k f(x) = \int_0^{kh} V_{k,h}(t) f^{(k)}(x+t) dt, \quad (2)$$

где неотрицательная функция $V_{k,h}$ такова, что $\int_0^{kh} V_{k,h}(t) dt = h^k$, и

$$\Delta_h^k f(x) = h^k f^{(k)}(\xi_h(x)), \quad x \leq \xi_h(x) \leq x + kh \quad (3)$$

Равенство (2) получается из тождества $\Delta_h^k f(x) = \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{k} f^{(k)}(x+t_1+\dots+t_k) dt_1 \dots dt_k$ при помощи

замены переменных $t = t_1 + \dots + t_k$ (см.[5]), а равенство (3) - из (2) (или тождества) применением теоремы о среднем значении.

Если $f^{(k)}(x)$ не убывает, то из (2) следует, что $\Delta_h^k f(x)$ тоже не убывает, а из (3) :

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p &= \sup_{h>0} h^{-k} \left(\int_a^{b-kh} |\Delta_h^k f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{h>0} \left(\int_a^{b-kh} |f^{(k)}(\xi_h(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_a^{b-kh} |f^{(k)}(\xi_h(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f^{(k)}\|_p = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p. \end{aligned}$$

Последнее равенство обосновано, например, в [6].

Для завершения доказательства остаётся распространить утверждение на указанный в формулировке теоремы случай. Это следует из того, что в пространстве L_1 каждую монотонную функцию $f^{(k)}$ можно сколь угодно точно приблизить непрерывной монотонной функцией (см. ниже лемму), а также из неравенств:

$$\left| \sup_{t>0} \left(t^{-k} \omega_k(f, t)_p \right)^p - \sup_{t>0} \left(t^{-k} \omega_k(g, t)_p \right)^p \right| \leq \sup_{t>0} \left(t^{-k} \omega_k(f - g, t)_p \right)^p$$

и

$$\sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f - g, t)_{L_p[a,b]} \leq (b - a)^{1/p-1} \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f - g, t)_{L_1[a,b]} \leq (b - a)^{1/p-1} \| (f - g)^{(k)} \|_{L_1[a,b]}.$$

Во втором случае использовалось неравенство Гёльдера.

Теорема доказана.

Лемма. В пространстве L_1 каждую монотонную функцию f можно сколь угодно точно приблизить непрерывной монотонной функцией.

Доказательство. Пусть заданы произвольное $\varepsilon > 0$ и монотонная функция f на $[a, b]$. Занумеруем её точки разрыва $\{x_i\}$ в порядке убывания величины скачков. Для каждой из таких точек выберем симметричную относительно неё окрестность $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$ с такими свойствами:

- 1) $\text{Var} f|_{(\alpha_i, \beta_i)} < 2h_i$, где h_i - величина скачка в точке x_i , а $\text{Var} f|_{(\alpha_i, \beta_i)}$ - изменение функции f на интервале (α_i, β_i) ,
- 2) $|\beta_i - \alpha_i| < \varepsilon/2$,
- 3) множества $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ попарно не пересекаются.

Далее в порядке нумерации будем оставлять окрестности такими, чтобы они не пересекались с предыдущими: если точка разрыва лежит в окрестности одной из предшествующих по номеру точек, то её исключаем из рассмотрения; если - не лежит, но окрестности пересекаются, то оставляем для неё в качестве окрестности только непересекающуюся часть. Ясно, что вне

$$A = \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$$

остаются лишь отрезки непрерывности функции f . Определим функцию g следующим образом:

$$g(t) = f(t), \text{ если } t \notin A, \text{ или } g(t) = \frac{f(\beta_i) - f(\alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} (t - \alpha_i) + f(\alpha_i), \text{ если } t \in (\alpha_i, \beta_i).$$

Тогда g является непрерывной и, очевидно, выполняется соотношение:

$$\|f - g\|_{L_1[a,b]} < \sum_i 2h_i \varepsilon/2 = \varepsilon \sum_i h_i \leq \varepsilon \text{Var} f|_{[a,b]}.$$

Лемма доказана.

Используя теорему 1 можно доказать более сильное утверждение, чем существование асимптотической формулы для кусочно-полиномиальных приближений при $0 < p < 1$ функций обсуждаемого вида.

Теорема 2. Пусть $f \in L_p[a, b] \cap W_1^k[a, b - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$, $f^{(k)}$ не убывает на $[a, b]$ и неотрицательна, тогда если конечна величина $\|f^{(k)}\|_p$, то $f \in Y_p^k[a, b]$.

Здесь $Y_p^k[a, b]$ - замыкание пространства $W_1^k[a, b]$ в метрике, порождаемой квазинормой

$$\|\cdot\|_{H_p^k} = \|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(\cdot, t)_p$$

(см. [6]).

Доказательство.

Для данной функции f выберем последовательность точек $\{x_n\}$, сходящуюся к точке b , в каждой из которых f имеет k -тую производную. Построим последовательность функций $\{f_n\}$:

$$f_n(t) = f(t) \text{ при } a \leq t \leq x_n, \quad f_n(t) = T_n(t) \text{ при } x_n < t \leq b,$$

где $T_n(t)$ - многочлен Тейлора степени k от функции f , построенный в точке x_n .

Очевидно каждая из функций f_n удовлетворяет условию теоремы 1 и принадлежит пространству $W_1^k[a, b]$. Также условию теоремы 1 удовлетворяют функции $f - f_n$, поэтому справедливо:

$$\|f - f_n\|_{H_p^k}^p \leq \|f - f_n\|_p^p + \sup_{t>0} (t^{-k} \omega_k(f - f_n, t)_p)^p \leq \|f\|_{L_p[x_n, b]}^p + \|f_n\|_{L_p[x_n, b]}^p + \|(f - f_n)^{(k)}\|_{L_p[x_n, b]}^p$$

Каждое из первых двух слагаемых в правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Последнее слагаемое можно оценить:

$$\|(f - f_n)^{(k)}\|_{L_p[x_n, b]}^p \leq \|f^{(k)}\|_{L_p[x_n, b]}^p$$

В силу непрерывности интеграла относительно пределов интегрирования это выражение также стремится к нулю.

Теорема доказана.

В [6] показано, что для всех функций из $Y_p^k[a, b]$ существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^k U_m^k(f, I)_p = c_{k,p} |I|^k \|D^{k,p} f\|_{L_p[I]}.$$

В данном случае $D^{k,p} f$ совпадает на $[a, b]$ с $f^{(k)}$.

Очевидно, что все выводы остаются справедливыми, если $f^{(k)}$ не возрастает на $[a, b]$ и неположительна на нём (при сохранении других требований) или односторонняя особенность у функции находится в левом конце отрезка (с понятными изменениями условий на $f^{(k)}$), а также в случае двусторонней особенности функции внутри отрезка с соответствующим поведением её по обе стороны от точки, в которой есть особенность. Ясно, что требование монотонности $f^{(k)}$ необходимо только локально.

Список литературы

1. Морозов А.Н. Аналог теоремы Бернштейна в пространстве L_1 // Матем. заметки. 1995. Т. 57. N5. С. 699-703.
2. Морозов А.Н. Об одном описании пространств дифференцируемых функций // Матем. заметки. 2001. Т. 70. N5. С. 758-768.
3. Морозов А.Н. Асимптотическое поведение наилучших кусочно-полиномиальных приближений в пространствах L_p ($0 < p < 1$) // Модел. и анализ информ. систем. 2004. Т. 11. N1. С. 24-27.
4. Морозов А.Н. Приближение кусочно-гладких функций в пространствах L_p ($0 < p < 1$) // Модел. и анализ информ. систем. 2004. Т. 11. N2. С. 18-21.
5. Брудный Ю.А. Критерии существования производных в L_p // Матем. сб. 1967. Т. 73. С. 43-71.
6. Морозов А.Н. Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах L_p ($0 < p < 1$) // Модел. и анализ информ. систем. 2005. Т. 12. N1. С. 18-21.

Принципы организации Semantic Web

Кашалкин Д.Ю., Лататуев А.Н.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 10 сентября 2005

Аннотация

В работе анализируются основные концепции Semantic Web и перспективы ее использования. Рассматривается схема эволюции всемирной сети и положение Semantic Web в данной схеме. Анализируются различные уровни модели Semantic Web; приводятся примеры соответствующих применяемых и разрабатываемых технологий.

Эволюция WWW

Web содержимое на сегодняшний день, как например содержание HTML страниц, PDF документов, изображений, музыкальных файлов, сложно интерпретировать с помощью каких-либо алгоритмов - всемирная сеть спроектирована с целью представления данных в удобной для людей форме, а не для машинной обработки. Web контент характеризуется слабой структурированностью данных, низким уровнем их взаимосвязи. Распространение XML-технологий дает возможность структурировать информацию, обеспечить синтаксическую интероперабельность приложений. Будущий же образ сети, в которой содержимое будет "понятным" для компьютеров, носит название Semantic Web (Семантическая Сеть) [1]. Формирование Semantic Web станет возможным только при условии обеспечения более высокого уровня интероперабельности. Необходимы стандарты не только для синтаксической формы документов, но и для их семантического наполнения. Концепция Semantic Web в настоящее время активно разрабатывается многими компаниями, лидирующее место среди которых занимает World Wide Web Consortium (W3C) [2]. Одна из главных целей исследований, ведущихся в сфере Semantic Web - создание интеллектуальных систем. Многие исследования в области Semantic Web идут из области Искусственного Интеллекта (ИИ), который, по сути, преследует ту же цель. Тем не менее основная цель исследователей Semantic Web - не создание интеллектуальных систем, которые были бы также разумны, как и люди. В основе лежит современная всемирная несемантическая сеть - именно к ней происходит поэтапное добавление семантического контента, в результате чего постепенно возникнет более интеллектуальный Интернет. Semantic Web является логическим продолжением развития Web - от гипертекстовых страниц к XML-данным, а от XML - к смысловому содержанию и объединению разбросанной в Web информации. Поэтому Semantic Web может быть представлена как некоторое третье поколение всемирной сети (Рис. 1).

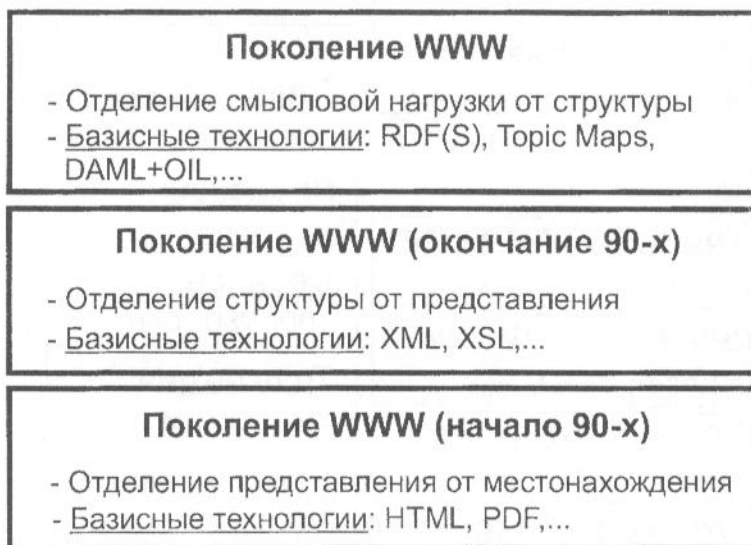


Рис. 1. Поколения WWW

С точки зрения эволюции поколений WWW, основным вкладом первоначальной стадии развития стала возможность просматривать документы через Интернет - представление документа было отделено от

его местоположения. Следующее поколение, которое породило XML революция, характеризовалось от- делением структуры документа от его представления. Документ в первую очередь рассматривался как хранилище данных, представление которых может быть различным в зависимости от преследуемых це- лей. Наконец идея Semantic Web заключается в отделении смысловой нагрузки данных от структуры - дополнение документа семантикой, пригодной для машинной обработки.

Концептуальная многоуровневая модель
Весь образ Semantic Web может быть представлен в виде многоуровневой модели, технической базой которой являются WWW и XML технологии (Рис. 2). На их основе стало возможным проектирование языков семантических метаданных более высокого уровня.

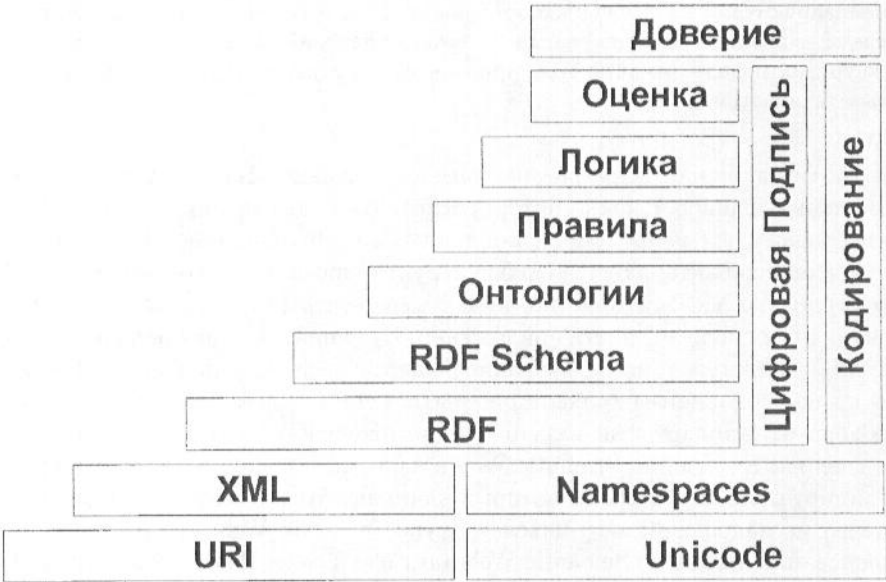


Рис. 2. Концептуальная модель Semantic Web

Помимо вышеуказанных уровней, необходимы методы и средства для межсистемного взаимодействия, транзакций, описания сервисов, процессов и т.д. Эти технологии представляют собой функциональную инфраструктуру, в которую могут быть встроены семантические представления для создания интеллект- уальных приложений (Рис. 3).



Рис. 3. Концептуальная модель и функциональная инфраструктура Semantic Web

Рассмотрим вышеперечисленные уровни.

Уровень URI

Одна из центральных концепций WWW - URI (Uniform Resource Identifier). URI однозначно идентифицирует во всемирной сети любой ресурс. По сути, WWW - сеть ресурсов, идентифицированных с помощью URI. Существуют различные подклассы URI: - Universal Resource Names (URN) - позволяют уникально идентифицировать любой объект; - Universal Resource Locators (URL) - представляет собой центральную часть URI системы. URL используется в основном для ссылки на web-файлы по какому-либо протоколу, как например HTTP, FTP.

Уровень XML

XML разметка не содержит какой-либо формализованной семантики для компьютера. XML только описывает структуру информации, синтаксис. Семантика же представляет собой дисциплину, которая изучает то, как символы относятся к другим объектам. Смысл, значение символов определяется в терминах объектов, к которым они относятся, на которые ссылаются. Поэтому XML не является семантическим согласно вышеописанному определению. Символы XML языка на самом деле не ссылаются на что-либо - подобная ссылка формируется лишь в голове человека, просматривающего документ. Язык может быть понят машиной только в том случае, если он имеет семантику. Это означает, что символы и структура языка должны ссылаться на некоторую модель, лежащую в основе.

Уровень RDF и RDFS

На настоящее время наиболее известный семантический язык в WWW - RDF (Resource Description Framework) и его расширение RDF Schema (RDFS). Используя RDF, метаданные относительно web-ресурсов могут быть закодированы. RDF описывает предметную область в терминах ресурсов, свойств ресурсов и значений свойств. Данные, представленные в RDF, состоят из триплетов вида объект-атрибут-значение, каждая составляющая которого может быть либо web-ресурсом (URI), либо символом. С лингвистико-логической точки зрения, содержание триплета можно представить как субъект-предикат-объект. RDF-данные можно представлять в виде направленного графа, образуемого такими утверждениями. RDFS представляет собой расширение RDF, которое позволяет: описывать понятия, используемые в RDF приложении, накладывать ограничения на объекты и значения в триплетах. RDFS может быть рассмотрена как определенный вид парадигмы объектно-ориентированного моделирования в WWW. Так, для создания классовых иерархий в RDFS существуют предопределенные атрибуты `rdfs:Class`, `rdfs:subclass`, а экземпляры классов создаются при помощи атрибута языка RDF `rdf:type`. Подобным образом атрибуты `rdfs:domain` и `rdfs:range` накладывают ограничения на типы ресурсов, которые могут быть использованы в качестве объектов и значений в триплетах. Таким образом, любое RDFS-описание представляет собой "обычные" RDF-данные - данные о классах и свойствах [3,4,5]. Такие примитивы, как `Class`, `subclass`, `type` и т.д., дают выражениям RDF необходимую семантическую интерпретацию. Они показывают, как располагаются понятия в иерархии по отношению друг к другу, каковы ограничения на атрибуты. По-настоящему интеллектуальность возникает только тогда, когда RDF описания переданы в память программы с помощью парсера, где и происходит интерпретация приложением. С помощью механизма пространства имен (XML) описания RDF могут использовать словари (схемы), созданные различными группами по стандартизации. Примером таких словарей служит инициатива Dublin Core [DC] [9], предоставляющая минимальный набор свойств для идентификации ресурсов Web; Publishing Requirements for Industry Standard Metadata (PRISM), определяющая словарь метаданных для издательских организаций, Electric Power Research Institute Common Information Model, указывающая общую семантику для энергетических систем, RDF Site Summary для описания каналов новостей, Web-порталов и многие другие инициативы. Существуют и другие синтаксические спецификации, предложенные W3C помимо языка RDF(S) - например N3, Topic Maps. N3 основан непосредственно на триплетах, его легче читать пользователю, но он не может быть разобран обычными XML и RDF парсерами. Topic Maps представляют собой еще одну технологию представления метаданных, используемую для описания web-ресурсов. В основе этой технологии лежат понятия темы, ассоциации, появление.

Уровень Онтологии

RDF - это самый низкоуровневый из существующих языков описания метаданных, поскольку оперирует лишь понятиями связей примитивных сущностей, например, "объект А владеет субъектом Б". Со временем стало очевидно, что средств XML и RDF для представления информации и метаданных для построения полноценной семантически связанной сети недостаточно. Поэтому консорциумом W3C и были созданы различные языки для создания онтологий. Это одно из центральных понятий в Semantic Web. Онтология может быть определена как формальная, эксплицитная спецификация концептуализации. Такие характеристики, как формальная и эксплицитная, являются основополагающими в Semantic Web, так как именно они обеспечивают автоматическую машинную интерпретацию концептуализации. Важным качеством является и то, что онтология должна быть разделяемой, то есть обеспечивать совместный доступ, комбинационное и интеграционное использование онтологической информации. На практике онтологии

представляют собой термины, понятия, отношения между ними в различных областях. Для создания и поддержания онтологий нужны определенные средства: редакторы, с помощью которых создаются вручную или полуавтоматически онтологические описания, средства аннотации для связывания ресурсов с метаданными, средства для проверки онтологии и для ее управления, библиотеки онтологий для создания новых онтологий на базе существующих и для управления их эволюцией. Примером известных онтологий могут служить WordNet, RosettaNet (содержащая понятия касательно ИТ индустрии) и другие. Наиболее известными примерами в области языков онтологий можно считать европейский OIL (Ontology Inference Layer), американский DAML (DARPA Agent Markup Language) и их комбинацию DAML+OIL, так называемый язык OWL (Ontology Web Language), который сочетает идею объектно-ориентированного моделирования и логического программирования с языками WWW, особенно RDF(S) и XML. Однако ориентированность языков описания онтологий на системы математической логики делает их слишком тяжеловесными для огромного количества приложений, которым достаточно простого языка описания словарей - RDFS.

Уровень Логики, оценки, доверия

Онтология определяет понятия определенной области, но ничего не говорит о том, как их использовать, как выводить знания, основываясь на имеющихся понятиях, правилах. Этот тип знаний по своей сути не является онтологическим - он относится к логическому уровню Semantic Web. Работа над стандартами для логического уровня уже ведется. Среди прочих проектов в разработке консорциума W3C находится язык разметки RuleML (Rule Markup Language) для дедуктивного вывода правил. Проблема доверия лежит в центре мировой сети, одним из основных принципов которой является тот факт, что любой может публиковать информацию и свое мнение в сети, так же как и иметь доступ к информации, предоставленной другими. Проблема доверия может быть рассмотрена в разрезе использования метаданных для описания web-ресурсов. Основная идея решения данной проблемы заключается в использовании средств оценки и комментирования web-страниц. Основываясь на подобных оценках и аннотациях, прочие пользователи легко смогут определить надежность этих ресурсов. А с помощью механизма цифровой подписи может быть произведена идентификация пользователя, сделавшего аннотацию.

Области применения

Технологии и методы Semantic Web на сегодняшний день могут быть применены в различных областях:

- Информационный поиск, Web-порталы; Одна из главных проблем в WWW - проблема поиска информации или службы, удовлетворяющей нуждам пользователя, в огромном, неструктурированном информационном массиве сети Интернет. Ассоциативные гипертекстовые ссылки и метаописания контента предоставляют новые возможности для поиска данных, основанных на содержании, а не на традиционных методах поиска ключевых слов. Портал позволяет пользователям, заинтересованным в конкретной тематике, получать новости, интерактивно общаться друг с другом, создавать виртуальные сообщества и т.п., причем простой индексации портала по рубрикам и тематикам для точного нахождения нужной информации по запросу может быть недостаточно. Для более интеллектуального обобщения разделов информации порталам необходимо определить свою онтологию, которая должна описывать терминологию, использующуюся в содержимом портала, и аксиомы, задающие правила использования этих терминов в контексте других терминов.
- Управление знаниями; Возрастающий интерес к приложениям, относящимся к области управления знаниями, в своей основе имеет потребности компаний и организаций приобретать, поддерживать, находить и использовать свои знания с целью увеличения конкурентного преимущества и эффективности. Основные проблемы здесь связаны с отсутствием семантического наполнения документов.
- Web-коммерция в секторе B2C;
- Электронный бизнес в секторе B2B. В B2C web-коммерции и B2B бизнес-транзакциях огромное значение имеет область описания продуктов, каталогов, служб и т.д, которая также выходит на новый уровень благодаря метаописаниям, используемым в Semantic Web.
- Персонализация. Метаданные необходимы для предоставления так называемых персонализированных (personalized) сервисов. Уже существует стандарт P3P (Platform for Privacy Preferences), в основе которого лежит RDF, благодаря которому пользователю могут быть предоставлены сервисы, настроенные особым образом под его предпочтения.
- Описание профиля устройств (device profiling). Коммуникации между различными видами агентов, подсоединенных к Интернет, ограничены аппаратным и программным обеспечением. Необходим способ для описания возможностей устройств, их ПО и коммуникационных возможностей. Подобная по-

пытка стандартизации предпринята в рамках спецификации CC/PP (Composite Capabilities/Preference Profile Specification), в основе которой также лежит RDF.

- Процессы и службы. Описание процессов, как например web-служб, является важным типом метаданных. Обмен метаинформацией о процессах часто необходим при интеграции приложений. Примерами в этой области могут служить: PSL (Project Specification Language), UML (Unified Modeling Language), DAML-S (для описания web-сервисов), XPDЛ (XML Process Definition Language).
- Аннотации к web-ресурсам. В рамках этого направления можно выделить проект W3C Annotea.

Это современное состояние Semantic Web. В будущем, по нашему мнению, возможны несколько перспектив эволюции Semantic Web (а скорее даже их интеграция), каждая из которых имеет свои теоретические и прагматические обоснования:

- 1) универсальная библиотека, хранилище данных, доступ и работа с которым основаны на использовании информационного контекста;
- 2) среда для функционирования агентов, выполняющих сложные действия по замыслу своих владельцев;
- 3) средство для объединения отдельных баз данных и баз знаний с целью выполнения разнообразных задач, поставленных людьми и их агентами.

Список литературы

1. Tim Berners-Lee. What the Semantic Web can represent., 1998
[//http://www.w3.org/DesignIssues/RDFnot.html](http://www.w3.org/DesignIssues/RDFnot.html);
2. Semantic Web Activity. [// http://www.w3.org/2001/sw](http://www.w3.org/2001/sw);
3. RDF Primer. W3C Working Draft. [// http://www.w3.org/TR/rdf-primer](http://www.w3.org/TR/rdf-primer);
4. RDF/XML Syntax Specification (Revised). W3C Working Draft. [//http://www.w3.org/TR/rdf-syntax-grammar/](http://www.w3.org/TR/rdf-syntax-grammar/) ;
5. Resource Description Framework (RDF) Schema Specification [// http://www.w3.org/TR/2000/CR-rdf-schema-20000327](http://www.w3.org/TR/2000/CR-rdf-schema-20000327) ;
6. OWL Web Ontology Language 1.0 Reference. W3C Working Draft. [// http://www.w3.org/TR/owl-ref/](http://www.w3.org/TR/owl-ref/) ;
7. DAML Language. [// http://www.daml.org/about.html](http://www.daml.org/about.html) ;
8. DAML+OIL Reference Description. [// http://www.daml.org/2001/03/daml+oil-index.html](http://www.daml.org/2001/03/daml+oil-index.html) ;
9. Dublin Core Activity. [// http://dublincore.org](http://dublincore.org);

УДК 681.3

Принципы создания метаописаний ресурсов во всемирной сети

Кашалкин Д.Ю., Латауев А.Н.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена

Аннотация

Для обработки содержимого ресурсов всемирной сети с помощью алгоритмических средств необходима реализация эксплицитных метаописаний web-контента. В этой работе описаны методы, используемые для представления метаданных в WWW. Рассматриваются и анализируются классические подходы к Web семантике, современные архитектуры метаданных, средства их реализации - в частности семантические метаязыки. Описываются области применения и перспективы использования метаописаний web-контента.

Классические подходы к Web-семантике

В основе WWW лежит идея гипертекста Теда Нельсона (Ted Nelson's), которая сама по себе в определенном смысле является "семантической". Гиперссылки представляют собой семантические ассоциации, объединяющие друг с другом различные контенты документов, с целью облегчить получение связанной по содержанию информации. Проблема в данном подходе появилась в связи с ростом информационного наполнения WWW и заключалась в том, что пользователь просто "терялся" в гиперпространстве. Следование ссылкам друг за другом перестало быть эффективным методом получения информации по заданному контенту. Стандартные решения поисковой проблемы во всемирной сети - порталы и поисковые машины.

Порталы

Порталы представляют собой семантическую структуру WWW, создаваемую путем организации содержимого различных ресурсов в соответствии с некоторыми предметными областями: хобби, спорт, исследовательская деятельность и т.д. Примеры: Yahoo!¹, dmoz² и другие. Основная их цель - задать классификационную структуру практически любой теме в сети. Классификации создаются и поддерживаются огромным количеством людей. Однако смысл категорий портала определяет только сам пользователь и поэтому данная смысловая нагрузка не предназначена для машинного использования. Основная проблема с порталами наподобие Yahoo! в том, что мир не может быть представлен в рамках одной иерархии. Портал предоставляет только одну точку зрения на данные, и люди могут не соглашаться с тем, какие категории должны быть использованы. На практике подобные таксономии вырастают до огромных размеров и требуют значительного количества людских ресурсов для поддержания.

Поисковые машины

Поисковые машины являются одними из первых механизмов в сети, которые начали использовать семантику, пригодную для машинной обработки. Основная идея заключается в использовании так называемого паука, который посещает web-страницы, исследует их содержимое и создает индексы в соответствии с ключевыми словами. Этот подход задает эксплицитные данные в форме URL ключевым словам или каким-либо другим выражениям. Поиск, основанный на ключевых словах, обладает рядом преимуществ, в частности скоростью и релевантностью в ряде случаев, но есть и недостатки:

- Ключевое слово, содержащееся в документе, вовсе не означает, что документ является релевантным.
- Поисковые системы не понимают синонимы.
- Поисковые системы не понимают слова с несколькими смыслами.
- Ресурс может быть обнаружен только в случае, если ключевое слово содержится в нем эксплицитно.
- Сложно вычислить релевантность документа по отношению к запросу.

В языке HTML тег <META> может быть использован для задания ключевых слов к документу. Однако практика показывает, что этот тег часто используется неправильно. Например, страницы часто аннотируются irrelevantной информацией, ошибочными ключевыми словами для запусков web-пауков.

¹<http://www.yahoo.com>

²<http://dmoz.org>

Поэтому тег `<META>` часто игнорируется поисковыми машинами. Таким образом, к основным недостаткам поисковых машин может быть отнесена низкая точность поиска, необходимость просмотра длинного списка результатов. Подобные проблемы могут быть решены на основе Семантической Сети (Semantic Web).

Основная идея Semantic Web заключается в аннотации WWW семантической информацией, пригодной для машинной обработки. Аннотация web-ресурсов метаданными может быть достигнута с помощью различных архитектурных подходов. Существуют как имплицитные, так и эксплицитные архитектуры метаданных.

- **Имплицитные** метаописания языковых структур содержатся в алгоритмах. Например, Java приложение может получить доступ к узлам XML документа и выразить смысловую нагрузку, которую они несут через API (DOM, SAX). В подобных документах нет явного представления смысловых значений элементов. Такая имплицитная процедурная семантика не может иметь прямого машинного доступа для обработки, ее сложно модифицировать программными агентами.
- **Эксплицитные** метаданные могут быть получены и обработаны различными приложениями. Их можно алгоритмически интерпретировать и модифицировать; они могут разделяться различными приложениями. В Semantic Web эксплицитные метаданные необходимы для задания смысла понятного машинам.

Помимо этого, архитектура метаданных может быть рассмотрена как с точки зрения ресурса, так и с точки зрения пользователя. С точки зрения ресурса метаданные могут быть подразделены на:

- **Внешние** - представлены отдельно от ресурса, который они описывают. Примером могут служить различные каталоги и т.д.
- **Внутренние** - содержатся в документе, который описывают. Например, в HTML документах тег `<META>` используется для описания контента.

С клиентской точки зрения метаданные бывают:

- **Централизованными** - метаописания могут быть получены из одного ресурса. Например, индексы поисковых машин, UDDI реестр.
- **Распределенные** описания, как, например, аннотации к web-страницам.

Для построения метаописаний ресурсов во всемирной сети необходимы формальные семантические языки. Эти языки имеют два уровня. Первый - **синтаксическая спецификация** для задания структуры выражений, используемых в языке. В качестве синтаксической спецификации для WWW используется язык XML и XML Schema. Второй уровень - **семантическая спецификация** (интерпретация). С ее помощью задается смысл синтаксического выражения в терминах некоторой модели, лежащей в основе. Эта модель отражает предметную область приложения. Используя соотношения между синтаксической и семантической моделью, компьютеры могут интерпретировать языковые выражения, как, например, утверждения фактов, правила, запросы и т.д. Примером языка, содержащего некоторую семантическую основу, может служить язык запросов SQL (Structured Query Language) в реляционных БД - запросы в данном языке несут семантическую нагрузку, так как определены в терминах реляционной модели, лежащей в основе. Следует отметить, что XML не является семантическим языком с точки зрения обработки компьютером. В XML не присутствует семантическая модель, только синтаксическая. Смысл XML элементов и атрибутов проявляется только при процедурной обработке XML дерева. Теги языка несут смысловую нагрузку только относительно пользователя.

Логические метаописания

Идея использования тега (`<META>`) для описания ключевых слов контента была расширена с целью представления логических описаний содержимого страницы. Примером системы, воплотившей такую идею, является система OntoBroker³.

OntoBroker реализует язык *HTML^A* для дополнения аннотаций в HTML документе. Это логический язык на базе фреймов. Аннотации заключаются внутри специального тега `<A>`. При проектировании приложения в первую очередь определяются понятия, относящиеся к содержимому, в виде онтологии. Затем страница аннотируется в соответствии с онтологией, путем создания экземпляров классов, объектов и назначения атрибутам значений. Для идентификации объектов используется URL. Например, следующая разметка свидетельствует о том, что Иванов (Ivanov), идентифицированный своей домашней страничкой,

³www.aifb.uni-karlsruhe.de/www-broker

представляет собой экземпляр класса Работники (Employee) и имеет адрес электронной почты (свойство объекта):

```
<a onto="http://www.yaroslavl.ru/Ivanov/":Employee"></a>
```

```
<a onto="http://www.yaroslavl.ru/Ivanov/":email:"mailto:ivanov@yandex.ru"></a>
```

Основываясь на документах, аннотированных при помощи онтологии, web-паук может быть использован для выделения метаописаний, заключенных внутри документа, разбора их и переноса в глобальный централизованный репозиторий. Пользователь может делать запросы к репозиторию, используя логический язык запросов, который является подмножеством языка для проектирования онтологии. Ответы на запросы генерируются логической машиной вывода.

Аналогичные идеи в настоящее время используются с применением таких языков описания онтологий, как OIL (Ontology Inference Layer), DAML (DARPA Agent Markup Language) и их комбинация DAML+OIL, DAML-S, OWL-S и другие. В основе этих языков лежит язык описания ресурсов RDF (Resource Description Framework) и его расширение RDFS (RDF Schema).

Язык описания ресурсов RDF

Модель данных

Язык описания ресурсов представляет собой универсальную схему для представления метаданных о web-ресурсах [1]. Ресурс, в данной трактовке, представляет собой все, что доступно через всемирную сеть: HTML страница, ее части, изображение и т.д. Более того, ресурсом может быть и то, что напрямую через сеть недоступно, например, человек. Ресурс определяется через URI и необязательный идентификатор.

RDF описание, как правило, состоит из триплетов вида ресурс, свойство, значение свойства (субъект, предикат, объект в лингвистической интерпретации). Набор триплетов RDF описания представляет собой направленный граф, узлы (ресурсы) и дуги (свойства) которого идентифицируются через URI или представляют собой литералы (Рис. 1).

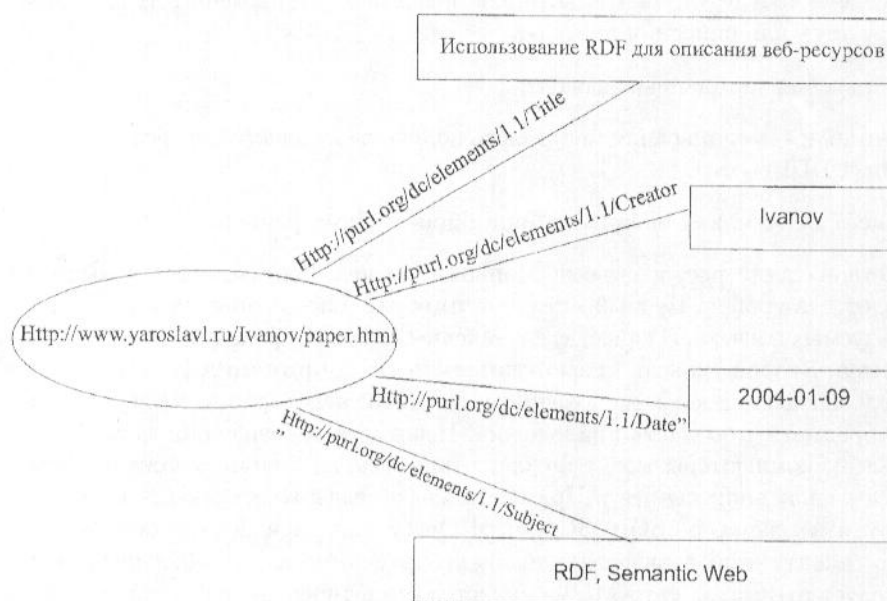


Рис. 1. RDF метаданные, представленные в виде графа

Синтаксис

RDF спецификация определяет два альтернативных синтаксиса, основанных на XML: сериализационный (serialization) и сокращенный (abbreviated) синтаксис.

Все RDF описание представляет собой набор rdf:Description элементов внутри тега <rdf:RDF> с атрибутом about, который идентифицирует описываемый ресурс. Внутри этого тега возможно задание описания различных свойств данного ресурса. Примером описания ресурса на языке RDF может служить описание web-страницы:

```
<?xml version="1.0"?>
```

```
<rdf:RDF xmlns:rdf="http://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#"
  xmlns:DC="http://purl.org/dc/elements/1.1/">
```

```
<rdf:Description rdf:about="http://www.yaroslavl.ru/Ivanov/paper.html">
```

```
<DC:Title>Использование RDF для описания веб-ресурсов</DC:Title>
```



```
<DC:Creator>Ivanov</DC:Creator>
<DC:Date>2004-01-09</DC:Date>
<DC:Subject>RDF, Semantic Web</DC:Subject>
</rdf:Description>
```

В RDF нет механизма для определения свойств ресурсов, классов ресурсов к которым относятся свойства, ограничений, накладываемых на свойства. Эти возможности реализованы в спецификации W3C RDF Schema (RDFS) [2]. Эта рекомендация не определяет специфические классы или свойства, как, например Creator, Date. Вместо этого в RDFS реализован универсальный механизм для описания подобных словарей.

RDFS вводит в RDF систему иерархических классов, аналогичную системам, используемым в языках объектно-ориентированного программирования (C++, Java). Рекомендация определяет небольшой набор базовых классов и свойств, с помощью которых пользователь может определить собственные словари для различных областей.

Примером применения RDF и RDFS может служить описание класса млекопитающих и его подклассов.

```
<?xml version="1.0"?>
<rdf:RDF xmlns:rdf="http://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#"
  xmlns:rdfs="http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#"
  <rdf:Description rdf:ID="Mammal">
    <rdf:type rdf:resource="http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#Class"/>
    <rdfs:subClassOf rdf:resource="http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#Resource"/>
  </rdf:Description>
  <rdf:Description rdf:ID="Wolf">
    <rdf:type rdf:resource="http://www.w3.org/2000/01/rdf-schema#Class"/>
    <rdfs:subClassOf rdf:resource="#Mammal"/>
  </rdf:Description>
```

Таким образом, RDF схема дополняет RDF модель объектно-ориентированным подходом к описанию ресурсов. Используя построение сложных иерархий классов, разработчик может детально отразить знания и понятия предметной области. Это позволяет машинам обрабатывать метаданные более эффективным способом.

Примеры RDF приложений

Dublin Core. Этот стандарт представляет собой одну из наиболее распространенных схем метаданных. Он определяет набор элементов, используемых в различных предметных областях, особенно при описании документов [3]. Словарь Dublin Core состоит из двух частей: элементы и спецификаторы. В набор элементов входят такие понятия, как Title, Creator, Date, Language и другие. Всего около 15 элементов, описанных при помощи ISO/IEC 11179 атрибутов. Например, элемент Title определен следующим образом:

Element: Title
Name: Title
Identifier: Title
Definition: A name given to the resource
Comment:
Typically a Title will be a name by which the resource is formally known.
Version: 1.1 Registration Authority:
Dublin Core Metadata Initiative
Language: en
vCard Schema.

Этот словарь определяет элементы, используемые в большинстве кредитных карт. Информация, представленная здесь, может быть использована в приложениях, где требуется задать описание человека. Определены такие элементы, как: FN (Full Name), Nickname и т.д. [4].

RDFPic.

Этот стандарт используется для присоединения метаданных к цифровым фотографиям. Подобная информация будет обеспечивать тестовое, невизуальное представление изображения для его поиска в сети [5].

Помимо этого, существуют и будут развиваться другие направления использования метаданных во всемирной сети: персонализация, описание профиля устройств, аннотации, описания продуктов, служб, процессов и т.д. Более точный поиск будут предоставлять поисковые машины, при условии широкого распространения метаданных в сети. На данный момент острым остается вопрос определения уровня доверия для метаописаний. Разработки этой проблемы ведутся в рамках разработок уровня доверия Semantic Web.

Список литературы

1. Рекомендация World Wide Web Consortium <http://www.w3.org/TR/2004/REC-rdf-primer-20040210/>.
2. Рекомендация World Wide Web Consortium <http://www.w3.org/TR/2004/REC-rdf-schema-20040210/>.
3. Dublin Core Workgroup <http://dublincore.org/documents/1999/07/02/docs>.
4. R. Lanella "Representing vCard objects in RDF", 2001. <http://www.w3.org/TR/vcard-rdf>.
5. Y. Lafon, B.Bos "Describing and retrieving photos using RDF and HTTP", 2000. <http://www.w3.org/TR/photo-rdf>.

УДК 517.9

Об одном уравнении теплопроводности, моделирующем работу термопечатающей головки

Ануфриенко С.Е., Калинин В.Б.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 15 сентября 2005

Аннотация

В работе рассматривается математическая модель термопечатающей головки, которая представляет собой задачу для уравнения теплопроводности в трехмерной области сложной формы с переменным коэффициентом температуроемкости. Для решения задачи построена разностная схема, приводятся результаты вычислений.

Введение

При разработке термопечатающих головок (ТПГ) возникают две основные задачи: обеспечение требуемого быстродействия и качества печати при минимальных затратах энергии; обеспечение высокой надежности ТПГ при заданном режиме печати (см., например, [1]).

На этапе проектирования необходимо сделать оценки параметров термочувствительной бумаги, характеристик теплового быстродействия ТПГ, а также энергии, необходимой для термопечати, т.к. этими факторами определяются, главным образом, технические характеристики термопечатающего устройства (ТПУ). Важно подобрать параметры так, чтобы не наблюдалось заметного наложения тепловых полей.

В данной статье для расчета характеристик теплового быстродействия используется трехмерная математическая модель. Эта модель представляет собой четырехслойную структуру: теплоотвод, теплоизолирующий слой, слой источника тепла и защитный слой. Схема данной структуры изображена на рисунке 1.

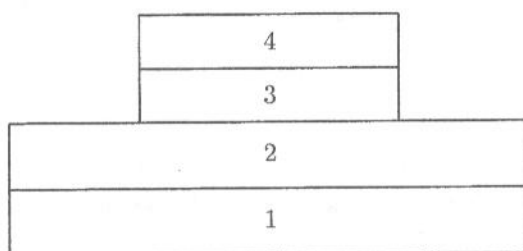


Рисунок 1

Цифры на рисунке соответствуют номеру слоя.

Описание модели

Динамику температуры описывает следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = c^i \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} \right) + f^i(t, x, y, z); \quad (1)$$

$$x_0^i < x < x_1^i, \quad y_0^i < y < y_1^i, \quad z^{i-1} < z < z^i, \quad 0 < t < T;$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь функция $u^i(t, x, y, z)$ описывает температуру i -го слоя, c^i — коэффициент температуроемкости (на границе слоев с номерами i и $i + 1$ коэффициент температуроемкости равен $(c^i + c^{i+1})/2$), функция $f^i(t, x, y, z)$ описывает распределение источников тепла в i -ом слое.

Для параметров, определяющих границы области, выполняются соотношения:

$$x_0^1 = x_0^2 < x_0^3 = x_0^4;$$

$$y_0^1 = y_0^2 < y_0^3 = y_0^4;$$

$$x_1^1 = x_1^2 > x_1^3 = x_1^4;$$

$$y_1^1 = y_1^2 > y_1^3 = y_1^4.$$

Начальное условие: $u^i(0, x, y, z) = \Theta$ ($i = 1, \dots, 4$), где Θ — температура внешней среды, которая предполагается постоянной.

Граничные условия: на внешних участках границы $u^i = \Theta$ ($i = 1, \dots, 4$), на границе слоев с номерами i и $i + 1$ выполнены условия согласования: $u^i = u^{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$).

Построение разностной схемы

Для решения системы (1) введем в рассмотрение функции, определенные на множестве

$$M = \{(t, x, y, z) : 0 \leq t \leq T; \quad z^0 \leq z \leq z^4;$$

$$x_0^1 \leq x \leq x_1^1, \quad y_0^1 \leq y \leq y_1^1 \quad \text{при} \quad z^0 \leq z \leq z^2;$$

$$x_0^3 \leq x \leq x_1^3, \quad y_0^3 \leq y \leq y_1^3 \quad \text{при} \quad z^2 \leq z \leq z^4\}$$

по следующему правилу:

$$u(t, x, y, z) = u^i(t, x, y, z), \quad f(t, x, y, z) = f^i(t, x, y, z)$$

$$\text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_0^i \leq x \leq x_1^i, \quad y_0^i \leq y \leq y_1^i, \quad z^{i-1} \leq z \leq z^i.$$

Считая все линейные размеры соизмеримыми, обозначим длины шагов по переменным t, x, y, z через τ, ξ, μ, η соответственно. Введем также следующие обозначения:

$$J = \frac{T}{\tau}; \quad K = \frac{x_1^1 - x_0^1}{\xi}, \quad K_1 = \frac{x_0^3 - x_0^1}{\xi}, \quad K_2 = \frac{x_1^3 - x_0^1}{\xi};$$

$$M = \frac{y_1^1 - y_0^1}{\mu}, \quad M_1 = \frac{y_0^3 - y_0^1}{\mu}, \quad M_2 = \frac{y_1^3 - y_0^1}{\mu};$$

$$N_i = \frac{z^i - z^0}{\eta}, \quad i = 1, \dots, 4;$$

$$u_{k,m,n}^j = u(j\tau, k\xi, m\mu, n\eta).$$

Построим неявную разностную схему для вычисления функции $u(t, x, y, z)$:

$$\frac{u_{k,m,n}^j - u_{k,m,n}^{j-1}}{\tau} = c^1 \frac{u_{k-1,m,n}^j - 2u_{k,m,n}^j + u_{k+1,m,n}^j}{\xi^2} +$$

$$\frac{u_{k,m-1,n}^j - 2u_{k,m,n}^j + u_{k,m+1,n}^j}{\mu^2} + \frac{u_{k,m,n-1}^j - 2u_{k,m,n}^j + u_{k,m,n+1}^j}{\eta^2} + f_{k,m,n}^j. \quad (2)$$

Здесь $j = 1, \dots, J$; $k = 1, \dots, K - 1$; $m = 1, \dots, M - 1$; $n = 1, \dots, N_1 - 1$.

Уравнение (2) описывает функцию u в узлах, которые расположены внутри первого слоя. В узлах, расположенных на внешней границе первого слоя, функция u должна удовлетворять граничным условиям:

$$u_{0,m,n}^j = u_{K,m,n}^j = u_{k,0,n}^j = u_{k,M,n}^j = u_{k,m,0}^j = \Theta.$$

Кроме этого, из начального условия следует:

$$u_{k,m,n}^0 = \Theta, \quad k = 0, \dots, K; \quad \text{при} \quad m = 0, \dots, M; \quad n = 0, \dots, N_1 - 1.$$

Для узлов, расположенных на границе первого и второго слоев, имеем:

$$\frac{u_{k,m,N_1}^j - u_{k,m,N_1}^{j-1}}{\tau} = \frac{c^1 + c^2}{2} \cdot \frac{u_{k-1,m,N_1}^j - 2u_{k,m,N_1}^j + u_{k+1,m,N_1}^j}{\xi^2} +$$

$$\frac{u_{k,m-1,N_1}^j - 2u_{k,m,N_1}^j + u_{k,m+1,N_1}^j}{\mu^2} + \frac{u_{k,m,N_1-1}^j - 2u_{k,m,N_1}^j + u_{k,m,N_1+1}^j}{\eta^2} + f_{k,m,N_1}^j. \quad (3)$$

Из граничных и начального условий получим:

$$u_{0,m,N_1}^j = u_{K,m,N_1}^j = u_{k,0,N_1}^j = u_{k,M,N_1}^j = \Theta,$$

$$\text{при } j = 1, \dots, J; \quad k = 1, \dots, K-1; \quad m = 1, \dots, M-1;$$

$$u_{k,m,N_1}^0 = \Theta, \quad \text{при } k = 0, \dots, K; \quad m = 0, \dots, M.$$

Полностью аналогично (2)–(3) выписываются уравнения для узлов, расположенных внутри и на границах остальных слоев. В результате получим систему уравнений, которая решается с помощью стандартных методов (см., например, [2]). Неявная схема имеет лучшую сходимость [2], что и послужило причиной ее использования.

Описанная схема позволяет рассчитать толщину каждого слоя так, чтобы наложение тепловых полей было минимальным.

Список литературы

1. Бугрова Н.В., Калинин В.Б., Рамс А.Э., Чуйко А.Н. Конструктивно-технологические особенности оптимального проектирования термопечатающих головок // Всесоюзная конференция молодых ученых и специалистов приборостроительной промышленности: тезисы докладов научной конференции. М., ЦНИИ Приборостроения, 1980.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

УДК 519.710.73

Верификация протокола обмена данными между клиентской и серверной частями программного пакета FTH

Чернуль А.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 16 сентября 2005

Аннотация

Данная работа представляет собой верификацию протокола туннелинга программного пакета FTH. В работе строится сеть Петри, моделирующая этот протокол, формулируется ряд свойств, которым она должна удовлетворять. Затем они проверяются при помощи программного средства CPN Tools. Рассмотрен широкий спектр свойств модели, исключающий ее неадекватное поведение.

Введение

Часто при написании программ, разработке алгоритмов и протоколов встает вопрос о корректности результата. Данной проблеме стоит уделять время, если верифицируемый код (протокол) в дальнейшем планируется широко использовать (например протокол TCP/IP, который используется в Internet'e), или когда затраты, убытки или потери в случае ошибки превышают затраты на проверку. Особенно этот вопрос актуален в случаях, когда программу не получается выполнить пошагово для каждой ветви алгоритма. Это может быть вызвано тем, что ее части работают параллельно, используют общие ресурсы для обмена данными, синхронизации и т.д. В таких случаях, как показывает практика, в коде содержится наибольшее число ошибок, поскольку программисту намного сложнее разрабатывать, отлаживать и предсказывать выполнение программ с межпроцессным взаимодействием. При разработке протокола интерес представляет не только правильность его программной реализации, но и корректность самого протокола. Полезно составить модель, увидеть «вживую» и проверить его работу. Еще на стадии проектирования можно наблюдать много интересных особенностей.

Существует много различных формализмов, которые позволяют моделировать распределенные системы. Например, системы охраняемых команд (guarded commands), системы расширенных переходов (extended transition systems), диаграммы состояний (state charts), сети Петри и другие [1]. Сети Петри во многих аспектах выгодно отличаются от остальных формализмов, поскольку базируются на понятиях «состояние» и «событие», непосредственно представляют фундаментальные проблемы распределенных систем (такие как атомарность, синхронизация, обоюдная независимость событий, сообщения, общая память и т.д.), рассматривают активные и пассивные компоненты не по отдельности, а совокупно [1, 2].

Процесс верификации распределенных систем на основе сетей Петри делится на три этапа: моделирование системы, определение проверяемых свойств на языке модели и ее проверка (model checking). На первом этапе составляется сеть Петри, которая будет являться моделью нашей системы и описывать ее поведение частично или полностью (в рамках анализируемых свойств). Второй этап представляет собой формализацию свойств системы подлежащих проверке или анализу в терминах составленной сети. На третьем этапе модель проверяется на выполнение этих свойств.

Существует набор инструментальных средств, с помощью которых можно исследовать модели систем, выполненных в виде сетей Петри. Одним из них является пакет CPN Tools. Он работает с раскрашенными сетями Петри и предназначен для создания, прогона, отладки, верификации и проверки их свойств. Пакет содержит собственный встроенный язык моделирования (CPN ML) [3] с богатым набором возможностей для определений условий срабатываний переходов, задания своих «цветов», начальной разметки, правил ее изменения. CPN Tools позволяет также задать функции, выполняющиеся при срабатывании определенного перехода, проверять сеть на выполнение стандартных свойств сетей Петри, создавать собственные запросы для проверки дополнительных свойств [4], а также имеет множество других возможностей.

Моделирование и верификация протокола

Программный пакет FTH, который мы рассмотрим в данной статье, является одной из таких распределенных систем. Он состоит из двух частей: клиентской (FTHC) и серверной (FTHS). Пакет позволяет

создавать туннель для протокола HTTP через сетевую файловую систему. Серверная часть запускается на компьютере, с которого есть доступ в Internet по протоколу HTTP, а клиентская — на компьютере подсети (C), в которой нужно получить доступ. Между сервером (компьютером, на котором будет запущена серверная часть) и клиентом (на нем запускается клиентская часть) должна функционировать сетевая файловая система, к которой они обе имеют полный доступ хотя бы в одном каталоге. Тогда после соответствующей настройки создается канал для доступа в Internet с компьютеров подсети (C).

При написании пакета FTH был разработан протокол обмена данными между серверной и клиентской частями FTH, выполняющимися на разных машинах параллельно. Этот протокол является ключевой частью функционирования пакета, так как благодаря ему достигается возможность передавать данные между FTHC и FTHS и создавать туннель. В работе рассматривается задача его верификации.

По исходному коду FTH была составлена раскрашенная сеть Петри, моделирующая протокол взаимодействия клиентской и серверной части (рис. 1). Фишки 1, ..., N являются точками контроля потоков каждой из частей. Сеть можно разделить на три условные части — модель файловой системы, модель клиентской части, модель серверной части. Файловая система моделируется множеством ее состояний. Четыре позиции задают ее основные состояния (существование и содержимое файлов $x.in$, $x.out$). Позиции и переходы с префиксами "Cl", "x_" и "Srv" моделируют соответственно клиентскую, файловую и серверную части. Рядом с каждой позицией указывается ее цвет и начальное состояние. Цвет CH определен как целое число от 1 до N (где N — максимальное число каналов). Цвет $CHxDATA$ — как $CH \times STRING$, т.е. вектор, состоящий из значения цвета CH и строки. Начальное состояние $CH.all()$ обозначает все элементы цвета CH. Состояния $ClFreeThr$ и $SrvFreeThr$ являются начальными состояниями клиентской и серверной частей, т.е. состояниями готовности принимать запросы.

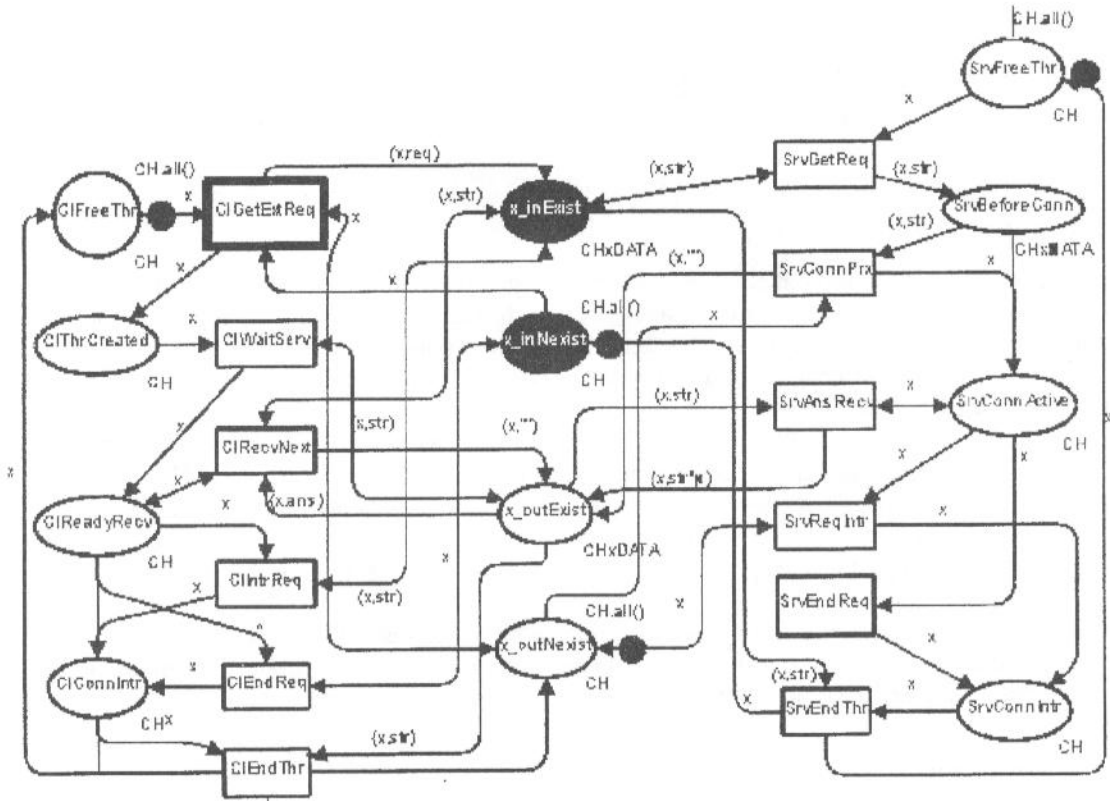


Рис. 1.

Серверная часть выполняет роль TCP/IP клиента. Клиентская является TCP/IP сервером, поскольку слушает порт и позволяет устанавливать с собой соединения. Она принимает все запросы пользовательской программы. Когда пользовательская программа сформировала запрос, она создает сетевое подключение к клиентской части и посылает запрос ей. FTHC принимает данные, «запаковывает», передает по каналу сетевой файловой системы ($ClGetExtReq$) и переходит в режим ожидания установки соединения серверной частью ($ClThrCreated$). FTHS при получении запроса создает процесс, который будет его обслуживать ($SrvGetReq$), открывает соединение с прокси сервером ($SrvConnPrx$), передает запрос ему и

создает файл *x.out*, сигнализируя клиентской части, что соединение установлено. FTNC при этом перейдет в состояние ожидания ответа (*ClReadyRecv*). При получении новых порций ответа серверной частью от прокси (*SrvAnsRecv*), они дописываются в файл *x.out* и параллельно считываются клиентской частью (*ClRecvNext*). Когда прокси сервер разрешит запрос, он допишет ответ последний раз и закроет с ней сеанс связи (*SrvEndReq*). FTNC в свою очередь через сетевую файловую систему передает последнюю порцию ответа клиентской части и удаляет *x.in*, сигнализируя о том, что работа серверной части закончена (*SrvEndThr*). FTNC дочитывает ответ, передает его клиентской программе и также удаляет *x.out*, показывая, что он тоже завершил свою работу (*ClEndThr*). При этом канал освобождается и может быть использован для обработки следующего запроса.

Для анализа и верификации протокола был использован пакет CPN Tools. От разработчиков была получена персональная лицензия на его использование. Рассчитан граф переходов [4], проверены стандартные свойства сети, такие как верхние и нижние границы значений каждой позиции, домашние свойства, свойства живости, наличие мертвых переходов и разметок. Оказалось, что домашними свойствами и свойствами живости обладают все разметки и переходы, а мертвых переходов и разметок нет. Также разработчиком и независимыми экспертами сформулированы дополнительные нестандартные правила верификации сети. Для их проверки были написаны специальные запросы [4] на встроенном языке CPN ML. Эти правила касаются проверки правильности внутренних деталей реализации сети, недостижимости логически некорректных состояний, соответствия состояний клиентской, серверной и файловой части, правильности синхронизации между ними и т.д. Приведем некоторые из них:

- а) $x_inExist$ содержит фишку $(x, request) \Leftrightarrow x_inNext$ не содержит фишку x ,
 б) $x_inExist$ не содержит фишку $(x, request) \Leftrightarrow x_inNext$ содержит фишку x ,
 т.е. если $x.in$ существует, то он не «не существует» и наоборот.
- x_inNext и $x_outNext$ содержат фишку $x \Leftrightarrow ClFreeThr$ и $SrvFreeThr$ содержат фишку x ,
 т.е. если $x.in$ и $x.out$ не существуют $\Leftrightarrow$ обе части в состоянии «Free» и готовы принимать новый запрос.

Заключение

В результате верификации ошибок в протоколе обмена данными между FTNC и FTNS найдено не было. CPN Tools показал себя как удобный, универсальный, наглядный инструмент для создания, отладки и верификации раскрашенных сетей Петри. Единственный его недостаток - низкая скорость работы. Также для полной верификации граф переходов должен сформироваться полностью, что может быть сделано далеко не для всех сетей.

Данную модель можно расширить, если добавить в модель некоторые детали. Например, можно заметить, что обе части работают с файловой системой на «локальном» уровне. Поскольку хотя бы для одной из частей файловая система является сетевой, можно добавить соответствующие компоненты и учесть нюансы работы с файловой системой по сети. Другой вариант — добавление в сеть времени. После этого можно, например, формулировать дополнительные свойства о пропускной способности, о времени отклика системы и проверять их.

Проблемой верификации распределенных систем занимаются с момента их появления. Несмотря на это, данная проблема до сих пор решается лишь частично — полная проверка правильности больших систем со сложной архитектурой даже сегодня не представляется возможной.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя Ломазову Ирину Александровну за терпение и помощь, оказанную при написании этой работы.

Список литературы

1. W. Reisig. Elements of distributed algorithms: modeling and analysis with Petri Nets. Springer-Verlag, 1998.
2. Ломазова И.А. Сети Петри и анализ поведенческих свойств распределенных систем: Учебное пособие. Ярославль, 2002.

3. Soren Christensen and Torben Bisgaard Haagh. Overview of CPN ML Syntax. University of Aarhus, 1996.
4. K. Jensen and others. Design/CPN Occurrence Graph Manual. University of Aarhus, 1996.

УДК 517.929.2

Об асимптотике решений одного разностного уравнения второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами

Бурд В.Ш., Нестеров П.Н.¹
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В работе рассматривается одно разностное уравнение второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами. Авторами предпринята попытка использовать метод усреднения для анализа асимптотики разностных уравнений. При построении асимптотики решений уравнения существенную роль играет разностный аналог теоремы Левинсона.

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\right) x(n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь параметр $0 < \alpha \leq 1$, а действительная функция $p(n)$ является или периодической, или представляет собой дискретный тригонометрический многочлен вида

$$p(n) = \sum_{j=1}^m p_j e^{i\lambda_j n},$$

где p_j – комплексные числа, а λ_j – действительные числа. Кроме того, мы будем считать, что функция $p(n)$ имеет нулевое среднее значение, т.е.

$$M(p(n)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p(j) = 0.$$

Исследуем вопрос о поведении решений уравнения (1) при $n \rightarrow +\infty$.

Уравнение (1) запишем как систему

$$\begin{aligned} x(n+1) - x(n) &= y(n) \\ y(n+1) - y(n) &= -n^{-\alpha} x(n). \end{aligned}$$

Пусть $Y_0(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$ и $\Delta Y_0(n) = Y_0(n+1) - Y_0(n)$. Тогда

$$\Delta Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -n^{-\alpha} p(n) & 0 \end{pmatrix} Y_0. \quad (2)$$

Выполним преобразование

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi(n) & 1 \end{pmatrix} Y_1, \quad (3)$$

где

$$\phi(n) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} p(k). \quad (4)$$

Тогда получим систему

$$\Delta Y_1 = \begin{pmatrix} \phi(n) & 1 \\ -\phi(n)\phi(n+1) & -\phi(n+1) \end{pmatrix} Y_1. \quad (5)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственной научной программы Минобрнауки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект №49234) и программы "Университеты России" (грант 04.01.452).

Периодическую или почти периодическую функцию $p_1(n)$ с нулевым средним значением определим из уравнения

$$p_1(n+1) - p_1(n) = p(n).$$

Применив дважды дискретный аналог интегрирования по частям (преобразование Абеля) к сумме (4), получим

$$\phi(n) = -p_1(n)(n-1)^{-\alpha} + O(n^{-1-\alpha}).$$

Тогда

$$\phi(n)\phi(n+1) = p_1(n)p_1(n+1)(n-1)^{-\alpha}n^{-\alpha} + O(n^{-2\alpha-1}).$$

Теперь сделаем замену переменных в системе (5)

$$Y_1(n) = \begin{pmatrix} n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n).$$

Приходим к системе

$$\begin{pmatrix} (n+1)^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \Delta Y(n) + \begin{pmatrix} \Delta(n^{\frac{\alpha}{2}}) & 0 \\ 0 & \Delta(n^{-\frac{\alpha}{2}}) \end{pmatrix} Y(n) = \\ = \begin{pmatrix} \phi(n) & 1 \\ -\phi(n)\phi(n+1) & -\phi(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n)$$

или

$$\Delta Y(n) = \begin{pmatrix} (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}} \phi(n) & (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}} \\ -(n+1)^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}} \phi(n)\phi(n+1) & -(n+1)^{\frac{\alpha}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}} \phi(n+1) \end{pmatrix} Y(n) - \\ - \begin{pmatrix} 1 - (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & 1 - (n+1)^{\frac{\alpha}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n).$$

Подставляя в последнюю систему выражения для $\phi(n)$ и $\phi(n)\phi(n+1)$ и выполняя некоторые элементарные преобразования, окончательно получим систему

$$Y(n+1) = [I + n^{-\alpha} A_1(n) + n^{-1} B + R(n)] Y(n), \quad (6)$$

где I – единичная матрица,

$$A_1(n) = \begin{pmatrix} -p_1(n) & 1 \\ -p_1(n)p_1(n+1) & p_1(n+1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

и $R(n) = O(n^{-1-\alpha})$.

Изложим ряд соображений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\hat{x}(n+1) = \left[I + \sum_{j=1}^k n^{-j\alpha} A_j(n) + R(n) \right] \hat{x}(n). \quad (7)$$

Здесь натуральное число k и действительное число α такие, что $0 < k\alpha \leq 1 < (k+1)\alpha$. Элементами матриц $A_j(n)$, $j = 1, \dots, k$ являются периодические функции или тригонометрические многочлены. В последнем случае

$$A_j(n) = \sum_{r=1}^m a_{jr} e^{i\lambda_r n},$$

где a_{jr} – постоянные квадратные матрицы, вообще говоря, комплексные, а λ_r – действительные числа. Наконец, пусть $R(n) \in \ell_1$, т.е.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|R(l)\| < \infty.$$

Система (7) при достаточно больших n с помощью замены

$$\hat{x}(n) = \left[\sum_{j=0}^k n^{-j\alpha} V_j(n) \right] \hat{y}(n), \quad (8)$$

где $V_0 = I$, а элементами матриц $V_j(n)$, $j = 1, \dots, k$ являются периодические функции или тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\hat{y}(n+1) = \left[I + \sum_{j=1}^k n^{-j\alpha} A_j + R_1(n) \right] \hat{y}(n), \quad (9)$$

где A_j , $j = 1, \dots, k$ – постоянные матрицы, а $R_1(n) \in \ell_1$.

Матрицы $V_j(n)$ с нулевым средним значением определяются из следующих разностных уравнений:

$$V_j(n+1) - V_j(n) = \sum_{l=0}^{j-1} A_{j-l}(n) V_l(n) - \sum_{l=0}^{j-1} V_l(n+1) A_{j-l}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (10)$$

На каждом шаге матрица A_j определяется как среднее значение правой части уравнения (10), т.е.

$$A_j = M \left[\sum_{l=0}^{j-1} A_{j-l}(n) V_l(n) \right].$$

Асимптотику решений системы (9) можно построить с помощью разностного аналога асимптотической теоремы Левинсона (см., например, [3]). Сформулируем ее применительно к системе следующего вида:

$$\hat{y}(n+1) = \left[I + \sum_{j=1}^k n^{-\alpha_j} A_j + R_1(n) \right] \hat{y}(n), \quad (11)$$

где A_j – постоянные матрицы, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq 1$ и $R_1(n) \in \ell_1$.

Теорема 1. Пусть первой отличной от нулевой и единичной матрицы в (11) является матрица A_m . Пусть ее собственные числа различны. Тогда фундаментальная матрица $\Phi(n)$ системы (11) имеет следующую асимптотику при $n \rightarrow +\infty$:

$$\Phi(n) = \left[P + o(1) \right] \prod_{l=n_1}^{n-1} \Lambda(l), \quad n > n_1,$$

где столбцами матрицы P являются собственные векторы матрицы A_m , а $\Lambda(l)$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы $I + \sum_{j=1}^k n^{-\alpha_j} A_j$.

Построение асимптотики системы (6) начнем со случая $\alpha = 1$. Итак,

I. $\alpha = 1$.

Заменой $Y(n) = [I + n^{-1}V(n)]Z(n)$ мы перейдем от системы (6) к системе

$$Z(n+1) = \left[I + n^{-1}(A_1 + B) + R_1(n) \right] Z(n),$$

где

$$A_1 = M(A_1(n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

$c = M(p_1(n)p_1(n+1))$ и $R_1(n) = O(n^{-2})$. Собственные числа матрицы $A_1 + B$ различны при $c \neq \frac{1}{4}$. Вычисляя собственные числа матрицы $I + n^{-1}(A_1 + B)$, убеждаемся в необходимости рассмотреть следующие случаи:

1. $1 - 4c > 0$.

Тогда собственные числа имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \frac{1}{n}\kappa, \quad \text{где } \kappa = \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

Матрица P из теоремы 1, в чем несложно убедиться, выглядит следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \kappa & \frac{1}{2} - \kappa \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(n)$ имеет следующую асимптотику при $n \rightarrow +\infty$:

$$\Phi(n) = [P + o(1)] \prod_{l=n_1}^{n-1} \Lambda(l),$$

где $\Lambda(l) = \text{diag}(\lambda_1(l), \lambda_2(l))$. Вспоминая все замены, выписываем асимптотику для решений системы (1) при $n \rightarrow +\infty$

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)) \prod_{l=n_1}^{n-1} \left(1 \pm \frac{\kappa}{l}\right).$$

Получим более информативное асимптотическое представление для $x_{1,2}(n)$. Пусть

$$f(n) = \prod_{l=n_1}^{n-1} \left(1 \pm \frac{\kappa}{l}\right),$$

тогда, без ограничения общности полагая, что $f(n) > 0$, $n > n_1$, имеем

$$\ln f(n) = \sum_{l=n_1}^{n-1} \ln \left(1 \pm \frac{\kappa}{l}\right).$$

Поскольку,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$\ln f(n) = \sum_{l=n_1}^{n-1} \left(\pm \frac{\kappa}{l} + O(l^{-2})\right) = \pm \sum_{l=n_1}^{n-1} \frac{\kappa}{l} + C_1 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где C_1 – некоторая постоянная. Оценим сумму, входящую в это выражение, с помощью формулы Эйлера (см [1,2]). Применительно к рассматриваемым нами функциям она будет иметь вид

$$\sum_{l=n_1}^{n-1} l^{-\alpha} = \int_{n_1}^n t^{-\alpha} dt + C_2 + O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

где C_2 – некоторая постоянная. Откуда,

$$\ln f(n) = \pm \kappa \ln n + C_3 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

где C_3 – некоторая постоянная. Поэтому $f(n)$ имеет следующую асимптотику при $n \rightarrow +\infty$:

$$f(n) = C^* n^{\pm \kappa} (1 + o(1)),$$

где C^* – некоторая постоянная. Соответственно, линейно независимые решения $x_{1,2}(n)$ уравнения (1) обладают следующей асимптотикой:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2} \pm \kappa} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

2. $1 - 4c < 0$.

В этом случае собственные числа имеют такой вид

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{i\kappa^*}{n}, \quad \text{где } \kappa^* = \sqrt{c - \frac{1}{4}}.$$

Матрица P несколько изменяется

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + i\kappa^* & \frac{1}{2} - i\kappa^* \end{pmatrix}.$$

Рассуждая также как и в предыдущем случае, получаем следующую асимптотику для решений уравнения (1):

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2}} \exp\{\pm i\kappa^* \ln n\} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

II. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Сделаем в (6) замену переменных $Y(n) = [I + n^{-\alpha} V_1(n)] Z(n)$. Перейдем к системе

$$Z(n+1) = [I + n^{-\alpha} A_1 + n^{-1} B + R_1(n)] Z(n),$$

где $R_1(n) = O(n^{-2\alpha})$. Собственные числа матрицы A_1 различны, когда $c \neq 0$. Поэтому, начиная с этого момента и везде далее, рассматривается именно этот случай. Пусть сначала

1. $c > 0$.

Собственные числа матрицы $I + n^{-\alpha} A_1 + n^{-1} B$ комплексны и имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm i \frac{\sqrt{c}}{n^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cn^{2-2\alpha}}}.$$

Матрица P выглядит следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{c} & -i\sqrt{c} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему (1), получим

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} (1 + o(1)) \prod_{l=n_1}^{n-1} \left[1 \pm i \frac{\sqrt{c}}{l^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cl^{2-2\alpha}}} \right], \quad n \rightarrow +\infty.$$

Применяя ту же технику, что и в предыдущем случае, и замечая, что

$$\pm i \frac{\sqrt{c}}{l^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cl^{2-2\alpha}}} = \pm i \frac{\sqrt{c}}{l^\alpha} + O(l^{\alpha-2}), \quad l \rightarrow +\infty,$$

приходим к следующему выводу:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \pm i \frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \right\} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

2. $c < 0$.

Теперь

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \frac{\sqrt{-c}}{n^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cn^{2-2\alpha}}}$$

и

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-c} & -\sqrt{-c} \end{pmatrix}.$$

Без труда устанавливается, что

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \right\} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

III. $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

В этом случае в системе (6) нам необходимо сделать замену $Y(n) = [I + n^{-\alpha} V_1(n) + n^{-2\alpha} V_2(n)] Z(n)$. Приходим к системе

$$Z(n+1) = [I + n^{-\alpha} A_1 + n^{-2\alpha} A_2 + n^{-1} B + R_1(n)] Z(n),$$

где $R_1(n) = O(n^{-3\alpha})$. Матрица A_2 определяется как среднее значение матрицы $A_1(n)V_1(n)$. Матрица $V_1(n)$ находится из разностного уравнения

$$V_1(n+1) - V_1(n) = A_1(n) - A_1.$$

Производя соответствующие выкладки, получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \varphi & \beta \end{pmatrix},$$

где

$$\beta = M \left[p_1(n+1) \sum_{l=1}^n p_1(l) \right] \quad \text{и}$$

$$\varphi = M \left[(p_1(n+1)p_1(n+2) - c) \sum_{l=1}^n p_1(l) - p_1(n+2) \sum_{l=1}^n (p_1(l)p_1(l+1) - c) \right].$$

При вычислении матрицы A_2 мы, в частности, воспользовались тривиальным соображением о том, что периодические или почти периодические функции $g(n)$ и $g(n+1)$ имеют одинаковое среднее значение. Как и в предыдущем случае следует рассмотреть две ситуации:

1. $c > 0$.

Собственные числа матрицы $I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + n^{-1}B$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} \pm i \frac{\sqrt{c}}{n^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\varphi}{cn^\alpha} - \frac{\alpha^2}{4cn^{2\alpha-2}}}.$$

Матрица P такая же, как и в предыдущем случае ($c > 0$). Пользуясь описанной выше техникой, строим асимптотическое представление для

$$\prod_{l=n_1}^{n-1} \left[1 + \beta l^{-2\alpha} \pm i \frac{\sqrt{c}}{l^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\varphi}{cl^\alpha} - \frac{\alpha^2}{4cl^{2\alpha-2}}} \right], \quad n \rightarrow +\infty.$$

Приходим к выводу, что решения уравнения (1) имеют следующую асимптотику при $n \rightarrow +\infty$:

$$x_{1,2}(n) = n^{\alpha/2+\beta+c/2} \exp \left\{ \pm i \left(\frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{c}}{2c} \ln n \right) \right\} (1 + o(1)), \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если же $\alpha < \frac{1}{2}$, то

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \frac{\beta+c/2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha} \right\} \exp \left\{ \pm i \left(\frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{c}}{2c(1-2\alpha)} n^{1-2\alpha} \right) \right\} (1 + o(1)).$$

Заметим, что в последнем случае все решения уравнения (1) стремятся к нулю, когда $\beta + \frac{c}{2} < 0$. Соответствующий пример мы приводим ниже.

2. $c < 0$.

В этом случае

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} \pm \frac{\sqrt{-c}}{n^\alpha} \sqrt{1 - \frac{\varphi}{cn^\alpha} - \frac{\alpha^2}{4cn^{2\alpha-2}}}.$$

Естественно, матрица P по сравнению со случаем $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ($c < 0$) не изменяется. Мы позволим себе сразу же написать асимптотику для решений $x_{1,2}(n)$ уравнения (1) при $n \rightarrow +\infty$:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \pm \left(\frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{-c}}{2c} \ln n \right) + (\beta + c/2) \ln n \right\} (1 + o(1)), \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

и

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left\{ \pm \left(\frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{-c}}{2c(1-2\alpha)} n^{1-2\alpha} \right) + \frac{\beta+c/2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha} \right\} (1 + o(1)), \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

Теперь мы можем перейти к построению асимптотики в общем случае.

IV. $\frac{1}{M+1} < \alpha \leq \frac{1}{M}$, $M > 2$, M – целое.

В уравнении (6) теперь делается замена

$$Y(n) = [I + n^{-\alpha}V_1(n) + n^{-2\alpha}V_2(n) + \dots + n^{-k\alpha}V_k(n)]Z(n)$$

и получаемая система имеет вид

$$Z(n+1) = [I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + \dots + n^{-k\alpha}A_k + n^{-1}B + R_1(n)]Z(n),$$

где $R_1(n) = O(n^{-(k+1)\alpha})$. Мы не можем написать явного выражения для собственных чисел $\lambda_{1,2}(n)$ матрицы

$$I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + \dots + n^{-k\alpha}A_k + n^{-1}B, \quad (12)$$

не определяя всех матриц A_i вплоть до A_k . На самом деле, в большинстве случаев знание явного вида матриц A_1 и A_2 оказывается достаточным для определения характера поведения решений системы (1).

1. $c > 0$.

Собственные числа матрицы (12) $\lambda_{1,2}(n)$ имеют следующую асимптотику при $n \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} + O(n^{-3\alpha}) \pm i(\sqrt{cn}^{-\alpha} + O(n^{-2\alpha})).$$

Асимптотика решений уравнения (1) при $n \rightarrow +\infty$ тогда имеет вид

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{\frac{\beta + c/2}{1 - 2\alpha} n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha})\right\} \exp\left\{\pm i\left(\frac{\sqrt{c}}{1 - \alpha} n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})\right)\right\} (1 + o(1)).$$

Естественно что, если $\alpha = \frac{1}{3}$, то вместо $O(n^{1-3\alpha})$ находится слагаемое порядка $O(\ln n)$. Заметим также, что если $\beta + c/2 = 0$, то нам необходимо вычислить матрицу A_3 , чтобы определить, как ведут себя решения уравнения (1) при $n \rightarrow +\infty$.

2. $c < 0$.

Собственные числа $\lambda_{1,2}(n)$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \sqrt{-cn}^{-\alpha} + O(n^{-2\alpha}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Соответственно,

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{\pm \frac{\sqrt{-c}}{1 - \alpha} n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})\right\} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

В этом случае существуют неограниченно возрастающие решения уравнения (1).

Пример. Рассмотрим дискретную периодическую функцию p с периодом 5 и нулевым средним значением. Пусть она принимает следующие значения на периоде:

$$p = \{2, 3, -3, -1, -1\}.$$

Вычислим величины c и β . Получаем

$$c = \frac{2}{5}, \quad \beta = -\frac{7}{5}, \quad \beta + \frac{c}{2} = -\frac{6}{5} < 0.$$

Таким образом, если $\alpha = 1$, то все решения уравнения (1) колебательно возрастают, причем амплитуда колебаний растет как $\sqrt{n}$. Если $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, то решения по-прежнему колебательно растут. При этом амплитуда колебаний растет как $n^{\frac{\alpha}{2}}$. Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то решения начинают колебательно убывать. Скорость убывания амплитуды $n^{-0.95}$. Если $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, то амплитуда решений убывает со скоростью $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\frac{6}{5} \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right\}$. Наконец, если $\alpha \leq \frac{1}{3}$, то скорость убывания амплитуды равна $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\frac{6}{5} \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + O(\ln n)\right\}$, когда $\alpha = \frac{1}{3}$, и $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\frac{6}{5} \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha})\right\}$ при $\alpha < \frac{1}{3}$.

Использованная техника применима и для исследования уравнения

$$x(n+2) - \left(2 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\right) x(n+1) + x(n) = 0,$$

которое после замены

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{l=l_0}^{n-2} \left(2 + \frac{1}{l^\alpha} p(l)\right) y(n)$$

приобретает следующий вид:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + \frac{4}{\left(2 + \frac{1}{(n-1)^\alpha} p(n-1)\right) \left(2 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\right)} y(n) = 0.$$

Авторы выражают признательность Глызину Д.С. за помощь, оказанную при численной проверке полученных результатов.

Список литературы

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
3. Benzaid Z., Lutz D.A. Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195 – 221.

Трансверсали семейств выпуклых множеств со свойством d -пересечений в $\mathbb{R}^d$

Карасёв Р.Н.¹

Московский Физико-технический институт

e-mail: r_n_karasev@mail.ru

получена 30 сентября 2005

Аннотация

В данной работе рассматриваются конечные семейства выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, в которых любые d или менее множеств имеют общую точку. Для некоторых семейств такого вида даются линейные по d оценки на размер конечного множества, пересекающегося со всеми множествами семейства.

1. Введение

В данной работе рассматриваются конечные семейства выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, в которых любые d или менее множеств имеют общую точку. Нас будет интересовать минимальный размер конечного множества в $\mathbb{R}^d$, пересекающего каждое множество данного семейства.

Начнем с некоторых определений:

Определение. t -трансверсаль семейства множеств $\mathcal{F}$ — t -элементное множество T , такое что $\forall S \in \mathcal{F} \ S \cap T \neq \emptyset$.

Определение. Минимальное t , для которого существует t -трансверсаль семейства множеств $\mathcal{F}$ обозначим $\tau(\mathcal{F})$.

Определение. Для семейства множеств $\mathcal{F}$ выполняется свойство Π_k , если для любого $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ с $|\mathcal{G}| \leq k$ пересечение $\bigcap \mathcal{G}$ непусто.

Теорема Хелли утверждает, что Π_{d+1} влечет $\tau(\mathcal{F}) = 1$ для любого семейства $\mathcal{F}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, случай Π_d — это самый легкий из нетривиальных случаев, когда можно ожидать небольшие оценки на $\tau(\mathcal{F})$. Следует отметить, что пример гиперплоскостей в общем положении показывает, что без ограничений на семейство $\mathcal{F}$ свойство Π_d не гарантирует никакой оценки числа $\tau(\mathcal{F})$. Поэтому для получения оценки на размер трансверсали имеет смысл рассматривать какие-то специальные семейства, в частности семейства гомотетов или транслятов одного и того же выпуклого компакта.

Далее мы будем рассматривать конечные семейства замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), для которых выполняется Π_d . Мы покажем, что при некоторых ограничениях на семейство $\mathcal{F}$ свойство Π_d влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq d + 1$ и дадим линейную по d оценку для размера трансверсали семейств евклидовых шаров со свойством Π_d . Один из результатов такого типа — гипотеза Грюнбаума о трансверсали семейств транслятов — был доказан автором в [4]:

Теорема 1. Для семейства $\mathcal{F}$ транслятов двумерного выпуклого компакта Π_2 влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq 3$.

В этой статье мы приведем несколько аналогичных результатов:

Теорема 2. Для семейства $\mathcal{F}$ гомотетов центрально-симметричного выпуклого компакта в $\mathbb{R}^2$, коэффициенты гомотетии которых попарно отличаются не более чем в два раза, Π_2 влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq 3$.

В [3] Грюнбаум доказал, что если не накладывать ограничение на коэффициенты гомотетии, то в этой теореме можно поставить $\tau(\mathcal{F}) \leq 7$. В нашем случае ограничение на коэффициенты гомотетии позволяет уменьшить размер трансверсали до трех.

В случае произвольной размерности аналог данного результата можно доказать для евклидовых шаров:

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №03-01-00801

Теорема 3. Для семейства $\mathcal{F}$ евклидовых шаров в $\mathbb{R}^d$, радиусы которых отличаются не более, чем в d раз, Π_d влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq d + 1$.

Существование $(d + 1)$ -трансверсали для семейств равных шаров со свойством Π_d доказано в [1], теорема 3 усиливает этот результат, позволяя радиусам шаров отличаться в заданное число раз. С помощью этого результата можно получить некоторую оценку на размер трансверсали для семейства шаров в $\mathbb{R}^d$ со свойством Π_d без ограничений на радиус:

Теорема 4. Для семейства $\mathcal{F}$ евклидовых шаров в $\mathbb{R}^d$, Π_d влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq 3(d + 1)$ при $d \geq 5$ и $\tau(\mathcal{F}) \leq 4(d + 1)$ при $d \leq 4$.

Видимо, оценка в этой теореме может быть улучшена, особенно для малых d . Эта теорема дает в случае $d = 2$ $\tau(\mathcal{F}) \leq 12$, а результат Данцера (см. [1, 2]) дает 4, что говорит о грубости оценки.

Для семейств положительных гомотетов симплекса в пространстве произвольной размерности имеет место оценка $d + 1$ без ограничений на коэффициент гомотетии:

Теорема 5. Для семейства $\mathcal{F}$ положительных гомотетов симплекса в $\mathbb{R}^d$, Π_d влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq d + 1$.

Теорему 3 можно обобщить и распространить на семейства множеств, не обязанных быть гомотетами друг друга, но удовлетворяющих другим условиям. Чтобы сформулировать это обобщение, нам понадобятся несколько определений.

Определение. Выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$ называется R -выпуклым сверху, если он является пересечением шаров радиуса R .

Определение. Выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$ называется R -выпуклым снизу, если он является объединением шаров радиуса R .

Теорема 6. Для семейства $\mathcal{F}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, каждый из которых R -выпуклый снизу и dR -выпуклый сверху для некоторой общей константы $R > 0$, Π_d влечет $\tau(\mathcal{F}) \leq d + 1$.

Заметим, что остается открытым вопрос о том, верна ли оценка $\tau(\mathcal{F}) \leq d + 1$ (или другая линейная по d оценка) для произвольных семейств транслятов выпуклого множества.

2. Вспомогательные факты о семействах со свойством Π_d

В теоремах этой статьи построение $(d + 1)$ -элементного множества, которое будет трансверсалью $\mathcal{F}$, будет произведено с помощью одной и той же конструкции. Приведем ее описание в общем случае семейства выпуклых замкнутых множеств $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ со свойством Π_d .

Введем определение:

Определение. Пусть $\{K_1, K_2, \dots, K_{d+1}\} \subseteq \mathcal{F}$. Семейство полупространств

$$\{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\},$$

где для любого $i = 1, \dots, d + 1$ $K_i \subseteq H_i$ назовем допустимым семейством полупространств семейства $\mathcal{F}$.

Определение. Если допустимое семейство полупространств семейства $\mathcal{F}$ имеет пустое пересечение, назовем такое семейство *непересекающимся*.

Докажем леммы:

Лемма 1. Пусть семейство $\mathcal{F}$ обладает свойством Π_d . Тогда для каждого непересекающегося допустимого семейства полупространств $\{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$ семейства $\mathcal{F}$ множество

$$S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1}) = \text{cl} \left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} H_i \right)$$

ограничено и является симплексом.

Доказательство. Семейство полупространств $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$ имеет пустое пересечение, но любые d его элементов имеют непустое пересечение. Пусть для $i = 1, \dots, d+1$

$$x_i \in \bigcap_{j \neq i} H_j.$$

Если $\{x_i\}_{i=1}^{d+1}$ не образуют симплекс, то они лежат в некоторой $d-1$ мерной гиперплоскости и по теореме Радона множество индексов $[d+1]$ можно разбить на два I_1 и I_2 так, что существует

$$x \in \text{conv}\{x_i\}_{i \in I_1} \cap \text{conv}\{x_i\}_{i \in I_2},$$

в этом случае $x \in \bigcap \mathcal{H}$.

Значит, $\{x_i\}_{i=1}^{d+1}$ образуют симплекс S и полупространства H_i покрывают его соответствующие гиперграни. Если семейство $\mathcal{H}$ покрывает S , то по лемме Шпернера $\bigcap \mathcal{H} \cap S \neq \emptyset$, что неверно. Значит, существует точка

$$x \in \text{int } S \quad \forall i = 1, \dots, d+1 \quad x \notin H_i.$$

Пусть некоторая точка $y \in \mathbb{R}^d$ не принадлежит S . Если она не принадлежит ни одному полупространству из $\mathcal{H}$, то весь отрезок $[x, y]$ не принадлежит ни одному полупространству из $\mathcal{H}$ (так как дополнение к полупространству выпукло), значит, точка $z = [x, y] \cap \text{bd } S$ не принадлежит ни одному полупространству из $\mathcal{H}$, но граница S покрывается семейством $\mathcal{H}$ — противоречие. Значит, $\mathbb{R}^d \setminus S \subseteq \bigcup \mathcal{H}$.

Поэтому $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1}) = \text{cl}(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} H_i)$ оказывается многогранником с непустой внутренностью и не более $d+1$ гранями, значит, это d -мерный симплекс. $\square$

Лемма 2. Если для семейства $\mathcal{F}$ со свойством Π_d не существует непересекающегося допустимого семейства полупространств, то $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $|\mathcal{F}| \leq d$, то утверждение очевидно. Иначе, по теореме Хелли, найдутся

$$\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_{d+1}\} \subseteq \mathcal{F}$$

такие, что $\bigcap \mathcal{K} = \emptyset$.

Пусть для $i = 1, \dots, d+1$ L_i — множество линейных функций $l(x)$ таких, что $l(x) \leq 0$ для любого $x \in K_i$. Тогда из стандартных свойств двойственности следует, что если $\bigcap \mathcal{K} = \emptyset$, то функция, тождественно равная единице, принадлежит выпуклой оболочке $\text{conv} \bigcup_{i=1}^{d+1} L_i$. Из этого следует, что существуют такие неотрицательные $\{a_i\}_{i=1}^{d+1}$ и набор

$$\{l_i\}_{i=1}^{d+1} (l_i \in L_i \quad \forall i = 1, \dots, d+1), \quad \text{что} \quad 1 = \sum_{i=1}^{d+1} a_i l_i(x).$$

Обозначим теперь $H_i = \{x : l_i(x) \leq 0\}$. Очевидно, что эти множества не имеют общей точки, иначе в ней бы нарушалось вышеприведенное равенство, кроме того, для любого $i = 1, \dots, d+1$ $K_i \subseteq H_i$ и каждое H_i либо полупространство, либо все пространство. Те H_i , которые совпадают со всем пространством, мы можем заменить на произвольные полупространства, содержащие соответствующие K_i , таким образом получим непересекающееся допустимое семейство полупространств. $\square$

Лемма 3. Пусть семейство $\mathcal{F}$ обладает свойством Π_d . Тогда либо $\tau(\mathcal{F}) = 1$, либо существует такое непересекающееся допустимое семейство полупространств $\{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$, что объем симплекса $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$ является максимальным среди соответствующих объемов для непересекающихся допустимых семейств.

Доказательство. Если непересекающихся допустимых семейств нет, то по лемме 2 $\tau(\mathcal{F}) = 1$.

Иначе, достаточно доказать, что для каждого фиксированного семейства

$$\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_{d+1}\} \subseteq \mathcal{F}$$

непересекающихся множеств достигается максимум объема $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$ по всем непересекающимся допустимым семействам $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$, соответствующим $\mathcal{K}$. Тогда утверждение леммы будет следовать из конечности числа семейств $\mathcal{K}$.

Любые d элементов семейства $\mathcal{K}$ имеют непустое пересечение, значит можно найти для любого $i = 1, \dots, d+1$

$$x_i \in \bigcap_{j \neq i} K_j.$$

По рассуждениям, аналогичным доказательству леммы 1,

$$S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1}) \subseteq \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\},$$

значит $\text{vol}(S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1}))$ ограничен.

Ясно, что если вместо каждого полупространства H_i мы возьмем полупространство, опорное к K_i и содержащееся в исходном H_i , то объем симплекса $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$ только увеличится. Так как каждое опорное к K_i полупространство однозначно задается своей единичной нормалью n_i , то на множестве наборов опорных полупространств к семейству $\mathcal{K}$ вводится топология $(d+1)$ -й декартовой степени единичной сферы. На множестве непересекающихся допустимых опорных полупространств вершины симплекса $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$ и его объем являются непрерывными функциями.

Тогда пусть $\sup \text{vol}(S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1}))$ по всем непересекающимся допустимым семействам опорных полупространств к $\mathcal{K}$ равен $2\varepsilon > 0$. Тогда легко проверить, что множество таких наборов $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$ опорных полупространств, что $\text{vol}(S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})) \geq \varepsilon$ замкнуто в вышеуказанной топологии, значит на нем объем достигает максимума, равного 2ε . $\square$

Приведенные выше леммы позволяют сформулировать определение:

Определение. Для конечного семейства $\mathcal{F}$ выпуклых замкнутых множеств в $\mathbb{R}^d$, обладающего свойством Π_d и не имеющего общей точки, обозначим симплекс $S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$ максимального объема, соответствующий некоторому непересекающемуся допустимому семейству полупространств, за $S(\mathcal{F})$, симплекс, составленный из центров масс его граней — $s(\mathcal{F})$.

Лемма 4. Каждый элемент конечного семейства $\mathcal{F}$ выпуклых замкнутых множеств в $\mathbb{R}^d$, обладающего свойством Π_d и не имеющего общей точки, пересекается с $s(\mathcal{F})$.

Для доказательства этой леммы нам понадобится лемма о симплексах:

Лемма 5. Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$ с вершинами $\{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}\}$, S' — симплекс с вершинами $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_d, v_{d+1}\}$, где точки v'_i ($i = 1, \dots, d$) лежат на лучах $v_{d+1}v_i$ соответственно. Тогда если $\text{int } S'$ содержит центр масс грани $\{v_1, \dots, v_d\}$, то $\text{vol } S' > \text{vol } S$.

Доказательство. Пусть в системе координат с центром v_{d+1} и базисом

$$\{v_{d+1}v'_1, v_{d+1}v'_2, \dots, v_{d+1}v'_d\}$$

i -я координата вершины v_i равна x_i , тогда из условия следует, что

$$\sum_{i=1}^d x_i < d.$$

Тогда по неравенству между средними $\prod_{i=1}^d x_i < 1$, что равносильно $\text{vol } S' > \text{vol } S$. $\square$

Доказательство леммы 4. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_{d+1}\} \subseteq \mathcal{F},$$

которое соответствует допустимому семейству полупространств

$$\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\},$$

для которого $S(\mathcal{F}) = S(H_1, H_2, \dots, H_{d+1})$. Соответствующие вершины $S(\mathcal{F})$ и $s(\mathcal{F})$ обозначим $\{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}\}$ и $\{w_1, w_2, \dots, w_{d+1}\}$ соответственно.

Каждое K_i касается соответствующей грани $S(\mathcal{F})$, так как иначе не выполнялось бы условие максимальности объема. Предположим, что K_i не пересекает $s(\mathcal{F})$.

Рассмотрим C_i — конус с вершиной w_i , натянутый на лучи w_iw_j ($j \neq i$). Тогда K_i не пересекает C_i , так как эти множества лежат по разные стороны от $\text{bd } H_i$ и могли пересекаться только по $w_i \in s(\mathcal{F})$.

Тогда найдется полупространство H'_i , которое содержит K_i и не пересекается с C_i . Тогда семейство полупространств $(\mathcal{H} \setminus \{H_i\}) \cup \{H'_i\}$ допустимо и не имеет общей точки, так как $\bigcap_{j \neq i} H_j \subseteq C_i$. По лемме 5

$$\text{vol } S(H_1, \dots, H'_i, \dots, H_{d+1}) > \text{vol } S(\mathcal{F})$$

— противоречие.

Пусть теперь $K \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{K}$. Предположим $K \cap s(\mathcal{F}) = \emptyset$. Найдется полупространство $H \supseteq K$, которое не пересекается с $s(\mathcal{F})$. Так как $H \not\supseteq S(\mathcal{F})$, то можно рассмотреть самую дальнюю от H вершину $S(\mathcal{F})$, пусть это v_i . Тогда $\bigcap_{j \neq i} H_j$ — конус с вершиной v_i , все направляющие которого направлены от H , значит, $H \cap \bigcap_{j \neq i} H_j = \emptyset$ и семейство $(\mathcal{H} \setminus \{H_i\}) \cup \{H\}$ не имеет общей точки. Рассмотрев симплексы $S((\mathcal{H} \setminus \{H_i\}) \cup \{H\})$ и $S(\mathcal{F})$ аналогично предыдущему случаю по лемме 5 получим противоречие. $\square$

Еще одна лемма нужна нам в доказательстве теоремы 4:

Лемма 6. Пусть в $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 5$) дан симплекс S , множество внешних полупространств к его гиперграням $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$. Пусть шар B радиуса R вместе с семейством $\mathcal{H}$ дает семейство со свойством P_d . Тогда радиус вписанного в S шара r удовлетворяет неравенству

$$r \leq \frac{1}{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor - 1} R \leq 1/2 R.$$

Доказательство. Пусть вершины S — это $\{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}\}$. Рассмотрим ортогональную проекцию $p: \mathbb{R}^d \mapsto V$, отождествляющую пары вершин v_1 и v_2, v_3 и v_4 и так далее. Если $d+1$ нечетно, то пусть проекция отождествит три последние вершины v_{d-1}, v_d, v_{d+1} , иначе отождествляются пары. При этом получится симплекс S' с $d' + 1 = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ вершиной с множеством внешних полупространств к гиперграням $\mathcal{H}' = \{H'_1, H'_2, \dots, H'_{d'+1}\}$ и шар B' . Так как в барицентрических координатах $\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\}$ относительно S и $\{y_1, y_2, \dots, y_{d'+1}\}$ относительно S' проекция выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \\ &\dots \\ y_{d'+1} &= x_d + x_{d+1} \quad \text{или} \quad y_{d'+1} = x_{d-1} + x_d + x_{d+1}, \end{aligned}$$

то легко видеть, что B' имеет общую точку с каждым из семейств $\mathcal{H}' \setminus \{H'_i\}$, следовательно, B' содержит S' . Значит, шар радиуса $\frac{1}{d'} R$, получающийся из B' гомотетией с центром в центре масс S' и коэффициентом $\frac{1}{d'}$, пересекает все грани S' , следовательно, радиус вписанного шара S' не превосходит $\frac{1}{d'} R$. Значит, радиус вписанного шара S также не превосходит $\frac{1}{d} R$. $\square$

3. Вогнутые симплексы радиуса кривизны R

Сформулируем определения:

Определение. Пусть семейство $\{B_1, B_2, \dots, B_{d+1}\}$ из $d+1$ евклидова шара радиуса R в $\mathbb{R}^d$ с центрами $o_1, o_2, \dots, o_{d+1}$ таково, что каждые d шаров семейства имеют общую точку, а все шары не имеют общей точки. Тогда множество

$$\text{cl} \left(\text{conv} \{o_1, o_2, \dots, o_{d+1}\} \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} B_i \right)$$

назовем *вогнутым симплексом радиуса кривизны R* .

На плоскости можно также рассмотреть произвольную норму и определить аналогичное понятие для этой нормы:

Определение. Пусть семейство $\{B_1, B_2, B_3\}$ из 3 шаров радиуса R нормы $\|\cdot\|$ на плоскости с центрами o_1, o_2, o_3 таково, что каждые 2 пара семейства пересекаются, а все шары не имеют общей точки. Тогда множество

$$\text{cl} \left(\text{conv} \{o_1, o_2, o_3\} \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_i \right)$$

назовем *вогнутым симплексом радиуса кривизны R в норме $\|\cdot\|$* .

По лемме Шпернера определенные таким образом множества непусты. Определение вогнутого симплекса для произвольной нормы можно сделать и для пространства произвольной размерности, однако в данном случае работа с таким множеством осложняется тем, что ограниченная компонента связности множества $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} B_i$ не обязательно лежит в $\text{conv}\{o_1, o_2, \dots, o_{d+1}\}$.

Докажем леммы о свойствах вогнутого симплекса радиуса R . Если не оговорено противное, в леммах рассматривается одновременно двумерный случай с произвольной нормой и многомерный с евклидовой нормой.

Определение. *Вершиной* вогнутого симплекса в $\mathbb{R}^d$ назовем такую точку на его границе, которая принадлежит границе ровно d шаров, определяющих вогнутый симплекс.

Лемма 7. *Пусть T — вогнутый симплекс радиуса кривизны R . Тогда $\text{int } T$ не пересекает границу симплекса $S = \text{conv}\{o_1, o_2, \dots, o_{d+1}\}$, T лежит в выпуклой оболочке своих вершин и количество вершин T равно $d + 1$.*

Доказательство. Первая часть леммы следует из того, что каждая гипергрань S содержится в объединении шаров радиуса R с центрами в ее вершинах.

Каждая крайняя точка множества T обязана быть его вершиной, поэтому T лежит в выпуклой оболочке своих вершин.

Каждая вершина T соответствует пересечению d сфер радиуса R . Центры этих сфер дают некоторую гипергрань S . Если сферы пересекаются в двух точках, то они лежат по разные стороны гиперплоскости этой гипергрань и только одна из них может быть вершиной T . В двумерном случае при нестрогом выпуклых шарах сферы могут пересечься по отрезку, но вершинами T могут быть только его концы и один из них также отпадает. Тогда всего вершин T получается не более $d + 1$. Но меньше не может быть, так как $\text{int } T$ не пусто. $\square$

Лемма 8. *Вогнутый симплекс T радиуса кривизны R в двумерном случае имеет диаметр не более R в соответствующей норме, в d -мерном случае имеет диаметр не более $\frac{2}{\sqrt{d^2-1}}R < R$.*

Доказательство. В двумерном случае T лежит в срединном треугольнике треугольника $o_1 o_2 o_3$, поэтому его диаметр не более R .

В многомерном случае с евклидовой нормой рассмотрим точку o , равноудаленную от $o_1, o_2, \dots, o_{d+1}$. Она не лежит ни в одном из шаров $B_{o_i}(R)$, и не лежит вне $\text{conv}\{o_1, o_2, \dots, o_{d+1}\}$, значит, $o \in T$. Из результата Данцера (см. теорему 6.8 в [1]) следует, что $|oo_i| \leq \frac{d}{\sqrt{d^2-1}}R$.

Длина любой касательной из o к сфере радиуса R с центром o_i не превосходит $\frac{1}{\sqrt{d^2-1}}R$, следовательно, длина отрезка из o до некоторой точки сферы радиуса R с центром o_i , пересекающего эту сферу только в конце, также не более $\frac{1}{\sqrt{d^2-1}}R$. Так как каждая вершина T лежит на радикальной оси некоторых d шаров, и эта ось проходит через o , то все отрезки ov (v — вершина T) лежат в T и пересекают сферы радиуса R с центрами в o_i только в концах. Значит, все отрезки ov имеют длину не более $\frac{1}{\sqrt{d^2-1}}R$, откуда тривиально следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 9. *Шар радиуса $R' \geq R$ пересекается с вогнутым симплексом T радиуса кривизны R тогда и только тогда, когда содержит его вершину.*

Доказательство. Обозначим множество центров шаров радиуса R' , которые пересекают T за X , множество центров шаров радиуса R' , которые содержат одну из вершин T за Y , очевидно

$$Y = \bigcup_{i=1}^{d+1} B_{o_i}(R').$$

Так как $\text{diam } T \leq R$, то каждый шар $B_{o_i}(R')$ содержит T , значит, Y звездно с любым центром в T . Аналогично X звездно с любым центром в T . Тогда нам достаточно доказать, что $\text{bd } X \subseteq Y$.

Пусть $x \in \text{bd } X$ и $B = B_x(R')$. Очевидно $B \cap \text{int } T = \emptyset$ и $B \cap \text{bd } T \neq \emptyset$.

Рассмотрим случай евклидовой нормы.

Пусть $y \in \text{bd } X \cap B$. Если y не вершина, то она лежит не более чем на $d - 1$ сферах радиуса R , определяющих T . Пусть их центры $o_1, \dots, o_k$, $k \leq d - 1$. Из рассмотрения линейного приближения множеств T и B в точке y и условия $\text{int } X \cap \text{int } B = \emptyset$ следует, что

$$x - y = \sum_{i=1}^k \alpha_i (o_i - y) \quad \forall i = 1, \dots, k \quad \alpha_i \geq 0.$$

Если количество индексов i , для которых $\alpha_i \neq 0$ равно 1, то для такого i $B \supseteq B_{o_i}(R)$, тогда B содержит как минимум d вершин T , содержащихся в $B_{o_i}(R)$.

Иначе, рассмотрим аффинное подпространство L , равноудаленное от $o_1, o_2, \dots, o_k$, для него $\dim L \geq 2$, $y \in L$. В пересечении с ним $B_{o_i}(R)$ ($i = 1, \dots, k$) дают совпадающие шары B' некоторого радиуса, а B дает шар B'' . Направление $x - y$ не совпадает ни с одним из $o_i - y$, но лежит в образованном ими конусе. Все $o_i - y$ образуют с L одинаковый угол, а $x - y$ образует с L меньший угол, чем $o_i - y$, значит, радиус B' строго меньше радиуса B'' .

Пересечение $\text{int } T \cap L$ в окрестности y совпадает с $L \setminus B'$, но тогда B'' обязано пересечь $L \setminus B'$ в любой окрестности y , то есть пересечь $\text{int } T \cap L$ — противоречие.

Рассмотрение случая $d = 2$ и произвольной нормы для гладкого и строго выпуклого единичного шара ведется так же, но при этом всегда $k = 1$ и в этом случае не надо использовать множество равноудаленных точек, которое для произвольной нормы не является аффинным подпространством. Далее, норму с произвольным шаром можно аппроксимировать нормой с гладким строго выпуклым шаром и произвести соответствующий переход к пределу. $\square$

Лемма 10. *R -выпуклое снизу множество пересекается с вогнутым симплексом T радиуса кривизны R тогда и только тогда, когда содержит его вершину.*

Доказательство. Тривиально следует из леммы 9. $\square$

4. Доказательства теорем

Доказательство теорем 2 и 3. Если $\tau(\mathcal{F}) = 1$, то все доказано, иначе по лемме 3 рассмотрим $S = S(\mathcal{F})$ и $s = s(\mathcal{F})$. Элементы $\mathcal{F}$ будем называть шарами.

Вместе с шарами $K_1, K_2, \dots, K_{d+1}$ рассмотрим шары $K'_1, K'_2, \dots, K'_{d+1}$, радиус которых равен максимальному радиусу R в семействе $\mathcal{F}$ и которые получаются из $K_1, K_2, \dots, K_{d+1}$ гомотетиями в соответствующих вершинах s . Они пересекаются по d и не пересекаются все вместе, значит, они определяют некоторый вогнутый симплекс T радиуса кривизны R , очевидно $T \supseteq S$. Пусть при гомотетии с коэффициентом $1/d$, переводящей S в s T перейдет в T' , радиус кривизны последнего равен R/d .

По лемме 4 любое множество $K \in \mathcal{F}$ пересекает s , следовательно, пересекает T' , радиус K не менее R/d . Значит, по лемме 9, K содержит одну из $d + 1$ вершин T' . $\square$

Доказательство теоремы 4. В случае, когда все шары пересекаются, теорему можно считать доказанной.

Иначе, рассмотрим шар $B(\mathcal{F})$ минимального радиуса r , пересекающий все шары $\mathcal{F}$. По теореме Хелли, этот шар является шаром минимального радиуса, пересекающим все шары некоторого подсемейства $\mathcal{F}' = \{B_1, B_2, \dots, B_{d+1}\} \subseteq \mathcal{F}$, причем каждое пересечение $B(\mathcal{F}) \cap B_i$ состоит из одной точки v_i .

Пусть H_i — внешнее опорное полупространство к $B(\mathcal{F})$ в точке v_i . Тогда $S = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} \text{int } H_i$ — симплекс со вписанным шаром $B(\mathcal{F})$.

Пусть радиус наименьшего шара $B \in \mathcal{F}$ равен R . Сначала рассмотрим случай $d \geq 5$. Легко видеть, что B и S удовлетворяют условиям леммы 6, следовательно, $r \leq 1/2R$.

Заметим, что шар радиуса r можно поместить в вогнутый симплекс радиуса

$$R' = \frac{1}{\frac{d}{\sqrt{d^2-1}} - 1} r = (d\sqrt{d^2-1} + d^2 - 1)r \leq 2d^2 r \leq d^2 R.$$

Поэтому подсемейство шаров в $\mathcal{F}$ с радиусами $\geq d^2 R$ имеет трансверсаль размера $d + 1$ — множество вершин вышеуказанного вогнутого симплекса. Остальные шары $\mathcal{F}$ можно разбить на семейства шаров с радиусами от R до dR и от dR до $d^2 R$, каждое из которых по теореме 3 имеет $(d + 1)$ -трансверсаль. Итого получаем $3(d + 1)$ -трансверсаль для семейства $\mathcal{F}$.

Если же $d \leq 4$, то мы просто заметим, что все шары $\mathcal{F}$ пересекают наименьший из них шар радиуса R , который можно поместить в вогнутый симплекс радиуса $(d\sqrt{d^2-1} + d^2 - 1)R \leq d^3 R$. Вершины этого вогнутого симплекса дают трансверсаль для шаров из $\mathcal{F}$ с радиусом $\geq d^3 R$, остальные шары можно разбить на три семейства с $(d + 1)$ -трансверсалью, что дает итоговую оценку $4(d + 1)$ на размер трансверсали. $\square$

Доказательство теоремы 5. В случае $\tau(\mathcal{F}) = 1$ все очевидно, иначе рассмотрим $S = S(\mathcal{F})$ и $s = s(\mathcal{F})$.

Заметим, что любой симплекс $K \in \mathcal{F}$ отрицательно гомотетичен S и положительно гомотетичен s , это следует из того, что множество внешних нормалей граней S совпадает с множеством внутренних нормалей граней K .

Предположим, что K не содержит ни одной точки из вершин s .

Если K пересекает какие-то d гиперграни s , то он обязан содержать вершину s , являющуюся их пересечением. Значит, от противного мы должны предположить, что K не пересекает какие-то две гиперграни s . Пусть они соответствуют полупространствам H_1 и H_2 из набора $\{H_1, H_2, \dots, H_{d+1}\}$ внешних полупространств гиперграней S . Полупространства, получающиеся из H_i параллельным переносом, границы которых проходят через соответствующие гиперграни s , обозначим G_i .

K гомотетичен s , пересекает s и не пересекает его грань $\text{bd } G_1 \cap s$. Значит, $K \subseteq G_1$. Аналогично $K \subseteq G_2$. Покажем, что пересечение

$$G_1 \cap G_2 \cap H_3 \cap \dots \cap H_{d+1}$$

либо пусто, либо совпадает с одной из вершин s , последнее возможно только в случае $d = 2$. Так как для всех $i = 1, \dots, d+1$ $H_i \subseteq G_i$, то

$$G_1 \cap G_2 \cap H_3 \cap \dots \cap H_{d+1} \subseteq G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \dots \cap G_{d+1} = s,$$

но s пересекает полупространства $H_3, \dots, H_{d+1}$ в одной точке каждое, значит,

$$G_1 \cap G_2 \cap H_3 \cap \dots \cap H_{d+1}$$

может быть непустым лишь при $d = 2$ и тогда оно равно одной вершине s .

Вспомнив, что K не содержит ни одной вершины s , получаем, что

$$K \cap \bigcap_{i=3}^{d+1} K_i \subseteq K \cap \bigcap_{i=3}^{d+1} H_i = \emptyset,$$

что противоречит свойству Π_d . □

Чтобы доказать теорему 6 нам понадобится лемма:

Лемма 11. Для любого полупространства H , содержащего R -выпуклое сверту множество K найдется шар радиуса R , содержащий K и содержащийся в H .

Автор затрудняется указать, где этот факт был доказан впервые, доказательство можно посмотреть в [5].

Доказательство теоремы 6. Если $\tau(\mathcal{F}) = 1$, то все доказано, иначе по лемме 3 рассмотрим $S = S(\mathcal{F})$ и $s = s(\mathcal{F})$.

Вместе с множествами $K_1, K_2, \dots, K_{d+1}$ рассмотрим шары $K'_1, K'_2, \dots, K'_{d+1}$, обладающие следующими свойствами: радиус K'_i равен dR , K'_i содержит K_i и касается грани S в той же точке, в которой ее касается K_i . Такие K'_i найдутся по лемме 11. Шары $K'_1, K'_2, \dots, K'_{d+1}$ пересекаются по d и не пересекаются все вместе, значит, они определяют некоторый вогнутый симплекс T радиуса кривизны dR , очевидно $T \supseteq S$. Пусть при гомотетии с коэффициентом $1/d$, переводящей S в s T перейдет в T' , радиус кривизны последнего равен R .

По лемме 4 любое множество $K \in \mathcal{F}$ пересекает s , следовательно, пересекает T' . Значит, по лемме 10, K содержит одну из $d+1$ вершин T' . □

Список литературы

1. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли.В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968
2. Eckhoff, J. Helly, Radon, and Carathéodory type theorems // Handbook of Convex Geometry ed. by P.M. Gruber and J.M. Willis, North-Holland, Amsterdam, 1993. P. 389–448
3. Grünbaum B. On intersections of similar sets // Portugal. Math. 1959. 18. P. 155–164.
4. Karasev R.N. Transversals for the families of translates of a two-dimensional convex compact set // Discrete and Computational Geometry. 2000. 24(2/3). P. 345–353
5. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ // Математический сборник. 1996. 187(2). P. 103–130

УДК 517.9+533.6013.42

Резонанс 1:2 как причина возникновения колебаний пластинки при двустороннем воздействии потока газа

Толбей А.О.

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

Работа продолжает исследования флаттера пластинки в случае резонанса 1:2 (см. [1] и [2]), но в случае двустороннего обтекания пластинки потоком газа близким по величине к сверхзвуковым скоростям. В работе показано, что и здесь характерен жесткий режим возбуждения колебаний при скоростях меньших скорости флаттера. При исследовании задачи используется метод нормальных форм.

1. Постановка задачи

Пусть пластинка обтекается с двух сторон потоком газа со скоростями U_1, U_2 . При этом будем считать, что $U_1 \approx U_2$. Без нарушения общности можно считать, что $U_1 > U_2$. В случае цилиндрического изгиба колебания такой пластинки описывают следующей краевой задачей (см. §4.12 из [3]), которую мы приведем в перенормированном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_1 M \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon} M \left(d_1 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 M_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \varepsilon M g_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \varepsilon M g_2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + M^3 g_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \beta g_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0. \quad (2)$$

Здесь нелинейные слагаемые учтены до кубических слагаемых, получающихся после разложения исходных нелинейностей в ряды Тейлора. Понятно, что теперь $x \in [0; 1]$, краевые условия (2) - условия шарнирного опирания пластинки, положительные постоянные $c_1, d_1, d_2, g, g_1, g_2, g_3, g_4, \beta$ - выражаются через реальные физические постоянные, такие как цилиндрическая жесткость, давление в невозмущенном газе и так далее. Их явные выражения можно найти в [3], частично они приведены также в [1] и [2]. Наконец, $M = \frac{U_1}{C_\infty} + \frac{U_2}{C_\infty}$. При перенормировках приняты допущения, что $\frac{U_1}{C_\infty} - \frac{U_2}{C_\infty} = M_0 \sqrt{\varepsilon}$, $\frac{1}{c_\infty} = \sqrt{\varepsilon}$, где M_0 некоторая положительная постоянная. Последние два допущения оправданы с физической точки зрения. Первое из них отражает тот факт, что U_1, U_2 достаточно близки, а второе мотивировано тем, что D и c_∞ достаточно большие постоянные. Здесь D - цилиндрическая жесткость. Напомним, что $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$,

где модуль упругости E обычно очень большая величина (для стали $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$). Величина $\frac{h}{l}$ варьируется в пределах $10^{-2} - 10^{-3}$. Поэтому в реальных ситуациях величина D имеет порядок $10^4 - 10^5$.

Для решения краевой задачи (1), (2) используем метод Галеркина в случае двучленной аппроксимации, то есть положим

$$u(t, x) \approx u_1(t) \sin \pi x + u_2(t) \sin 2\pi x.$$

В результате чего получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + g\dot{u}_1 + \pi^4 u_1 - \frac{8}{3} c_1 M u_2 + F_1(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = 0, \\ \ddot{u}_2 + g\dot{u}_2 + 16\pi^4 u_2 + \frac{8}{3} c_1 M u_1 + F_2(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$F_1(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = \frac{\pi}{2} d_1 \sqrt{\varepsilon} M u_1 \dot{u}_2 - \pi d_2 \sqrt{\varepsilon} M \dot{u}_1 u_2 + \frac{4}{3} \pi d_2 \sqrt{\varepsilon} M u_1^2 + \frac{112}{15} \pi d_2 \sqrt{\varepsilon} M u_2^2 \frac{48}{15} g_1 \varepsilon M \dot{u}_1^2 u_2 + \\ + \frac{32}{15} g_1 \varepsilon M u_1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 - \frac{64}{105} g_1 \varepsilon M u_2 \dot{u}_2^2 + \frac{\pi^2}{4} g_2 \varepsilon M u_1^2 \dot{u}_1 + 2 g_2 \varepsilon M \pi^2 \dot{u}_1 u_2^2 + \frac{24}{15} \pi^2 g_3 M u_1^2 u_2 - \\ - \frac{288}{35} \pi^2 g_3 M u_2^3 + \beta g_4 \cdot \left\{ \frac{-\pi^4}{2} u_1^3 - 2 \pi^4 u_1 u_2^2 \right\},$$

$$F_2(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = \frac{\pi}{2} d_1 \sqrt{\varepsilon} M u_1 \dot{u}_1 + \frac{32}{15} \pi d_2 \sqrt{\varepsilon} M u_1 u_2 + \frac{16}{15} \varepsilon g_1 M u_1 \dot{u}_1^2 - \frac{128}{105} \varepsilon g_1 M \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_2 + \frac{64}{35} g_1 \varepsilon M u_1 \dot{u}_2^2 + \\ + \frac{\pi^2}{2} g_2 \varepsilon M u_1^2 \dot{u}_2 + \pi^2 g_2 \varepsilon M u_2^2 \dot{u}_2 + \frac{8}{5} \pi^2 g_3 M u_1^3 + \frac{352}{35} \pi^2 g_3 M u_1 u_2^2 + \beta g_4 \cdot \{-2 \pi^4 u_1^2 u_2 - 8 \pi^4 u_2^3\}.$$

В последующих пунктах будет рассмотрена задача о частичном описании структуры окрестности нулевого решения системы дифференциальных уравнений (3) при некоторых дополнительных ограничениях.

2. Линейный анализ. Построение нормальной формы

Рассмотрим линеаризованную в нуле систему (3) при $g = 0$. Полученную систему удобно переписать в векторной форме:

$$\ddot{u} + Au = 0, \quad (4)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \pi^4 & -\frac{8}{3} c_1 M \\ \frac{8}{3} c_1 M & 16 \pi^4 \end{pmatrix}.$$

Вопрос об устойчивости нулевого решения сводится к исследованию спектра матрицы A . Пусть λ точка спектра устойчивости. Тогда простая проверка показывает, что

- 1) при $M \in [0; M_1]$, где $M_1 = \frac{45\pi^4}{16c_1}$ для всех λ имеет место равенство $Re \lambda = 0$;
- 2) при $M > M_1$ $Re \lambda > 0$;
- 3) при $M = M_2 = \frac{9\sqrt{21}\pi^4}{20c_1} < M_1$ спектру устойчивости (4) принадлежат собственные числа

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \lambda_{3,4} = \pm 2i\omega, \omega = \sqrt{\frac{17}{5}}\pi^2$. В этом случае (3) имеет следующие периодические решения:

$$u(t) = E_1(t) = \exp(i\omega t) e_1, \quad u(t) = \overline{E}_1(t),$$

$$u(t) = E_2(t) = \exp(2i\omega t) e_2, \quad u(t) = \overline{E}_2(t),$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = -\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Положим $M = M_2 + \varepsilon \tilde{\alpha}$ ($\tilde{\alpha} = \frac{3}{8c_1} \alpha$), $g = g_0 \varepsilon$ и запишем систему (3) в векторной форме:

$$\ddot{u} + Au + g_0 \varepsilon \dot{u} + \varepsilon Bu + F(u, \varepsilon) = 0, \quad (5)$$

где $\alpha(\tilde{\alpha})$ произвольная действительная постоянная, а

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае для построения главной части нормальной формы решения системы (5) можно и удобно искать в виде

$$u(t, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} E(t, s) + \varepsilon v_2(t, s) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, s) + \dots, \quad (6)$$

где

$$E(t, s) = z_1(s) E_1(t) + \bar{z}_1(s) \bar{E}_1(t) + z_2(s) E_2(t) + \bar{z}_2(s) \bar{E}_2(t), \quad s = \varepsilon t.$$

Подставляя ряд (6) в уравнение (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε переходим к рекуррентной последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Так, при $\varepsilon^{1/2}$ получаем систему

$$\ddot{v}_1 + Av_1 = 0,$$

которой удовлетворяют первые четыре слагаемых суммы (6). При $\varepsilon^{3/2}$ имеем систему неоднородных уравнений вида

$$\ddot{v}_3 + Av_3 = f(v_3).$$

Условия разрешимости этих уравнений в классе $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических функций позволяют выписать систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, которую обычно называют нормальной формой или точнее ее главной частью

$$\begin{aligned} z'_1 &= -(\alpha_1 + i\beta_1)z_1 + (a_1 + ib_1)\bar{z}_1 z_2 + ib_2 z_1^2 \bar{z}_1 + ib_3 z_1 z_2 \bar{z}_2, \\ z'_2 &= -(\alpha_1 + i\beta_2)z_2 + (a_2 + ib_4)z_1^2 + ib_5 z_2^2 \bar{z}_2 + ib_6 z_1 \bar{z}_1 z_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты системы (7) выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}g_0; \quad \beta_1 = \frac{2\sqrt{105}}{17\sqrt{17}\pi^2}\alpha, \quad \beta_2 = -\frac{\beta_1}{2}; \quad a_1 = \left\{ -\frac{27\sqrt{7}\pi^5}{272} \cdot (\tau + 1) \cdot \sqrt{\frac{E}{(1-\mu^2)p_0}} \right\} \cdot \frac{h}{l^2}, \quad a_2 = \frac{5}{24}a_1; \\ b_1 &= \frac{-1779\sqrt{5}\pi^3}{850\sqrt{17}} \cdot (\tau + 1) \cdot \frac{M_0}{l}, \quad b_4 = -\frac{49}{2372}b_1; \quad b_2 = \frac{48}{35}b_{00} - \frac{185}{4}f_0\beta, \quad b_3 = -\frac{246}{7}b_{00} + \frac{1040}{3}f_0\beta, \\ b_5 &= -\frac{18}{5}b_{00} - \frac{2644}{3}f_0\beta, \quad b_6 = -\frac{183}{7}b_{00} - \frac{1370}{3}f_0\beta, \quad b_{00} = \frac{3\sqrt{5}\pi^4}{85\sqrt{17}} \cdot (\tau + 1) \cdot \frac{1}{l^2}, \quad f_0 = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{119\sqrt{17}} \cdot \frac{l}{D}. \end{aligned}$$

а положительный коэффициент β имеет порядок 1.

Анализ окрестности состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (5) сводится к исследованию системы (7). Далее уточним порядок коэффициентов этой системы, для чего воспользуемся тем обстоятельством, что все постоянные имеют физический смысл. Если считать, что материал, из которого сделана пластинка сталь, а газ - воздух, то $p_0 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $\mu = 0,3$; $E = 200 \cdot 10^9$ Н/м²; $p_\infty = 1013,25$ гПа; $\tau = 1,4$. В большинстве случаев иного материала пластинки постоянные p_0 , μ , E , p_∞ , τ не сильно отличаются от приведенных.

3. Анализ нормальной формы в частном случае

Положим $b_1 = b_4 = 0$. Такое допущение оправдано, если постоянная l велика или M_0 малая положительная постоянная.

В этом случае нормальная форма (7) примет вид

$$\begin{aligned} z'_1 &= -(\alpha_1 + i\beta_1)z_1 + a_1 \bar{z}_1 z_2 + ib_2 z_1^2 \bar{z}_1 + ib_3 z_1 z_2 \bar{z}_2, \\ z'_2 &= -(\alpha_1 + i\beta_2)z_2 + a_2 z_1^2 + ib_5 z_2^2 \bar{z}_2 + ib_6 z_1 \bar{z}_1 z_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Произведем следующие замены

$$z_1 = \lambda_1 v_1, \quad z_2 = \lambda_2 v_2, \quad s = \tilde{\beta}t,$$

где $\tilde{\beta} = \frac{1}{\alpha_1}$, $\lambda_1 = \sqrt{4,8} \cdot \lambda_2$, $\lambda_2 = -\frac{\alpha_1}{a_1}$. Перепишем систему (8) в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -(1 + ik_1)v_1 - \bar{v}_1 v_2 + ik_2 v_1^2 \bar{v}_1 + ik_3 v_1 v_2 \bar{v}_2, \\ \dot{v}_2 &= -(1 + ik_4)v_2 - v_1^2 + ik_5 v_2^2 \bar{v}_2 + ik_6 v_1 \bar{v}_1 v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $k_1 = -2\frac{\beta_2}{\alpha_1}$, $k_2 = \frac{24\alpha_1}{5a_1^2} \cdot b_2$, $k_3 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} \cdot b_3$, $k_4 = \frac{\beta_2}{\alpha_1}$, $k_5 = \frac{\alpha_1}{a_1^2} \cdot b_5$, $k_6 = \frac{24\alpha_1}{5a_1^2} \cdot b_6$.

Перейдем к полярной системе координат. Полагая

$$v_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad v_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2), \quad \psi = \varphi_2 - 2\varphi_1$$

и выделяя в системе (9) вещественные и мнимые части получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\rho_1 - \rho_1 \rho_2 \cos \psi, \\ \dot{\rho}_2 &= -\rho_2 - \rho_1^2 \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= (2k_1 - k_4) + \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2} + 2\rho_2\right) \sin \psi + (k_6 - 2k_2)\rho_1^2 + (k_5 - 2k_3)\rho_2^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим первое уравнение системы (10) на ρ_1 , а второе на ρ_2 . Сложив полученные уравнения имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho_1^2 - \rho_2^2) = -(\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

Обозначив $v = \rho_1^2 - \rho_2^2$ получаем, что $v(t) = v_0 \exp(-2t)$, то есть $v(t)$ стремится к нулю со скоростью экспоненты. Последнее означает, что все аттракторы системы (10) находятся на инвариантном множестве $\rho_1 = \rho_2$. Таким образом изучение системы (10) сводится к исследованию системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\rho_1 - \rho_1^2 \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= k_7 + 3\rho_1 \sin \psi + k_8 \rho_1^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $k_7 = 2k_1 - k_4$, $k_8 = k_5 + k_6 - 2k_2 - 2k_3$.

Найдем состояния равновесия системы (11). Ясно, что

$$\rho_1 = -\frac{1}{\cos \psi}.$$

Обозначим $\tan \psi = \xi$. Тогда ξ является решением квадратного уравнения

$$A_1 \xi^2 + 3\alpha_1 \xi + A_1 + 5\beta_2 = 0,$$

где $A_1 = X g_0^2$, $X = 2,65 \frac{1}{E\pi^6} p_0 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 185,6 \frac{1}{E^2\pi^8} p_0 \frac{l^3}{h^5} \cdot \beta$, $\beta_2 \approx -0,015\alpha$ ($\alpha \in R$).

Понятно, что это уравнение имеет два корня, если его дискриминант больше нуля. Это условие реализуется, если $g_0^2 < \frac{9+1,2X}{16X^2}$ и дискриминант равен нулю (один корень), если $g_0^2 = \frac{9+1,2X}{16X^2}$.

Пусть квадратное уравнение имеет корень $\xi = \xi_1$. Тогда ψ находим из уравнения $\tan \psi = \xi_1$. При этом ψ можно и нужно выбрать так, чтобы $\cos \psi < 0$.

Для изучения вопроса об устойчивости периодических решений системы (9) рассмотрим решения вида

$$\begin{aligned} v_1 &= \rho_1 \exp(i\varphi_1)(1 + n_1), \\ v_2 &= \rho_2 \exp(i\varphi_2)(1 + n_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в систему (9), используя полученные выше результаты и линеаризуя переходим к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= a_{11}n_1 + a_{12}\bar{n}_1 + a_{13}n_2 + a_{14}\bar{n}_2, \\ \dot{n}_2 &= a_{21}n_1 + a_{22}\bar{n}_1 + a_{23}n_2 + a_{24}\bar{n}_2 \end{aligned}$$

Полагая $n_1 = w_1 + iw_2$, $n_2 = w_3 + iw_4$, перейдем к вещественной форме:

$$\dot{w} = Bw,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2\xi & 1 & -\xi \\ 2k_2(1+\xi^2) & -2 & \xi + 2k_3(1+\xi^2) & 1 \\ 2 & 2\xi & -1 & -\xi \\ 2k_6(1+\xi^2) - 2\xi & 2 & \xi + 2k_5(1+\xi^2) & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы B имеет вид

$$\lambda(\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r) = 0,$$

где

$$p = 4, \quad q = 1 - 3\xi^2 - 4\xi(1 + \xi^2)Xg_0, \\ r = (1 + \xi^2)(-6 - 8Xg_0\xi).$$

Нетрудно заметить, что $q = r/2 + 4$, то есть характеристическое уравнение можно переписать

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (r/2 + 4)\lambda + r = 0.$$

Оно имеет корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{1 - r/2}$, $\lambda_3 = -1 - \sqrt{1 - r/2}$.

Анализ расположения корней на комплексной плоскости показал, что все они лежат в левой полуплоскости, если $r > 0$ и есть корни в правой полуплоскости, если $r < 0$. При $r = 0$ реализуется критический случай нулевого собственного числа.

Пусть $\rho_1 = \rho_0$, $\rho_2 = \rho_0$, $\psi = \psi_0$ состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (10).

Теорема. Существует $\epsilon_0 \ll 1$ такое, что при $\epsilon_0 \in [0; \epsilon_1]$ каждому ненулевому состоянию равновесия системы (10) соответствует периодическое решение системы дифференциальных уравнений (3), которое восстанавливается по формуле

$$u(t, s, \epsilon) = \epsilon^{1/2}(\lambda_1 \rho_0 \exp(i\varphi_1) E_1(t) + \lambda_2 \rho_0 \exp(i(\psi_0 + 2\varphi_1)) E_2(t) + \text{к.с.}) + O(\epsilon),$$

при этом данное решение наследует свойство быть устойчивым или неустойчивым от соответствующего решения системы (8).

В последней формуле $\varphi_1 \in R$ и произвольно. Еще раз отметим, что устойчивость определяется знаком r . Стандартные вычисления показали, что в случае двух решений системы (8), меньшему решению будет соответствовать устойчивое, а большему - неустойчивое решение системы (3).

4. Анализ нормальной формы в общем случае

Проведем исследование системы (7), то есть рассмотрим случай $b_1 \neq 0$, $b_4 \neq 0$.

Переходя в (7) к полярной системе координат $z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2)$ и выделяя вещественные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\alpha_1 \rho_1 + \rho_1 \rho_2 (a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi), \\ \dot{\rho}_2 &= -\alpha_1 \rho_2 + \rho_1^2 (a_2 \cos \psi + b_4 \sin \psi), \\ \dot{\psi} &= -5\beta_2 + \frac{\rho_1^2}{\rho_2} (-a_2 \sin \psi + b_4 \cos \psi) - 2\rho_2 (a_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi) + \rho_1^2 (b_6 - 2b_2) + \rho_2^2 (b_5 - 2b_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем состояние равновесия системы (13). Достаточно стандартные вычисления показывают, что

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{(a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi)(a_2 \cos \psi + b_4 \sin \psi)}, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1}{a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi},$$

а ψ находится из уравнения

$$(A_2 + A_6) \operatorname{tg}^3 \psi + (A_4 + A_5) \operatorname{tg}^2 \psi + (A_3 + A_6) \operatorname{tg} \psi + A_1 + A_5 = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -5\beta_2 \alpha_1^2 a_2 + \alpha_1 a_1 (a_1 b_4 - 2a_2 b_1); \quad A_2 = -5\beta_2 b_1^2 b_4 + \alpha_1 b_1 (-a_2 b_1 + 2a_1 b_4); \\ A_3 &= 5\beta_2 a_1 (2a_2 b_1 - a_1 b_4) + \alpha_1 \{-3a_1^2 a_2 + 2b_1 (-2a_1 b_4 + a_2 b_1)\}; \\ A_4 &= 5\beta_2 b_1 (-a_2 b_1 + 2a_1 b_4) + \alpha_1 \{3b_1^2 b_4 + 2a_1 (2a_2 b_1 - a_1 b_4)\}; \\ A_5 &= \alpha_1^2 \{a_1 (b_6 - 2b_2) + a_2 (b_5 - 2b_3)\}; \quad A_6 = \alpha_1^2 \{-b_1 (b_6 - 2b_2) + b_4 (b_5 - 2b_3)\}. \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{tg} \psi = \varsigma$ - корень уравнения (14). Тогда ψ следует выбирать так, чтобы были выполнены неравенства

$$a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi > 0, \quad a_2 \cos \psi + b_4 \sin \psi > 0.$$

Напомним, что условия устойчивости состояния равновесия системы (13) задаются неравенствами $p, q, r > 0$; $pq - r > 0$. В нашем случае

$$\begin{aligned} p &= 4\alpha_1; \quad q = \alpha_1^2 + k^2 - 4xk + 2zk(2b_3 - b_5) + 2xy(2b_2 - b_6); \\ r &= 2\alpha_1 \{-3\alpha_1^2 - 2x^2 - k^2 + (2b_2 - b_6)(x + k)y + 2xz(2b_3 - b_5)\}; \end{aligned}$$

$$x = -\frac{\alpha_1(b_1 \cos \psi + a_1 \sin \psi)}{a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi}, \quad y = \frac{\alpha_1^2}{(a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi)(a_2 \cos \psi + b_4 \sin \psi)},$$

$$z = \frac{\alpha_1^2}{(a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi)^2}, \quad k = \frac{\alpha_1(b_4 \cos \psi - a_2 \sin \psi)}{a_2 \cos \psi + b_4 \sin \psi}.$$

Пусть $\rho_1 = \varrho_1$, $\rho_2 = \varrho_2$, $\psi = \psi_0$ состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (13).

Теорема. Существует $\epsilon_0 \ll 1$ такое, что при $\epsilon_0 \in [0; \epsilon_1]$ каждому ненулевому состоянию равновесия системы (13) соответствует периодическое решение системы дифференциальных уравнений (3), которое восстанавливается по формуле

$$u(t, s, \epsilon) = \epsilon^{1/2}(\varrho_1 \exp(i\varphi_1)E_1(t) + \varrho_2 \exp(i(\psi_0 + 2\varphi_1))E_2(t) + \text{к.с.}) + O(\epsilon),$$

при этом данное решение наследует свойство быть устойчивым или неустойчивым от соответствующего решения системы (7).

Условия существования устойчивости в общем случае сложны для анализа. Для коэффициентов, значения которых вычислены в физически осмысленных случаях, было показано, что существует три неустойчивых состояния равновесия системы (13), которым соответствуют периодические решения системы (7) и в конечном итоге системы (3).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Н. Куликову за постановку задачи и полезные советы при ее решении.

Список литературы

1. Бекбулатова А.О., Куликов А.Н. Нелинейный флаттер. Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний // Современные проблемы математики и информатики. 2002. Вып. 5. С. 22 — 27.
2. Бекбулатова А.О. Анализ одной феноменологической модели, встречающейся в теории аэроупругости // Современные проблемы математики и информатики. 2004. Вып. 6. С. 25 — 30.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 339 с.
4. Куликов А. Н. Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний // Диф. уравнения. 1992. Т.28, №6. С. 1080 — 1083.
5. Куликов А.Н. Об одном аналоге бифуркационной теории Хопфа в задаче о математическом исследовании нелинейного панельного флаттера при малом коэффициенте затухания // Диф. уравнения. 1993. Т.29, №5. С. 780 — 785.

УДК 514.17

Теорема Хелли и теорема отделимости

Дольников В.Л.¹

Ярославский государственный университет

e-mail: dolnikov@univ.yuug.ac.ru

получена 30 сентября 2005

Аннотация

В статье приводится совместное обобщение теоремы Хелли и теоремы отделимости. Даются приложения полученных результатов.

В настоящей работе приводятся обобщения и уточнения классических теорем об отделимости выпуклых множеств и Хелли (см. [1], [2]). Введем сначала некоторые определения и докажем несколько лемм.

Определение 1. Будем говорить, что семейство множеств P имеет свойство Π_k или, $P \in \Pi_k$ если любые $\leq k$ множеств семейства P имеют непустое пересечение и свойством Π ($P \in \Pi$), если пересечение всего семейства непусто.

Определение 2. Конусам в линейном пространстве L над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ будем называть множество замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа, пересечение всех конусов, содержащих множество V будем называть *конической оболочкой* $\text{con } V$ множества V .

Через $\text{conv } V$ будем обозначать *выпуклую оболочку* множества V , а через $\bar{V}$ — *замыкание* V . Для семейства P множеств в $\mathbb{R}^n$ через $\text{conv } P \in \Pi$ обозначим семейство всех выпуклых оболочек множеств из P .

Определение 3. Обозначим через P_1^n пространство всех линейных функций

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}, \quad f = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$$

на $\mathbb{R}^n$, тогда P_1^n и сопряженное пространство P_1^{n*} можно отождествить с $\mathbb{R}^{n+1}$, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in P_1^{n*}$.

Обозначим также через ϵ функцию из P_1^n тождественно равную 1, а через

$$L = \{v \in P_1^{n*} : v(\epsilon) = 1\}, \quad v \in L \leftrightarrow v = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1).$$

Положим $v(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \in P_1^{n*}$ для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Для множества $V \subset \mathbb{R}^n$ определим множество из P_1^n

$$K(V) = \{f \in P_1^n : f(x) > 0, \text{ для всех } x \in V\}$$

Ясно, что если $V \neq \emptyset$, то $K(V) \neq P_1^n$. При этом очевидно, что множество $K(V)$, дополненное 0, — конус в P_1^n и $\epsilon \in K(V)$. Аналогично, заменяя строгое неравенство на нестрогое, определим конус $\overline{K(V)}$. Очевидно, что $\overline{K(V)}$ — замкнутый конус в P_1^n для всех $V \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1. Если P семейство выпуклых замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, то для того чтобы $P \in \Pi$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $v \in (P_1^n)^*$, что $v(f) \geq 0$ для всех $f \in \bigcup_{V \in P} \overline{K(V)} = c(P)$ и $v(\epsilon) \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in \bigcap_{V \in P} V \neq \emptyset$ и $y = v(x) \in (P_1^n)^*$. Покажем, что вектор y удовлетворяет всем условиям леммы. По определению множества $\overline{K(V)}$, имеем, $\langle v(x), f \rangle = f(x) \geq 0$, для всех $f \in \overline{K(V)}$, $V \in P$, а также $\langle v(x), \epsilon \rangle = 1$. Тогда, для всех $V \in P$, имеем,

$$\overline{K(V)} \subseteq M_y = \{f : \langle y, f \rangle = f(x) \geq 0\} \subseteq P_1^n \implies M_y \supseteq c(P).$$

Вектор y удовлетворяет всем условиям леммы и необходимость доказана.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №03-01-00801, 04-01-00590

Достаточность. Пусть существует такой вектор $v \in (P_1^n)^*$, что $v(e) \neq 0$ и $v(f) \geq 0$ для всех $f \in c(P)$. Так как $e \in \overline{K(V)}$, то для всех $V \in P$, имеем, $v(e) > 0$. Положим $v_0 = \frac{v}{v(e)} \in \mathbb{R}_1$, тогда, по лемме 1, существует вектор $x = v_0^{-1}(v_0) \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что $x \in \bigcap_{V \in P} V$.

Предположим противное, что $x \notin V$ для некоторого $V \in P$. Так как множество V — замкнуто и выпукло, то, по теореме об отделимости выпуклых множеств, существует такая функция $f \in P_1^n$, что $f(x) < 0$ и $f(y) > 0$ для всех $y \in V$. Следовательно,

$$f \in K(V) \subset \overline{K(V)} \subseteq c(P) \quad \text{и} \quad 0 > f(x) = \langle v(x), f \rangle = \langle v_0, f \rangle = \frac{v(f)}{v(e)} \geq 0.$$

Полученное противоречие доказывает достаточность и лемму. $\square$

Замечание 1. Ясно, что необходимость леммы верна для всех семейств выпуклых множеств. Простые примеры показывают, что условия леммы не являются достаточными для произвольного семейства выпуклых множеств.

Замечание 2. Условие $f \in \bigcup_{V \in P} \overline{K(V)} = c(P)$, как легко видеть, можно заменить в лемме на более слабое условие $f \in \text{con } c(P) = C(P)$.

Лемма 2. $v(V)$ ограничено тогда и только тогда, когда конус $\overline{K(V)}$ содержит функцию e вместе с некоторой окрестностью.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in L = L^{**}$ и множество $v(V)$ — ограничено. Тогда

$$\sup_{x \in V} \|v(x)\| = c < \infty.$$

Далее, имеем,

$$f(x) = \langle v(x), f \rangle = \langle v(x), f - e \rangle + \langle v(x), e \rangle = \langle v(x), f - e \rangle + 1.$$

Так как L — конечномерно, то $(f - e)$ — непрерывный линейный функционал на L^* и следовательно, имеем,

$$|f(x) - 1| \leq |\langle v(x), f - e \rangle| \leq \|v(x)\| \cdot \|f - e\| \leq \sup_{x \in V} \|v(x)\| \cdot \|f - e\| \leq c \|f - e\|.$$

Пусть $f \in L$ такое, что

$$\|f - e\| < \frac{1}{c}, \quad \text{тогда} \quad |f(x) - 1| < 1$$

и, следовательно, $f(x) > 0$ для всех $x \in V$, то есть $f \in \overline{K_L(V)}$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для некоторого $d > 0$, из неравенства $\|f - e\| \leq d$ следует, что $f \in \overline{K_L(V)}$. Покажем, что $v_L(V)$ — ограниченное множество. Для этого достаточно показать, что множество $f(v(V))$ — ограничено для всех $f \in L$. В самом деле, рассмотрим множество

$$U = \{f \in L(0) : \|f\| \leq d\},$$

тогда $e + U \subset \overline{K_L(V)}$. Если

$$f + e \in e + U \subset \overline{K_L(V)} \quad \text{и} \quad x \in V,$$

то, имеем,

$$(f + e)(x) = \langle v(x), f + e \rangle = f(x) + 1 \geq 0,$$

а так как $-f \in U$, то также, имеем,

$$(-f + e)(x) = -f(x) + 1 \geq 0,$$

а значит $|f(x)| \leq 1$ для всех $f \in U$ и $x \in V$.

Пусть $f \in L$, тогда, если $f \in C$, то доказывать нечего. Поэтому можно положить

$$f = f_0 + ce = \frac{\|f_0\|}{d} \cdot (d \frac{f_0}{\|f_0\|}) + ce \quad \text{и} \quad 0 \neq f_0 \in L(0) \iff d \frac{f_0}{\|f_0\|} \in U,$$

а следовательно,

$$\|d \frac{f_0}{\|f_0\|}\| \leq 1 \iff f(v(V)) \subseteq [-\frac{\|f_0\|}{d} + c, \frac{\|f_0\|}{d} + c]$$

и лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Для того чтобы для семейства P компактов в $\mathbb{R}^n$ выполнялось $\text{conv } P \in \Pi$ необходимо и достаточно, чтобы $-e \notin C(P)$.

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству леммы, заметим, что $\overline{K(V)} = K(\overline{\text{conv } V})$ для всех $V \in \mathbb{R}^n$ и, что выпуклая оболочка компакта — компакт и следовательно замкнутое множество.

Необходимость. Пусть $x \in \bigcap_{V \in P} \text{conv } V \neq \emptyset$, тогда, по лемме 1, существует такой вектор $v \in (P_1^n)^*$, что $v(e) \neq 0$ и $v(f) \geq 0$ для всех $f \in c(P)$. Так как $e \in \bigcap_{V \in P} \overline{K(V)}$, то $v(e) > 0$ и $v(-e) < 0$. Следовательно, для замкнутого полупространства $M_v = \{f : v(f) \geq 0\} \subseteq P_1^n$, имеем, $-e \notin M_v$, и $c(P) \subseteq M_v$. Поэтому, $C(P) \subseteq M_v$ и необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что вектор $-e \notin C(P)$, тогда конус $C(P) \neq P_1^n$ и поэтому у конуса $C(P)$ есть опорное n -мерное подпространство L_0 . Так как, по лемме 1.4.3, e лежит во внутренней $C(P)$, то $e \notin L_0$. Следовательно, для всех функционалов $v \neq 0$ из аннулятора L_0 ² имеем неравенство $v(e) \neq 0$. Значит, можно считать, что $v(e) > 0$. Поэтому, $\langle v, f \rangle \geq 0$, если $f \in c(P) \subset C(P)$. Тогда, по лемме 1, имеем, $\bigcap_{V \in P} \text{conv } V \neq \emptyset$ и достаточность доказана. $\square$

Лемма 4. 3 Для того чтобы для семейства $P = \{P(f_i)\}_{i \in I}$, $f_i \in P_1^n$, открытых полупространств в $\mathbb{R}^n$, выполнялось $P \in \Pi$ необходимо и достаточно, чтобы множество векторов $F = \{e, f_i\}_{i \in I} \subseteq P_1^n$ было односторонним.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in \bigcap_{i \in I} P(f_i) \neq \emptyset$, тогда

$$\{f_i\}_{i \in I} \subseteq K(\{x\}) = \{f \in P_1^n : f(x) > 0\} \quad \text{и} \quad e \in K(\{x\}).$$

Множество F — одностороннее, так как $K(\{x\})$ — открытое полупространство в P_1^n . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть F — одностороннее множество, тогда существует такой функционал $v \in (P_1^n)^*$, что $F \subseteq O = \{f \in P_1^n : v(f) > 0\}$. Ясно, что $v(e) > 0$. Покажем, что

$$x = v_1^{-1}(v_0) = v_1^{-1}\left(\frac{v}{v(e)}\right) \in \bigcap_{i \in I} P(f_i).$$

В самом деле, имеем, $f_i(x) = \langle v(x), f_i \rangle = \langle v_0, f_i \rangle = \frac{v(f_i)}{v(e)} > 0$ для всех $f_i \in F \subseteq O$. Лемма доказана. $\square$

Следующий результат включает в себя, как и теорему Хелли так и теорему об отделимости выпуклых множеств. Приведем его доказательство, основанное на теореме об трансверсалиях.

Теорема 1. Если для семейства P выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, имеем, $P \notin \Pi$, то существует такое $P_0 = \{V_i\}_{1 \leq i \leq k} \subseteq P$, $2 \leq k \leq n+1$, и такое семейство замкнутых полупространств $R = \{M_i\}_{1 \leq i \leq k} \notin \Pi$, что

$$V_i \subset M_i, \quad \bigcap_{i \neq j} M_i \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad j, \quad 1 \leq j \leq k, \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^k M_i = S + L,$$

где $— (k-1)$ -мерный открытый симплекс, а $L \in G_{n-k+1}^n$.

Доказательство. Возьмем минимальное подсемейство $P_0 \subseteq P$ такое, что $P_0 \notin \Pi$ и множество

$$K(P_0) = S^n \bigcap \bigcup_{V \in P_0} K(V) \subseteq P_1^n.$$

Если все его подмножества из $k \leq n+1$ элементов односторонние, то, по теореме 1.3.1, существует такое n -мерное подпространство $H(v)$, $v \in (P_1^n)^*$ и такая $(n-1)$ -мерная вложенная сфера S , что

$$S \bigcap K(P_0) = \emptyset, \quad S = H(v) \bigcap S^n.$$

Поэтому $e \notin S$, и можно считать, что $\langle v, e \rangle > 0$. Так как $e \in K(P_0)$, то $K(P_0) \subseteq P(v)$. Тогда, по лемме 1.4.3, имеем, $-e \notin \bar{P}(v)$, а следовательно $-e \notin \text{con } K(P_0)$. Из леммы 2.1.2. следует, что $P_0 \in \Pi$. Полученное противоречие доказывает существование не одностороннего множества векторов $\{f_1, \dots, f_k\}$.

²Аннулятором $\text{ann } V$ множества векторов $V \subset L$ называется подпространство всех таких функционалов $v \in L^*$, что $v(x) = 0$ для всех $x \in V$.

$f_i \in K(V_i)$, $1 \leq i \leq k \leq n+1$. По лемме 2.1.3, имеем, $R' \notin \Pi$, для семейства открытых полупространств $R' = \{P(f_i)\}_{1 \leq i \leq k}$. Так как множества V_i — компакты, то

$$d_i = \min_{x \in V_i} f_i(x) > 0,$$

и для семейства замкнутых полупространств

$$R = \{M_i\}_{1 \leq i \leq k}, \quad M_i = \overline{P(f_i - d_i e)}, \quad \text{имеем,} \quad P(f_i) \supseteq M_i \supseteq V_i \implies R \notin \Pi.$$

Из минимальности подсемейства P_0 , следует что $|P_0| = k$ и, поэтому, имеем,

$$\bigcap_{i \neq j} M_i \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Приступим к доказательству последнего утверждения в теореме. Пусть

$$\pi_i = \overline{H(f_i - d_i e)}, \quad R_0 = \{\pi_i\}_{1 \leq i \leq k}.$$

Возьмем множество векторов

$$F = \{f'_i\}_{1 \leq i \leq k} \subset L_0 \subseteq P_1^n, \quad \text{где} \quad f'_i = f_i - f_i(0)e \in L_0.$$

Тогда для ранга rk множества векторов F верно неравенство $\text{rk } F \leq k-1$, так как в противном случае, по теореме Кронекера – Капелли, будет $\bigcap_{i=1}^k \pi_i \neq \emptyset$ (как обычно $\text{rk } F = \dim \text{lin } F$, а коранг — $\text{cork } F = \dim \text{ann } F$).

Далее покажем, что $\text{rk } F_j = k-1$ для всех j , $1 \leq j \leq k$, где $F_j = \{f'_i\}_{i \neq j}$. Следовательно, $\text{rk } F = k-1$. Предположим противное, что для некоторого j , $1 \leq j \leq k$, имеем неравенство, $\text{rk } F_j \leq k-2$. Следовательно, для подпространства $L_j = \text{ann } F_j \subseteq L_0^* = \mathbb{R}^n$, имеем, $\dim L_j \geq n - k + 2$ и все гиперплоскости семейства $\{\pi_i\}_{i \neq j}$ параллельны L_j . Пусть

$$x \in \bigcap_{i \neq j} M_i \neq \emptyset, \quad \text{тогда} \quad \pi = x + L_j \subseteq \bigcap_{i \neq j} M_i.$$

Следовательно, если $\pi_j \cap \pi \neq \emptyset$, то $\bigcap_{i=1}^k M_i \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $\pi_j \parallel L_j$, то есть и все гиперплоскости семейства R_0 параллельны L . Возьмем подпространство $L_j^\perp$ и спроектируем на него множества семейства Q . Получившееся семейство $L_j^\perp(Q) = \{L_j^\perp(M_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ состоит из замкнутых полупространств в $L_j^\perp$. Так как

$$\dim L_j^\perp \leq k-2, \quad \text{и} \quad \bigcap_{i \neq j} \{L_j^\perp(M_i)\}_{i \neq j} \neq \emptyset, \quad \text{для всех} \quad j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

то, по теореме Хелли, имеем, $\bigcap_{i=1}^k L_j^\perp(M_i) \neq \emptyset$, т.е. $R \in \Pi$.

Полученное противоречие показывает, что $\text{rk } F_j = k-1$ для всех j , $1 \leq j \leq k$. Тогда из теоремы Кронекера – Капелли следует, что $\pi' = \bigcap_{i \neq j} \pi_i \neq \emptyset$. Поэтому, все плоскости π' имеют одно и тоже $(n-k+1)$ -мерное направляющее подпространство $L = \text{ann } F$. Выберем по точке $x_j \in \pi'$, тогда

$$f_i(x_j) - d_i = 0, \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad f_j(x_j) - d_j < 0.$$

Выпуклая оболочка $S = \text{conv}\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ является $(k-1)$ -мерным симплексом. В самом деле, если бы это было не так, то множество S лежало бы в плоскости $\pi = \text{aff}\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ и $\dim \pi < k-1$. Тогда, по теореме Хелли, имеем, $\bigcap_{i=1}^k (M_i \cap \pi) \neq \emptyset$.

Полученное противоречие показывает, что S — $(k-1)$ -мерный симплекс.

Пусть x лежит внутри S , тогда

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_j > 0 \quad \text{для всех} \quad j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Поэтому, имеем,

$$f_i(x) - d_i = f_i\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\right) - d_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j (f_i(x_j) - d_i) = \lambda_i (f_i(x_i) - d_i) < 0$$

для всех i , $1 \leq i \leq k$. Следовательно, $f_i(x_i) < d_i$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^k M_i$, а так как

$$x + L \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^k M_i, \implies \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^k M_i = S + L.$$

Теорема доказана. □

Замечание 3. Если семейство P состоит из двух элементов, то получаем из теоремы 1 теорему об отделимости выпуклых множеств.

Замечание 4. Если для семейства $P = \{V_i\}_{i \in I}$ выпуклых компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ существует такое семейство замкнутых полупространств $R = \{M_i\}_{i \in I}$, что $V_i \subset M_i$ и $R \notin \Pi$, то семейство P называется *отделимым по Гейлу* [3].

Приведем следствия полученной теоремы.

Теорема 2. (теорема Кли [4]). Если $P = \{V_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$, $k \leq n$, такое семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, что $P \notin \Pi$, а $Q \in \Pi$ для всех $Q \subset P$, то существует такая $(n-k)$ -мерная плоскость π , что $\pi \cap \bigcup_{i=1}^{k+1} V_i = \emptyset$, но для каждой $(n-k+1)$ -мерной полуплоскости π_0 ,³ ограниченной плоскостью π , имеем, $\pi_0 \cap \bigcup_{i=1}^{k+1} V_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1.2.3, возьмем такое семейство компактных выпуклых множеств $P' = \{V'_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$, что

$$V'_i \subset V_i, \quad \bigcap_{j \neq i} V_j \neq \emptyset \quad \text{для всех } i, \quad 1 \leq i \leq k+1, \quad \text{и } P' \notin \Pi.$$

По теореме 2.1.4 существует семейство замкнутых полупространств $R = \{M_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$ такое, что $V'_i \subset M_i$, $R \notin \Pi$ и

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^{k+1} M_i = S + L,$$

где S — k -мерный открытый симплекс, а L — некоторое $(n-k)$ -мерное подпространство. Возьмем $x \in S$, тогда любой луч, выходящий из x и, лежащий в $\text{aff } S$, пересечет границу S . Всякая $(n-k+1)$ -мерная полуплоскость π_0 с границей $\pi = x + L$ пересекает $\text{aff } S$ по лучу и, следовательно, пересекает границу S , а значит и

$$\pi_0 \cap \bigcup_{i=1}^{k+1} V_i \neq \emptyset.$$

Следствие доказано. □

Из теоремы 1 и теоремы о трансверсалих из [1] легко следует обобщение результата М. Брин [5], который в свою очередь обобщает теорему Хелли.

Определение 4. Определение Если u и v — точки множества $V \subset \mathbb{R}^n$, то выражение " u видна из v в множестве V " означает, что отрезок $[u, v] \subset V$. Множество называется *звездным*, если в V есть точка, из которой видны все остальные.

Для формулировки теоремы рассмотрим m таких семейств P_i , что каждое состоит из выпуклых компактов, лежащих в $\mathbb{R}^n$ или и $|P_i| \geq n-m+2$, $1 \leq i \leq m$, $m \leq n$. Тогда верна

Теорема 3. Если для всех $L \in G_{n-m+1}^n$, для всех i и для всех подсемейств $S \subset P_i$, $|S| \leq n-m+2$ множество $L(V_S) = \bigcup_{V \in S} L(V)$, — звездно, то семейство $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ имеет $(m-1)$ -трансверсаль.

Доказательство. Докажем, сначала, при $m=1$. Предположим противное, и возьмем такое подсемейство $S = \{V_i\}_{1 \leq i \leq k} \subset P$, что $S \notin \Pi$, но $\bigcap_{i \neq j} V_i \neq \emptyset$ для всех j , $1 \leq j \leq k$. Тогда из теоремы 1 следует, что $2 \leq |S| = k \leq n+1$, а также существует такое семейство замкнутых полупространств

$$R = \{M_i\}_{1 \leq i \leq k}, \quad \text{что } V_i \subset M_i \quad \text{и } R \notin \Pi.$$

Так как $|S| \leq n+1$, то множество $V_S = \bigcup_{V \in S} V$ — звездное. Для всех j возьмем точку $x_j \in \bigcap_{i \neq j} V_i$, $1 \leq j \leq k$ и положим

$$W = \{x_i\}_{1 \leq i \leq k} \quad \text{и} \quad V'_i = \text{conv}\{x_j\}_{j \neq i},$$

³Полуплоскостью размерности k будем называть часть k -мерной плоскости, которая ограничена, лежащей в ней $(k-1)$ -мерной плоскостью.

тогда, очевидно, что

$$V'_i \subseteq V_i, \quad \bigcap_{i \neq j} V'_i \neq \emptyset \quad \text{для всех } j, \quad 1 \leq j \leq k, \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^k V'_i = \emptyset.$$

Пусть $\pi = \text{aff } W$, тогда легко видеть, что $\dim \pi = k-1$. В самом деле, если бы $\dim \pi < k-1$, то, по теореме Хелли, получили бы, что $\bigcap_{i=1}^k V'_i \neq \emptyset$. Таким образом, множество W является множеством вершин $(k-1)$ -мерного симплекса F , а семейство $\{V'_i\}_{1 \leq i \leq k}$ является семейством его $(k-2)$ -мерных граней.

Возьмем теперь множество $S' = (S + L) \cap \pi$, тогда S' тоже $(k-1)$ -мерный симплекс. Покажем, что $S' \subset W$. Легко видеть, что существует точка x внутри симплекса F , не принадлежащая $\bigcup_{i=1}^k (\pi \cap M_i)$. Проведем через эту точку $(n-k+1)$ -мерную плоскость π_1 параллельную всем полупространствам M_i , тогда $\pi_1 \cap \bigcup_{i=1}^k M_i = \emptyset$.

Граница симплекса F является $(k-2)$ -мерной сферой, которая лежит в V_S , и охватывает $(n-k+1)$ -мерную плоскость L , не пересекающую V_S . Следовательно, множество V_S не стягивается по себе в точку. Получили противоречие, так как любое звездное множество стягиваемо.

При произвольном m , имеем, что для всех $L \in G_{n-m+1}^n$ и всех i , $1 \leq i \leq m$, семейство $L(P_i) \in \Pi$. Следовательно, по теореме о трансверсалиях из [1], получаем, что у семейства $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ существует m -трансверсаль. Теорема доказана. $\square$

Следующая теорема обобщает известный результат Ф. Леви [6] (см. также [1]). Для формулировки теоремы рассмотрим m таких семейств P_i , $|P_i| \geq n-m+2$, $1 \leq i \leq m$, $m \leq n$, что каждое состоит из выпуклых компактов, лежащих в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. Пусть для всех i и всех $(n-m+1)$ -мерных подпространств $L \in \mathbb{R}^n$ семейство P_i имеет следующие два свойства: 1) дополнение в L объединения любых $n-m+2$ множеств семейства $L(P_i)$ — связно 2) $L(P_i) \in \Pi_{n-m+1}$. Тогда у семейства $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ существует $(m-1)$ -трансверсаль.

Доказательство. Докажем, что $L(P_i) \in \Pi_{n-m+2}$ для всех i и любого $(n-m+1)$ -мерного подпространства $L \in \mathbb{R}^n$. Тогда теорема будет следовать из теоремы о трансверсалиях. Предположим противное, что $\bigcap_{j=1}^{n-m+2} L(V_j) = \emptyset$, $V_j \in P_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq m$, и $(n-m+1)$ -мерного подпространства L . Тогда, по теореме 2.1.4, существует такое семейство замкнутых полупространств $\{M_j\}_{1 \leq j \leq n-m+2}$ в L , что

$$L(V_j) \subset M_j, \quad \bigcap_{j=1}^{n-m+2} M_j = \emptyset \quad \text{и} \quad L \setminus \bigcap_{j=1}^{n-m+2} M_j = S,$$

где S — $(n-m+1)$ -мерный открытый симплекс в L . Полученное противоречие доказывает, что $\bigcap_{j=1}^{n-m+2} L(V_j) \neq \emptyset$ и теорему. $\square$

Замечание 5. Условие компактности существенно. Пусть

$$\{P(f_j)\}_{1 \leq j \leq n+1}$$

такое семейство замкнутых полупространств в $\mathbb{R}^n$, что $\bigcap_{j=1}^{n+1} P(f_j) = S$ — n -мерный симплекс. Рассмотрим семейство замкнутых выпуклых множеств $S = \{S_i\}_{1 \leq i \leq n+1} = \{\bigcap_{j \neq i} P(f_j) \cap P(-f_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$. Очевидно, что $S \in \Pi_n$ и $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} S_i$ — это внутренность S .

Условие компактности можно заменить на условие конечности и требовать чтобы объединение любых $n-m+2$ множеств семейства P_i имело $(n-m)$ -связное дополнение V в $\mathbb{R}^n$, т. е. гомотопические группы $\pi_k(V) = 0$, для всех k , $1 \leq k \leq n-m$.

Список литературы

1. Данцер Л., Б. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли и ее применения. — М.: Мир, 1968
2. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. Deumlich R., Elster K. - H. and Nehse R. Recent results on separation of convex sets//Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Opt. 1978. V. 9. №2. P. 273 – 296.
4. Klee V. On certain intersection properties of convex sets// Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 272 – 275.

5. Breen M. Starshaped unions and nonempty intersections of convex sets in $\mathbb{R}^d$ //Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 108. P. 817 – 820.
6. Levi F.W. Eine Ergänzung zum Helly'shen Satze//Arch. Math. 1953. Bd. 4. S. 222 – 224.

Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов

Глызин С.Д.¹

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

Рассматриваются системы нелинейных слабо связанных осцилляторов, возникающие при изучении разностных аппроксимаций некоторых классов краевых задач. В предположении, что связь между осцилляторами мала, строится нормальная форма задачи, а по ней система фазовых уравнений, определяющая качественное поведение решений. Аналитическое и численное исследование полученных фазовых уравнений выполнено для различного числа осцилляторов и различных значений параметра, выраженного в инвариантах исходной системы. Численный анализ полученной модели показал, что в широком диапазоне изменения параметров увеличение числа осцилляторов при наличии между ними слабой связи приводит к возникновению хаотических колебаний растущей ляпуновской размерности.

Большое число физических и биохимических приложений связаны с задачей “реакция-диффузия”, которая представляет собой эволюционное уравнение, в котором пространственно-временные изменения изучаемой переменной обусловлены диффузией по пространственной переменной и нелинейным, обычно колебательным, поведением по времени. Ряд важных моделей биологии и физики сводится именно к уравнению типа “реакция-диффузия”. При решении этих задач часто возникают существенные трудности вычислительного характера, в связи с чем требуется предварительный асимптотический анализ, который иногда позволяет определить качественную структуру пространства состояний изучаемых динамических систем и возможные фазовые перестройки при изменении параметров. Один из возможных методов изучения качественного поведения решений задачи типа “реакция-диффузия” состоит в замене соответствующих уравнений в частных производных системами связанных осцилляторов. Следует отметить, что изучение взаимодействия таких цепочек имеет и самостоятельное значение, не связанное с породившими их краевыми задачами (см., например, [1], [2]). В настоящей работе рассматривается динамическая система, описывающая поведение разностей фаз близких диффузионно-связанных осцилляторов. Такие системы изучались ранее при некоторых конкретных значениях параметров (см. [3 – 5]). В нашей работе изучение этой системы продолжено. Среди наиболее важных результатов отметим утверждение о близкой к линейной зависимости размерности странного аттрактора системы от числа связанных осцилляторов.

1. Постановка задачи

Цепочки и решетки связанных осцилляторов возникают, как правило, при изучении краевых задач, описывающих пространственно-временные структуры в физических приложениях. Известным примером такого рода служит уравнение “реакция-диффузия”, которое по своим свойствам во многом аналогично задаче Навье-Стокса, а также некоторым биофизическим моделям.

В пространстве непрерывных вектор-функций со значениями в R^2 рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \varepsilon \mu D u'' + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u), \quad (1)$$

с краевыми условиями непроницаемости

$$u'(t, 0) = u'(t, 1) = 0, \quad (2)$$

или периодическими

$$u(t, x) = u(t, x + 1), \quad u'(t, x) = u'(t, x + 1). \quad (3)$$

Здесь $0 < \varepsilon$, $\mu \ll 1$, $D = \text{diag} \{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = 1$, точкой обозначена производная по t , штрихом – по x , $A_0 a = i\omega_0 a$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, $\omega_0 > 0$, $(a, b) = 1$, F – гладкая нелинейная вектор-функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. Областью определения пространственной переменной x считаем отрезок $[0, 1]$ в случае краевых условий (2) и окружность единичной длины в случае периодической краевой задачи. В дальнейшем полагаем, что $\tau'_0 > 0$, где $\lambda'_0 = \tau'_0 + i\omega'_0 = (A_1 a, b)$ и $\text{Re } d < 0$, где $d = d_0 + i\omega c_0$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке программы „Университеты России“ (грант 04.01.452).

Доказательство осуществляется прямой подстановкой выражения $\alpha_1 = -\alpha_2$ в систему (18). В результате оба уравнения (18) превращаются в соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 3 \sin \alpha_1 + \kappa(1 - \cos \alpha_1).$$

Отметим, что данное уравнение имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = 0$ и устойчивое $\alpha_1 = -\gamma_1$.

Суммируя, можно утверждать, что при значениях параметра $0 < \kappa < \frac{3}{\sqrt{7}}$ на фазовом торе системы (18) имеется единственное глобально устойчивое состояние равновесия вида (19).

Изменение параметра κ приводит к тому, что при $\kappa = \frac{3}{\sqrt{7}}$ состояния равновесия (20) сливаются с (19) и отбирают у него устойчивость. В результате указанной бифуркации у системы (18) при $\kappa > \frac{3}{\sqrt{7}}$ остается только глобально орбитно асимптотически устойчивый однообходный цикл, существование которого обусловлено 2π -периодичностью системы (18) по α_1 и α_2 .

В случае четырех взаимодействующих осцилляторов фазовая система (15), (16) приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos \alpha_2 - 1).\end{aligned}\quad (21)$$

При определении состояний равновесия системы (21) центральное значение имеет уравнение

$$\sin\left((\alpha_1 + \alpha_3)/2\right) \cdot \cos\left(\gamma_3 - (\alpha_1 - \alpha_3)/2\right) = 0, \text{ где, как и прежде, } \gamma_3 = \arcsin\left(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-1/2}\right). \quad (22)$$

получающееся после сложения всех правых частей системы (21). Учитывая 2π -периодичность переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системы (21), из условия $\sin\left((\alpha_1 + \alpha_3)/2\right) = 0$ получаем следующие состояния равновесия:

$$(0, 0, 0), \quad (23)$$

$$(\pi, 0, \pi), \quad (24)$$

$$(-\arcsin(\kappa), \pi, \arcsin(\kappa)), \quad (25)$$

$$(\pi + \arcsin(\kappa), \pi, \pi - \arcsin(\kappa)), \quad (26)$$

последние два из которых существуют лишь при $|\kappa| \leq 1$. Анализ матрицы устойчивости позволяет заключить, что тривиальное решение системы при любых значениях κ – неустойчивый узел, состояние равновесия (24), соответствующее колебаниям в противофазе – седло-узел, состояние равновесия (25) – также седло-узел и, наконец, точка (26) является устойчивым узлом при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2$ и седло-узлом при $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2 < \kappa < 1$, напомним, что при $\kappa > 1$ этого состояния равновесия не существует.

Все состояния равновесия, получающиеся в результате обнуления второго сомножителя уравнения (22), оказываются неустойчивыми, и их вид здесь приводиться не будет.

Система (21), так же как и (18), имеет инвариантные множества, позволяющие прояснить характер расположения траекторий системы. В частности, выполнено следующее простое утверждение:

Лемма 2. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ является инвариантным множеством системы (21).*

Как и в двумерном случае, подстановка $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, превращает все уравнения системы (21) в одно соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 2 \sin \alpha_1 + 2\kappa,$$

которое имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = -\arcsin(\kappa)$ и устойчивое $\alpha_1 = \pi - \arcsin(\kappa)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что состояние равновесия (26) является единственным устойчивым режимом исследуемой динамической системы при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2$.

Увеличение κ приводит к усложнению динамики. Численный анализ системы (21) показал, что при $\kappa > \sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2$ возникают устойчивые однообходные циклы, которые, по-видимому, остаются единственными устойчивыми режимами системы (21) при всех κ за исключением промежутка (κ_1, κ_2) , где $\kappa_1 \approx 1.13$, $\kappa_2 \approx 1.20$. В этом промежутке поведение решений системы носит неупорядоченный характер с относительно малым старшим ляпуновским показателем. Вычисленные в средней точке промежутка $\kappa_1 = 1.165$ значения ляпуновских показателей оказались равными $\lambda_1 \approx 0.0137$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -2.118$.

3.2. Численные оценки старшего ляпуновского показателя и ляпуновской размерности фазовой системы при $n > 4$. При достаточно большом κ и $n > 4$ система (15), (16) может демонстрировать неупорядоченное поведение решений. В связи с этим перейдем к численной оценке ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности d_L притягивающего множества изучаемой системы для различных n и κ . Для определения величины d_L будем пользоваться стандартной формулой

$$d_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (27)$$

где λ_i – выписанные в порядке возрастания ляпуновские экспоненты, а j – такой номер, что

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0.$$

Положительность старшего ляпуновского показателя часто рассматривается как признак хаотических колебаний, поэтому представляет интерес определение зависимости этого показателя от параметра. Следует отметить, что отрицательность величины λ_1 свидетельствует о том, что решение системы приближается к устойчивому состоянию равновесия, если же λ_1 близко к нулю, то решения изучаемой системы в ситуации общности положения приближаются к орбитно асимптотически устойчивому циклу. Ниже представлены графики зависимостей λ_1 от κ при $n = 5, \dots, 10$. Численное определение ляпуновских показателей было произведено с помощью программы Д.С. Глызина (см. [8]).

Графики зависимостей построены при $1 < \kappa < 4$. Такие значения параметра выбраны, поскольку при $0 < \kappa < 1$ система (15), (16) имеет устойчивое состояние равновесия, а при $\kappa > 4$ и $n = 6, \dots, 9$ единичные расчеты показали примерно ту же зависимость от κ , что и на изученном промежутке.

Представленные графики позволяют судить об общей динамике системы (15), (16) при изменении κ .

Для n равных пяти и шести (см. рис. 1,2) сценарий фазовых перестроек следующий:

- 1) при достаточно малых κ глобально устойчиво ненулевое состояние равновесия системы;
- 2) при увеличении κ возникает устойчивый цикл (намотка на торе);
- 3) цикл теряет устойчивость с возникновением хаотических колебаний;
- 4) в зоне хаотических колебаний наблюдаются окна периодичности;
- 5) наконец, при достаточно больших κ снова устойчивым оказывается многообходный цикл.

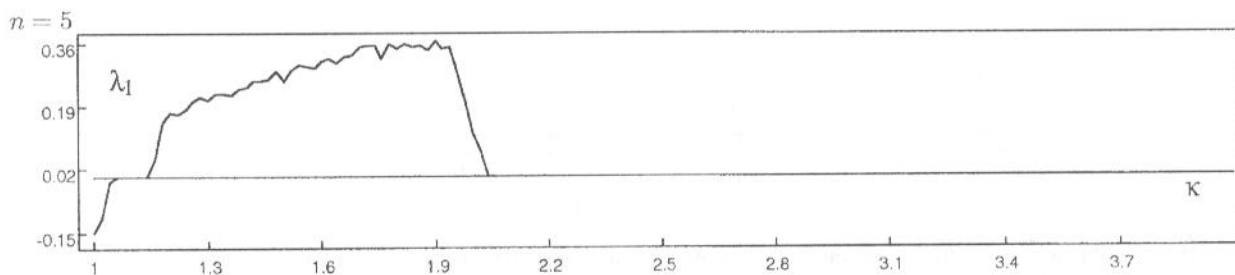


Рис. 1

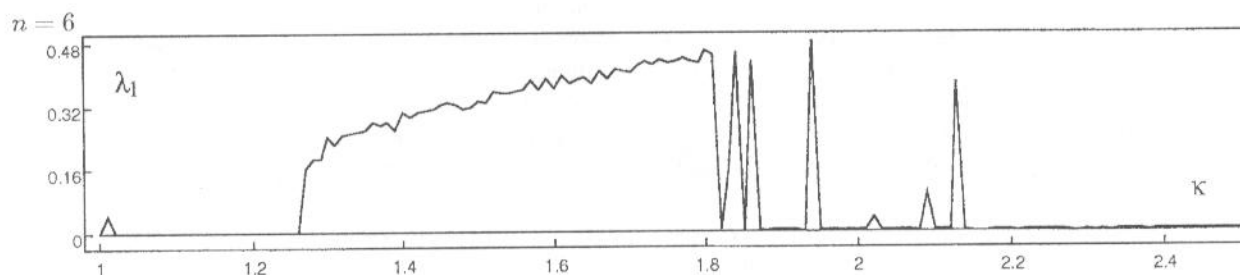


Рис. 2

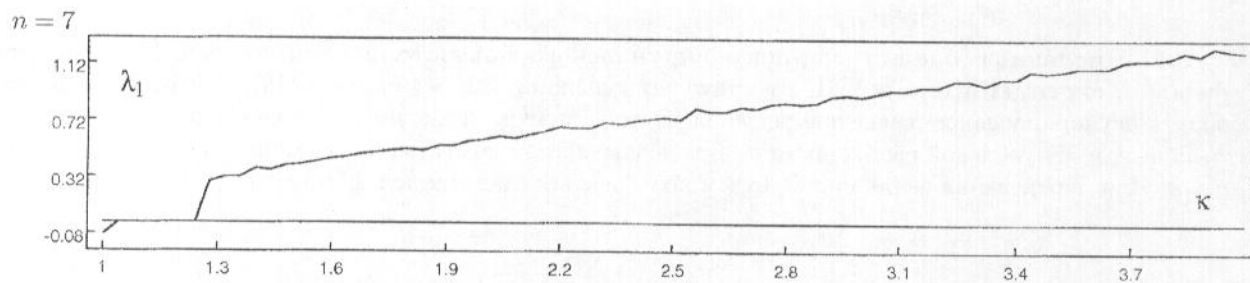


Рис. 3

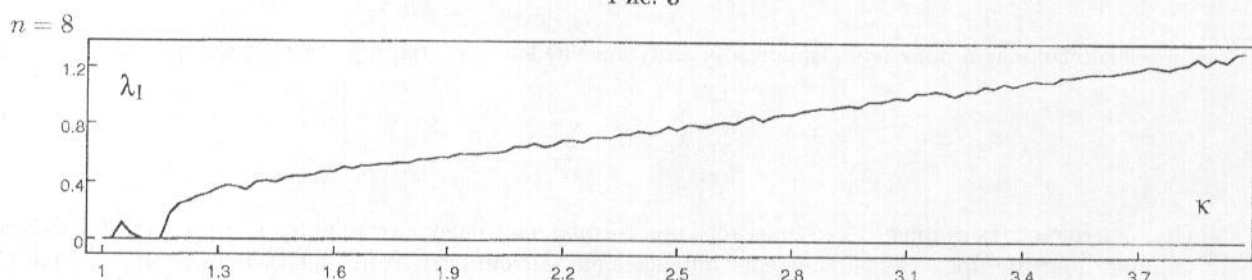


Рис. 4

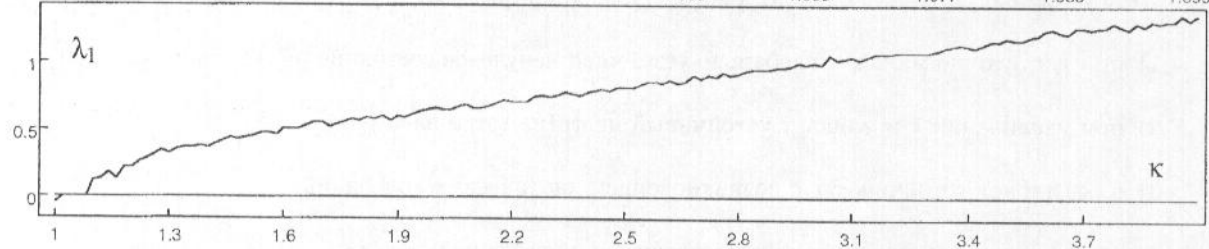
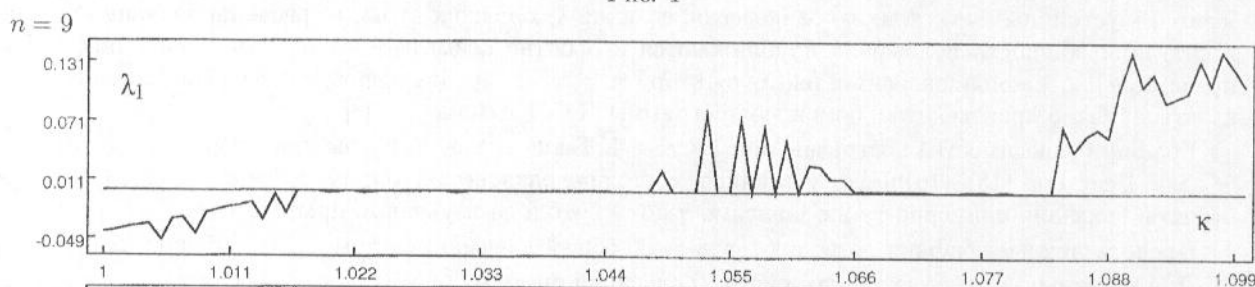


Рис. 5

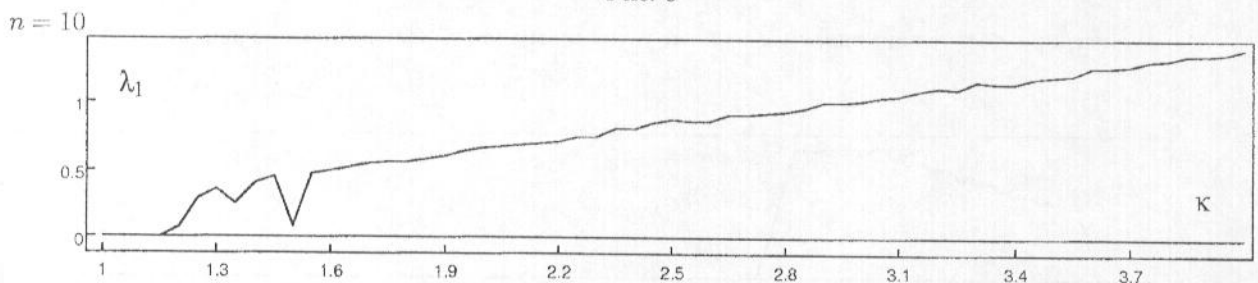


Рис. 6

В случае если $n > 6$ при сохранении первых четырех пунктов приведенного сценария пятый существенно меняется (см. рис. 3-6). Как оказалось, увеличение κ в этих случаях не приводит к потере хаотических колебаний и возникновению циклов. Остановимся несколько подробнее на области значений κ , соответствующей переходу от регулярных колебаний к хаотическим. На рис. 5 представлены два графика для $n = 9$. На верхнем из них, как и в других случаях, представлена зависимость $\lambda_1(\kappa)$ на промежутке от $\kappa = 1$ до $\kappa = 4$, а на нижнем рисунке представлен промежуток от $\kappa = 1$ до $\kappa = 1.1$. Из этого графика видно, что в процессе перехода от периодических колебаний к хаотическим имеются многочисленные окна периодичности. Для других значений n окрестность точки перехода на графике зависимости λ_1 от κ имеет аналогичную структуру.

Рассмотрим теперь зависимость ляпуновской размерности d_L от числа осцилляторов n . Численные оценки этой величины, выполненные при различных значениях κ , приведены в следующей таблице:

Таблица 1

	$\kappa = 1$	$\kappa = 1.5$	$\kappa = 2$	$\kappa = 2.5$	$\kappa = 3$	$\kappa = 3.5$	$\kappa = 4$
$n = 5$	0	3.042	2.558	1	1	1	1
$n = 6$	1.025	4.028	3.02	1	1	1	1
$n = 7$	1	4.729	4.997	5.049	5.101	5.134	5.207
$n = 8$	1	5.401	5.74	5.869	5.99	6.054	6.125
$n = 9$	0	6.127	6.521	6.735	6.913	6.965	7.046
$n = 10$	1	6.766	7.259	7.527	7.667	7.8	7.940

В графы таблицы вносятся ноль, если у системы имеется устойчивое состояние равновесия, и единица, если устойчивый цикл. Зависимость d_L от n близка к линейной, о чем свидетельствуют приведенные ниже формулы, полученные по не равным нулю и единице данным таблицы 1 из условий наилучшего среднеквадратического приближения.

$$\begin{aligned}
 d_L(n) &\approx 0.731 \cdot n - 0.468 \pm 0.03 && \text{при } \kappa = 1.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.992 \cdot n - 2.43 \pm 0.2 && \text{при } \kappa = 2, \\
 d_L(n) &\approx 0.83 \cdot n - 0.76 \pm 0.03 && \text{при } \kappa = 2.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.862 \cdot n - 0.91 \pm 0.04 && \text{при } \kappa = 3, \\
 d_L(n) &\approx 0.891 \cdot n - 1.084 \pm 0.03 && \text{при } \kappa = 3.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.912 \cdot n - 1.173 \pm 0.005 && \text{при } \kappa = 4.
 \end{aligned}$$

В полученных формулах точность приближения увеличивается с ростом κ . Относительно низкая точность приближенной формулы для $\kappa = 2$ объясняется учетом величины $d_L(n)$ при $n = 5$, если это значение отбросить, то полученное линейное приближение будет иметь точность, сравнимую с точностью для остальных значений κ . Отметим, кроме того, что для $n = 7, \dots, 10$ значения d_L , представленные в таблице 1, медленно растут с увеличением κ .

4. Фазовая система диффузионно связанных осцилляторов на окружности

Как уже отмечалось, система (8), (9) описывает изменения амплитуд и фаз осцилляторов, помещенных в n равноотстоящих точках отрезка. Рассмотрим теперь модельную краевую задачу (1) на окружности, для этого заменим краевые условия Неймана (2) на условие периодичности по пространственной переменной (3), а граничные условия (16) фазовой системы (15) на условия (17). Очевидно, что при этих изменениях общий вид соотношений (15) не меняется, вместе с тем оказывается, что поведение решений системы (15), (17) изменяется существенно. В силу специфики пространственной области (окружность) система дифференциальных уравнений на интегральном многообразии (14) оказывается консервативной. В случае $n = 4$ удается найти общие интегралы системы (15), (17) и построить ее полный фазовый портрет. Для старших размерностей этот факт установлен численно. Более того, далее будет показано, что даже учет поправки порядка μ к системе (15), (17) на интегральном многообразии (14) оставляет ее негрубой.

При $n > 4$ численно удалось показать, что при увеличении n система (15), (17) обладает многочастотными колебаниями с растущим числом частот. Данный результат не позволяет сделать однозначных выводов относительно исходной краевой задачи (1), (3). Вместе с тем, показано, что фазовая система (15), (17) имеет растущее с ростом n число грубых состояний равновесия, которым у исходной краевой задачи соответствуют бегущие волны. Это показывает, что с уменьшением диффузионного члена сложность решений и этой задачи растет.

4.1. Три и четыре осциллятора на окружности. Рассмотрим систему (15) при условиях (17). При $n = 3$ и 4 (случай трех и четырех точек на окружности) эта система полностью исследуется аналитическими методами.

Пусть сначала $n = 3$, то есть рассматривается система

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos \alpha_2), \\
 \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_1 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)).
 \end{aligned} \quad (28)$$

Элементарно устанавливается, что состояниями равновесия этой системы с точностью до периода являются точки $(0, 0)$,

$$(\pi + \gamma, 0), (0, \pi - \gamma), (\pi - \gamma, \pi + \gamma), \quad (29)$$

где $\gamma = 2 \arcsin(\kappa(9 + \kappa^2)^{-1/2})$,

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \quad (30)$$

причем нулевое состояние равновесия – неустойчивый узел, точки вида (29) – седла, а состояния равновесия (30) при $\kappa > 0$ – устойчивые фокусы, а при $\kappa = 0$ – устойчивые узлы. Учитывая, что прямые вида $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi n$ и $\alpha_j = 2\pi m$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$ инвариантны относительно системы (28), легко построить ее фазовый портрет. Следует отметить, что замена $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_2$, $\alpha_2 \rightarrow 2\pi - \alpha_1$ переводит (28) в себя, а состояния равновесия (30) друг в друга. Отсюда следует, что в исходной задаче эти состояния равновесия описывают один и тот же режим.

Суммируя, получаем, что для трех слабосвязанных осцилляторов имеется единственный устойчивый пространственно неоднородный режим типа бегущей волны с разностью фаз между соседними осцилляторами $2\pi/3$.

Увеличение числа осцилляторов приводит к существенно иным выводам, благодаря более сложному поведению решений соответствующих систем. Пусть теперь $n = 4$. Система (15), (17) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2\sin\alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin\alpha_2 + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \cos\alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 - \sin\alpha_3 + \kappa(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2\sin\alpha_3 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin\alpha_2 + \kappa(\cos\alpha_2 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)).\end{aligned}\quad (31)$$

Для исследования (31) удобно сделать замены

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad (32)$$

после чего приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sqrt{4 + \kappa^2} \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \delta), \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{4 + \kappa^2} \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \delta), \\ \dot{x}_3 &= 4 \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3,\end{aligned}\quad (33)$$

где $\delta = \arccos(2(4 + \kappa^2)^{-1/2})$. Для построения фазового портрета трехмерной системы (33) полезны следующие два утверждения, определяющие характер ее состояний равновесия и первые интегралы.

Лемма 3. *Состояния равновесия системы (33) лежат на прямых*

$$\begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_3 = -\delta \end{cases}, \begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_3 = \pi - \delta \end{cases}, \begin{cases} x_2 = j\pi \\ x_3 = \delta \end{cases}, \begin{cases} x_2 = j\pi \\ x_3 = \delta - \pi \end{cases}, \quad j = 0, \pm 1, \quad (34)$$

$$\begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_2 = k\pi \end{cases}, \quad j, k = 0, \pm 1, \quad (35)$$

и в точках

$$\left(j\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}, m\frac{\pi}{2}\right), \quad j, k, m = \pm 1, \pm 3. \quad (36)$$

Причем прямые вида (34) состоят из вырожденных седел (один нулевой характеристический показатель и два разных знака). Характер состояний равновесия на прямых (35) определяется неравенствами $|x_3| < \delta$, $\pi - \delta < |x_3| < \pi$, при выполнении которых имеем вырожденные седла, а в противном случае – особые точки типа центр (один нулевой и пара чисто мнимых характеристических показателей). Состояния равновесия (36) – узлы, которые устойчивы по Ляпунову, если сумма $\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]$ четна, и неустойчивы в противном случае. Здесь под $[\cdot]$ подразумевается целая часть числа.

Доказательство. Непосредственная подстановка точек из множеств (34)–(36) в правую часть системы (33) позволяет убедиться, что они – состояния равновесия. Анализируя матрицу устойчивости исследуемой системы, получаем вторую часть утверждения.

Отметим, что прямые (34) параллельны одной из осей Ox_1 или Ox_2 и ненулевые характеристические показатели седел, лежащих на них, равны $\pm 2\sqrt{2}\sin x_1$ и $\pm 2\sqrt{2}\sin x_2$ соответственно. Для седел, лежащих на прямых (35), характеристические показатели имеют вид $\pm [(4 + \kappa^2)\sin(x_3 + \delta)\sin(x_3 - \delta)]^{1/2}$, а для точек типа центр – $\pm i [-(4 + \kappa^2)\sin(x_3 + \delta)\sin(x_3 - \delta)]^{1/2}$.

Построение полного фазового портрета системы (33) существенно упрощается после доказательства следующего утверждения.

Лемма 4. Система (33) имеет два линейно независимых первых интеграла вида

$$\cos^2 x_1 = c_1 \exp\left(-\frac{\kappa x_3}{2}\right) \cos x_3, \quad (37)$$

$$\cos^2 x_2 = c_2 \exp\left(-\frac{\kappa x_3}{2}\right) \cos x_3. \quad (38)$$

Доказательство. Утверждение доказывается прямой подстановкой.

Изложенные леммы позволяют доказать следующее предложение.

Теорема 1. Система (33) консервативна, причем окрестность вырожденных центров, лежащих на прямых (35), заполнена замкнутыми траекториями. Сепаратрисная поверхность, отделяющая замкнутые траектории, определяется из первых интегралов (37), (38) путем вариаций c_2 при фиксированном $c_1 = c^* \exp\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)$ и соответственно вариацией c_1 при $c_2 = c^*$, где $c^* = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2}\right)$.

Доказательство. Утверждение теоремы о консервативности системы (33) следует из существования первых интегралов, найденных в лемме 4. Докажем теперь существование замкнутых траекторий. Для этого в равенствах (37), (38) перейдем к переменным $y_j = \cos x_j$, $j = 1, 2, 3$. Тогда соотношения для первых интегралов преобразуются к

$$y_1^2 = c_1 y_3 \exp\left(-\frac{\kappa}{2} \arccos y_3\right), \quad (39)$$

$$y_2^2 = c_2 y_3 \exp\left(\frac{\kappa}{2} \arccos y_3\right), \quad (40)$$

при $x_3 > 0$. Если $x_3 < 0$, то в формулах (39), (40) следует сменить знаки показателей экспонент на противоположные. Общий вид графиков функций (39), (40) при различных c_1, c_2 изображен на рис. 7, 8. В силу симметрии относительно оси Oy_3 и ограничений $|y_j| = 1$, $j = 1, 2, 3$ графики изображены в верхней полуплоскости и ограничены прямыми $|y_j| = 1$. Отметим, что при $x_3 < 0$ графики следует поменять местами. Кривые (39) при любом c_1 имеют в точке $y_3 = -y^* = -\left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{-1/2}$ экстремум, а в точке $y_3 = y^*$ – точку перегиба. Для кривых (40) – напротив $y_3 = y^*$ – точка экстремума, $y_3 = -y^*$ – точка перегиба. Среди всех равенств (39), (40) выделим те, графики которых касаются прямых $y_1 = 1$ и $y_2 = 1$ соответственно. В первом случае касание происходит при $c_1 = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\kappa(\pi-\delta)}{2}\right)$, во втором – при $c_2 = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2}\right)$. Рассмотрим теперь качественное поведение траекторий системы (33), соответствующих кривым (39), (40). Все кривые на рис. 7, 8 можно условно разбить на два типа: попадающие и не попадающие в точку ноль. Кривая (39) при $c_1 = c^* \exp\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)$ и (40) при $c_2 = c^*$ разделяют области кривых разных типов. Точке ноль в переменных y_j соответствуют узлы (36), поэтому траектории системы (33), соответствующие кривым с точкой ноль, не могут быть замкнутыми. Кривые второго типа начинаются и кончаются на прямых $|y_j| = 1$ так, что граничным точкам не могут соответствовать состояния равновесия, то есть движение после граничной точки продолжается. Простые вычисления показывают, что замкнутым траекториям системы (33) соответствуют пара или четыре кривых указанного типа. Отсюда следует, что траектории, соответствующие экстремальным кривым, образуют поверхность, разделяющую замкнутые и незамкнутые траектории. Тем самым теорема доказана.

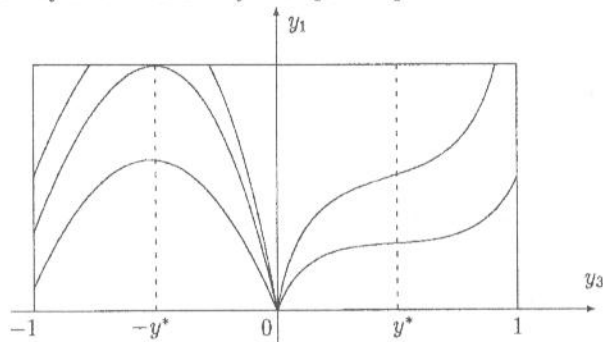


Рис. 7

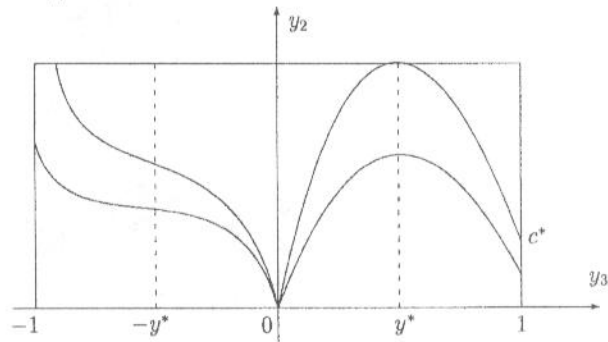


Рис. 8

Перейдем к построению фазового портрета (33). В силу инвариантности системы (33) относительно замен $x_j \rightarrow x_j + 2\pi t$ и $x_j \rightarrow \pi - x_j$ ограничимся рассмотрением куба $|x_j| \leq \frac{\pi}{2}$, $j = 1, 2, 3$, трехмерного

фазового пространства (33). В соответствии с теоремой 1 построим сепаратрисную поверхность, отделяющую вложенные циклы от траекторий, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к устойчивым узлам (35). Поверхность с указанными свойствами изображена на рис. 9, а на рис. 10 показаны сепаратрисные поверхности, разделяющие траектории, стремящиеся к различным состояниям равновесия. Варьирование параметра κ не приводит к качественным изменениям фазовой картины, меняется лишь размер области периодических режимов: большему значению κ соответствует большая область, заполненная периодическими режимами. В предельном случае $\kappa = 0$ циклов нет, а при $\kappa \rightarrow \infty$ циклами заполнено все фазовое пространство за исключением сепаратрисных поверхностей. Негрубый характер полученных режимов не позволяет сделать каких-либо выводов относительно существования соответствующих режимов в системе (4). Возможной причиной негрубости результата может быть недостаточная точность вычисления интегрального многообразия (14) и системы дифференциальных уравнений (15), (17) на нем. Покажем, что это не так.

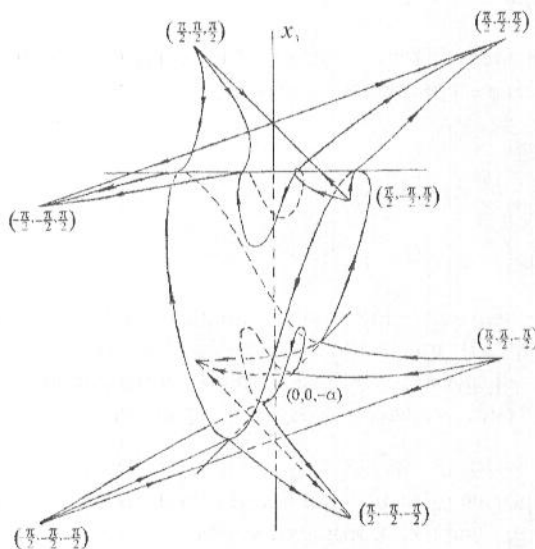


Рис. 9

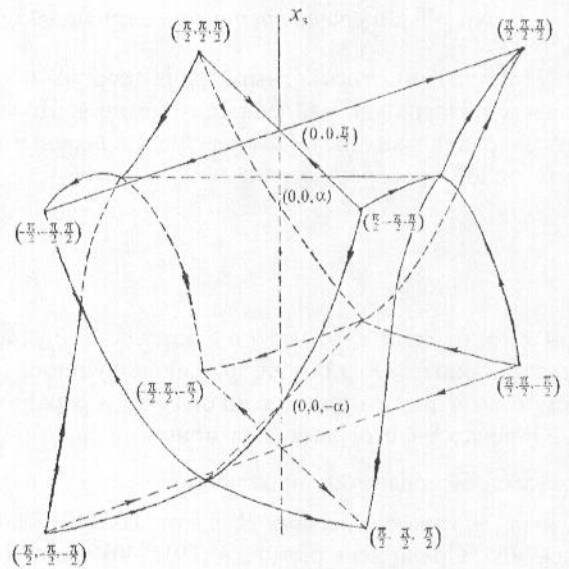


Рис. 10

4.2. Учет слагаемых более высокого порядка малости. Рассмотрим снова систему (8)-(9) и построим асимптотические формулы для устойчивого интегрального многообразия (14) и системы (15), (17) на нем более высокой степени точности. Следующая теорема дает требуемые асимптотические формулы.

Теорема 2. Глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие системы (8), (9), (11) с точностью до слагаемых порядка μ^3 представляется в виде

$$\xi_j = \left(-\frac{\tau'_0}{d_0} \right)^{1/2} \left(1 + \mu \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu^2 \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + O(\mu^3) \right), \quad (41)$$

где

$$\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{g}{2\tau'_0} \left(\cos(\alpha_j + \gamma) - 2 \cos \gamma + \cos(\gamma - \alpha_{j-1}) \right),$$

$$\begin{aligned} \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = & -\frac{3}{2} \varphi_j^2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \frac{g}{2\tau'_0} \left(\varphi_{j+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos(\alpha_j + \gamma) - 2\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos \gamma + \right. \\ & \left. + \varphi_{j-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos(\gamma - \alpha_{j-1}) \right), \quad \gamma = -\text{sign}(x_0) \arccos(1 + x_0^2)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поведение решений системы (8), (9), (11) с точностью до слагаемых порядка μ^3 определяется грубыми устойчивыми режимами уточненной системы

$$\dot{\alpha}_j = 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \kappa (\cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}) + \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{4\tau_0} & \left(-\sin \alpha_{j+1}(\cos \alpha_{j+2} + x_0 \sin \alpha_{j+2}) + 2x_0 \sin^2 \alpha_{j+1} + \right. \\ & + x_0(-\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \sin \alpha_j + (\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - 2x_0 \sin^2 \alpha_{j-1} - \\ & - \sin \alpha_{j-1}(\cos \alpha_{j-2} - x_0 \sin \alpha_{j-2}) + \kappa \left(-\cos \alpha_{j+1}(\cos \alpha_{j+2} + x_0 \sin \alpha_{j+2}) + \right. \\ & + 4x_0 \sin 2\alpha_{j+1} + 3(\cos \alpha_{j+1} - \cos \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - 2x_0(\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - \\ & \left. \left. - x_0(\cos \alpha_{j+1} + \cos \alpha_{j-1}) \sin \alpha_j - x_0 \sin 2\alpha_j + x_0 \sin 2\alpha_{j-1} + \cos \alpha_{j-1}(\cos \alpha_{j-2} - x_0 \sin \alpha_{j-2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

а для α_0 и α_n выполнены условия (17).

Доказательство. Система (8), (9), (11) при $\mu = 0$ имеет глобальное экспоненциальное устойчивое интегральное многообразие, поведение решений на котором описывается уравнением $\dot{\alpha}_j = 0$. Используя общие утверждения книги [7] о том, что при всех достаточно малых μ система (8), (9), (11) имеет аналогичное интегральное многообразие, получим разложение (41). Для нахождения $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достаточно подставить асимптотическую формулу (42) соответственно в уравнения (8) и (9), а затем приравнять коэффициенты при μ и μ^2 . Несложные, но трудоемкие вычисления приводят к формулам (42), (43). Отметим, что в (42) дополнительно выполнена нормировка времени $\mu(x_0 y_0 - 1)t \rightarrow 2t$. Теорема доказана.

Рассмотрим полученный результат в применении к случаю $n = 4$. Производя в (42) замены (32), приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (4 + \kappa^2)^{1/2} \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \delta) - \frac{\mu}{2\tau_0'} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_2) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\kappa}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_2) \right) \right) \sin 2x_1, \\ \dot{x}_2 &= (4 + \kappa^2)^{1/2} \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \delta) - \frac{\mu}{2\tau_0'} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_1) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_1) \right) \right) \sin 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= 4 \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \frac{\mu}{2\tau_0'} \kappa \left(\cos x_3(\cos 2x_2 - \cos 2x_1) + \right. \\ & \left. + x_0 \sin x_3(2 \cos 2x_1 \cos 2x_2 - \cos 2x_1 - \cos 2x_2) \right) \cos x_3. \end{aligned} \quad (44)$$

Учет слагаемых порядка μ , в системе (44) разрушает неглубокую картину, найденную в пункте 4.1 для системы (33), однако и в этом случае фазовый портрет уточненной системы (44) остается неглубоким. Ниже перечислены основные изменения качественной картины фазового пространства при переходе от системы (33) к системе (44).

1. Пропадают состояния равновесия вида (34).

2. Неглубокие состояния равновесия (35) типа центр становятся вырожденными фокусами.

3. Циклы превращаются в спирали, стремящиеся к точкам прямой (35).

4. При разрушении области циклов часть из них не пропадает и заполняет некоторую полуустойчивую поверхность.

Первые два из перечисленных утверждений элементарно следуют из анализа правых частей системы (44) и ее матрицы устойчивости. Третье и четвертое предложение обосновываются с помощью численного анализа системы (44).

4.3. Случай n осцилляторов. Увеличение числа точек разбиений пространственной области затрудняет аналитическое исследование систем (15), (17) и (42), (17). Численный анализ этих систем при $n > 4$ показал, что их общие свойства для четных n в целом остаются теми же, что и при $n = 4$. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

Пусть число осцилляторов n – четное, тогда существует такая окрестность $(n-1)$ -мерного фазового пространства системы (15), (17), содержащая точку $(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$, что решение, выпущенное из любой точки этой области, лежит на торе, размерность которого растет с ростом n .

При $n = 4$ это утверждение следует из теоремы 1. Для $4 < n \leq 12$ обоснование производилось численно. В $(n-1)$ -мерном кубе фазового пространства системы (15), (17) с центром в точке $(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ и

ребром 0.5 случайным образом или на равномерной сетке выбирались начальные точки, затем из этих точек выпускались траектории. Оказалось, что полученные траектории либо приближаются к устойчивым состояниям равновесия, либо осциллируют. Далее, осциллирующие решения подвергались частотному анализу. Общий результат таков: при $n = 6$ – колебания близки к одночастотным, при $n = 8$ и 10 – двухчастотным и при $n = 12$ – трехчастотным колебаниям. Ляпуновские показатели системы (15), (17), вычисленные вдоль таких колебательных решений, оказываются с высокой точностью равны нулю, что также подтверждает квазипериодичность получаемых решений.

Для нечетного числа осцилляторов (четное число уравнений в системе (15), (17)) устойчивыми по Ляпунову остаются, в пределах точности численного счета, лишь неподвижные точки, причем среди них всегда имеются как грубые, так и негрубые состояния равновесия.

Важно отметить, что с ростом n (как в четном, так и в нечетном случае) растет число грубых устойчивых состояний равновесия, которым в исходной системе соответствуют решения типа бегущих волн. Бассейны притяжения этих состояний равновесия имеют сложную структуру, и переходные процессы при стремлении траекторий к этим точкам оказываются сколь угодно длительными.

Анализ уточненной системы (42), (17) при $n > 4$ показывает, что области негрубых колебательных режимов, как и в случае $n = 4$, превращаются в поверхности. Численное исследование таких поверхностей затруднительно из-за узких областей притяжения, поэтому приходится ограничиться численным обоснованием их существования.

Заключение

Непосредственный численный анализ краевых задач типа “реакция-диффузия” при достаточно малой диффузии показывает наличие у них сложных пространственно неоднородных режимов, однако для расчета размерностных характеристик и даже старшего ляпуновского показателя требуются в этом случае значительные вычислительные мощности.

В случае если область изменения пространственной переменной – отрезок, нами показано, что с уменьшением диффузии размерность аттрактора фазовой системы растет. Это позволяет считать, что и у исходной краевой задачи происходит рост размерности притягивающего множества.

Случай краевой задачи на окружности оказался сложнее в силу специфики области, поскольку решения в этом случае определены с точностью до сдвига вдоль пространственной переменной. Поэтому полученным в пункте 4 негрубым состояниям равновесия и квазипериодическим решениям может ничего не соответствовать в исходной краевой задаче. Вместе с тем, растущее число грубых состояний равновесия фазовой системы, которым соответствуют бегущие волны у исходной задачи, показывает, что с уменьшением диффузионного члена сложность решений данной задачи растет.

В заключение отметим, что численные результаты пункта 3 были получены с помощью свободно распространяемой программы *tracer3.5* [8].

Литература

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
2. Нелинейные волны: Структуры и бифуркации / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1987.
3. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 41 – 49.
4. Колесов А.Ю. Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию // Докл. АН СССР. 1988. Т. 200, № 4. С. 831 – 835.
5. Кащенко С.А. Пространственные особенности высококомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Диф. уравнения. 1989. Т.25. №2. С. 262 – 270.
6. Колесов Ю.С. Метод квазилинейных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. матем. журн. 1987. Т. 39, № 1. С. 28 – 34.
7. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
8. <http://tracer.narod.ru>