

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 24 № 5(71) 2017

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Главный редактор

В.А. Соколов,

доктор физико-математических наук, профессор, Россия

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **Л. Авено**, проф., Франция;
В.С. Афраймович, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия;
В.Н. Белых, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф., США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Захаров**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн. наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель науки РФ, Россия; **О. Кушнарченко**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук, проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомнящий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАО, Россия; **Н. Сидорова**, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **М.Б. Трахтенброт**, д-р комп. наук, Израиль; **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Ф. Шнеблен**, проф., Франция

Ответственный секретарь **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX . Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №5. 2017

Существование несмещенной оценки энтропии для специальной меры Бернулли <i>Тимофеев Е. А.</i>	521
Устойчивость решений дискретных краевых задач для уравнения двумерной фильтрации <i>Кащенко С. А.</i>	537
Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа <i>Преображенская М. М.</i>	550
О локально выпуклых кривых <i>Климов В. С.</i>	567
Об n -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ <i>Невский М. В., Ухалов А. Ю.</i>	578
Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве <i>Нестеров П. Н.</i>	596
Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского <i>Секацкая А. В.</i>	615
Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях <i>Беляев В. А., Шапеев В. П.</i>	629
Семейство негрубых циклов в системе двух связанных генераторов с запаздыванием <i>Кащенко А. А.</i>	649
Конструктивное решение проблемы эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка <i>Балабаев В. Е.</i>	655

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 – 66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 23.10.2017. Дата выхода в свет 31.10.2017. Формат 60x84¹/₈. Усл. печ. л. 17,9. Уч.-изд. л. 16,0. Объем 154 с. Тираж 46 экз. Свободная цена. Заказ 070/017. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 24 No 5(71) 2017

Founded in 1999
6 issues per year

Editor-in-Chief

V. A. Sokolov,

Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

Editorial Board

S.M. Abramov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **L. Aveneau**, Prof., France; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnobelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **V.A. Zakharov**, Prof., Dr. Sci., Russia

Responsible Secretary **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2017

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5. 2017

Existence of an Unbiased Entropy Estimator for the Special Bernoulli Measure <i>Timofeev E. A.</i>	521
Stability of the Solutions of the Simplest Space-Distributed Discrete Equations <i>Kashchenko S. A.</i>	537
The Impulse-Refractive Mode in the Neural Network with Ring Synaptic Interaction <i>Preobrazhenskaia M. M.</i>	550
On Locally Convex Curves <i>Klimov V. S.</i>	567
On n -Dimensional Simplices Satisfying Inclusions $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ <i>Nevskii M. V., Ukhlov A. Yu.</i>	578
Asymptotic Integration of Certain Differential Equations in Banach Space <i>Nesterov P. N.</i>	596
Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation <i>Sekatskaya A. V.</i>	615
Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains <i>Belyaev V. A., Shapeev V. P.</i>	629
A Family of Non-rough Cycles in a System of Two Coupled Delayed Generators <i>Kashchenko A. A.</i>	649
Constructive Solution of Ellipticity Problem for the First Order Differential Systems <i>Balabaev V. E.</i>	655

©Тимофеев Е.А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-521-536

УДК 519.17

Существование несмещенной оценки энтропии для специальной меры Бернулли

Тимофеев Е.А.

получена 10 июля 2017

Аннотация.

Пусть $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ – пространство правосторонних бесконечных последовательностей символов из алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

– метрика на Ω и μ – вероятностная мера на Ω . Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые случайные точки на Ω , распределенные по мере μ . Будем изучать оценку $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ величины обратной к энтропии $1/h$, которая определяется следующим образом:

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k \left(r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma) \right),$$

где

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \gamma \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right),$$

$\min^{(k)}\{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, if $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$. Число k и функция $\gamma(t)$ – вспомогательные параметры. Основной результат работы:

Теорема. Пусть μ – мера Бернулли с вероятностями $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 = p_1^2$, тогда существует функция $\gamma(t)$ такая, что

$$\mathbb{E} \eta_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{h}.$$

Ключевые слова: мера, метрика, энтропия, оценка, несмещенность, самоподобие, мера Бернулли

Для цитирования: Тимофеев Е.А., "Существование несмещенной оценки энтропии для специальной меры Бернулли", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 521–536.

Об авторе:

Тимофеев Евгений Александрович, orcid.org/0000-0002-0980-2507, доктор физ.-мат. наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: timofeevEA@gmail.com

В работе [5] предложена непараметрическая оценка энтропии, которая зависит от семейства метрик. В [8] эта оценка модифицирована так, что она зависит от конкретной метрики и некоторой функции $\gamma(t)$. Эта модификация более удобна для анализа, поэтому именно она и будет рассматриваться в настоящей работе.

Основным показателем качества оценки является ее точность, которая складывается из несмещенности и дисперсии оценки. Нахождение порядка убывания дисперсии оценки является более простой задачей. Почти оптимальный порядок убывания дисперсии доказан в [6]. Нахождение математического ожидания оценки в общем случае является очень трудной задачей, найти решение которой, по-видимому, невозможно. Поэтому находить ее будем для мер Бернулли. Для мер Бернулли асимптотическая несмещенность доказана для почти всех значений параметров и конкретной функции $\gamma(t)$ [9]. Для бинарных мер Бернулли с параметрами p_0, p_1 ($p_0 + p_1 = 1$) исключительные случаи, в которых асимптотическая сходимость не доказана, описываются как

$$\frac{\log p_0}{\log p_1} - \text{рационально.}$$

Отсутствие сходимости в исключительных случаях является принципиальной трудностью, поскольку при простейшем выборе метрики и функции $\gamma(t)$ (оценка Грассбергера [3]) в случае $p_0 = p_1 = 1/2$ показано [7], что оценка является смещенной, хотя смещение очень мало (порядка 10^{-6}). В [5] показано, что при метрике, заданной в (1), и функции $\gamma(t) = -\log_2 t$ в случае $p_0 = p_1 = 1/2$ оценка будет несмещенной.

В настоящей работе будет показано, что и для следующего исключительного случая

$$\frac{\log p_0}{\log p_1} = 2$$

для метрики, заданной в (1), можно найти такую функцию $\gamma(t)$, для которой оценка энтропии будет несмещенной.

Таким образом, предложенный в [5, 8] метод адаптивного оценивания энтропии (предварительное нахождение вспомогательной функции) работает и в исключительных случаях.

1. Непараметрическая оценка энтропии

Обозначим через $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ пространство правосторонних бесконечных последовательностей символов из конечного алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

Пусть даны $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые случайные точки в Ω , одинаково распределенные по вероятностной мере μ .

Зададим метрику ρ на Ω , положив

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| 2^{-i}. \quad (1)$$

Пусть заданы:

1. k – вспомогательный параметр, который k будем считать небольшим и фиксированным. Этот параметр служит для контроля применимости (оценки, полученные для различных значений k , являются оценками одной и той же величины);
2. $\gamma(t)$ – функция, определенная на полуинтервале $(0, 1]$.

Оценка $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ величины обратной к энтропии $1/h$ определяется следующим образом:

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k (r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma)), \quad (2)$$

где

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \gamma \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right), \quad (3)$$

и $\min^{(k)}\{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, если $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$.

Подчеркнем, что логарифм в определении энтропии выбирается натуральным (в этом случае в формуле (3) нет дополнительных множителей).

Ясно, что оценка линейно зависит от функции $\gamma(t)$.

Покажем, что ранее рассмотренные оценки укладываются в приведенную схему. Возьмем функцию

$$\gamma_0(2^{-k_1} + 2^{-k_2} + 2^{-k_3} + \dots) = k_1, \quad 0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots \quad (4)$$

В этом случае статистика $r_n^{(1)}(\gamma_0)$ совпадает со статистикой в оценке Грассбергера [3].

Отметим, что

$$\rho_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\gamma_0(\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}$$

– метрика, основанная на первом несовпадении.

В [6] показано,

$$\mathbb{E} r_n^{(k)}(\gamma_0) = \frac{H_n - H_{k-1}}{h} + \mathcal{O}(1),$$

где через

$$H_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \quad (5)$$

обозначаются гармонические числа.

Для дисперсии статистики $r_n^{(k)}(\gamma_0)$ в [6] показано, что $\text{Var } r_n^{(k)}(\gamma_0) = \mathcal{O}(n^{-1} \ln n)$.

В работе [5] аналогичные оценки доказаны для произвольной монотонной функции $\gamma(t)$, имеющей порядок $\log_2 t$.

Смещение оценки $\eta_n^{(k)}(\gamma_0)$ изучено в [9], где доказана асимптотическая несмещенность, если логарифмы некоторых вероятностей рационально не соизмеримы. Для меры Бернулли с вероятностями $p_0, p_1, \dots, p_m$ асимптотическая несмещенность выполняется, если $\log p_0, \log p_1, \dots, \log p_m$ рационально не соизмеримы.

2. Построение несмещенной оценки в случае $p_0 = p_1^2$

Теорема 1. Пусть μ – мера Бернулли с параметрами $p_0 = q^2$, $p_1 = q$, тогда существует такая функция $\gamma(t)$, что

$$\mathbb{E} \eta_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{h}.$$

Доказательство. В [10] показано, что

$$\mathbb{E} r_n^{(k)}(\gamma) = n \binom{n-1}{k-1} \int_0^1 \chi(t) t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt, \quad (6)$$

где

$$\chi(t) = \int_{\Omega} \gamma(\nu(t, \omega)) d\mu(\omega), \quad (7)$$

а $r = \nu(t, \omega)$ – обратная функция к мере шара $B(r, \omega)$ радиуса r с центром в точке ω

Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует такая функция $\gamma(t)$, что

$$\chi(t) = -\frac{\ln t}{h}. \quad (8)$$

Действительно, подставляя (8) в (7), (6) и применяя формулу [2, 4.253.1], получим

$$\mathbb{E} r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{H_n - H_{k-1}}{h},$$

где H_n – гармонические числа (5).

Следовательно,

$$\mathbb{E} \eta_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{h}.$$

Для нахождения решения уравнения (8) введем вспомогательные функции

$$\chi_{n,j}(t) = \int_{\Omega} \gamma(j2^{-n} + 2^{-n}\nu(t, \omega)) d\mu(\omega), \quad 0 \leq j < 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

и будем считать, что $\chi_{0,0}(t) = \chi(t)$.

Для метрики (1) и меры Бернулли с параметрами $p_0 = q^2$, $p_1 = q$ функция $r = \nu(t, \omega)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned} \nu(t, 0\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t}{q^2}, \omega\right), & 0 \leq t \leq q^2; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t-q^2}{q}, \omega\right) & q^2 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ \nu(t, 1\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t}{q}, \omega\right), & 0 \leq t \leq q; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\left(\frac{t-q}{q^2}, \omega\right) & q \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\chi_{n,j}(t) = \begin{cases} q^2 \chi_{n+1,2j} \left(\frac{t}{q^2} \right) + q \chi_{n+1,2j} \left(\frac{t}{q} \right), & 0 \leq t \leq q^2; \\ q^2 \chi_{n+1,2j+1} \left(\frac{t-q^2}{q} \right) + q \chi_{n+1,2j} \left(\frac{t}{q} \right), & q^2 \leq t \leq q; \\ q^2 \chi_{n+1,2j+1} \left(\frac{t-q^2}{q} \right) + q \chi_{n+1,2j+1} \left(\frac{t-q}{q^2} \right), & q \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Найдем функцию $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ через $\chi_{n,j}(t)$.

Лемма 1. Пусть для некоторого a , $0 < a < 1$, функция $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ ограничена при $t > a$, тогда

$$\chi_{n+1,2j+1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k-1} \chi_{n,j} (1 - q^{k+2}(1-t)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (12)$$

Доказательство. Положим

$$\bar{\chi}_{n,j}(t) = \chi_{n,j}(1-t),$$

тогда третье уравнение в (11) можно переписать как

$$\bar{\chi}_{n,j}(t) = q^2 \bar{\chi}_{n+1,2j+1} \left(\frac{t}{q} \right) + q \bar{\chi}_{n+1,2j+1} \left(\frac{t}{q^2} \right), \quad 0 \leq t \leq q^2.$$

Сделав замену переменной, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\bar{\chi}_{n+1,2j+1}(t) = q^{-1} \bar{\chi}_{n,j}(q^2 t) - q \bar{\chi}_{n+1,2j+1}(qt), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13)$$

Покажем, что $\forall m \geq 1$ справедливо равенство

$$\bar{\chi}_{n+1,2j+1}(t) = (-1)^m q^m \bar{\chi}_{n+1,2j+1}(q^m t) + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k q^{k-1} \bar{\chi}_{n,j}(q^{k+2} t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (14)$$

Проведем индукцию по m . При $m = 1$ равенство (14) совпадает с (13).

Предположим, что (14) справедливо при заданном m и покажем, что оно справедливо и для $m + 1$.

Подставляя (13) в первое слагаемое (14), получим

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{n+1,2j+1}(t) &= (-1)^m q^{m-1} \bar{\chi}_{n,j}(q^{m+2} t) - (-1)^m q^{m+1} \bar{\chi}_{n+1,2j+1}(q^{m+1} t) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k q^{k-1} \bar{\chi}_{n,j}(q^{k+2} t) = \\ &= (-1)^{m+1} q^{m+1} \bar{\chi}_{n+1,2j+1}(q^{m+1} t) + \sum_{k=0}^m (-1)^k q^{k-1} \bar{\chi}_{n,j}(q^{k+2} t). \end{aligned}$$

По условию леммы функция $\bar{\chi}_{n+1,2j+1}(t)$ ограничена при $t < 1 - a$, тогда при $m \rightarrow \infty$ получаем (12). $\square$

При известной функции $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ нахождение функции $\chi_{n+1,2j}(t)$ легко проводится по формулам (9), которые перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\chi_{n+1,2j}(t) &= q^{-1}\chi_{n,j}(qt) - q\chi_{n+1,2j+1}(t-q), \quad q \leq t \leq 1; \\ \chi_{n+1,2j}(t) &= q^{-1}\chi_{n,j}(qt) - q\chi_{n+1,2j}(\tfrac{t}{q}), \quad 0 \leq t \leq q.\end{aligned}\tag{15}$$

Покажем, что функция $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ является аналитической, функция $\chi_{n+1,2j}(t)$ – кусочно-аналитической.

Обозначим через $\chi_{n,j}^{(m)}(t)$ аналитическую функцию, которая совпадает с $\chi_{n,j}(t)$ на интервале $(q^{m+1} < t < q^m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что $\chi_{n+1,2j+1}^{(m)}(t) = \chi_{n+1,2j+1}(t)$.

В этих обозначениях формулы (12), (15) переписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\chi_{n+1,2j+1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k-1} \chi_{n,j}^{(0)}(1 - q^{k+2}(1-t)), \quad 0 \leq t \leq 1; \\ \chi_{n+1,2j}^{(0)}(t) &= q^{-1}\chi_{n,j}^{(1)}(qt) - q\chi_{n+1,2j+1}(t-q), \quad q \leq t \leq 1; \\ \chi_{n+1,2j}^{(m)}(t) &= q^{-1}\chi_{n,j}^{(m+1)}(qt) - q\chi_{n+1,2j}^{(m-1)}(\tfrac{t}{q}), \quad q^{m+1} \leq t \leq q^m, \quad m \geq 1.\end{aligned}\tag{16}$$

Лемма 2. Пусть функция $\chi_{0,0}(t)$ аналитична на интервале $(0, 2)$, тогда функция $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ аналитична на интервале $(0, 2q^{-1})$, функция $\chi_{n+1,2j}^{(m)}(t)$ аналитична на интервале $(0, 2q^{m-1})$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots$

Доказательство. Проведем индукцию по n . По условию и предположению индукции функция $\chi_{n,j}^{(0)}(t)$ аналитична на $(0, 2)$.

Отсюда и из первого уравнения (16) следует, что $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ аналитична на интервале $|1-t| < q^{-2} = 2+q$ и, следовательно, на интервале $(0, 2q^{-1})$.

По условию и предположению индукции функция $\chi_{n,j}^{(1)}(t)$ аналитична на $(0, 2)$. Следовательно, функция $\chi_{n,j}^{(1)}(qt)$ аналитична на $(0, 2q^{-1})$. Функция $\chi_{n+1,2j+1}(t-q)$ аналитична на интервале $|1+q-t| < 2+q$. Отсюда и из второго уравнения (16) следует, что $\chi_{n+1,2j}^{(0)}(t)$ аналитична на интервале $(0, 2q^{-1})$.

По условию и предположению индукции функция $\chi_{n,j}^{(m+1)}(t)$ аналитична на $(0, 2q^{m-1})$. По доказанному функция $\chi_{n+1,2j}^{(m-1)}(\tfrac{t}{q})$ аналитична на интервале $(0, 2q^{m-1})$. Отсюда и из третьего уравнения (16) следует, что $\chi_{n+1,2j}^{(m)}(t)$ аналитична на интервале $(0, 2q^{m-1})$. $\square$

Непрерывную функцию $f(t)$, которая на каждом интервале $(q^{m+1} < t < q^m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, является многочленом степени k , будем называть **квазимногочленом степени k** .

Следствие 1. Пусть функция $\chi_{n,j}(t)$ – квазимногочлен степени k , тогда $\chi_{n+1,2j+1}(t)$ – многочлен степени k , $\chi_{n+1,2j}(t)$ – квазимногочлен степени k .

Лемма 3. Существует функция $\gamma(t)$, для которой $\chi(t) = 1-t$, т.е.

$$1-t = \int_{\Omega} \gamma(\nu(t, \omega)) d\mu(\omega).$$

Более того, существуют такие константы a_n , $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, что

$$\gamma(2^{-n} + 2^{-n}t) = a_n\gamma(t) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Эти константы задаются через производящую функцию $a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}$ по формуле

$$a(x + x^2) = \frac{q}{(1-x)(1+q^2+q^2x)}. \quad (18)$$

Доказательство. Индукцией по n покажем, что можно выбрать числа $a_1, a_2, \dots$ так, что

$$\chi(t) = 1 - t, \quad q^{n+1} \leq t \leq q^n.$$

При $n = 0$ из (17) имеем

$$\chi_{1,1}(t) = a_1\chi(t).$$

Из (18) имеем

$$a_1 = \frac{q}{1+q^2}$$

Поэтому третье уравнение в (11) при $n = j = 1$ переписывается в следующем виде:

$$\chi(t) = \frac{q^3}{1+q^2}\chi\left(\frac{t-q^2}{q}\right) + \frac{q^2}{1+q^2}\chi\left(\frac{t-q}{q^2}\right). \quad (19)$$

Поскольку отображения $S_0(t) = q^2 + qt$, $S_1(t) = q + q^2t$ являются сжатиями, то по известной теореме Хатчинсона [4] это уравнение с условием нормировки $\chi(0) = 1$ имеет единственное решение. Нетрудно проверить, что

$$\chi(t) = 1 - t$$

является решением уравнения (19).

Итак, из третьего уравнения (11) имеем

$$\chi(t) = 1 - t, \quad q \leq t \leq 1.$$

Введем обозначения. Положим $\chi_{0,0}(t) = 1 - t$, тогда из уравнений (16) находятся функции $\chi_{n,j}^{(m)}(t)$. По следствию 1 имеем, что из того, что $\chi_{0,0}(t) = 1 - t$, следует, что функции $\chi_{n,j}^{(m)}(t)$ являются линейными, поэтому положим

$$\chi_{n,j}^{(m)}(t) = B_{n,j}^{(m)} - A_{n,j}^{(m)}t. \quad (20)$$

Подставляя в первое уравнение (16), получим

$$\begin{aligned} A_{n+1,2j+1} &= \frac{q}{1+q^2} A_{n,j}^{(0)}, \\ B_{n+1,2j+1} &= B_{n,j}^{(0)} - \frac{1-q+q^2}{1+q^2} A_{n,j}^{(0)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя во второе уравнение (16), получим

$$A_{n+1,2j}^{(0)} = A_{n,j}^{(1)} - qA_{n+1,2j+1}, \quad (22)$$

$$B_{n+1,2j}^{(0)} = q^{-1}B_{n,j}^{(1)} - qB_{n+1,2j+1} - q^2A_{n+1,2j+1}.$$

Подставляя в третье уравнение (16), получим

$$A_{n+1,2j}^{(m)} = A_{n,j}^{(m+1)} - A_{n+1,2j}^{(m-1)}, \quad (23)$$

$$B_{n+1,2j}^{(m)} = q^{-1}B_{n,j}^{(m+1)} - qB_{n+1,2j}^{(m-1)}.$$

Найдем величины $A_{n,0}^{(m)}$. Через

$$\alpha(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,0}^{(m)} x^m y^n \quad (24)$$

обозначим производящую функцию этих величин.

Умножая уравнения (22)–(23) на $x^{m+1}y^{n+1}$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n+1,0}^{(m)} x^{m+1} y^{n+1} &= \\ &= x\alpha(x, y) - x\alpha(x, 0) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n+1,0}^{(m+1)} x^{m+1} y^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+1,0}^{(m-1)} x^{m+1} y^{n+1} - \frac{q^2}{1+q^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0}^{(0)} x^1 y^{n+1} = \\ &= y\alpha(x, y) - y\alpha(0, y) - x^2\alpha(x, y) + x^2\alpha(x, 0) - \frac{q^2}{1+q^2} xy\alpha(0, y). \end{aligned}$$

Подставляя $\alpha(x, 0) = \frac{1}{1-x}$, получим

$$(y - x - x^2)\alpha(x, y) = \left(y + \frac{q^2}{1+q^2} xy \right) \alpha(0, y) - \frac{x + x^2}{1-x}. \quad (25)$$

Поскольку функция $\alpha(x, y)$ аналитична в области $|x| < 1$, $|y| < 1$, то на кривой $y = x + x^2$ правая и левая части уравнения (25) обращаются в 0. Поэтому

$$\alpha(0, x + x^2) = \frac{1 + q^2}{(1-x)(1+q^2+q^2x)}. \quad (26)$$

Следовательно, для производящей функции $a(x)$ справедливо уравнение (18).

Найдем величины $B_{n,0}^{(m)}$. Через

$$\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,0}^{(m)} x^m y^n \quad (27)$$

обозначим производящую функцию этих величин.

Умножая уравнения (22)–(23) на $x^{m+1}y^{n+1}$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n+1,0}^{(m)} x^{m+1} y^{n+1} &= \\
 &= x\beta(x, y) - x\beta(x, 0) = \\
 &= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n+1,0}^{(m+1)} x^{m+1} y^{n+1} - q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n+1,0}^{(m-1)} x^{m+1} y^{n+1} - \\
 &\quad - q \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0}^{(0)} x^1 y^{n+1} + \frac{q^3}{1+q^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0}^{(0)} x^1 y^{n+1} = \\
 &= q^{-1} y \beta(x, y) - q^{-1} y \beta(0, y) - qx^2 \beta(x, y) + qx^2 \beta(x, 0) - qxy \beta(0, y) + \frac{q^3}{1+q^2} xy \alpha(0, y).
 \end{aligned}$$

Подставляя $\beta(x, 0) = \frac{1}{1-x}$, получим

$$(y - qx - q^2 x^2) \beta(x, y) = (y + q^2 xy) \beta(0, y) - \frac{q^4}{1+q^2} xy \alpha(0, y) - \frac{qx + q^2 x^2}{1-x}. \quad (28)$$

Поскольку функция $\beta(x, y)$ аналитична в области $|x| < 1$, $|y| < 1$, то на кривой $y = qx + q^2 x^2$ правая и левая части уравнения (28) обращаются в 0. Поэтому

$$(1 + q^2 x) \beta(0, qx + q^2 x^2) = \frac{1}{1-x} + \frac{q^4 x}{1+q^2} \alpha(0, qx + q^2 x^2). \quad (29)$$

Утверждение 1. *Функции $\alpha(0, y)$, $\beta(0, y)$ удовлетворяют равенству*

$$(1 - y) \beta(0, y) = \left(1 - \frac{2q^2}{1+q^2} y\right) \alpha(0, y). \quad (30)$$

Доказательство. Умножив равенство (29) на $(1 - x)$ и сделав замену переменной $t = qx$, получим

$$(1 - q^{-1}t)(1 + qt) \beta(0, t + t^2) = 1 + \frac{q^2 t(q - t)}{1 + q^2} \alpha(0, t + t^2).$$

Подставляя (26) и упрощая, получим

$$\begin{aligned}
 (1 - t - t^2) \beta(0, t + t^2) &= \\
 &= \left((1 - t) \left(1 + \frac{q^2}{1+q^2} t\right) + \frac{q^2 t(q - t)}{1 + q^2} \right) \frac{1 + q^2}{(1 - t)(1 + q^2 + q^2 t)} = \\
 &= \left(1 - \frac{2q^2}{1 + q^2} t - \frac{2q^2}{1 + q^2} t^2\right) \alpha(0, t + t^2).
 \end{aligned}$$

Подставляя $y = t + t^2$, получим (30). □

Приравнявая коэффициенты при y^n в (30), получим

Следствие 2. *Справедливы равенства*

$$B_{n,0}^{(0)} - B_{n-1,0}^{(0)} = A_{n,0}^{(0)} - \frac{2q^2}{1+q^2} A_{n-1,0}^{(0)}. \quad (31)$$

Утверждение 2. *Функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ удовлетворяют равенству*

$$(1-x)\beta(x, y) - (1-qx)\alpha(qx, y) = \beta(0, y) - \alpha(0, y). \quad (32)$$

Доказательство. Применяя (28) и (25), получим

$$\begin{aligned} (y - qx - q^2x^2) ((1-x)\beta(x, y) - (1-qx)\alpha(qx, y) - \beta(0, y) + \alpha(0, y)) = \\ = (y(1-x)(1+q^2x) - y + qx + q^2x^2) \beta(0, y) - \\ - \left(y(1-qx) \left(1 + \frac{q^3}{1+q^2}x \right) - y + qx + q^2x^2 \right) \alpha(0, y) = \\ = (1-y)(qx + q^2x^2) \beta(0, y) - \left(1 - \frac{2q^2}{1+q^2}y \right) (qx + q^2x^2) \alpha(0, y). \end{aligned}$$

Подставляя (30), получим (32). □

Приравнявая коэффициенты при $x^{m+1}y^n$ в (32), получим

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$B_{n,0}^{(m+1)} - q^{m+1}A_{n,0}^{(m+1)} = B_{n,0}^{(m)} - q^{m+1}A_{n,0}^{(m)}.$$

Полученное равенство означает, что

$$\chi_{n,0}^{(m+1)}(q^{m+1}) = \chi_{n,0}^{(m)}(q^{m+1}),$$

т.е. что функция $\chi_{n,0}(t)$ непрерывна при $t > 0$.

Отметим, что коэффициенты $B_{n,j}^{(m)}$ обеспечивают непрерывность функции $\chi_{n,j}(t)$ и при $j > 0$, но далее будут нужны только коэффициенты $A_{n,j}^{(m)}$ при $j = 0, 1$, а для коэффициентов $B_{n,j}^{(m)}$ ограничимся уравнением

$$B_{n,1} = B_{n,0}^{(0)} - A_{n,0}^{(0)}, \quad (33)$$

которое вытекает при подстановке (21) в равенство (31).

Отметим, что это уравнение эквивалентно тому, что $\chi_{n,1}(0) = \chi_{n,0}^{(0)}(1)$.

Перейдем к доказательству леммы.

Из уравнений (21)–(23) имеем

$$\begin{aligned} A_{n+1,1} &= \frac{q}{1+q^2} A_{n,0}^{(0)}, \\ A_{n+1,0}^{(0)} &= A_{n,0}^{(1)} - qA_{n+1,1}, \\ A_{n+1,0}^{(m)} &= A_{n,0}^{(m+1)} - A_{n+1,0}^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

С начальным условием $A_{0,0}^{(m)} = 0$.

Выберем числа $a_1, a_2, \dots$ так, что

$$a_n = A_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (35)$$

Покажем, что при выборе чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ по формуле (35) для функции $\chi(t)$ выполняется условие

$$\chi(t) = 1 - t, \quad t \geq q^n. \quad (36)$$

Обозначим через $A'_{k,0}{}^{(m)}$ величины, полученные из решения уравнений (34), при заданных $A_{k,1} = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Для удобства перепишем уравнения (34) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A'_{k,0}{}^{(0)} &= \frac{1+q^2}{q} A_{k+1,1}, \\ A'_{k,0}{}^{(1)} &= A'_{k+1,0}{}^{(0)} + q A_{k+1,1}, \\ A'_{k,0}{}^{(m+1)} &= A'_{k+1,0}{}^{(m)} + A'_{k+1,0}{}^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Покажем, что при $m = 0, 1, \dots, n - k$, $k = n, n - 1, \dots, 0$, выполняется равенство.

$$A'_{k,0}{}^{(m)} = A_{k,0}^{(m)}.$$

При $k = n$ это равенство выполнено по построению. Поскольку в формулах (37) значения величин $A'_{k,0}{}^{(m)}$ находятся через $A'_{k+1,0}{}^{(m)}$ и $A_{k+1,1}$, то эти равенства выполняются и для меньших k .

Следовательно,

$$A'_{0,0}{}^{(m)} = A_{0,0}^{(m)} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

т.е. уравнение (36) выполнено.

Подставляя в (18) $x = q$, получим

$$a(1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Покажем, что выполнено равенство (17).

По построению

$$\chi_{n,1}(t) = B_{n,1} - A_{n,1} + A_{n,1}\chi_{0,0}(t).$$

Для того, чтобы это уравнение выполнялось, достаточно взять

$$\gamma(2^{-n} + 2^{-n}t) = B_{n,1} - A_{n,1} + A_{n,1}\gamma(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставляя в уравнение (33) второе уравнение из (22) при $j = 0$, получим

$$B_{n+1,1} - B_{n,1} = A_{n+1,1}.$$

Подставляя обозначения (35), получим (17).

□

Лемма 4. Существует функция $\gamma(t)$, удовлетворяющая условию (17) (для некоторых констант a_i), для которой функция

$$f_k(t) = (1-t)^k - \int_{\Omega} \gamma(\nu(t, \omega)) d\mu(\omega)$$

является квазимногочленом степени $k-1$.

Доказательство. Индукцией по n покажем, что можно выбрать числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ так, что $f_k(t)$ является квазимногочленом степени $k-1$ при $t \geq q^n$.

При $n=0$ из (17) имеем

$$\chi_{1,1}(t) = a_1 \chi(t).$$

Поэтому третье уравнение в (11) при $n=j=1$ переписывается в следующем виде:

$$\chi(t) = a_1 q^2 \chi\left(\frac{t-q^2}{q}\right) + a_1 q \chi\left(\frac{t-q}{q^2}\right). \quad (38)$$

Поскольку отображения $S_0(t) = q^2 + qt$, $S_1(t) = q + q^2 t$ являются сжатиями, то по известной теореме Хатчинсона [4] это уравнение с условием нормировки $\chi(0) = 1$ имеет единственное решение.

Нетрудно проверить, что

$$\chi(t) = (1-t)^k$$

является решением уравнения (38), если выбрать

$$a_1 = \frac{q^{2k-1}}{1+q^{k+1}}. \quad (39)$$

Итак, из третьего уравнения (11) имеем $f_k(t) = 0$ при $t \geq q$.

Введем обозначения. Положим $\chi_{0,0}(t) = (1-t)^k$, тогда из уравнений (16) находятся функции $\chi_{n,j}^{(m)}(t)$. По следствию 1 имеем, что из того, что $\chi_{0,0}(t) = (1-t)^k$ следует, что функции $\chi_{n,j}^{(m)}(t)$ являются многочленами степени k , поэтому положим

$$\chi_{n,j}^{(m)}(t) = A_{n,j}^{(m)}(1-t)^k + B_{n,j}^{(m)}(t), \quad (40)$$

где $B_{n,j}^{(m)}(t)$ – многочлен степени $k-1$.

Подставляя (40) в уравнение (16), получим

$$\begin{aligned} A_{n+1,2j+1} &= \frac{q^{2k-1}}{1+q^{k+1}} A_{n,j}^{(0)}, \\ A_{n+1,2j}^{(0)} &= q^{k-1} A_{n,j}^{(1)} - q A_{n+1,2j+1}, \\ A_{n+1,2j}^{(m)} &= q^{k-1} A_{n,j}^{(m+1)} - q^{1-k} A_{n+1,2j}^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (41)$$

С начальным условием $A_{0,0}^{(m)} = 0$.

Выберем числа $a_1, a_2, \dots$ так, что

$$a_n = A_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Покажем, что при выборе чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$ по формуле (42) для функции $\chi(t)$ выполняется условие $\chi(t) - (1-t)^k$ – квазимногочлен степени $k-1$ при $t \geq q^N$.

Обозначим через $A'_{n,0}^{(m)}$ величины, полученные из решения уравнений (41), при заданных $A_{n,1} = a_n$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Для удобства перепишем уравнения (41) при $j = 0$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} A'_{n,0}^{(0)} &= \frac{1+q^{k+1}}{q^{2k-1}} A_{n+1,1}, \\ A'_{n,0}^{(1)} &= q^{1-k} A'_{n+1,0}^{(0)} + q^{2-k} A_{n+1,1}, \\ A'_{n,0}^{(m+1)} &= q^{1-k} A'_{n+1,0}^{(m)} + q^{2-2k} A'_{n+1,0}^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Покажем, что при $m = 0, 1, \dots, N-n$, $n = N, N-1, \dots, 0$, выполняется равенство

$$A'_{n,0}^{(m)} = A_{n,0}^{(m)}.$$

При $n = N$ это равенство выполнено по построению. Поскольку в формулах (43) значения величин $A'_{n,0}^{(m)}$ находятся через $A'_{n+1,0}^{(m)}$ и $A_{n+1,1}$, то эти равенства выполняются и для меньших n .

Следовательно,

$$A'_{0,0}^{(m)} = A_{0,0}^{(m)} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

т.е. $\chi(t) - (1-t)^k$ – квазимногочлен степени $k-1$.

Как и при доказательстве предыдущей леммы, можно найти производящую функцию $\alpha(x, y)$ (26) величин $A_{n,0}^{(m)}$.

Умножая уравнения (41) (при $j = 0$) на $x^{m+1}y^{n+1}$ и суммируя, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n+1,0}^{(m)} x^{m+1} y^{n+1} &= \\ &= x\alpha(x, y) - x\alpha(x, 0) = \\ &= q^{k-1}y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0}^{(m)} x^m y^n - q^{1-k}x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,0}^{(m)} x^m y^n - \frac{q^{2k}}{1+q^{k+1}}xy \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0}^{(0)} y^n = \\ &= q^{k-1}y\alpha(x, y) - q^{k-1}y\alpha(0, y) - q^{1-k}x^2\alpha(x, y) + q^{1-k}x^2\alpha(x, 0) - \frac{q^{2k}}{1+q^{k+1}}xy\alpha(0, y). \end{aligned}$$

Подставляя $\alpha(x, 0) = \frac{1}{1-x}$, получим

$$(q^{k-1}y - x - q^{1-k}x^2)\alpha(x, y) = \left(q^{k-1}y + \frac{q^{2k}}{1+q^{k+1}}xy \right) \alpha(0, y) - \frac{x + q^{1-k}x^2}{1-x}. \quad (44)$$

Поскольку функция $\alpha(x, y)$ аналитична в области $|x| < 1$, $|y| < 1$, то на кривой $q^{k-1}y - x - q^{1-k}x^2 = 0$ правая и левая части уравнения (44) обращаются в 0. Поэтому

$$\alpha(0, q^{1-k}x + q^{2-2k}x^2) = \frac{1 + q^{k+1}}{(1-x)(1 + q^{k+1} + q^{k+1}x)}.$$

Следовательно, производящая функция $a(x)$ задается как

$$a(q^{1-k}x + q^{2-2k}x^2) = \frac{q^{2k-1}}{(1-x)(1+q^{k+1}+q^{k+1}x)}.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы.

Обозначим через $\gamma_1(t)$ функцию, которая построена в лемме 3, т.е.

$$\int_{\Omega} \gamma_1(\nu(t, \omega)) d\mu(\omega) = 1 - t.$$

По лемме 4 существует функция $\gamma_k(t)$, для которой

$$\int_{\Omega} \gamma_k(\nu(t, \omega)) d\mu(\omega) = (1 - t)^k.$$

Следовательно, для функции

$$\gamma(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1} \frac{1}{k} \gamma_k(t)$$

выполнено условие (8).

□

Подчеркнем, что для функции $\gamma(t)$, найденной в теореме, оценка $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ является несмещенной, а обобщение оценки Грассбергера $r_n^{(k)}(\gamma)/\ln n$ – можно тоже исправить до несмещенной оценки, исправив постоянный множитель – величину $\frac{r_n^{(k)}(\gamma)}{H_n - H_{k-1}}$.

В заключение приведем эскиз графика функции $\gamma_1(t)$, построенной в лемме 3.

Функция $\gamma_1(t)$ разрывна в каждой двоично-рациональной точке, поэтому будет приведен только эскиз графика, который получен соединением значений функции $\gamma_1(t)$ в точках $j2^{-12}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{12}$. Эти значения находятся как

$$\gamma_1((2j+1)2^{-n}) = \chi_{n,2j+1}(0) = B_{n,2j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

Величины $B_{n,2j+1}$ находим из рекуррентных уравнений (21)–(23).

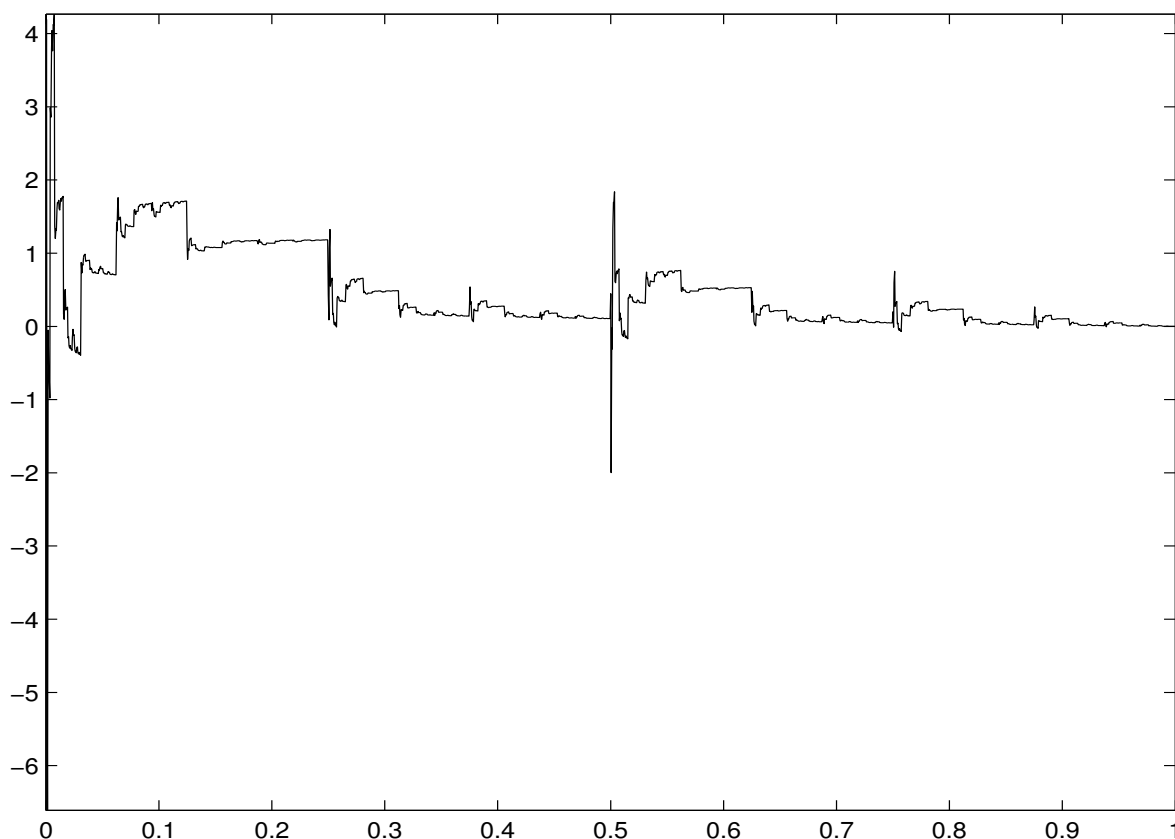


Рис. 1. График функции $\gamma_1(t)$
Fig. 1. The function $\gamma_1(t)$

Список литературы / References

- [1] Falconer K. J., *Fractal geometry: Mathematical Foundation and Applications*, John Wiley & Sons, NY, USA, 1990.
- [2] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, Series, and Products*, Fifth Edition, Academic Press, 1994.
- [3] Grassberger P., “Estimating the information content of symbol sequences and efficient codes”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **35** (1989), 669–675.
- [4] Hutchinson J. E., “Fractals and sel-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.
- [5] Timofeev E. A., “Selection of a Metric for the Nearest Neighbor Entropy Estimators”, *Journal of Mathematical Sciences*, **203**:6 (2014), 892–906.
- [6] Kaltchenko A., Timofeeva N., “Entropy Estimators with Almost Sure Convergence and an $O(n^{-1})$ Variance”, *Advances in Mathematics of Communications*, **2**:1 (2008), 1–13.
- [7] Kaltchenko A., Timofeeva N., “Rate of convergence of the nearest neighbor entropy estimator”, *AEU – International Journal of Electronics and Communications*, **64**:1 (2010), 75–79.
- [8] Тимофеева Н. Е., “Построение оценки энтропии для специальной метрики и произвольной функции”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:6 (2013), 174–178; [Timofeeva N. E., “Construction of Entropy Estimator with Special Metric and Arbitrary Function”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:6 (2013), 174–178, (in Russian)].

- [9] Timofeev E. A., "Bias of a nonparametric entropy estimator for Markov measures", *Journal of Mathematical Sciences*, **176**:2 (2011), 255–269.
- [10] Timofeev E. A., "Statistical Estimation of measure invariants", *St. Petersburg Math. J.*, **17**:3 (2006), 527–551.

Timofeev E. A., "Existence of an Unbiased Entropy Estimator for the Special Bernoulli Measure", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 521–536.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-521-536

Abstract. Let $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ be a space of right-sided infinite sequences drawn from a finite alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

a metric on $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, and μ is a probability measure on Ω . Let $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ be independent identically distributed points on Ω . We study the estimator $\eta_n^{(k)}(\gamma)$ of the reciprocal of the entropy $1/h$ that are defined as

$$\eta_n^{(k)}(\gamma) = k \left(r_n^{(k)}(\gamma) - r_n^{(k+1)}(\gamma) \right),$$

where

$$r_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \gamma \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right),$$

$\min^{(k)}\{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, if $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$. The number k and the function $\gamma(t)$ are auxiliary parameters. The main result of this paper is

Theorem. Let μ be the Bernoulli measure with probabilities $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$, $p_0 = p_1^2$. There exists a function $\gamma(t)$ such that

$$\mathbb{E} \eta_n^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{h}.$$

Keywords: measure, metric, entropy, estimator, unbiased, self-similar, Bernoulli measure

On the author:

Evgeniy A. Timofeev, orcid.org/0000-0002-0980-2507, ScD, professor

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: timofeevEA@gmail.com

©Кащенко С. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-537-549

УДК 517.9

Устойчивость решений дискретных краевых задач для уравнения двумерной фильтрации

Кащенко С. А.

получена 15 мая 2017

Аннотация. Исследуется устойчивость решений линейных уравнений, возникающих в теории двумерной цифровой фильтрации. Анализируются различные постановки начальной задачи. В качестве основных результатов для каждой из них получен соответствующий критерий устойчивости в терминах корней характеристического уравнения. Для краевых условий типа Дирихле, Неймана или для периодических краевых условий обоснован переход к системе линейных уравнений первого порядка в конечномерном пространстве. Кроме этого, рассмотрены краевые условия, определяющие поведение решений на «бесконечности». Здесь речь идет об анализе линейных бесконечномерных систем.

Ключевые слова: дискретные уравнения, устойчивость, краевые задачи, спектральное множество

Для цитирования: Кащенко С. А., "Устойчивость решений дискретных краевых задач для уравнения двумерной фильтрации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 537–549.

Об авторе:

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000 Россия, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Каширское ш., 31, г. Москва, 115409, Россия
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

1. Постановка задачи

Дискретные уравнения являются основным математическим аппаратом при исследовании динамики многих важных прикладных задач, особенно в теории бурно развивающихся в настоящее время цифровых систем. Простейшими и в то же время базовыми математическими моделями являются линейные «автономные» уравнения вида

$$x_{n+1} = ax_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Задав начальное условие x_0 , легко выписать решение x_n уравнения (1), совпадающее с x_0 при $n = 0$, и исследовать его устойчивость. Более сложны и многообразны дискретные уравнения, в которых учитывается пространственное распределение.

На математическом языке это приводит к рассмотрению уравнения относительно величин $x_{n,m}$, зависящих от двух индексов. Например, дискретными аналогами простейших операторов переноса и диффузии являются соответственно уравнения

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + d(x_{n,m+1} - x_{n,m}), \quad (2)$$

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + d(x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}). \quad (3)$$

В настоящей работе исследуется более сложное уравнение, возникающее в задачах двумерной цифровой фильтрации [1-8]:

$$x_{n+1,m+1} = ax_{n+1,m} + bx_{n,m+1} + cx_{n,m}, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4)$$

Кроме задания самого пространственно-распределенного уравнения (4), центральным моментом является выбор фазового пространства. К числу наиболее простых следует отнести три возможных случая, которые обусловлены выбором соответствующих краевых условий:

1. Условие Дирихле: переменная m изменяется от 0 до некоторого $p > 0$, причем

$$x_{n,p} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

2. Условие Неймана: переменная m изменяется от 0 до некоторого $p > 0$, причем

$$x_{n,p-1} = x_{n,p}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

3. Периодические граничные условия:

$$x_{n,m+p} = x_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Каждое из условий (5), (6) или (7) означает, что фазовое пространство является конечномерным. Тем самым, задавая $p + 1$ значение $z_0 = (x_{0,0}; x_{0,1}; \dots; x_{0,p})$, однозначно находим решение $x_{n,m}$ при $n > 0, m = 0, \dots, p$. В следующем пункте будут выписаны критерии устойчивости для каждой из упомянутых задач.

4. Для уравнения (4) естественной является ситуация, когда переменная m принимает все значения от 0 до ∞ . Имея в виду конкретные приложения, представляется наиболее естественным ограничение вида:

$$x_{n,m} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Фазовое пространство в случае условий (8) обозначим через L . Наиболее приемлемы метрики стандартных пространств L_1 или L_2 , т. е. имеем

$$\|z\| = \sum_{j=0}^{\infty} |z_j|, \quad \text{при } z \in L_1,$$

$$\|z\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{при } z \in L_2.$$

Рассмотрению краевого условия (8) будет посвящен пункт 3. Как оказалось, краевого условия (8) может быть недостаточно для определения решения $x_{n,m}$ уравнения (4). В этом случае необходимо существенно расширить фазовое пространство

и отказаться от интерпретации индекса n , как аналога временного дискрета. В качестве фазового пространства приходится определять пространство M элементов

$$z_0 = (\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots)$$

с краевыми условиями

$$|z_{0,j}| + |z_{j,0}| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty \quad (9)$$

Соответствующие результаты приводятся в пункте 4.

2. Условия устойчивости для конечномерных фазовых пространств

2.1. Задача Дирихле

Предположим, что выполнены краевые условия (5). В этом случае для каждого n уравнение (4) расщепляется на систему p рекуррентных по m уравнений вида

$$z_{n+1} = A_p z_n, \quad (z_n = (x_{n,p-1}, \dots, x_{n,0}),) \quad (10)$$

где A_p — нижнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоит одно и то же число $-ca^{-1}$. Конечно, здесь предполагаем, что выполнены условия невырожденности $a \neq 0$. Таким образом, условия устойчивости траектории z_n системы (10), а значит, и решения $x_{n,m}$ уравнения (4), состоит в выполнении неравенства

$$|ca^{-1}| < 1. \quad (11)$$

Замечание 1. При условии $a = 0$ для разрешимости уравнения (4) с краевыми условиями (5) и с произвольными начальными условиями необходимо выполнение условия $c = 0$. Если же в рассматриваемой задаче $a = c = 0$, то уравнение (4) вырождается в простейшее уравнение $z_{n+1} = bz_n$, условия устойчивости которого состоят в выполнении неравенства

$$|b| < 1. \quad (12)$$

2.2. Задача Неймана

В случае краевых условий (6) задача (4) тоже представима в виде p -мерной системы (10) с нижнетреугольной матрицей A_p , левый верхний элемент которой равен

$$\lambda_0 = \frac{b+c}{1-a},$$

а все остальные элементы главной диагонали равны $-ca^{-1}$. Таким образом, при выполнении условий невырожденности $a \neq 0$ и $a \neq 1$ критерий устойчивости записывается в виде двух неравенств

$$|ca^{-1}| < 1,$$

$$|(b+c)(1-a)^{-1}| < 1.$$

Замечание 2. При условии $a = 0$ для разрешимости рассматриваемой задачи с произвольными начальными условиями необходимо, чтобы $c = 0$. Тогда критерий устойчивости имеет вид (12). Если же $a = 1$, то необходимо равенство $b + c = 0$. В этом случае, однако, задания только начального условия (значения z_0) оказывается недостаточно. Можно, например, произвольно задавать последовательность значений $x_{n,p-1}$ ($n = 0, 1, \dots$). Критерий устойчивости по части переменных $(x_{n,0}, \dots, x_{n,p-1})$ (с заданной ограниченной последовательностью $x_{n,p-1}$) состоит в выполнении неравенства $|c| < 1$.

2.3. Периодическая краевая задача

При условии (7) уравнение (4) принимает вид

$$(I - aJ)z_{n+1} = (bI + cJ)z_n, \quad (13)$$

где $z_n = (x_{n,0}, \dots, x_{n,p-1})$, I — единичная матрица, а матрица J задана равенством

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Условия устойчивости решения (12) состоят в выполнении неравенств

$$|\lambda_j| < 1 \quad (j = 0, 1, \dots, p-1),$$

где λ_j — собственные значения матрицы $A_p = (I - aJ)^{-1}(bI + cJ)$. Для чисел λ_j имеет место формула

$$\lambda_j = (b + c \exp(i\varphi_j))(1 - a \exp(i\varphi_j))^{-1},$$

где $\varphi_j = 2\pi j/p$ ($j = 0, \dots, p-1$). Здесь, конечно, тоже необходимо наложить условие невырожденности $a \neq 1$. Интересно отметить, что для выполнения несколько более сильного неравенства

$$|(b + c \exp(i\varphi_j))(1 - a \exp(i\varphi_j))^{-1}| < 1 \quad \text{при } \varphi \in [0, 2\pi]$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место ограничения

$$\begin{cases} |bc + a| > 0 \\ |b + c| < |a - 1|, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |bc + a| < 0 \\ |b - c| < |a + 1|, \\ a \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |bc + a| = 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 < 1, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Замечание 3. Для более простого уравнения (2) устойчивость состоит в выполнении условий

$|a - d| < 1$ — в случае краевых условий (5);

$|a| < 1$ и $|a - d| < 1$ — в случае краевых условий (6);

$|a + d(\exp(i\varphi_j) - 1)| < 1$ ($\varphi_j = 2\pi j/p$, $j = 0, 1, \dots, p-1$) — в случае краевых условий (7).

3. Критерий устойчивости в бесконечномерном фазовом пространстве

Рассмотрим отдельно случаи $a > 1$ и $a < 1$. Относительно коэффициентов уравнения (4) удобно сделать некоторые допущения, не влияющие на общность постановки задачи. Коэффициенты a и b можно считать неотрицательными. В противном случае нужный знак достигается с помощью преобразования $x_{n,m} = (-1)^n y_{n,m}$ или $x_{n,m} = (-1)^m y_{n,m}$.

Пусть сначала $a > 1$. Положим $z_n = (x_{n,0}, x_{n,1}, \dots)$, и пусть вектор начальных условий z_0 принадлежит пространству L . Отметим, что задания только значения z_0 в общем случае оказывается недостаточным для определения значения $x_{n,m}$ ($n > 0, m \geq 0$). Однако требование, чтобы при всех $n > 0$ выполнялось включение $z_n \in L$, существенно меняет ситуацию. С чисто математической точки зрения суть дела заключается в содержании следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Рассмотрим неоднородное разностное уравнение*

$$x_{m+1} = ax_m + y_{m+1} \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (14)$$

в котором y_n — заданная последовательность и $y_n \in L$. Тогда при условии $|a| < 1$ для каждого решения x_m уравнения (14) тоже выполнено включение $x_m \in L$. Если же $|a| > 1$, то уравнение (14) имеет единственное решение x_m , принадлежащее пространству L

$$x_m = \sum_{k=n}^{\infty} a^{n-k} y_k.$$

Вернемся к уравнению (4) и положим в нем $n = 0$. В результате приходим к равенству

$$x_{1,m+1} = ax_{1,m} + y_m \quad (y_m = bx_{0,m+1} + cx_{0,m}).$$

Из условия $z_0 \in L$ следует, что $(y_0, y_1, \dots) \in L$. Из леммы тогда следует, что при выполнении неравенства $a > 1$ и при условии $z_1 = (x_{1,0}, x_{1,1}, \dots) \in L$ вектор z_1 однозначно определяется. Таким образом, для однозначной разрешимости рассматриваемого уравнения достаточными являются условие $a > 1$ и принадлежность решения уравнения (4) фазовому пространству L . Тем самым уравнение (4) в фазовом пространстве L порождает линейный оператор A , который элементу z_n ставит в соответствие элемент z_{n+1} : $z_{n+1} = Az_n$.

Далее рассмотрим при условии $|a| > 1$ вопрос об устойчивости решения z_n . Для нахождения спектра оператора A в (4) полагаем $z_{n+1} = \lambda z_n$. Для значений λ тогда получится соотношение

$$(\lambda - b)x_{n,m+1} = (a\lambda + c)x_{n,m}. \quad (15)$$

Из условия $z_n \in L$ получаем неравенство

$$\left| \frac{a\lambda + c}{\lambda - b} \right| < 1. \quad (16)$$

Множество всех λ , удовлетворяющих неравенству (16), обозначим через Ω и положим

$$\lambda_0 = \sup_{\lambda \in \Omega} |\lambda|.$$

Для значения λ_0 имеет место формула

$$\lambda_0 = \frac{|ac + b| + |ab + c|}{a^2 - 1}, \quad a^2 - 1 > 0. \quad (17)$$

Основное утверждение состоит в том, что при условии $\lambda_0 < 1$ решения z_n уравнения (4) асимптотически устойчивы в пространстве L , и при условии $\lambda_0 > 1$ — неустойчивы.

Проводя аналогию с распределенными системами, значения n можно интерпретировать как временную переменную, а значение m как пространственную переменную.

Отметим, что спектр оператора A составляет замкнутое множество Ω , все внутренние точки которого являются собственными значениями этого оператора. При этом число λ_0 в формуле (17) является спектральным радиусом рассматриваемого оператора.

Интересно сопоставить полученные в этом пункте утверждения с соответствующими результатами для более простой задачи: изучение решений уравнения (2) с «краевыми» условиями (8). В отличие от формулы (16) спектральное множество задач (2), (8) выделяется неравенством

$$|\lambda - a + d| \leq |d|.$$

Отсюда для спектрального радиуса λ_0 получаем равенство

$$\lambda_0 = |a - d| + |d|.$$

При $a < 1$ предыдущая задача теряет смысл в силу того, что невозможно определить решение $x_{n,m}$, задавая только значения $x_{0,m}$, ($m = 0, 1, \dots$). В этом случае наиболее естественно выглядит задача нахождения решения $x_{n,m}$ уравнения (4) при дополнительном условии

$$x_{n,0} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (18)$$

Положим $z_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$, и пусть вектор z_n принадлежит пространству L_1 . Тогда линейный оператор $Az_n = z_{n+1}$, порожденный уравнением (4) и краевым условием (18) и действующий из L_1 в L_1 , представим в виде бесконечномерной матрицы A , причем

$$A = bI + [c + ab]B. \quad (19)$$

Здесь I — единичная матрица (тождественный оператор), а для j -го столбца b_j ($j = 1, 2, \dots$) матрицы B имеем равенство $b_j = \underbrace{(0, \dots, 0)}_j, b_0)$, где $b_0 = (1, a, a^2, \dots)$.

Из формулы (19) вытекает следующий критерий устойчивости решений рассматриваемой задачи.

Теорема 1. При условии $a < 1$ решения уравнения (4) с краевыми условиями (18) асимптотически устойчивы (неустойчивы), если

$$|c + ab| < (1 - a)(1 - b) \quad (|c + ab| > (1 - a)(1 - b)).$$

4. Уравнение с «двумя временами»

Результаты этого пункта наиболее интересны. Сначала заметим, что произвольное задание элементов $\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots$ однозначно определяет решение $x_{n,m}$ уравнения (4). Первый и второй индекс n и m элемента $x_{n,m}$ здесь равноправны, поэтому оправдано название уравнения (4) как уравнения с «двумя временами». С точки зрения приложений (например к задачам цифровой радиофизики) имеет смысл наложить условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,m} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = 0, \quad (20)$$

т. е. предполагаем, что вектор $z_k = (\dots, x_{k,2}, x_{k,1}, x_{k,k}, x_{1,k}, x_{2,k}, \dots)$ принадлежит фазовому пространству M . При этом уравнение (4) порождает линейный оператор A , который элементу z_k ставит в соответствие элемент z_{k+1} : $z_{k+1} = Az_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Обратим внимание, что рассматриваемая в этом пункте задача с «двумя временами» имеет смысл только при выполнении условий на коэффициенты a и b : $|a| < 1$, $|b| < 1$.

Чтобы обосновать это, достаточно в уравнении (4) при фиксированном n переменную m устремить в бесконечность (а затем при фиксированном m переменную n устремить в бесконечность) и воспользоваться условием $x_{n,m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ или $m \rightarrow \infty$. Таким образом оператор A действует в пространстве M .

Отсюда естественным образом возникает задача изучения устойчивости решения z_k уравнения $z_{k+1} = Az_k$.

Относительно коэффициентов уравнения (4) удобно сделать некоторые допущения, не влияющие на общность постановки задачи. Во-первых, коэффициенты a и b можно считать неотрицательными. В противном случае нужный знак достигается с помощью преобразования $x_{n,m} = (-1)^n y_{n,m}$ или $x_{n,m} = (-1)^m y_{n,m}$. Во-вторых, удобно условиться, что выполнено неравенство $a \geq b$. Если $a < b$, то следует лишь поменять местами переменные n и m и соответственно переобозначить a и b .

Сначала исследуем основной случай, когда выполнено условие типа общности положения $b > 0$. Случай $b = 0$ будет рассмотрен ниже в качестве примера.

Устойчивость траекторий отображения $z_{k+1} = Az_k$ определяет спектральный радиус $r(A)$ оператора A . Для нахождения этой важной характеристики следует изучить вопрос о разрешимости в пространстве L уравнения

$$(A - \lambda I)x = z, \quad (21)$$

полагая $x = (\dots, x_{0,2}, x_{0,1}, x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \dots)$, $z = (\dots, z_{0,2}, z_{0,1}, z_{0,0}, z_{1,0}, z_{2,0}, \dots)$. Запишем уравнение (21) в координатной форме. В результате приходим к соотношениям

$$z_{0,m} - az_{0,m-1} = a\lambda x_{0,m-1} + (c - \lambda)x_{0,m} + bx_{0,m+1} \quad (m \geq 1), \quad (22)$$

$$z_{n,0} + bz_{n-1,0} = b\lambda x_{n-1,0} + (c - \lambda)x_{n,0} + ax_{n+1,0} \quad (n \geq 1), \quad (23)$$

$$z_{0,0} = ax_{1,0} + bx_{0,1} + (c - \lambda)x_{0,0}. \quad (24)$$

Вопрос о разрешимости в пространстве L уравнений (22) и (23) связан с поведением корней квадратного уравнения

$$ab\tau^2 + (c - \lambda)\tau + \lambda = 0. \quad (25)$$

Пусть $\tau_1 = \tau_1(\lambda)$ и $\tau_2 = \tau_2(\lambda)$ — корни этого уравнения, причем условимся считать, что

$$|\tau_1| \geq |\tau_2|. \quad (26)$$

Отметим, что корни характеристических уравнений, соответствующие правым частям уравнений (22) и (23), равны соответственно $a\tau_j$ ($j = 1, 2$) и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$). В зависимости от расположения корней $a\tau_j$ и $b\tau_j$ разберем отдельно пять случаев.

Первый случай. Пусть модули всех корней $a\tau_j$ ($j = 1, 2$) и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$) строго больше 1, т. е.

$$|b\tau_2| > 1. \quad (27)$$

В этом случае каждое из уравнений (22) и (23) имеет единственное решение $x_{0,m} = u_m$ и $x_{0,n} = v_n$ соответственно, принадлежащие пространству L (утверждение аналогично приведенной выше лемме). Однако, в общем случае $u_0 \neq v_0$, поэтому значение $x_{0,0}$, полученное из (22) и (23), не совпадает, не говоря уже о выполнении равенства (24). Тем самым множество Ω_1 таких значений λ , при которых выполнено неравенство (27), принадлежит спектральному множеству оператора A . Для того, чтобы описать границу $\partial\Omega_1$ множества Ω_1 , достаточно положить $|b\tau_2| = 1$ и учесть неравенство (26). Тогда $b\tau_2 = \exp(i\varphi)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), а из (25) получаем, что $a\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$ и $\lambda = c + ab\tau_1 + ba\tau_2$. Отсюда приходим к выводу, что

$$\partial\Omega_1 = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Найдем значение λ_1 , равное точной верхней грани тех значений $|\lambda|$, для которых имеет место первый случай. Тем самым

$$\lambda_1 = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \left| \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)} \right|, \quad (28)$$

причем из (26) вытекает, что необходимо выполнение условия $|b\tau_1| \geq 1$, т. е.

$$\lambda_1 \geq \frac{a}{b}. \quad (29)$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение два числа α и β по правилу

$$\alpha = \max \left\{ \frac{|c + a|}{1 - b}, \frac{|c - a|}{1 + b} \right\}, \quad \beta = \max \left\{ \frac{|c + b|}{1 - a}, \frac{|c - b|}{1 + a} \right\}. \quad (30)$$

Сразу отметим, что

$$\alpha = \begin{cases} |c + a|(1 - b)^{-1}, & \text{при } c \notin [-a/b, -ab], \\ |c - a|(1 + b)^{-1}, & \text{при } c \in [-a/b, -ab]. \end{cases}$$

Аналогично

$$\beta = \begin{cases} |c + b|(1 - a)^{-1}, & \text{при } c \notin [-b/a, -ab], \\ |c - b|(1 + a)^{-1}, & \text{при } c \in [-b/a, -ab]. \end{cases}$$

В выражении (28) максимум (по φ) достигается либо при $\varphi = 0$, либо при $\varphi = \pi$. Обратим внимание, что при выполнении неравенства $\alpha < a/b$ множество Ω_1 пустое. В этом случае полагаем $\lambda_1 = 0$. В итоге приходим к формуле

$$\lambda_1 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \alpha \geq a/b, \\ 0, & \text{при } \alpha < a/b. \end{cases} \quad (31)$$

Второй случай. Пусть все, кроме одного корня $a\tau_j$ и $b\tau_j$ ($j = 1, 2$), строго больше 1, т. е.

$$|a\tau_1| > 1, \quad |a\tau_2| > 1, \quad |b\tau_1| > 1, \quad |b\tau_2| < 1. \quad (32)$$

Тогда уравнение (22) по-прежнему имеет единственное решение $x_{0,m} = u_m$ в пространстве L , однако, в отличие от первого случая, уравнение (23) имеет семейство решений $x_{n,0} = v_n + h(b\tau_2)^n$, зависящее от произвольного параметра h . Этот параметр можно однозначно определить из условия $u_0 = v_0$.

Тем самым значение $x_{0,0}$, определяемое из (22) и (23), будет одно и то же. Однако равенство (24) в общем случае выполнено не будет. Отсюда заключаем, что множество Ω_2 тех λ , для которых выполнено условие (32), тоже принадлежит спектральному множеству оператора A . Множество $\partial\Omega_1$, является частью границы множества Ω_2 . Остальную часть границы Ω_2 обозначим через $\partial\Omega_2$. Она состоит из двух частей, которые мы обозначим через $\partial\Omega_{21}$ и $\partial\Omega_{22}$.

Для описания Ω_{21} полагаем, что все корни характеристических уравнений связаны соотношениями

$$|b\tau_2| \leq 1 = |b\tau_1| \leq |a\tau_2| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $b\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $a\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $1 \leq |\lambda| \leq a/b$ следует, что

$$\partial\Omega_{21} = \left\{ \lambda : \quad \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Для определения $\partial\Omega_{22}$ положим

$$|b\tau_2| \leq 1 = |a\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $a\tau_2 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \geq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{22} = \left\{ \lambda : \quad \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Отметим, что при $\beta < 1$ и $\alpha < 1$ множество $\partial\Omega_2$ пустое. Обозначим через λ_2 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_2$. Тогда

$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \beta < 1, \quad \alpha \geq 1, \\ \max(\alpha, \beta), & \text{при } \beta \geq 1, \quad \alpha \geq 1, \\ \beta, & \text{при } \beta \geq 1, \quad \alpha < 1, \\ 0, & \text{при } \beta < 1, \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Третий случай. Предположим, что ровно два из значений $|a\tau_j|$ и $|b\tau_j|$ ($j = 1, 2$) по модулю меньше, чем 1, и ровно два значения по модулю больше, чем 1. Тогда решения уравнений (22) и (23) в пространстве L определяется с точностью до двух-параметрического семейства. Условие совпадения в (22) и (23) найденного значения $x_{0,0}$ и равенство (24) позволяют однозначно определить два имеющихся параметра. Таким образом, при сформулированных условиях существует единственное решение системы (22)–(24), а значит, соответствующее значение λ не принадлежит спектральному множеству оператора A .

Обратим внимание, что при достаточно больших значениях $|\lambda|$ выполнены соотношения: $|\tau_1| \gg 1$ и $|\tau_2 - 1| \ll 1$, т. е. имеет место третий случай.

Четвертый случай. Пусть все четыре значения $|a\tau_j|$ и $|b\tau_j|$ ($j = 1, 2$) не превосходят единицу. Система (22)–(24), как и во втором случае, оказывается неоднозначно разрешима, а значит, соответствующие λ принадлежат спектральному множеству Ω_3 оператора A . Для описания множества $\partial\Omega_3$ полагаем, что для корней характеристических уравнений выполнены соотношения

$$|b\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq |a\tau_1| = 1, |b\tau_2| \leq |a\tau_2| \leq |a\tau_1| = 1.$$

Тогда $a\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq a/b$ следует, что

$$\partial\Omega_3 = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Обозначим через λ_3 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_3$. Тогда

$$\lambda_3 = \begin{cases} \beta, & \text{при } \beta \geq b/a, \\ 0, & \text{при } \beta < b/a. \end{cases}$$

Пятый случай. Пусть $|a\tau_1| > 1$, а все остальные значения $|a\tau_2|$, $|b\tau_1|$ и $|b\tau_2|$ меньше, чем 1. В этой ситуации система (22)–(24) всегда разрешима, но неоднозначно, а тогда соответственно значение λ принадлежит спектральному множеству Ω_4 оператора A . Отметим, что четвертый и пятый случай выделяют точечный спектр рассматриваемого оператора. Множество $\partial\Omega_3$ является частью границы множества $\partial\Omega_4$. Остальная часть границы $\partial\Omega_4$ состоит из двух частей, которые мы обозначим через $\partial\Omega_{41}$ и $\partial\Omega_{42}$. Для описания $\partial\Omega_{41}$ полагаем, что все корни характеристических уравнений связаны соотношениями

$$|b\tau_2| \leq |a\tau_2| \leq 1 = |b\tau_1| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $b\tau_1 = \exp(i\varphi)$, $a\tau_2 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{41} = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + a \exp(i\varphi)}{1 - b \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Для определения $\partial\Omega_{42}$ положим

$$|b\tau_2| \leq |b\tau_1| \leq 1 = |a\tau_2| \leq |a\tau_1|.$$

Тогда $a\tau_2 = \exp(i\varphi)$, $b\tau_1 = \lambda \exp(-i\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Отсюда при условии $|\lambda| \leq 1$ следует, что

$$\partial\Omega_{42} = \left\{ \lambda : \lambda = \frac{c + b \exp(i\varphi)}{1 - a \exp(-i\varphi)}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Обозначим через λ_4 наибольший модуль из тех λ , которые принадлежат $\partial\Omega_4$. Тогда

$$\lambda_4 = \begin{cases} \alpha, & \text{при } \beta > 1, \quad \alpha \leq 1, \\ \max(\alpha, \beta), & \text{при } \beta \leq 1, \quad \alpha \leq 1, \\ \beta, & \text{при } \beta \leq 1, \quad \alpha > 1, \\ 0, & \text{при } \beta > 1, \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Отметим, что при $\beta > 1$ и $\alpha > 1$ множество Ω_4 пустое. Тем самым, рассмотрение всех пяти возможных случаев поведения корней уравнения (25) завершено. Обозначим через λ_0 наибольшее среди всех чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 , которые существуют при определенном наборе параметров a, b и c . Тогда $\lambda_0 = \max(\alpha, \beta)$.

Основной результат заключается в том, что $\lambda_0 = r(A)$. При $\lambda_0 > 1$ траектории z_k неустойчивы, а при $\lambda_0 < 1$ — устойчивы.

Замечание. Интересно отметить, что, казалось бы, естественный поиск собственных значений оператора A путем представления решения уравнения (4) в виде «разделяющихся» переменных $x_{n,m} = u^n v^m$, не приводит к верным результатам.

5. Примеры

Исследование вырожденного случая. Пусть выполнено условие $b = 0$. Тогда множество $\Omega_1 = \emptyset, \Omega_3 = \emptyset$, а значит, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Множество Ω_2 выделяется неравенствами

$$\begin{cases} |c - \lambda| > a, \\ |c - \lambda| < a|\lambda| \end{cases}$$

и

$$\lambda_2 = \begin{cases} |c|(1-a)^{-1}, & \text{при } c \notin [-1-a, 1-a], \\ 0, & \text{при } c \in [-1-a, 1-a]. \end{cases}$$

Множество Ω_4 задается неравенствами

$$\begin{cases} |c - \lambda| < a, \\ |c - \lambda| > a|\lambda|, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\lambda_4 = \begin{cases} |c|(1-a)^{-1}, & \text{при } c \leq 1-a, \\ 1, & \text{при } 1-a \leq c \leq 1+a, \\ 0, & \text{при } c \geq 1+a. \end{cases}$$

В итоге получаем равенство $\lambda_0 = |c|(1-a)^{-1}$. Отметим, что каждый элемент множеств Ω_2 и Ω_4 принадлежит точечному спектру.

Условие устойчивости решений состоит в выполнении неравенства $|c| < 1-a$. Отметим, что это условие совпадает с условием устойчивости решений уравнения (4) с краевыми условиями (18) при $a < 1$ и $b = 0$.

При условии $a = b = 0$ имеем $\lambda_0 = |c|$. И здесь условие устойчивости решений уравнений с «двумя временами» совпадает с условием устойчивости решений в случае краевых условий (18).

Пусть $a = 0.5, b = 0.5$. В этом случае

$$\lambda_0 = \begin{cases} (1-2c)/3, & \text{при } c \in [-1, -0.25], \\ |2c+1|, & \text{при } c \notin [-1, -0.25]. \end{cases}$$

В результате получаем, что $\lambda_0 < 1$ при $-1 < c < 0$. В отличие от предыдущих примеров, это условие не совпадает с условием устойчивости $-1/2 < c < 0$ решений уравнений (4) с условиями (18).

Пусть $z_n = (\dots, x_{n,-1}, x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$ и при каждом n ($n = 0, 1, \dots$) $z_n \in L_1$. Для элементов z_n рассмотрим несколько более общее по сравнению с (3) уравнение

$$x_{n+1,m} = ax_{n,m} + bx_{n,m+1} + cx_{n,m-1}.$$

Весь спектр соответствующего оператора заполняет эллипс

$$\lambda = a + b \exp(i\varphi) + c \exp(-i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

При $b = c$ и $b = -c$ этот эллипс вырождается в отрезок.

Выводы

Исследованы свойства устойчивости решений разностного уравнения двумерной фильтрации в случаях различных краевых условий. Особый интерес представляют результаты для краевых условий на «бесконечности».

Список литературы / References

- [1] Chang T., "Limit cycles in a two-dimensional first-order digital filter", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-24** (1977), 15–19.
- [2] El-Agizi N. G., Fahmy M. M., "Sufficient conditions for the nonexistence of limit cycles in two-dimensional digital filters", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-26** (1979), 402–406.
- [3] Maria G. A., Fahmy M. M., "Limit cycle oscillations in first-order two-dimensional digital filters", *IEEE Trans. Ckts. and Syst.*, **CAS-22** (1975), 246–251.
- [4] Bose T., Brown D. P., "First-order 2-D periodically shift varying digital filters without limit cycles", *Proc. IEEE Southeastcon*, 1988, 619–623.
- [5] El-Agizi N. G., Fahmy M. M., "Two-dimensional digital filters with no overflow oscillations", *IEEE Trans. Acous., Speech and Signal Process.*, **ASSP-27** (1979), 465–469.
- [6] Lodge J. H., Fahmy M. M., "Stability and overflow oscillations in 2-D state-space digital filters", *IEEE Trans. Acous., Speech and Signal Process.*, **ASSP-29** (1981), 1161–1171.
- [7] Bose T., Brown D. P., "Limit cycles in 2-D linearshift varying digital filters", *Proc. 31st Midwest Symp. on Ckts. and Syst.*, 1988.
- [8] Bose T., Brown D. P., "Limit cycles in first-order two-dimensional digital filters", *Proc. IEEE Southeastcon*, 1989, 371–375.

Kashchenko S. A., "Stability of the Solutions of the Simplest Space-Distributed Discrete Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 537–549.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-537-549

Abstract. The stability of the solutions of the linear equations arising in the theory of two-dimensional digital filtration is studied. The different statements of the initial value problem are analysed. As the basic results, the corresponding stability criterion is obtained for each of them.

Keywords: discrete equations, stability, boundary value problems, spectral set

On the author:

Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoye shosse, Moscow 115409, Russia,
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

©Преображенская М. М., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566

УДК 517.9

Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа

Преображенская М. М.

получена 16 августа 2017

Аннотация. В настоящей работе рассматривается математическая модель кольцевой нейронной сети из четного числа синаптически взаимодействующих элементов. Модель представляет собой систему скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, правые части которых зависят от большого параметра. Неизвестные функции, входящие в систему, характеризуют мембранные потенциалы нейронов. Представляет интерес поиск в рамках данной системы уравнений специальных, так называемых импульсно-рефрактерных режимов, а именно периодических решений, в которых функции с номерами одной четности обладают асимптотически большим всплеском на периоде, а другой четности — всюду асимптотически малы. С этой целью последовательно делается две замены, позволяющие перейти от исследования исходной системы к двумерной системе скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями. Далее, при стремлении большого параметра к бесконечности определяется предельный объект, представляющий собой релейную систему уравнений с двумя запаздываниями. Конструктивно, с использованием метода шагов, доказываем, что решение релейной системы уравнений с начальной функцией из подходящего класса совпадает с одной и той же периодической функцией с требуемыми свойствами. Затем определяется оператор последований Пуанкаре и с использованием принципа Шаудера доказываем существование релаксационного периодического решения двумерной сингулярно возмущенной системы. Для этого строится асимптотика этого решения, а затем доказываем его близость к решению релейной системы уравнений. Из экспоненциальной оценки производной Фреше оператора Пуанкаре следует единственность в построенном классе функций решения двумерной дифференциально-разностной системы уравнений с двумя запаздываниями, а также обосновывается его экспоненциальная орбитальная устойчивость. Далее, с помощью обратной замены доказанный результат переносится на исходную систему.

Ключевые слова: релаксационные колебания, запаздывание, большой параметр, синаптическая связь

Для цитирования: Преображенская М. М., "Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 550–566.

Об авторах:

Преображенская Маргарита Михайловна, orcid.org/0000-0002-7032-1155, старший преподаватель, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, младший научный сотрудник, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: rita.preo@gmail.com

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель кольцевой цепи из четного числа синаптически связанных осцилляторов нейронного типа (см. [1]):

$$\dot{u}_j = \left(\lambda f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1}(t-h)) \ln(u_*/u_j) \right) u_j, \quad j = 1, \dots, 2m, \quad u_0 \equiv u_{2m}, \quad (1)$$

в которой $u_j(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, $m \in \mathbb{N}$ — фиксированное число, $h \in (0, 1)$ — параметр, определяющий запаздывание в цепи связи, $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое значение, управляющее взаимодействием, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, слагаемые $bg(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)u_j$ моделируют синаптическую связь. Относительно функций $f(u)$, $g(u)$ предполагаем, что они из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; \quad f(u) + a, u f'(u), u^2 f''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty, \quad a = \text{const} > 0; \\ g(0) &= 0; \quad g(u) > 0 \quad \forall u > 0; \quad g(u) - 1, u g'(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

В работах [1–5] для систем, подобных (1) (с произвольным числом осцилляторов и без запаздывания h в цепи связи), показано существование дискретных бегущих волн.

Поставим вопрос о существовании у системы (1) такого периодического решения, что

$$u_{2k-1}(t) \equiv v_1(t), \quad u_{2k}(t) \equiv v_2(t), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где функция $v_1(t)$ обладает периодическими асимптотически высокими всплесками, а функция $v_2(t)$ принимает асимптотически малые значения при всех $t > 0$. Последнее означает, что соответствующий нейрон находится в состоянии покоя или, другими словами, состоянии рефрактерности.

После перехода к новым переменным система (1) записывается в виде следующей двумерной системы относительно неизвестных функций v_1 и v_2 :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \left(\lambda f(v_1(t-1)) + b g(v_2(t-h)) \ln(u_*/v_1) \right) v_1, \\ \dot{v}_2 &= \left(\lambda f(v_2(t-1)) + b g(v_1(t-h)) \ln(u_*/v_2) \right) v_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, как и в статьях [1, 4, 6–11] для удобства последующего анализа сделаем экспоненциальную замену

$$v_j = \exp(\lambda x_j), \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

которая преобразует (4) к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right) + b(c - x_1)g\left(\exp \frac{x_2(t-h)}{\varepsilon}\right), \\ \dot{x}_2 &= f\left(\exp \frac{x_2(t-1)}{\varepsilon}\right) + b(c - x_2)g\left(\exp \frac{x_1(t-h)}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Отметим, что в силу свойств (2) справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\exp(x/\varepsilon)\right) = R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\exp(x/\varepsilon)) = H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

В силу сделанной экспоненциальной замены (5) постановка задачи для системы (6) состоит в отыскании периодического релаксационного режима, такого, что $x_1(t)$ меняет знак, а $x_2(t)$ остается отрицательной (отделенной от нуля) при всех $t > 0$.

2. План исследования

Общая схема доказательства дается, например, в статьях [1, 5, 10–12]. Для ее изложения потребуется ввести некоторые обозначения.

Введем два множества функций. С этой целью зафиксируем положительную константу $\hat{x}$, которая будет найдена позже (в п. 4.1.), а также фиксируем константы $\sigma > 0$, $q_1 > \sigma$, $p_1 \in (0, \sigma)$, $q_2 > \hat{x} + h + \sigma$, $p_2 \in (0, \hat{x} + h + \sigma)$, оценки на которые так же будут уточнены ниже (в пп. 3., 6.1.). Кроме того, фиксируем параметр $\beta \in (0, 1/2]$. Положим

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_1 \in C[-1 - \sigma, -\sigma] : \varphi_1(-\sigma) = -\sigma, -q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -p_1 \forall t \in [-1 - \sigma, -\sigma]\}, \quad (9)$$

$$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_2 \in C[-1 - \sigma, -\sigma] : |\varphi_2(-\sigma) + \hat{x} + h + \sigma| \leq \varepsilon^\beta, \\ -q_2 \leq \varphi_2(t) \leq -p_2 \forall t \in [-1 - \sigma, -\sigma]\}. \quad (10)$$

В качестве множества начальных функций системы (6) рассматривается множество S , определенное как

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S_1 \times S_2. \quad (11)$$

Отметим, что данное множество является замкнутым, ограниченным и выпуклым.

Через

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1, \varphi_2), \text{ где } \varphi_1 \in S_1, \varphi_2 \in S_2,$$

обозначим элемент множества S , а через $x^\varepsilon(t, \varphi)$ — решение системы (6) с начальной функцией $\varphi \in S$:

$$x^\varepsilon(t, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^\varepsilon(t, \varphi), x_2^\varepsilon(t, \varphi)),$$

такое, что

$$x_1^\varepsilon(t, \varphi) \equiv \varphi_1(t), \quad x_2^\varepsilon(t, \varphi) \equiv \varphi_2(t) \text{ при } t \in [-1 - \sigma, -\sigma]. \quad (12)$$

Предположим, что уравнение

$$x_1^\varepsilon(t - \sigma, \varphi) = -\sigma \quad (13)$$

имеет хотя бы два положительных корня. Обозначим второй из них через $T^\varepsilon(\varphi)$.

Зададим оператор последования Пуанкаре

$$\Pi^\varepsilon : C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma] \rightarrow C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma],$$

определяя его равенством

$$\Pi^\varepsilon(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} x^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi), \quad -1 - \sigma \leq t \leq -\sigma. \quad (14)$$

Итак, план доказательства состоит в следующем. Устанавливаются равномерные по φ и t асимптотические равенства для $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$ и $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ на различных промежутках изменения t . Из них следует, что при подходящем выборе параметров $\sigma, q_1, q_2, p_1, p_2$ оператор Π^ε определен на множестве S и преобразует его в себя, что позволяет использовать известный принцип Шаудера. Таким образом, оператор Пуанкаре имеет хотя бы одну неподвижную точку, а система (6) — периодическое решение с найденной асимптотикой. Затем выполняется оценка нормы производной Фреше оператора Π^ε , из которой следует, что он является сжимающим на множестве S и, тем самым, неподвижная точка в этом множестве единственна. Кроме того, из оценки нормы производной Фреше следует, что все мультипликаторы соответствующего цикла (кроме двух) экспоненциально малы, а значит, периодическое решение устойчиво.

3. Асимптотика функции $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$

Рассмотрим первое уравнение системы (6). Учитывая априорное предположение $x_2(t) < -q$ и свойство (8) функции g , получаем, что

$$g\left(\exp \frac{x_2(t-h)}{\varepsilon}\right) = O(\exp(-q/\varepsilon)),$$

где здесь и далее q обозначает подходящую положительную константу, точное значение которой не важно. Таким образом, функция $x_1(t)$ отыскивается из уравнения

$$\dot{x}_1 = f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (15)$$

В статье [10] было изучено следующее уравнение с начальной функцией из множества S_1 (9):

$$\dot{x}_1 = f\left(\exp \frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right), \quad (16)$$

которое отличается от уравнения (15) отсутствием экспоненциально малой добавки $O(\exp(-q/\varepsilon))$ в правой части.

В упомянутой работе [10] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует такое достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (16) допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл $x_{1*}^\varepsilon(t)$ периода T_{1*}^ε , удовлетворяющий предельным соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{1*}^\varepsilon = T_0, \quad \max_{t \in [0, T_{1*}^\varepsilon]} |x_{1*}^\varepsilon(t) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Здесь

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + a + 1/a, \quad t_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1/a, \quad (18)$$

a T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ является решением предельного релейного уравнения

$$\dot{x}_1 = R(x_1(t-1)) \quad (19)$$

с начальной функцией $\varphi_1(t) \in S_1$ при $t \in [-1 - \sigma, -\sigma]$ и задается равенствами

$$x_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ -at + a + 1 & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (20)$$

Отметим, что при этом на параметр σ накладывается ограничение

$$\sigma < \min\{a, 1/2, 1/(2a)\}. \quad (21)$$

Действуя так же, как описано в статье [10], получаем, что на отрезке $t \in [-\sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma/2]$ функция $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$ имеет ту же асимптотику, что и периодическое решение $x_{1*}^\varepsilon(t)$ уравнения (16). Таким образом, про функцию $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$ известно следующее:

Лемма 1. Уравнение (15) с произвольной начальной функцией φ_1 из класса (9) имеет решение $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$ с асимптотикой

- 1) $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = t + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [-\sigma, 1 - \sigma]$;
- 2) $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = 1 + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [1 - \sigma, 1 + \sigma]$;
- 3) $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = -at + a + 1 + \varepsilon \widehat{c} + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [1 + \sigma, 1 + t_0 - \sigma]$;
- 4) $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = -a + \varepsilon w_2(\tau)|_{\tau=(t-1-t_0)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [1 + t_0 - \sigma, 1 + t_0 + \sigma]$;
- 5) $x_1^\varepsilon(t, \varphi) = t - T_0 + O(\exp(-q/\varepsilon))$ при $t \in [1 + t_0 + \sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma/2]$.

Здесь

$$w_1(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp s) - 1) ds, \quad w_2(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -a\tau + \widehat{c} + \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp(-as + \widehat{c})) + a) ds, \quad (22)$$

$$\widehat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du. \quad (23)$$

Все остатки равномерны по φ .

Отметим, что из формул леммы 1 следует, что для решения $x_1^\varepsilon(t, \varphi)$ и корня $T^\varepsilon(\varphi)$ уравнения (13) верны равномерные по $\varphi \in S$ оценки

$$\max_{t \in [h-\sigma, h+T_0-\sigma/2]} |x_1^\varepsilon(t, \varphi) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad T^\varepsilon(\varphi) = T_0 + O(\varepsilon). \quad (24)$$

4. Асимптотика функции $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$

Рассмотрим второе уравнение системы (6), которое с учетом (7) принимает вид

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2)g\left(\exp \frac{x_1(t - h)}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (25)$$

4.1. Исследование предельного релейного уравнения

Сначала изучим предельное для (25) релейное уравнение

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2)H(x_0(t - h)). \quad (26)$$

Будем искать T_0 -периодическое решение (с тем же периодом, что решение (20) уравнения (19)), отрицательное при всех $t > 0$.

Для исследования уравнения (26) определим множество начальных функций

$$\psi \in C[0, h] : \psi(h) = -\hat{x}, \psi(t) < -\hat{x} \forall t \in [0, h], \quad (27)$$

где $\hat{x}$ — фиксированная положительная константа из (10), которую предстоит найти.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнено неравенство

$$\frac{a + 1}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c < 0.$$

Тогда решение релейного уравнения (26) с начальной функцией (27) совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией

$$y_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e(t) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ t - t_0 - h + e(t_0 + h) & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0 + h, \end{cases} \quad y_0(t + T_0) \equiv y_0(t), \quad (28)$$

где

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a + 1) \exp(-b(t - h))}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c.$$

Причем это решение асимптотически орбитально устойчиво.

Построим решение уравнения (26) методом шагов, полагая, что $x_2(t) \equiv \psi(t)$ на отрезке $t \in [0, h]$. Обозначим решение данной задачи через $y_0(t)$.

Сперва рассмотрим промежуток $t \in [h, t_0 + h]$, на котором $x_0(t - h) \geq 0$. Таким образом, с учетом (8) получаем, что здесь искомая функция $y_0(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2), \quad x_2|_{t=h} = -\hat{x}, \quad (29)$$

откуда находим

$$y_0(t) = -(\hat{x} + 1/b + c) \exp(-b(t - h)) + 1/b + c \text{ при } h \leq t \leq t_0 + h. \quad (30)$$

При этом наложим на параметры ограничение

$$\hat{x} + 1/b + c < 0, \quad (31)$$

обеспечивающее убывание экспоненты в правой части (30).

Далее, рассмотрим отрезок $t \in [t_0 + h, T_0 + h]$. Здесь $x_0(t - h) \leq 0$, значит, с учетом (8) и в силу непрерывности $y_0(t)$ получаем на рассматриваемом отрезке задачу Коши

$$\dot{x}_2 = 1, \quad x_2|_{t=t_0+h} = -(\hat{x} + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c.$$

Отсюда

$$y_0(t) = t - t_0 - h - (\hat{x} + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c \text{ при } t_0 + h \leq t \leq T_0 + h.$$

Таким образом, функция $y_0(t)$ построена на отрезке $t \in [h, T_0 + h]$ длины периода T_0 в предположении ее отрицательности.

Рассмотрим отображение $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное равенством

$$\pi(x) = \left(t - t_0 - h - (x + 1/b + c) \exp(-bt_0) + 1/b + c \right) \Big|_{t=T_0+h}. \quad (32)$$

Найдем $-\hat{x}$ как неподвижную точку данного отображения:

$$\hat{x} = -\frac{a+1}{1-\exp(-bt_0)} - 1/b - c.$$

В силу предположения о том, что константа $\hat{x}$ положительна, получаем дополнительное ограничение на параметры:

$$\frac{a+1}{1-\exp(-bt_0)} + 1/b + c < 0. \quad (33)$$

Отметим, что выполнение (33) автоматически влечет за собой (31). Таким образом, экспонента в правой части (30) гарантированно убывает, если справедливо условие (33). Это означает, что для выполнения априорного предположения $y_0(t) < 0$ достаточно отрицательности величины $-\hat{x}$ — максимального значения на отрезке длины периода T_0 . Поскольку $y_0(t)$ сохраняет свою отрицательность, а величина $-\hat{x}$ найдена как неподвижная точка отображения (32), то, продолжая построения методом шагов на отрезках $t \in [h + kT_0, t_0 + h + kT_0]$, $[t_0 + h + kT_0, h + (k+1)T_0]$, $k \in \mathbb{N}$, получим в качестве решения уравнения (26) T_0 -периодическую функцию $y_0(t)$.

Для обоснования устойчивости решения $y_0(t)$ отыщем производную $\pi'(x)$ отображения (32):

$$\pi'(x) = -\exp(-bt_0). \quad (34)$$

Поскольку полученная в правой части (34) величина по модулю всегда меньше единицы (при $a, b > 0$), то решение $y_0(t)$ является асимптотически устойчивым.

Лемма 2 доказана.

4.2. Построение асимптотики решения уравнения (25)

Построение асимптотики решения будет выполняться шагами по промежуткам изменения t . Зафиксируем параметр $\alpha \in (1/2, 1)$. Рассмотрению подлежат пять отрезков (которые не пересекаются в силу наложенных на σ ограничений (21)):

- 1) $[-\sigma, h - \sigma]$,
- 2) $[h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$,
- 3) $[h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$,
- 4) $[h + t_0 - \varepsilon^\alpha, h + t_0 + \sigma]$,

5) $[h + t_0 + \sigma, h + T_0 - \sigma]$.

Введем обозначение для константы:

$$\widehat{d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du. \quad (35)$$

Отметим, что в силу свойств (2) функций f и g соответствующие несобственные интегралы сходятся.

Кроме того, чтобы конструктивно описать построение асимптотики решения уравнения (25), потребуются две функции:

$$w_3(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau + b(c + \widehat{x}) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad (36)$$

$$w_4(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{e}(t_0 + h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + b(c + \widehat{x} + a + 1) \int_{-\infty}^{\tau} (g(\exp(-as)) - 1) ds, \quad (37)$$

аналогичные функциям (22), введенным в [10].

Сформулируем утверждение, описывающее асимптотическое поведение функций (36) и (37) при $\tau \rightarrow -\infty$ и $\tau \rightarrow +\infty$.

Лемма 3. Для функций w_3, w_4 справедливы следующие асимптотические равенства:

$$w_3(\tau) = \tau + O(\exp \tau) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (38)$$

$$w_3(\tau) = \dot{e}(h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (39)$$

$$w_4(\tau) = \dot{e}(t_0 + h)\tau + b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\exp(a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad (40)$$

$$w_4(\tau) = \tau + b\dot{e}t_0(c + \widehat{x} + 1) + O(\exp(-a\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Равенства (38), (40) вытекают непосредственно из свойств (2) функции g .

Для доказательства равенства (39) представим интеграл в правой части (36) в виде суммы:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + \int_0^{\tau} g(\exp s) ds.$$

Первый интеграл в правой части после замены $u = \exp s$ преобразуется в $\int_0^1 \frac{g(u)}{u} du$, который в силу (2) равен конечному числу. Для второго, учитывая свойства (2), верно

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} g(\exp s) ds &= \tau + \int_0^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds - \int_{\tau}^{+\infty} (g(\exp s) - 1) ds = \\ &= \tau + \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + O(\exp(-\tau)). \end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла в правой части (36) верно асимптотическое представление:

$$\int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds = \tau + \widehat{d} + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (42)$$

где $\widehat{d}$ — константа, определенная равенством (35).

Подставляя (42) в формулу (36) для функции $w_3(\tau)$, получаем:

$$w_3(\tau) = (1 + b(c + \widehat{x}))\tau + b\widehat{d}(c - \Delta) + O(\exp(-\tau)) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

В полученном равенстве коэффициент $1 + b(c + \widehat{x})$ при τ совпадает с функцией в правой части уравнения задачи Коши (29) при $t = h$, а значит, равен производной функции $e(t)$ в точке $t = h$. Таким образом, справедливость формулы (39) установлена.

Раскладывая аналогичным образом интеграл из (41) в сумму и используя свойства (2) функции g , получаем асимптотическое представление при $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tau} (g(\exp(-as)) - 1) ds &= \int_{-\infty}^0 (g(\exp(-as)) - 1) ds + \int_0^{\tau} g(\exp(-as)) ds - \tau = \\ &= \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + \int_0^{+\infty} g(\exp(-as)) ds - \int_{\tau}^{+\infty} g(\exp(-as)) ds - \tau = \\ &= \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} \frac{g(u) - 1}{u} du + \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{g(u)}{u} du + O(\exp(-a\tau)) - \tau = -\tau + \widehat{d}/a + O(\exp(-a\tau)). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что $\dot{e}(t_0 + h) = 1 + b(c + \widehat{x} + a + 1)$, получаем для функции (37) при $\tau \rightarrow +\infty$ асимптотическую формулу (41).

Лемма 3 доказана.

Перейдем к построению асимптотики решения уравнения (25) с начальной функцией из (10), удовлетворяющей дополнительному условию

$$\varphi_2(-\sigma) = -\widehat{x} - h - \sigma. \quad (43)$$

Лемма 4. Уравнение (25) с произвольной начальной функцией φ_2 из класса (10) при условии (43) имеет решение $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ с асимптотикой

- 1) $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \widehat{x} + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1}))$ нпу $t \in [-\sigma, h - \sigma]$;
- 2) $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\widehat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon))$ нпу $t \in [h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$;
- 3) $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b\widehat{d}(c + \widehat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ нпу $t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$;
- 4) $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\widehat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha})$ нпу $t \in [h + t_0 - \varepsilon^\alpha, h + t_0 + \sigma]$;
- 5) $x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \widehat{x} - T_0 + \varepsilon b\widehat{d}t_0(c + \widehat{x} + 1) + O(\varepsilon^{2\alpha})$ нпу $t \in [h + t_0 + \sigma, h + T_0 - \sigma]$.

Все остатки здесь равномерны по φ .

Докажем лемму 4.

1) Рассмотрим сперва промежуток $t \in [-\sigma, h - \sigma]$. Здесь $t - h$ принадлежит отрезку $[-h - \sigma, -\sigma] \subset [-1 - \sigma, -\sigma]$, где согласно (12) выполняется $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) = \varphi_1(t - h)$. Это означает, что $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) < -p_1$, следовательно, учитывая условия (2), получаем

$$g\left(\exp \frac{x_1^\varepsilon(t - h, \varphi)}{\varepsilon}\right) = O(\exp(-p_1/\varepsilon)).$$

Таким образом, принимая во внимание (43), на рассматриваемом отрезке имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x}_2 = 1 + O(\exp(-p_1/\varepsilon)), \quad x_2|_{t=-\sigma} = -\hat{x} - h - \sigma,$$

откуда для решения приходим к формуле

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} + O(\exp(-q/\varepsilon)) \text{ при } t \in [-\sigma, h - \sigma]. \quad (44)$$

2) Теперь рассмотрим отрезок $[h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]$, на котором решение релейного уравнения терпит излом. На этом участке согласно лемме 1 $x_1^\varepsilon(t - h, \varphi) = t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))$ при некотором $p > 0$, таким образом, на текущем промежутке имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) \cdot g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h-\sigma} = -\hat{x} - \sigma + O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (45)$$

Решение задачи (45) будем искать в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + \delta^\varepsilon(t), \quad (46)$$

где функция $w_3(\tau)$ задается равенством (36), а $\delta^\varepsilon(t)$ — здесь и далее неизвестный подлежащий определению остаток.

Докажем, что остаток $\delta^\varepsilon(t)$ является равномерно по φ и t экспоненциально малым. Подставляя (46), (36) в (45) и учитывая асимптотическое свойство (38) функции w_3 из леммы 3, получаем задачу Коши для остатка δ^ε :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^\varepsilon = b(c + \hat{x}) \cdot & \left(g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) - g\left(\exp \frac{t - h}{\varepsilon}\right) \right) - \\ & - b\left(t - h + \varepsilon b(c + \hat{x}) \int_{-\infty}^{(t-h)/\varepsilon} g(\exp s) ds + \delta^\varepsilon(t)\right) \cdot \\ & \cdot g\left(\exp \frac{t - h + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\delta^\varepsilon|_{t=h-\sigma} = O(\varepsilon \exp(-\sigma/\varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (48)$$

Принимая во внимание неравенство

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(y_1^2, y_2^2)} |y_1 - y_2| \text{ при всех } y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+ \quad (49)$$

и то, что t изменяется на отрезке длины, пропорциональной ε^α , получаем асимптотику правых частей равенств (47) и (48):

$$\begin{cases} \dot{\delta}^\varepsilon = -b\delta^\varepsilon \cdot g\left(\exp \frac{t-h+O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^\alpha), \\ \delta^\varepsilon|_{t=h-\sigma} = O(\varepsilon \exp(-\sigma/\varepsilon)). \end{cases} \quad (50)$$

Из вида задачи Коши (50) следует, что $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon))$ равномерно по φ , следовательно,

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=(t-h)/\varepsilon} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)) \text{ при } t \in [h - \sigma, h + \varepsilon^\alpha]. \quad (51)$$

3) На очередном участке $t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \\ x_2|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = -\hat{x} + \varepsilon w_3(\tau)|_{\tau=\varepsilon^{\alpha-1}} + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)). \end{cases} \quad (52)$$

Будем искать решение в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + \delta^\varepsilon(t), \quad (53)$$

где, как и раньше, $\delta^\varepsilon(t)$ — подлежащий определению остаток. Подставляя (53) в (52) получаем, что уравнение преобразуется к виду

$$\dot{e}(t) + \dot{\delta}^\varepsilon(t) = 1 + b(c - e(t) - \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) - \delta^\varepsilon(t)) + O(\exp(-q\varepsilon^{\alpha-1})), \quad (54)$$

а для начального условия, принимая во внимание асимптотическое равенство (39), получаем

$$e(h + \varepsilon^\alpha) + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + \delta^\varepsilon|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = -\hat{x} + \dot{e}(h)\varepsilon^\alpha + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + O(\varepsilon \exp(-q/\varepsilon)). \quad (55)$$

Отсюда, учитывая в (54), что $\dot{e}(t) = 1 + b(c - e(t))$, а в (55), раскладывая функцию $e(h + \varepsilon^\alpha)$ в ряд по степеням ε^α , получаем задачу Коши для остатка δ^ε :

$$\begin{cases} \dot{\delta}^\varepsilon = b\delta^\varepsilon + O(\varepsilon), \\ \delta^\varepsilon|_{t=h+\varepsilon^\alpha} = O(\varepsilon^{2\alpha}), \end{cases} \quad (56)$$

откуда следует, что равномерно по φ и t выполняется $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{2\alpha})$, а значит, для решения $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ приходим к формуле

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = e(t) + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h + \varepsilon^\alpha, h + t_0 - \varepsilon^\alpha]. \quad (57)$$

4) Далее, рассмотрим отрезок $t \in [h+t_0-\varepsilon^\alpha, h+t_0+\sigma]$. Здесь, учитывая лемму 1, для поиска решения $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ имеем дело с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + b(c - x_2) \cdot g\left(\exp\frac{-at + a + 1 + O(\exp(-p/\varepsilon))}{\varepsilon}\right) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h+t_0-\varepsilon^\alpha} = e(h+t_0-\varepsilon^\alpha) + \varepsilon b \hat{d}(c + \hat{x}) + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (58)$$

Отыскиваем решение в виде:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + \delta^\varepsilon(t), \quad (59)$$

где функция w_4 описывается формулой (37), а δ^ε — очередной остаток, подлежащий определению. Раскладывая $e(h+t_0-\varepsilon^\alpha)$ в ряд по ε^α и действуя тем же образом, что в пункте 2), получаем для остатка δ^ε асимптотическую оценку $\delta^\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{2\alpha})$, откуда

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=(t-h-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h+t_0-\varepsilon^\alpha, h+t_0+\varepsilon^\alpha]. \quad (60)$$

5) Рассмотрим очередной промежуток $t \in [h+t_0+\sigma, h+T_0-\sigma]$. На данном промежутке задача Коши для поиска решения $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ уравнения (25) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x_2|_{t=h+t_0+\sigma} = -\hat{x} - a - 1 + \varepsilon w_4(\tau)|_{\tau=\sigma/\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\alpha}). \end{cases} \quad (61)$$

Вид отыскиваемого решения следующий:

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} - T_0 + \varepsilon b \hat{d} t_0 (c + \hat{x} + 1) + \delta^\varepsilon(t). \quad (62)$$

Так же, как в пункте 3), подставим (62) в (61), воспользуемся асимптотическими свойствами (41) и получим задачу Коши для остатка δ^ε , из вида которой следует его требуемая малость. Таким образом,

$$x_2^\varepsilon(t, \varphi) = t - h - \hat{x} - T_0 + \varepsilon b \hat{d} t_0 (c + \hat{x} + 1) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ при } t \in [h+t_0+\sigma, h+T_0-\sigma]. \quad (63)$$

Тем самым, построена асимптотика решения $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ с начальной функцией (10), (43) и лемма 4 доказана.

Отметим, что из формул леммы 4 следует, что для решения $x_2^\varepsilon(t, \varphi)$ верны равномерные по $\varphi \in S$ оценки

$$\max_{t \in [-\sigma, h+T_0-\sigma]} |x_2^\varepsilon(t, \varphi) - y_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (64)$$

5. Формулировка основного результата

Перейдем к формулировке главного результата настоящей работы.

Теорема 2. Для каждого $q > 0$, для которого выполнено неравенство

$$\frac{a+1}{1-\exp(-bt_0)} + 1/b + c < -q,$$

существует такое достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (6) допускает экспоненциально орбитально устойчивое решение $x_*(t) = (x_{1*}^\varepsilon(t), x_{2*}^\varepsilon(t))$ периода T_*^ε , удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq t \leq T_*^\varepsilon} |x_{1*}^\varepsilon(t) - x_0(t)| + \max_{0 \leq t \leq T_*^\varepsilon} |x_{2*}^\varepsilon(t) - y_0(t)| \right) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*^\varepsilon = T_0. \quad (65)$$

Для доказательства данной теоремы необходимо показать существование, устойчивость и единственность периодического решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (6) с найденной в пунктах 3. и 4. асимптотикой, что будет сделано в следующем пункте.

6. Доказательство теоремы 2

Дальнейшая схема действий стандартна для подобных задач и опирается на идею, описанную в ряде статей (см., например, [1, 10, 11]).

6.1. Существование периодического решения системы (6)

Покажем, что выполняется включение

$$\Pi^\varepsilon(S) \subset S. \quad (66)$$

Требуемое равенство

$$x_1^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} = -\sigma$$

(для функций из S_1) выполняется в силу определения $T^\varepsilon(\varphi)$. Что касается неравенства

$$\left| x_2^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} + \hat{x} + h + \sigma \right| < \varepsilon^\beta$$

(требуемое для функций из S_2), оно следует из неравенства

$$\left| x_2^\varepsilon(t - T^\varepsilon(\varphi), \varphi)|_{t=-\sigma} + \hat{x} + h + \sigma \right| < \exp(-bt_0)\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^{2\beta}),$$

которое верно в силу свойств релейного уравнения (26), доказанных п. 4.1.

Так же, как в статьях [1, 10, 11], наложим на имеющиеся в распоряжении параметры q_2, p_2 ограничения

$$q_1 > -\min_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} x_0(t), \quad 0 < p_1 < -\max_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} x_0(t), \quad (67)$$

$$q_2 > -\min_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} y_0(t), \quad 0 < p_2 < -\max_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} y_0(t) \quad (68)$$

и рассмотрим множество функций $\hat{S} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2)$, получающееся из S при замене в (9) и (10) нестрогих неравенств строгими. В силу (24), (64) требуемое включение (66) будет выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_0(t) \in \hat{S}_1, \quad y_0(t) \in \hat{S}_2, \quad (69)$$

что верно в силу ограничений (21), (67), (68).

Таким образом, оператор Π_ε является компактным и преобразует в себя замкнутое ограниченное и выпуклое множество S . Отсюда, используя принцип Шаудера, получаем, что этот оператор имеет в S по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi_* = (\varphi_{1*}(t), \varphi_{2*}(t))$. А значит, решение $x_*^\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} x^\varepsilon(t, \varphi_*)$ системы (6) является периодическим с периодом $T_*^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} T^\varepsilon(\varphi_*)$ и в силу (24), (64) удовлетворяет свойствам (65).

6.2. Единственность и устойчивость периодического решения системы (6)

Перейдем к обоснованию единственности и устойчивости периодического решения системы (6).

Из явного вида оператора (14) следует, что существует его производная Фреше по $\varphi \in S$. Обозначим соответствующий линейный функционал через $\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)$.

Определим множество возмущений для функций из (11) следующим образом:

$$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma_0 = (\gamma_{01}, \gamma_{02}) \in C[-1 - \sigma, -\sigma] \times C[-1 - \sigma, -\sigma] : \gamma_0(-\sigma) = (0, 0)\}. \quad (70)$$

При этом предполагаем, что для функции $\varphi(t) \in S$ возмущенная функция $\varphi(t) + \gamma_0(t)$ остается в том же множестве S начальных функций.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Явная формула применения оператора $\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)$ к элементу γ_0 множества (70) имеет следующий вид:

$$\partial_\varphi \Pi^\varepsilon(\varphi)\gamma_0 = -\dot{x}^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi) \cdot \frac{\gamma_1^\varepsilon(T^\varepsilon(\varphi) - \sigma, \varphi)}{\dot{x}_1^\varepsilon(T^\varepsilon(\varphi) - \sigma, \varphi)} + \gamma^\varepsilon(t + T^\varepsilon(\varphi), \varphi),$$

где функция $\gamma^\varepsilon(t, \varphi) = (\gamma_1^\varepsilon(t, \varphi), \gamma_2^\varepsilon(t, \varphi))$ является решением задачи

$$\dot{\gamma}_1^\varepsilon = f' \left(\exp \frac{x_1^\varepsilon(t-1, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-1, \varphi)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \gamma_1^\varepsilon(t-1, \varphi) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2^\varepsilon = & b(c - x_2^\varepsilon(t, \varphi)) \cdot g' \left(\exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \gamma_1^\varepsilon(t-h, \varphi) - \\ & - bg \left(\exp \frac{x_1^\varepsilon(t-h, \varphi)}{\varepsilon} \right) \cdot \gamma_2^\varepsilon(t, \varphi) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\gamma^\varepsilon|_{t \in [-1-\sigma, -\sigma]} = \gamma_0(t). \quad (73)$$

Отсюда следует

Лемма 6. Для решения $\gamma^\varepsilon(t, \varphi)$ задачи (71)–(73) справедлива оценка

$$\max_{t \in [-\sigma, T^\varepsilon(\varphi) - \sigma]} |\gamma^\varepsilon(t, \varphi)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \quad (74)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , γ_0) положительными постоянными M и q .

Из лемм 5 и 6 следует, что для производной Фреше справедлива оценка

$$\sup_{\varphi \in S} \|\partial_{\varphi} \Pi^{\varepsilon}(\varphi)\|_{S_0 \rightarrow S_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon) \quad (75)$$

при некоторых положительных константах M и q . В свою очередь оценка (75) влечет за собой:

- 1) сжимаемость оператора Π^{ε} , а значит, единственность его неподвижной точки φ_* и соответствующего периодического решения $x^{\varepsilon}(t, \varphi_*)$;
- 2) экспоненциальную малость спектрального радиуса оператора $\partial_{\varphi} \Pi^{\varepsilon}(\varphi)$.

Второе означает, что все мультипликаторы μ цикла $x^{\varepsilon}(t, \varphi_*)$, кроме двух (единичного и близкого к (34)), лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$, откуда следует устойчивость решения $x^{\varepsilon}_*(t)$.

Теорема 2 доказана.

7. Заключение

В заключение в качестве примера приведем изображение (рис. 1) построенного режима системы (6) для функций

$$f(u) = \frac{a(1-u)}{a+u}, \quad g(u) = \frac{u}{1+u}$$

и следующих значений параметров: $h = 8$, $a = 2$, $b = 1$, $c = -5$, $\lambda = 100$.

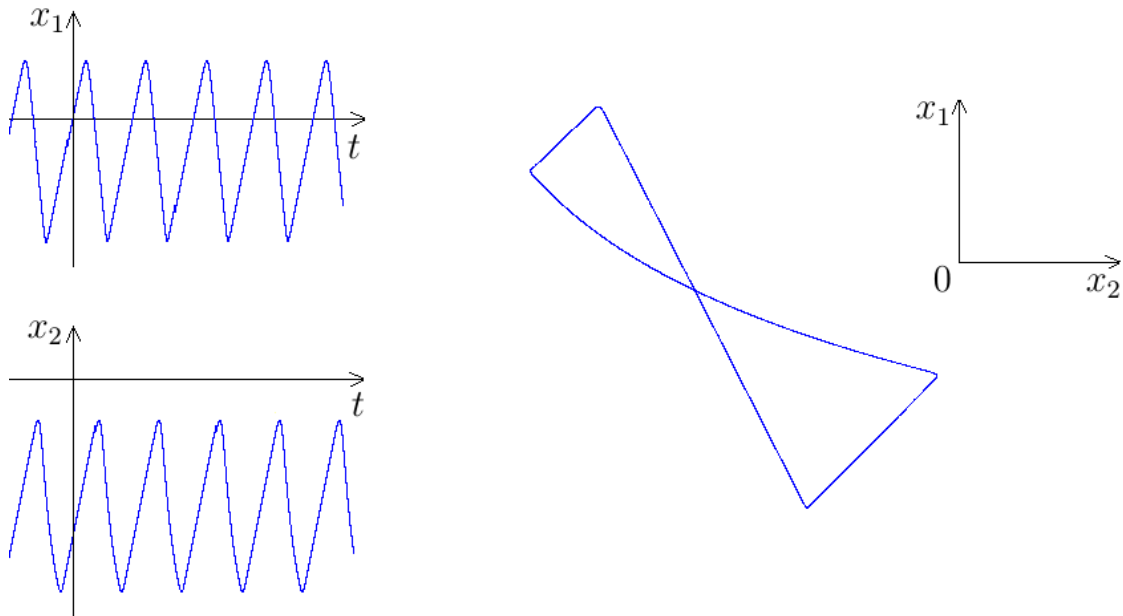


Рис. 1. Решение системы (6)
Fig. 1. The solution of the system (6)

Подводя итог, отметим, что с учетом сделанной экспоненциальной замены (5) доказанная теорема 2 обеспечивает существование у системы (4) периодического экспоненциально орбитально устойчивого импульсно-рефрактерного режима, то есть режима, при котором одна из функций — $v_1(t)$ — содержит на периоде экспоненциально высокий всплеск, а вторая — $v_2(t)$ — асимптотически мала при всех $t > 0$. А это в силу замены (3) означает наличие соответствующего импульсно-рефрактерного режима у системы (1), при котором импульсные функции u_j имеют нечетные индексы ($j = 1, 3, \dots, 2m - 1$), а рефрактерные — четные ($j = 2, 4, \dots, 2m$).

Отметим также, что в силу симметричного вхождения функций x_1 и x_2 в систему (6) теорема, аналогичная теореме 2, может быть сформулирована для x_1 , близкой к отрицательной функции y_0 , и x_2 , близкой к x_0 , меняющей знак. Отсюда следует, что аналогичный результат может быть получен для импульсных функций u_{2k} , и рефрактерных функций u_{2k-1} , $k = 1, \dots, m$.

Список литературы / References

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Об одном способе математического моделирования химических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:10 (2013), 1227–1244; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “On a Method for Mathematical Modeling of Chemical Synapses”, *Differential Equations*, **49**:10 (2013), 1193–1210].
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *УМН*, **70**:3(423) (2015), 3–76; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452].
- [3] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay”, *Izvestiya: Mathematics*, **77**:2 (2013), 271–312].
- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *ЖВМ и МФ*, **52**:5 (2012), 840–858; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 702–719].
- [5] Преображенская М. М., “Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов”, *МАИС*, **24**:2 (2017), 186–204; [Preobrazhenskaia M. M., “Relaxation Cycles in a Model of Synaptically Interacting Oscillators”, *MAIS*, **24**:2 (2017), 186–204, (in Russian)].
- [6] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*, **216** (1997), 126–153; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its C^1 -approximation”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146].
- [7] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941].
- [8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713].

- [9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48:2** (2012), 155–170; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48:2** (2012), 159–175].
- [10] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *ЖВМ и МФ*, **50:12** (2010), 2099–2112; [Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson’s equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:12** (2010), 1990–2002].
- [11] Преображенская М. М., “Существование и устойчивость релаксационных циклов в нейродинамической модели с двумя запаздываниями”, *Вестник НИЯУ МИФИ*, **5:4** (2016), 351–366; [Preobrazhenskaja M. M., “Existence and stability of relaxation cycles in a neurodynamic model with two delays”, *Vestnik NIYaU MIFI*, **5:4** (2016), 351–366, (in Russian)].
- [12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах”, *Матем. заметки*, **93:5** (2013), 684–701; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Modeling the bursting effect in neuron systems”, *Math. Notes*, **93:5** (2013), 676–690].

Preobrazhenskaja M. M., “The Impulse-Refractive Mode in the Neural Network with Ring Synaptic Interaction”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:5** (2017), 550–566.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566

Abstract. In the paper, a mathematical model of a neural network with an even number of ring synaptic interaction elements is considered. The model is a system of scalar nonlinear differential-difference equations, the right parts of which depend on large parameters. The unknown functions included in the system characterize the membrane potentials of the neurons. The search of special impulse-refraction cycles within the system of equations is of interest. The functions with odd numbers of the impulse-refraction cycle have an asymptotically high pulses and the functions with even numbers are asymptotically small. Two changes allow to study a two-dimension nonlinear differential-difference system with two delays instead of the system. Further, a limit object that represents a relay system with two delays is defined by a large parameter tending to infinity. There exists the only periodic solution of the relay system with the initial function from a suitable function class. This is structurally proved, by using the step method. Next, the existence of relaxation periodic solutions of the two-dimension singularly perturbed system is proved by using the Poincare operator and the Schauder principle. The asymptotics of this solution is constructed, and it is proved that the solution is close to the decision of the relay system. Because of the exponential estimate of the Frechet derivative of the Poincare operator it implies the uniqueness and stability of solutions of the two-dimension differential-difference equation with two delays. Furthermore, with the help of reverse replacement the proved result is transferred to the original system.

Keywords: relaxation oscillations, delay, large parameter, synaptic connection

On the authors:

Margarita M. Preobrazhenskaja, orcid.org/0000-0002-7032-1155,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,
e-mail: rita.preo@gmail.com

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Science Foundation (project №14-21-00158).

©Климов В. С., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577

УДК 513.7

О локально выпуклых кривых

Климов В. С.

получена 27 февраля 2017

Аннотация. Вводится понятие и устанавливаются свойства локально выпуклых кривых. В первом пункте рассматривается кривая K , допускающая параметрическое представление $x = u(t)$, $y = v(t)$, ($a \leq t \leq b$), где $u(t), v(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, причём $|u'(t)| + |v'(t)| > 0 \forall t \in [a, b]$. Угловая функция $\theta(t)$ кривой K – это непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, удовлетворяющая соотношениям

$$u'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \cos \theta(t), \quad v'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \sin \theta(t).$$

Кривая K называется локально выпуклой, если её угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$. Для замкнутой кривой K число $\deg K = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ целое; оно равно числу оборотов, которое вектор скорости $(u'(t), v'(t))$ совершает вокруг начала координат. Основным результатом пункта: если кривая K локально выпукла и замкнута, то для любой прямой G число $N(K; G)$ точек пересечения K с G конечно и верна оценка $N(K; G) \leq 2|\deg K|$.

Обсуждаются варианты этой оценки для незамкнутых и негладких кривых. В пунктах 2, 3 основное внимание уделяется кривым, возникающим при исследовании линейного однородного дифференциального уравнения вида $L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ с локально суммируемыми коэффициентами $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$). Существенную роль начинают играть признаки неосцилляции дифференциального оператора L , установленные в работах Г.А. Бессмертных и А.Ю. Левина.

Ключевые слова: регулярная кривая, угловая функция, степень, прямая, дифференциальное уравнение, ломаная линия

Для цитирования: Климов В. С., "О локально выпуклых кривых", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:5 (2017), 567–577.

Об авторе:

Климов Владимир Степанович, orcid.org/0000-0001-9560-8315, доктор физ.-мат. наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: VSK76@list.ru

1. Основные результаты

Пусть K – плоская спрямляемая кривая, G – прямая в той же плоскости. Обозначим через $N(G; K)$ число точек пересечения прямой G с кривой K . Справедлива оценка

$$N(K) := \sup_G N(G; K) \geq \frac{2L}{L_1},$$

где L – длина кривой K , а L_1 – периметр выпуклой оболочки K . Эта оценка является простым следствием известного в интегральной геометрии ([1], с. 20) равенства

$$\int N(G; K) dG = 2L,$$

где за область интегрирования принято множество всех прямых плоскости. В общем случае число $N(K)$ может принимать и бесконечные значения. Ниже устанавливаются оценки сверху $N(K)$ в терминах геометрических характеристик кривой K . Символы $\blacktriangleleft$ и $\blacktriangleright$ означают начало и конец доказательства соответственно.

Основной результат относится к случаю, когда K – регулярная плоская кривая. Это означает, что кривая K задаётся параметрическими уравнениями

$$x = u(t), \quad y = v(t) \quad (t \in I = [a, b], -\infty < a < b < \infty), \quad (1)$$

где $u(t), v(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке I функции, причём $|u'(t)| + |v'(t)| > 0 \forall t \in I$. Регулярность кривой влечёт за собой её локальную простоту. Более того, отрезок I можно разбить на конечное число таких отрезков $I_1, \dots, I_m$, что соотношения $x = u(t), \quad y = v(t) \quad (t \in I_k, k = 1, \dots, m)$ эквивалентны одному из равенств $y = f_1(x)$ или $x = f_1(y)$, в которых f_1, f_2 – гладкие функции одного переменного. Вместе с тем регулярная кривая может иметь точки самопересечения, т.е. такие точки, в которых кривая пересекает саму себя. Например, у лемнискаты есть такая точка, а у окружности подобных точек нет.

Каждой регулярной плоской кривой K , задаваемой уравнениями (2), можно сопоставить вектор-функцию $\vec{r}(t) = u(t)\vec{e}_1 + v(t)\vec{e}_2$, где векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ образуют правый ортонормированный базис в плоскости Oxy . Если $\vec{r} = \vec{r}(t) = u(t)\vec{e}_1 + v(t)\vec{e}_2$ – векторное уравнение кривой K , то вектор-функция $\vec{r}(t)$ всюду дифференцируема на отрезке $I = [a, b]$ и

$$\vec{r}'(t) = u'(t)\vec{e}_1 + v'(t)\vec{e}_2.$$

Вектор $\vec{r}'(t)$ отличен от нуля и направлен по касательной к кривой K в точке P , соответствующей значению параметра t . Введем обозначение

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}. \quad (t \in I). \quad (2)$$

Из (2) вытекает непрерывность на отрезке I вектор-функции $\vec{\tau}(t)$ и равенство $|\vec{\tau}(t)| = 1 \quad (t \in I)$. Поэтому существует и единственная непрерывная на отрезке I функция $\theta(t)$, удовлетворяющая предположениям

$$\vec{\tau}(t) = \vec{e}_1 \cos \theta(t) + \vec{e}_2 \sin \theta(t) \quad (t \in I), \quad 0 \leq \theta(a) < 2\pi.$$

С точностью до кратного 2π число $\theta(t)$ совпадает с величиной угла между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{\tau}(t)$. Её называют [2] *угловой функцией* поля $\vec{r}'(t)$ на кривой K .

Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке I , т. е. $u \in C^2(I), v \in C^2(I)$, то функция $\theta(t)$ всюду на отрезке I дифференцируема и

$$\theta'(t) = \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)}. \quad (3)$$

В силу (3) функция $\theta(t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому согласно формуле Ньютона–Лейбница справедливо равенство

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(t) dt = \int_a^b \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Число

$$\gamma(\vec{\tau}, K) = \frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)] \quad (5)$$

называют *вращением* поля $\vec{\tau}$ на кривой K . Оно зависит от ориентации кривой K . При переходе к противоположной ориентации абсолютная величина вращения сохраняется, а знак вращения меняется. Вращение $\gamma(\vec{\tau}, K)$ может быть любым действительным числом. Если $\vec{\tau}(b) = \vec{\tau}(a)$, то вращение является целым числом. Если же $\vec{\tau}(b) = -\vec{\tau}(a)$, то $\gamma(\vec{\tau}, K) = n - \frac{1}{2}$, где n – целое число.

Регулярную кривую K , задаваемую уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($t \in [a, b]$), назовём *замкнутой*, если выполнено условие периодичности

$$\vec{r}(b) = \vec{r}(a), \quad \vec{r}'(b) = \vec{r}'(a). \quad (6)$$

Условие (6) позволяет продолжить вектор-функцию $\vec{r}(t)$ на всю действительную ось по периодическому закону

$$\vec{r}(t + b - a) = \vec{r}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Из (6) следует равенство $\vec{\tau}(b) = \vec{\tau}(a)$, поэтому число $\gamma(\vec{\tau}, K)$ – целое. Его называют *степенью* замкнутой регулярной кривой K и обозначают символом $\deg K$; в литературе встречаются иные термины и другие обозначения. Из (4), (5) вытекает равенство

$$\deg K = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'^2(t) + v'^2(t)} dt, \quad (7)$$

представляющее весьма частный случай формулы Пуанкаре ([2], с. 12).

Для вычисления $\deg K$ по формуле (7) можно использовать методы приближенного интегрирования. Поскольку число $\deg K$ целое, то его точное значение будет известно, если правая часть в формуле (7) будет вычислена с погрешностью, меньшей чем, 0,5.

Достаточно удобный способ нахождения $\deg K$ основан на теореме Уитни о замкнутых регулярных кривых. Её формулировка и доказательство приведены, например, в [3]. Теорема Уитни относится к кривым с конечным числом $d(K)$ точек самопересечения, причём каждая из этих точек двукратна. Добиться выполнения этого предположения можно путем малого шевеления кривой, не меняющего её степени. Из результатов Уитни вытекает неравенство: $|\deg K| \leq d(K) + 1$.

Регулярную кривую K назовём *локально выпуклой*, если соответствующая ей угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна. Кривая K может быть и незамкнутой. Из формулы (4) следует, что локальная выпуклость эквивалентна тому, что функция $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)$ не меняет знака на отрезке $I = [a, b]$, а множество $T_0 = \{t \in$

$I : u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) = 0\}$ не содержит ни одного интервала. Переходя, если это нужно, к противоположной ориентации, можно считать, что $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) > 0 \forall t \notin T_0$. В частности, локально выпуклая кривая не содержит отрезков положительной длины.

Для локально выпуклой кривой K число точек пересечения с каждой прямой конечно и допускает простую оценку сверху через $\deg K$. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть K – локально выпуклая замкнутая кривая. Тогда

$$N(K) \leq 2|\deg K|. \quad (8)$$

◀ Пусть прямая G на плоскости задаётся уравнением $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 > 0$. Оценим сверху число $N(G; K)$ точек пересечения прямой G с кривой K , заданной параметрическими уравнениями (2). Не нарушая общности, можно считать, что $a = 0, b = 1$, а функции $u(t), v(t)$ определены на всей оси и периодичны:

$$u(t+1) = u(t), \quad v(t+1) = v(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае функция $\varphi(t) := Au(t) + Bv(t) + C$ также периодична ($\varphi(t+1) = \varphi(t)$) и непрерывно дифференцируема. Будем (для определенности) считать, что угловая функция $\theta(t)$ строго возрастает; это предположение влечёт за собой неравенство $\deg K \geq 1$.

Обозначим через l число различных корней уравнения $\varphi(t) = 0$, принадлежащих промежутку $J_0 = [0, 1)$. Очевидно, что $N(G; K) \leq l$. Ввиду этого можно ограничиться случаем, когда $l > 1$.

Пусть p – число различных критических точек функции $\varphi(t)$ на промежутке J_0 . Из теоремы Ролля и периодичности функции φ вытекает неравенство $l \leq p$. Пронумеруем критические точки t_i функции $\varphi(t)$ в порядке возрастания, так что $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{p-1} < t_p < 1$, $\varphi'(t_i) = 0$. Равенство $\varphi'(t_i) = 0$ эквивалентно ортогональности векторов $A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2$ и $\vec{\tau}(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Поскольку угловая функция $\theta(t)$ строго монотонна, то $\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) = \pi$ ($i = 2, 3, \dots, p$) и $\theta(0) \leq \theta(t_1), \theta(t_p) < \theta(1)$. Отсюда вытекают соотношения

$$(p-1)\pi = \sum_{i=2}^p (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) < \theta(1) - \theta(0) = 2\pi \deg K.$$

Сокращая на π , приходим к неравенству $p < 2\deg K + 1$, а поскольку p – натуральное число, то $p \leq 2\deg K$. Объединяя установленные выше оценки, последовательно получаем

$$N(G; K) \leq l \leq p \leq 2\deg K.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▶

Обсудим вопрос о точности неравенства (8). Если K – выпуклая замкнутая кривая, то $N(K) = 2|\deg K| = 2$ и неравенство (8) неумлучшаемо. Для произвольной локально выпуклой кривой K число $N(K)$ может быть значительно меньше $2|\deg K|$. Соответствующие примеры легко усматриваются для кривых, задаваемых натуральным уравнением вида $k(s) = c \cos^2 s + 1$ ($c > 0$). Кривые подобного типа в связи с другими вопросами анализируются в работе [4].

Вместе с тем во всём классе локально выпуклых кривых с фиксированной степенью $\deg K$ неравенство (8) неулучшаемо. В качестве простого примера можно рассмотреть кривую

$$x = \cos 2\pi nt, \quad y = \sin 2\pi nt, \quad (t \in I = [0, 1], n \in \mathbb{N}).$$

Эта кривая есть n раз проходимая в положительном направлении окружность единичного радиуса. При малом её шевелении можно получить кривую с конечным числом двойных точек.

Вариант оценки (8) верен и для незамкнутых локально выпуклых кривых. Пусть, как и выше, $\theta(t)$ – угловая функция локально выпуклой кривой K , задаваемой параметрическими уравнениями (1).

Теорема 2. Если $|\theta(b) - \theta(a)| \leq 2\pi q$, где $q \in \mathbb{N}$, то

$$N(K) \leq 2q + 1.$$

Доказательство теоремы можно провести по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Надо лишь в соответствующем месте использовать хорошо известное следствие теоремы Ролля: если в промежутке J функция f имеет n нулей, то её производная f' в этом же промежутке имеет самое меньшее $n - 1$ нулей. (Для периодических функций это следствие допускает определенное усиление, которое и применялось выше).

2. Приложения к дифференциальным уравнениям

Локально выпуклые кривые естественным образом возникают при изучении нетривиальных решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}x \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \quad (9)$$

Будем считать, что функции $p(t), q(t)$ определены и непрерывны на отрезке $I = [a, b]$. В этом случае решения уравнения (9) дважды непрерывно дифференцируемы.

Лемма 1. Пусть $|q(t)| > 0 \forall t \in I$. Если $u(t), v(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (9), то определяемая параметрическими уравнениями (1) кривая K локально выпукла, более того, условие локальной выпуклости выполняется в усиленной форме

$$u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) \neq 0 \forall t \in I. \quad (10)$$

◀ Так как u, v – решения уравнения (9), то

$$u''(t) = -p(t)u' - q(t)u, \quad v''(t) = -p(t)v' - q(t)v.$$

Отсюда легко выводится равенство

$$u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) = q(t)W(t),$$

в котором $W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ – вронскиан системы функций $\{u(t), v(t)\}$. Поскольку функции $q(t), W(t)$ нигде на отрезке I не обращаются в нуль, то условие выпуклости (10) имеет место. ►

Верно и обратное к лемме 1 утверждение.

Лемма 2. Пусть u, v – функции класса $C^2(I)$, для которых выполнено условие (10) и $W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t) \neq 0 \forall t \in I$. Тогда функции $u(t), v(t)$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения вида (9), в котором $p, q \in C[I]$ и $q(t) \neq 0 \forall t \in I$.

◀ Искомое дифференциальное уравнение хорошо известно. Оно может быть записано в стандартной форме

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель по первой строке и поделив получающееся равенство на $W(t)$, приходим к уравнению (9) с коэффициентами

$$p(t) = \frac{u''(t)v(t) - u(t)v''(t)}{W(t)}, q(t) = \frac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{W(t)}.$$

Функции $p(t), q(t)$ обладают нужными свойствами. ▶

Лемма 3. Пусть u, v – функции класса $C^3(I)$. Тогда неравенство (10) эквивалентно тому, что тройка функций $\{1, u(t), v(t)\}$ есть фундаментальная система решений уравнения

$$x''' + p_1(t)x'' + q_1(t)x' = 0, \quad (11)$$

в котором $p_1, q_1 \in C(I)$.

◀ Пусть $W(t)$ есть определитель Вронского системы $\{1, u(t), v(t)\}$. Как нетрудно видеть, справедливо равенство

$$W(t) = u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t).$$

Уравнение (11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$W^{-1}(t) \begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \end{vmatrix} = 0.$$

Имеют место равенства

$$p_1(t) = \frac{u'(t)v'''(t) - u'''(t)v'(t)}{W(t)}, \quad q_1(t) = \frac{u'''(t)v''(t) - u''(t)v'''(t)}{W(t)},$$

влекущие за собой включения $p_1 \in C(I), q_1 \in C(I)$. ▶

Если $\varphi(t)$ – решение уравнения (11), то функция $\varphi'(t)$ – решение уравнения

$$\mathcal{L}_1(y) := y'' + p_1(t)y' + q_1(t)y = 0. \quad (12)$$

В силу теоремы Ролля между двумя нулями функции $\varphi(t)$ находится нуль её производной, поэтому число нулей l функции φ связано с числом нулей l_1 функции φ' неравенством $l \leq l_1 + 1$. Это позволяет использовать для оценки числа нулей нетривиальных решений уравнения (1) богатый арсенал средств, относящийся к дифференциальному уравнению второго порядка (12).

Ограничимся здесь лишь наиболее просто формулируемым и характерным результатом.

Теорема 3. Пусть коэффициенты $p_1(t), q_1(t)$ оператора $\mathcal{L}_1$ удовлетворяют неравенствам

$$|p_1(t)| \leq M_1, \quad |q_1(t)| \leq M_2 \quad (t \in I, M_1 > 0, M_2 > 0). \quad (13)$$

Пусть

$$h = \frac{\sqrt{4M_1^2 + 8M_2} - 2M_1}{M_2}. \quad (14)$$

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ уравнения (12) имеет на отрезке $I = [a, b]$ не более $\frac{b-a}{h} + 1$ нулей.

◀ Пусть $z(t)$ – нетривиальное решение уравнения (12). Число нулей функции $z(t)$ на отрезке I конечно, обозначим его через n . Расположим корни уравнения $z(t) = 0$ в порядке возрастания: $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$. Из оценок (13) вытекает (см., например, [5],[6]), что $t_{i+1} - t_i \geq h$. Справедлива цепь неравенств

$$(n-1)h \leq \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \leq b - a.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▶

Следствие 1. В условиях теоремы 3 любое нетривиальное решение $\varphi(t)$ уравнения (11) имеет не более $\frac{b-a}{h} + 2$ нулей.

Следствие 2. Пусть функции $u(t), v(t)$ принадлежат классу $C^3(I)$ и определитель Вронского $W(t)$ системы $\{1, u(t), v(t)\}$ всюду положителен. Пусть M_1, M_2 – такие положительные постоянные, что для всех t из I справедливы неравенства

$$|u'(t)v'''(t) - u'''(t)v'(t)| \leq M_1 W(t), \quad |u'''(t)v''(t) - u''(t)v'''(t)| \leq M_2 W(t).$$

Тогда $N(K) \leq \frac{b-a}{h} + 2$, где h определено равенством (14).

Комбинируя леммы 1, 2 с признаками неосцилляции дифференциального оператора $\mathcal{L}$, можно установить оценки сверху числа $N(G, K)$ для прямых G , задаваемых однородным уравнением $Ax + By = 0$, и кривой K , задаваемой параметрическими уравнениями (1). В более общем контексте эти вопросы обсуждаются в следующем пункте.

3. Обсуждение потенциальных обобщений

Ниже рассматриваются некоторые варианты понятия локально выпуклой кривой. Анонсируются аналоги теорем 1, 3.

Введенное выше определение локальной выпуклости неприменимо к локально липшицевым кривым, возникающим при замене класса $C^1(I)$ более широким классом $C^{0,1}(I)$, состоящим из функций, удовлетворяющих на отрезке I условию Липшица. Для функций этого класса развит аналог дифференциального исчисления,

называемый рядом авторов негладким анализом. Понятие производной существенным образом расширяется, естественным образом появляются многозначные функции и отображения. Вместе с тем для функций данного класса верны аналоги теорем Ферма и Ролля. Это позволяет распространить установленные выше результаты на липшицевы кривые.

Приведём здесь лишь одно утверждение, относящееся к замкнутым ломаным линиям. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n = A_0$ – вершины ломаной линии K с n звеньями $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ положительной длины. Положим $A_{n+1} = A_1$. Ломаная линия K может иметь самопересечения. Введём в рассмотрение векторы

$$\vec{h}_i = \frac{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}}{|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|} \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1).$$

Очевидно, что длины всех векторов $\vec{h}_i$ равны 1 и $\vec{h}_{n+1} = \vec{h}_1$. Назовём K *локально выпуклой ломаной*, если для любого $j = 1, \dots, n$ вектор $\vec{h}_{j+1}$ есть результат поворота (против часовой стрелки) предшествующего вектора $\vec{h}_j$ на угол $\psi_j \in (0, \pi)$. Это и эквивалентные ему определения локально выпуклой ломаной приводятся в [7].

Натуральное число

$$\deg(K) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \psi_j$$

назовём *степенью* K . Оно равно 1 лишь в случае, когда K есть граница выпуклого многоугольника.

Для ломаной K введенную выше числовую характеристику $N(G; K)$ необходимо несколько изменить. Именно, под $N(G; K)$ следует понимать число связных компонент пересечения прямой G с ломаной K . Сформулируем вариант теоремы 1.

Теорема 4. Пусть K – локально выпуклая замкнутая ломаная. Тогда $N(G; K) \leq 2\deg K$ для любой прямой G .

Аналоги теоремы 4 верны для липшицевых кривых. При этом необходимо соответствующим образом модернизировать понятие локально выпуклой кривой. В общем случае угловая функция монотонна, но может иметь и точки разрыва, и участки постоянства.

Подробнее остановимся на многомерном варианте теоремы 3. Пусть K – кривая в n – мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемая параметрическими уравнениями

$$x_1 = u_1(t), \dots, x_n = u_n(t), \quad (15)$$

где $u_1, \dots, u_n$ – непрерывные на промежутке (α, β) ($\alpha < \beta$) функции. Кривую K назовём *локально выпуклой*, если для каждой точки $t_0 \in (\alpha, \beta)$ существует такое $\delta > 0$, что $\{u_1, \dots, u_n\}$ есть T -система (система Чебышева) на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (\alpha, \beta)$. По определению T -систем это означает, что каждый многочлен

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k(t) \quad \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 > 0 \right)$$

имеет в $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ менее n корней.

В качестве примера рассмотрим кривые, возникающие при изучении линейного однородного дифференциального уравнения

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0, \quad (16)$$

где коэффициенты $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) определены и локально суммируемы на интервале (α, β) . Если $\{u_1, \dots, u_n\}$ – фундаментальная система решений уравнения (16), то кривая (15) локально выпукла [8, 9]. В частности, для любого отрезка $J = [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ и любого нетривиального решения $x(t)$ уравнения (16) число корней уравнения $x(t) = 0$ конечно. На геометрическом языке это означает, что часть кривой K , отвечающая параметру $t \in J$ и обозначаемая далее через K_J , пересекается конечное число раз с любой проходящей через начало координат гиперплоскостью $G \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $N(G; K_J)$ число точек пересечения $G \cap K_J$.

Используя признаки неосцилляции [8,9] дифференциального оператора L , можно дать оценки сверху числа $N(G; K_J)$. Например, пусть коэффициенты $p_i(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|p_i(t)| \leq M_i \quad (t \in J, i = 1, \dots, n), \quad (17)$$

в которых M_i ($i = 1, \dots, n$) – положительные постоянные. Введём в рассмотрение числа

$$\xi_k = \frac{n-k}{k!n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \xi_n = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n}$$

и многочлен

$$\Phi(\lambda) = -1 + \sum_{k=1}^n \xi_k M_k \lambda^k.$$

Обозначим через h единственный положительный корень многочлена Φ . Из результатов [6],[8] вытекает, что на каждом отрезке $\Delta \in (\alpha, \beta)$, длина которого меньше h , любое нетривиальное решение уравнения (16) имеет не более $n-1$ нуль. Отсюда несложно выводится оценка сверху числа $N(G; K_J)$.

Теорема 5. Пусть коэффициенты $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) на отрезке $J = [a, b]$ удовлетворяют неравенствам (17). Тогда

$$N(G; K_J) \leq 1 + (n-1) \frac{b-a}{h}$$

для любой проходящей через начало координат гиперплоскости $G \subset \mathbb{R}^n$.

Литература, посвящённая признакам неосцилляции и их приложениям, насчитывает многие сотни наименований. Не претендуя на роль обзора, укажу лишь на работы [8] – [10], содержащие значительную библиографию.

Список литературы / References

- [1] Сантало Л. А., *Введение в интегральную геометрию*, Издательство иностранной литературы, М., 1956, 184 с.; [Luis A. Santaló, *Introduction to integral geometry*, Hermann, 1953, 127 pp., (in English).]
- [2] Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П., *Векторные поля на плоскости*, Физматгиз, М., 1963, 248 с.; English transl.: Krasnosel'skii M. A., Perov A. I., Povolockii A. I., Zabreiko P. P., *Plane Vector Fields*, New York City: Academic Press, 1966, 242 pp.

- [3] Прасолов В. В., *Элементы комбинаторной и дифференциальной геометрии*, МЦНМО, М., 2004; [Prasolov V. V., *Elementy kombinatornoi i differencialnoi geometrii*, MCNMO, Moscow, 2004, (in Russian).]
- [4] Иванов А. О., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., “Компьютерное моделирование кривых и поверхностей”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **15**:5 (2009), 63–94; English transl.: Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Fomenko A. T., “Computer modeling of curves and surfaces”, *J. Math. Sci.*, **172**:5 (2011), 663–689.
- [5] Трикоми Ф., *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, М., 1962; [Tricomi F. G., *Differential equations*, Blackie & Son Limited, 1961, (in English).]
- [6] Бессмертных Г. А., Левин А. Ю., “О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной”, *ДАН СССР*, **144**:3 (1962), 471–474; [Bessmertnyh G. A., Levin A. Yu., “O nekotorykh ocenках differencyruemykh funczii odnoi peremennoi”, *DAN SSSR*, **144**:3 (1962), 471–474, (in Russian).]
- [7] Запутряева Е. С., “Изгибания равносторонних многоугольников с сохранением индекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:1 (2013), 138–159; [Zaputryaeva E. S., “Deformations of Planar Equilateral Polygons with a Constant Index”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **20**:1 (2013), 138–159, (in Russian).]
- [8] Левин А. Ю., “Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ”, *УМН*, **24**:2(146) (1969), 43–96; [Levin A. Yu., “Nonoscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ”, *Russian Math. Surveys*, **24**:2(146) (1969), 43–96, (in Russian).]
- [9] Дерр В. Я., “Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений”, *Вестник Удмуртского ун-та*, **15**:5 (2009), 46–89; [Derr V. A., “Nonoscillation of solutions of linear differential equations”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta*, **15**:5 (2009), 46–89, (in Russian).]
- [10] Анисов С. С., “Выпуклые кривые в $\mathbb{RP}^n$ ”, *Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда*, Тр. МИАН, **221** (1998), 9–47; English transl.: Anisov S. S., “Convex curves in $\mathbb{RP}^n$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **221** (1998), 3–39.

Klimov V. S., “On Locally Convex Curves”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 567–577.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-567-577

Abstract. We introduce the definition of locally convex curves and establish some properties of such curves. In the section 1, we consider the curve K allowing the parametric representation $x = u(t)$, $y = v(t)$, ($a \leq t \leq b$), where $u(t)$, $v(t)$ are continuously differentiable on $[a, b]$ functions such that $|u'(t)| + |v'(t)| > 0 \forall t \in [a, b]$. A continuous on $[a, b]$ function $\theta(t)$ is called *the angle function of the curve K* if the following conditions hold: $u'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \cos \theta(t)$, $v'(t) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \sin \theta(t)$. The curve K is called *locally convex* if its angle function $\theta(t)$ is strictly monotonous on $[a, b]$. For a closed curve K the number $\deg K = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ is whole. This number is equal to the number of rotations that the speed vector $(u'(t), v'(t))$ performs around the origin. The main result of the first section is the statement: if the curve K is locally convex, then for any straight line G the number $N(K; G)$ of intersections of K and G is finite and the estimate $N(K; G) \leq 2|\deg K|$ holds. We discuss versions of this estimate for closed and non-closed curves. In the sections 2 and 3, we consider curves arising in the investigation of a linear homogeneous differential equation of the form $L(x) \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ with locally summable coefficients $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$). We demonstrate how conditions of disconjugacy of the differential operator L that were established in works of G. A. Bessmertnyh and A. Yu. Levin, can be applied.

Keywords: regular curve, corner function, degree, straight line, differential equation, polyline

On the author:

Vladimir S. Klimov, orcid.org/0000-0001-9560-8315, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: VSK76@list.ru

©Невский М. В., Ухалов А. Ю., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-578-595

УДК 514.17+517.51+519.6

Об n -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0, 1]^n \subset nS$

Невский М. В.¹, Ухалов А. Ю.

получена 10 февраля 2017

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0, 1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести S с коэффициентом σ . Под $d_i(S)$ понимается i -й осевой диаметр S , т. е. максимальная длина отрезка из S , параллельного i -й координатной оси. Пусть $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS . Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка $n + 1$, строки которой содержат координаты вершин S , а последний столбец состоит из 1. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим линейную функцию на $\mathbb{R}^n$, коэффициенты которой составляют j -й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Ранее первым автором были доказаны равенства $\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$, $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}$. В статье рассматривается случай $S \subset Q_n$. Тогда все $d_i(S) \leq 1$, поэтому $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$. Если же для некоторого симплекса $S' \subset Q_n$ выполняется $\xi(S') = n$, то $\xi_n = n$, $\xi(S') = \alpha(S')$ и $d_i(S') = 1$. Однако указанные S' существуют не для всех размерностей. Первое такое значение n равно 2. Для любого двумерного симплекса $\xi(S) \geq \xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots > 2$. Справедлива двусторонняя оценка $n \leq \xi_n < n + 1$. Равенство $\xi_n = n$ имеет место, если существует матрица Адамара порядка $n + 1$. Дальнейшие исследования показали, что $\xi_n = n$ и для ряда других размерностей n . В частности, симплексы с условием $S \subset Q_n \subset nS$ были найдены для всех нечётных n в промежутке $1 \leq n \leq 11$. В первой части настоящей статьи приводятся новые результаты о симплексах, удовлетворяющих указанным включениям. Доказывается, что если $S \subset Q_n \subset nS$, то центр тяжести S совпадает с центром Q_n . Устанавливаются равенства $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2$ ($1 \leq i \leq n$), $\sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1}$ ($1 \leq j \leq n+1$). Приводится ряд следствий. Во второй части статьи обсуждается следующая гипотеза. Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется равенство $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n - 1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , отсекают от куба Q_n равные по объёму части. Хотя это справедливо для $n = 2$ и $n = 3$, в общем случае эта гипотеза не верна.

Ключевые слова: n -мерный симплекс, n -мерный куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Об n -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ ", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 578–595.

Об авторах:

Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена при поддержке инициативной НИР ЯрГУ ВПИ–008.

1. Определения и предварительные сведения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0, 1]^n$. Положим $e := (1, \dots, 1)$. Для выпуклого многогранника $D \subset \mathbb{R}^n$ через $c(D)$ обозначается центр тяжести, а через $\text{ver}(D)$ — совокупность вершин D . Под σD понимается образ D при гомотетии с центром в точке $c(D)$ и коэффициентом гомотетии σ . Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i -й координатной оси. Следуя Скотту [16], [17], будем называть $d_i(S)$ i -м *осевым диаметром* S .

Введём в рассмотрение величины, связанные с гомотетией невырожденного симплекса S . Пусть

$$\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}.$$

Число $\xi(S)$ будем называть *коэффициентом поглощения* симплексом единичного куба. Положим $\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS . Равенство $\xi(S) = \alpha(S)$ выполняется тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n , т. е. каждая грань этого симплекса содержит вершину Q_n .

Пусть $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ — вершины симплекса S , $1 \leq j \leq n+1$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим линейную функцию на $\mathbb{R}^n$, коэффициенты которой составляют j -й столбец $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}.$$

Числа $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами* точки x относительно S . Многочлены λ_j имеют важные приложения, связанные с линейной интерполяцией функций n переменных по узлам, совпадающим с вершинами S (см., например, [3], [4], [6]). Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа*, соответствующими симплексу S . Подробнее о многочленах λ_j см. [6].

Как доказано в [5], величина $d_i(S)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1)$$

Эта формула обобщается в [7] на максимальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному ненулевому вектору. В [6] установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (2)$$

Соотношение

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) \quad (3)$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n . Для произвольного невырожденного симплекса S справедлива формула

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (4)$$

Доказательство равенства (4) дано в [15] (см. также [6]).

Ниже предполагается, что $S \subset Q_n$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ верно $d_i(S) \leq 1$. Из равенства (4) сразу следует, что

$$n \leq \alpha(S) \leq \xi(S). \quad (5)$$

Итак, для любого симплекса $S \subset Q_n$ коэффициент поглощения ограничен снизу размерностью пространства. Если же для некоторого симплекса S' выполняется $\xi(S') = n$, то из (5) имеем $\alpha(S') = \xi(S') = n$. Очевидно, что в этом случае $\xi_n = n$. Кроме того, из (4) получается, что для любого i верно $d_i(S') = 1$. Однако такие симплексы S' имеются не для всех размерностей n . Если в $\mathbb{R}^n$ не существует симплекса с коэффициентом поглощения n , то $\xi_n > n$. Первое такое значение n равно 2. Именно, $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots$; нетривиальное доказательство приводится в [6]. Другим путём неравенство $\xi_2 > 2$ выводится в п. 3 настоящей статьи.

Первым автором доказано, что $\xi_n \asymp n$. Если $n + 1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n + 1$, то $\xi_n = n$. (По поводу матриц Адамара см., например, [10].) Отметим здесь общую оценку

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} < n + 1 \quad (n > 2).$$

Так как $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2.34\dots$, то всегда $0 \leq \xi_n - n < 1$. Эти и многие другие результаты приводятся в [6].

Заметим, что равенства $d_i(S) = 1$ и $\alpha(S) = n$ для $S \subset Q_n$ не гарантируют совпадения $\alpha(S)$ и $\xi(S)$. Например, для симплекса максимального объёма в Q_n все осевые диаметры $d_i(S)$ равны 1 (этот результат получен Лассаком [13]; другое доказательство даётся в [5] и [6]), однако вовсе не обязательно для такого симплекса $\xi(S) = n$.

Исследования, проведённые в 2016 г. вторым автором, показали, что равенство $\xi_n = n$ выполняется и для ряда размерностей n , когда $n + 1$ не является числом Адамара. Симплексы с условием $S \subset Q_n \subset nS$ были обнаружены для $n = 5$ (см. [9]) и $n = 9$. К моменту написания настоящей статьи такие симплексы найдены, в частности, для всех нечётных размерностей в промежутке $1 \leq n \leq 11$.

В первой части настоящей статьи приводятся некоторые новые результаты о симплексах $S \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих включениям $S \subset Q_n \subset nS$. Вторая часть статьи связана с обсуждением следующей гипотезы, высказанной Ю. В. Богомоловым, которую авторы называли *гипотезой о равноотсечении*. Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n - 1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , отсекают от куба Q_n равные по объёму части. Хотя гипотеза о равноотсечении справедлива для $n = 2$ и $n = 3$, в общем случае она не верна.

2. Теорема о симплексе с коэффициентом поглощения n

Из включений $S \subset Q_n \subset nS$ следует, что центр тяжести симплекса S совпадает с центром куба Q_n . Кроме того, эти включения обеспечивают весьма интересные свойства матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, соответствующей симплексу S . Оказывается, что в этом случае совпадают как строчные (для верхних n строк), так и столбцовые (для всех столбцов) суммы модулей элементов $\mathbf{A}^{-1}$. Установим эти факты.

Ниже $x^{(j)}$ — вершины, $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S .

Теорема 1. Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = 1, \quad (6)$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}, \quad (7)$$

$$c(S) = c(Q_n) = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2 \quad (1 \leq i \leq n), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1} \quad (1 \leq j \leq n+1). \quad (10)$$

Аналогичные (6)–(7) соотношения имеют место и в случае, когда максимумы берутся по $x \in Q_n$.

Доказательство. Так как $S \subset Q_n \subset nS$, выполняется $\xi(S) \leq n$. В силу (5) имеем $\xi(S) = \alpha(S) = n$. Из равенства $\xi(S) = \alpha(S)$ следует, что симплекс nS описан вокруг Q_n . Поэтому справедливо соотношение (3), означающее, что $\max(-\lambda_j(x))$ не зависит от j . Формула (2) даёт при любом $j = 1, \dots, n+1$

$$n = \xi(S) = (n+1) \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

откуда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = \frac{n-1}{n+1}. \quad (11)$$

Таким образом, выполняется соотношение (7).

В наших обозначениях

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} - l_{n+1,j}, \quad (12)$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_j(x) = \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j}. \quad (13)$$

Поскольку $x^{(j)} \in Q_n$, справедливо неравенство

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) \geq \lambda_j(x^{(j)}) = 1. \quad (14)$$

Напомним, что $e = (1, \dots, 1)$. Применяя (11)–(14), имеем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} 2\lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right) &= 2\lambda_j\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^n l_{ij} + 2l_{n+1,j} = \\ &= \left[\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] + \left[\sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] = \\ &= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) - \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) \geq 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, при каждом j

$$\lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right) \geq \frac{1}{n+1}. \quad (16)$$

Покажем, что каждое соотношение (16) является равенством. Числа $\lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right)$ суть барицентрические координаты точки $x = \frac{1}{2}e$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right) = 1.$$

Если при некотором j неравенство (16) было бы строгим, то левая часть последнего соотношения была бы строго больше правой, а это не так. Следовательно,

$$\lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right) = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1. \quad (17)$$

Первая и последняя величины в цепочке (15) оказываются равными, поэтому неравенство в (15), а значит, и неравенство в (14) обращаются в равенства. Тем самым, справедливо соотношение (6). Поскольку λ_j — линейная функция, каждое из равенств (6)–(7) эквивалентно аналогичному соотношению, в котором максимумы берутся по $x \in Q_n$.

Равенство (8) следует из (17) и определения барицентрических координат:

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{1}{2}e\right) x^{(j)} = \frac{1}{2}e = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right).$$

Теперь докажем (9)–(10). Включение $S \subset Q_n$ влечёт $d_i(S) \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$). Но поскольку $\alpha(S) = n$, из (4) следует, что каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Применяя (1), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 1.$$

Следовательно, $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2$, т. е. выполняются равенства (9). Наконец, заметим, что при любом $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| &= \left[\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] - \left[\sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] = \\ &= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) + \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

Мы применили (6)–(7). Тем самым, справедливы равенства (10).

Отметим здесь другой способ доказательства соотношения

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_1(x) = \dots = \max_{x \in Q_n} \lambda_{n+1}(x) = 1. \quad (18)$$

Из доказанного равенства $c(S) = c(Q_n)$ следует, что $-S \subset -Q_n \subset -nS$. Но $-Q_n = Q_n$, значит, $S \subset Q_n \subset -nS$. Обозначим через Γ_j гиперплоскость с уравнением $\lambda_j(x) = 1$. Заметим, что каждая вершина симплекса $-nS$ при некотором j принадлежит Γ_j . Именно, если v — вершина S , лежащая в гиперплоскости $\lambda_j(x) = 0$, то её образ w при гомотетии с коэффициентом $(-n)$ и с центром гомотетии в точке $c := c(S)$ принадлежит Γ_j . Действительно, $w = -n(v - c) + c$. Положим $\mu_j(x) = \lambda_j(x) - \lambda_j(0)$. Так как μ_j — аддитивный и однородный функционал на $\mathbb{R}^n$, имеем:

$$\mu_j(w) = \mu_j(-n(v - c) + c) = -n\mu_j(v) + n\mu_j(c) + \mu_j(c) = -n\mu_j(v) + (n+1)\mu_j(c),$$

$$\lambda_j(w) = \lambda_j(0) + (-n)[\lambda_j(v) - \lambda_j(0)] + (n+1)[\lambda_j(c) - \lambda_j(0)].$$

Барицентрические координаты точки $c = c(S)$ равны $\lambda_j(c) = \frac{1}{n+1}$. Кроме того, $\lambda_j(v) = 0$. Следовательно,

$$\lambda_j(w) = (n+1)\lambda_j(0) + (n+1) \left[\frac{1}{n+1} - \lambda_j(0) \right] = 1.$$

Значит, $w \in \Gamma_j$. Итак, гомотетический образ любой из n вершин симплекса S , принадлежащих грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$, лежит в гиперплоскости $\lambda_j(x) = 1$. Гомотетический образ оставшейся вершины $x^{(j)}$, очевидно, принадлежит полупространству $\lambda_j(x) < 1$. Поэтому для любого j симплекс $-nS$ содержится в полупространстве $\lambda_j(x) \leq 1$. Включение $Q_n \subset -nS$ означает, что куб Q_n также принадлежит этому полупространству. Остаётся заметить, что в силу включения $S \subset Q_n$ вершина $x^{(j)}$ симплекса S содержится в Q_n . Поскольку $\lambda_j(x^{(j)}) = 1$, имеет место соотношение (18).

Теорема полностью доказана. $\square$

3. Следствия

Отметим некоторые следствия из теоремы предыдущего пункта.

Следствие 1. *Справедливо неравенство $\xi_2 > 2$.*

Доказательство. Из (5) следует, что $\xi_2 \geq 2$. Допустим, что $\xi_2 = 2$. Нетрудно показать, что минимальное значение $\xi(S)$ для $S \subset \mathbb{R}^2$ достигается на треугольнике S' с вершинами $(1, s)$, $(t, 1)$, $(0, 0)$, $0 \leq s, t \leq 1$. Допустим, что $\xi_2 = 2$. Тогда $\xi(S') = 2$, значит, справедливы включения $S' \subset Q_2 \subset 2S'$. По теореме 1, $c(S') = c(Q_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Поэтому

$$\frac{t+1}{3} = \frac{s+1}{3} = \frac{1}{2},$$

откуда $s = t = \frac{1}{2}$. Для треугольника S' с вершинами $(1, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 0)$ выполняется

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа для S' имеют вид

$$\lambda_1(x) = \frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 1.$$

По формуле (2) получаем

$$\xi(S') = 3 \cdot \max_{1 \leq j \leq 3, x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1 = 3.$$

Итак, значение $\xi(S')$ равно 3, а не 2, как мы предположили. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Как отмечалось в п. 1, результат следствия 1 известен. Однако здесь он получается более простым способом, чем в [6].

Следствие 2. Пусть n — чётное число. Тогда не существует симплекса S , для которого одновременно выполняются включения $S \subset Q \subset nS$ и $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует симплекс S , вершины $x^{(j)}$ которого совпадают с вершинами Q_n и для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$. Из теоремы 1 имеем

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right),$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left(\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} \right).$$

Поскольку $x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n)$, координаты точки $u := \sum x^{(j)}$ являются целочисленными. Поэтому при чётном n последнее равенство невозможно. Мы получили противоречие. Следствие доказано. $\square$

Следствие 3. Включения $S \subset Q_n \subset nS$ могут быть продолжены в обе стороны следующим образом:

$$\dots \subset \frac{1}{n^2} S \subset \frac{1}{n} Q_n \subset S \subset Q_n \subset nS \subset n^2 Q_n \subset n^3 S \subset \dots$$

Доказательство. Достаточно привлечь (8). □

Следствие 4. Пусть $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда для $j = 1, \dots, n+1$

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} = 1 - l_{n+1,j}, \quad \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{n-1}{n+1} + l_{n+1,j}.$$

Доказательство. Пусть $x^{(j)}$ — вершины S , $c = c(S)$. В соответствии с (8) имеем $c = c(S) = \frac{1}{2} e$. По свойствам барицентрических координат,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(e) x^{(j)} = e, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) x^{(j)} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\lambda_j(e) + \lambda_j(0)}{2} x^{(j)} = \frac{1}{2} e = c.$$

Поэтому $\frac{\lambda_j(e) + \lambda_j(0)}{2}$ суть барицентрические координаты точки c . Поскольку c — центр тяжести S , каждое из этих чисел равно $\frac{1}{n+1}$. Таким образом,

$$\lambda_j(e) + \lambda_j(0) = \frac{2}{n+1}. \quad (19)$$

Из равенства (19) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| + 2\lambda_j(0) &= \frac{2}{n+1}, \\ \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| &= 2 \left[\frac{1}{n+1} - \lambda_j(0) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Применим ещё (10), записав это равенство в виде

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1}. \quad (21)$$

Так как $\lambda_j(0) = l_{n+1,j}$, то сложение (20) и (21) даёт

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} = 1 - l_{n+1,j}.$$

Вычитая (20) из (21), получаем

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{n-1}{n+1} + l_{n+1,j}.$$

Следствие доказано. □

Для симплекса S введём в рассмотрение n -мерные полосы

$$G_j := \{x \in \mathbb{R}^n : -\frac{n-1}{n+1} \leq \lambda_j(x) \leq 1\}.$$

Следствие 5. Пусть $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда $Q_n \subset \bigcap_{j=1}^{n+1} G_j$.

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\min_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \dots = \min_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = -\frac{n-1}{n+1}. \quad (22)$$

Оно эквивалентно (7), поскольку $\min \lambda_j(x) = -\max(-\lambda_j(x))$. Такое же соотношение выполняется и в случае, когда минимумы берутся по $x \in Q_n$. Из (6) и (22) вытекает, что $Q_n \subset G_j$ при каждом j . Поэтому Q_n содержится в пересечении G_j . $\square$

Следствие 6. Предположим, что для симплекса S выполняются включения $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда симплекс S обладает следующим свойством: замена любой его вершины на любую точку Q_n не увеличивает объём симплекса.

Доказательство. Пусть $1 \leq j \leq n+1$ и $y \in Q_n$. Так как $-\frac{n-1}{n+1} \leq \lambda_j(y) \leq 1$ (следствие 5) и $\lambda(x^{(j)}) = 1$, справедливо неравенство

$$\text{dist}(y; B_j) \leq \text{dist}(x^{(j)}; B_j). \quad (23)$$

Здесь B_j — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, задаваемая уравнением $\lambda_j(x) = 0$,

$$\text{dist}(y; B_j) := \min_{z \in B_j} \|y - z\|$$

— расстояние от y до B_j . Обозначим через S' симплекс с вершинами $x^{(1)}, \dots, x^{(j-1)}, y, x^{(j+1)}, \dots, x^{(n+1)}$, иначе говоря, выпуклую оболочку точек $x^{(k)}$ для $k \neq j$ и точки y . Из неравенства (23) получается, что $\text{vol}(S') \leq \text{vol}(S)$. Следствие доказано. $\square$

По терминологии статьи [12], симплекс $S \subset Q_n$, для которого замена любой вершины на любую точку Q_n уменьшает его объём, называется *жестким* (*rigid*). В соответствии со следствием 6 симплекс S , для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$, естественно назвать *почти-жестким* (*quasi-rigid*).

4. Гипотеза о равноотсечении. Случаи $n = 2$ и $n = 3$

Значения ξ_2 и ξ_3 были найдены первым автором. В [6] показано, что $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.3416\dots$. Единственным с точностью до поворотов симплексом $S \subset Q_2$, для которого $\xi(S) = \xi_2$, является треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, \tau)$, $(\tau, 1)$, где $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\dots$ (см. Рис. 1). Число τ связано с «золотым сечением» отрезка $[0, 1]$, так как $\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{1-\tau}{1}$, или $\tau^2 - 3\tau + 1 = 0$. Было сделано замечание о равенстве площадей трех треугольников, отсекаемых от квадрата сторонами S . Это следует из равенства $\tau = (1 - \tau)^2$. Площадь каждого отсекаемого треугольника равна $\frac{3-\sqrt{5}}{4} = 0.1909\dots$

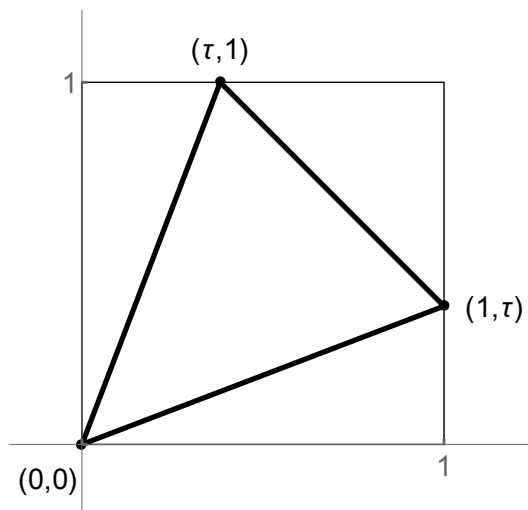


Рис. 1: Экстремальный симплекс для $n = 2$. Число τ равно $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\dots$

Fig. 1: Extremal simplex for $n = 2$. Number τ is equal $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\dots$

Случай $n = 3$ оказывается более сложным. Как показано в [6], существует (с точностью до ортогональных преобразований) ровно два симплекса, для которых $\xi(S) = \xi_3 = 3$. Ими являются симплекс S_1 с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ (см. Рис. 2) и симплекс S_2 с вершинами $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 1)$, $(1, \frac{1}{2}, 1)$ (см. Рис. 3). Симплекс S_1 является правильным. Каждая его грань отсекает от куба Q_3 тетраэдер одного и того же объёма, равного $\frac{1}{6}$. Грани симплекса S_2 не отсекают от куба замкнутых объёмов. Представлялось, что говорить о равноотсечении объёмов в этой ситуации не имеет смысла. В ноябре 2016 г. авторы сделали доклад на семинаре Международной научно-исследовательской лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне. Присутствовавший на этом заседании Юрий Викторович Богомолов обратил внимание на следующий факт. Если вместо граней симплекса S_2 рассматривать плоскости, содержащие эти грани, то равноотсечение имеет место и в этом случае. Действительно, оказывается, что каждая такая плоскость отсекает от куба Q_3 область, объём которой равен $\frac{1}{4}$. Отметим, что равноотсечение имеет место и при $n = 1$. В этом вырожденном случае $Q_1 = S = [0, 1]$ и $\xi_1 = 1$. Границы симплекса отсекают от куба Q_1 равные отрезки длины 0.

Таким образом и возникла гипотеза о равноотсечении, которая была сформулирована выше (см. п. 1). Напомним формулировку этой гипотезы.

Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется равенство $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n-1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , отсекают от куба Q_n равные по объёму части.

Подтверждение гипотезы означало бы открытие новой закономерности для экстремальных симплексов.

Как отмечалось выше, точные значения ξ_n и соответствующие экстремальные симплексы к настоящему времени известны для $n = 2$ и всех таких n , для которых $n + 1$ является числом Адамара. Авторами также доказано, что $\xi_5 = 5$ и $\xi_9 = 9$.

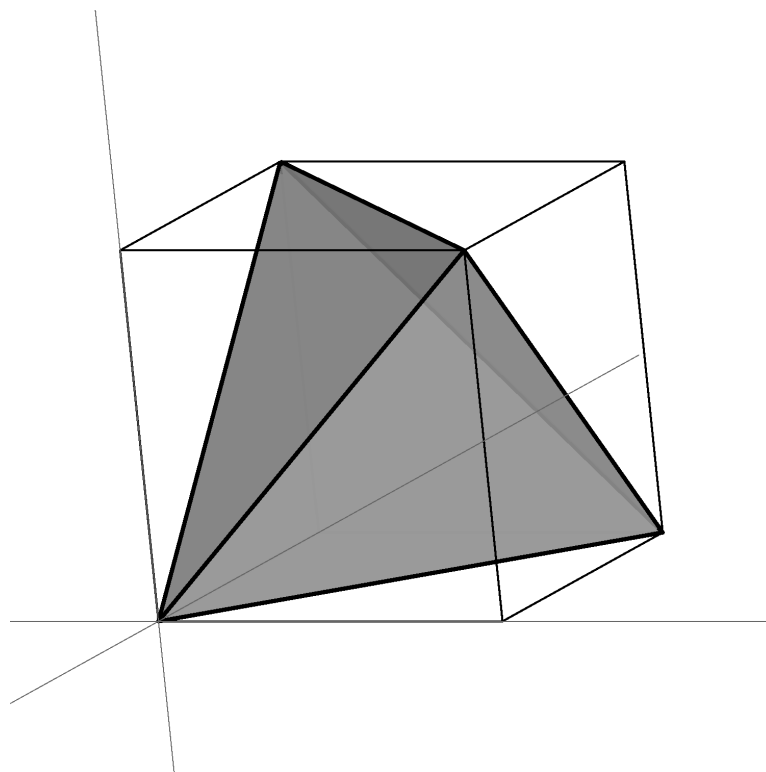


Рис. 2: Симплекс S_1
Fig. 2: Simplex S_1

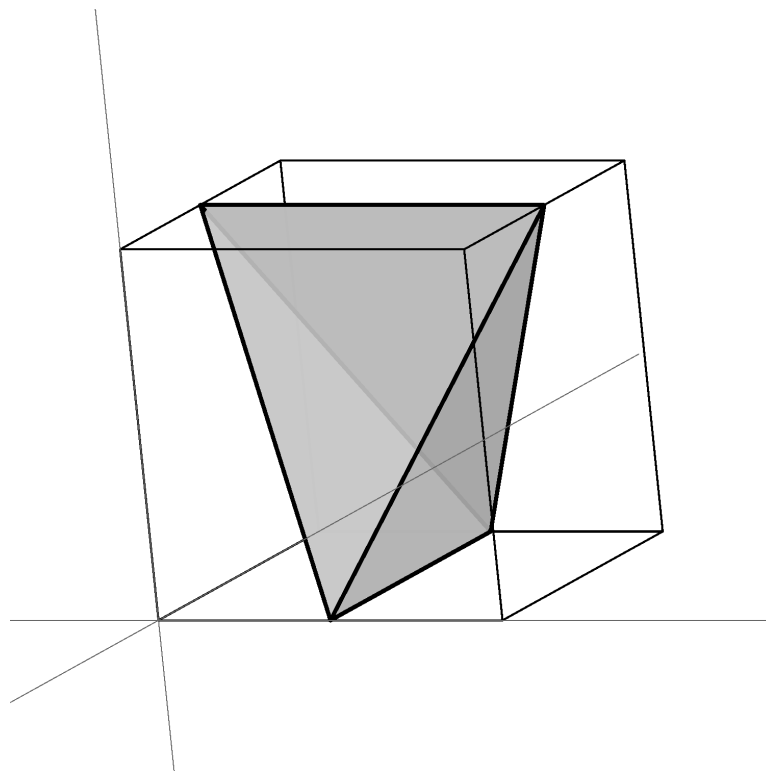


Рис. 3: Симплекс S_2
Fig. 3: Simplex S_2

Таким образом, кроме ξ_2 , все известные значения ξ_n равны n , а экстремальные симплексы S удовлетворяют включениям $S \subset Q_n \subset nS$.

Заметим, что когда $n + 1$ — число Адамара, правильный симплекс, вписанный в Q_n , обладает свойством равноотсечения в силу симметрии.

5. О вычислении объёма части n -мерного куба, отсекаемой гиперплоскостью

Вычисление объёма, отсекаемого $(n - 1)$ -мерной гиперплоскостью от куба Q_n , при $n > 3$ является довольно трудной задачей. Задачи о вычислении объёмов многомерных тел рассматривались во многих работах. Применяемые нами формулы приводятся, например, в сравнительно недавней статье [2], хотя получены они были значительно раньше. Исторические комментарии относительно этих формул можно найти в статье [11]. Приведем утверждения из [11], используемые в настоящей работе.

Теорема 2. Пусть $n > 2$, $Q'_n = [-1, 1]^n$. Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = b\},$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{vol}(Q'_n \cap H) = \frac{|a|}{\pi} \cdot 2^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} \right) \cdot \cos(bt) dt. \quad (24)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\begin{aligned} \text{vol}(Q'_n \cap H) &= \frac{|a|}{2(n-1)!} \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} \cdot \\ &\cdot \sum_{w \in \text{ver}(Q'_n)} ((a, w) + b)^{n-1} \text{sign}((a, w) + b) \prod_{k=1}^n w_k. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $w = (w_1, \dots, w_n)$ — вершины куба Q'_n , т. е. $w_k = \pm 1$. Суммирование производится по вершинам куба.

Формулы (24) и (25) позволяют найти $(n - 1)$ -мерный объём сечения куба Q'_n гиперплоскостью H .

Отметим, что приведённые формулы можно применять и в случае, когда некоторые из a_k обращаются в нуль. Если $a_1, \dots, a_m \neq 0$, а $a_{m+1}, \dots, a_n = 0$, то $Q'_n \cap H = (Q'_m \cap H') \times Q'_{n-m}$, где $H' = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = b\}$. Следовательно,

$$\text{vol}(Q'_n \cap H) = \text{vol}(Q'_m \cap H') \cdot \text{vol}(Q'_{n-m}) = \text{vol}(Q'_m \cap H') \cdot 2^{n-m}.$$

Здесь $\text{vol}(Q'_m \cap H')$ — m -мерный объём множества $Q'_m \cap H'$, $\text{vol}(Q'_{n-m})$ — $(n - m)$ -мерный объём куба Q'_{n-m} . Величина $\text{vol}(Q'_m \cap H')$ может быть найдена с помощью (24) или (25).

Если в уравнении гиперплоскости $|a| = 1$, то b есть расстояние со знаком от гиперплоскости H до начала координат. В этом случае интеграл по b в пределах от b_0 до $+\infty$ от правой части любой из формул (24), (25) равен объёму пересечения Q'_n и полупространства $\{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \geq b_0\}$. На практике требуется вычислить интеграл лишь по некоторому конечному промежутку, длина которого равна расстоянию от H до наиболее удаленной от нее вершины куба, лежащей в нужном полупространстве. Этот метод и был нами использован для вычисления объёмов частей куба, отсекаемых гиперплоскостями граней.

Интеграл в правой части (24) сводится к известным интегралам. Отметим, что этот интеграл равномерно сходится по параметру b и, следовательно, его можно интегрировать по этому параметру. Применима также теорема об изменении порядка интегрирования. Формула (25) не содержит интеграла и выглядит более простой. Наш опыт, однако, показал, что вычисление интеграла по b от правой части (25) может быть более трудной задачей, чем от правой части (24). В обоих случаях получающиеся выражения могут быть довольно громоздкими. Для вычислений мы применяли систему Wolfram Mathematica (см., например, [1], [14]). Нас интересовали части, отсекаемые гиперплоскостями от куба $Q_n = [0, 1]^n$, поэтому в расчётные формулы были внесены соответствующие поправки.

Как отмечалось выше, числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки x относительно соответствующего симплекса. Это означает, что уравнения $(n-1)$ -мерных гиперплоскостей, содержащих грани симплекса, имеют вид $\lambda_j(x) = 0$. Для каждого $j = 1, \dots, n+1$ гиперплоскость с уравнением $\lambda_j(x) = 1$ содержит вершину симплекса $x^{(j)}$. Пусть S — симплекс, принадлежащий Q_n . Всюду далее через $\text{vol}_j(S)$ мы обозначаем объём области $Q_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \leq 0\}$.

6. Случай $n = 4$

Точное значение ξ_4 пока неизвестно. Наилучшая на данный момент оценка этой величины $4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\dots$ получена в работе авторов [8]. Там же высказана гипотеза, что найденная верхняя граница является точным значением, т. е. $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Для доказательства вторым автором были построены два симплекса, на которых данная оценка достигается. Это симплекс T с вершинами $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 0, 0\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 0, 1\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 1, 1\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1, 0\right)$ и симплекс R с вершинами $\left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. В [8] показано, что $\xi(T) = \xi(R) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что указанные симплексы являются экстремальными. Однако строгое доказательство этого факта пока не найдено.

С помощью формул п. 5 были найдены объёмы, отсекаемые от Q_n гиперплоскостями, содержащими грани симплексов:

$$\text{vol}_j(T) = \frac{259\sqrt{13} - 61}{3888} = 0.2244\dots, \quad j = 1, 2, 4, 5; \quad \text{vol}_3(T) = \frac{7 + \sqrt{13}}{36} = 0.2945\dots$$

$$\text{vol}_j(R) = \frac{35 + 17\sqrt{13}}{324} = 0.2972\dots, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \text{vol}_5(R) = \frac{7 + \sqrt{13}}{36} = 0.2945\dots$$

Таким образом, для симплексов T и R равенства отсекаемых объёмов нет. Этот факт, однако, ещё не доказывает, что гипотеза о равноотсечении не верна, так как экстремальность симплексов T и R строго не доказана.

Интерес представляет тот факт, что распределение значений отсекаемых объёмов для симплексов T и R имеет тот же характер, что и для случаев, когда экстремальные симплексы известны точно.

7. Случай $n = 5$

Точное значение ξ_5 найдено в [9] как результат исследований каждого из авторов настоящей статьи. В [4] первый автор доказал, что для любого n справедливо $\xi_n \geq n$. Другое доказательство этого неравенства, связанное с применением осевых диаметров, дано им в [5] (см. также [15] и [6]); этот подход описан в п. 1. Позднее второму автору удалось построить симплекс S , для которого справедливы включения $S \subset Q_5 \subset 5S$ (см. [9], теорема 4). Это даёт $\xi_5 \leq 5$. Таким образом, $\xi_5 = 5$.

Вершины симплекса S имеют вид $(1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{47}{100})$, $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{47}{100})$, $(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{59}{100})$, $(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 0)$, $(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 1)$, $(1, \frac{1}{3}, 1, 0, \frac{47}{100})$. В [9] установлено, что S обладает ещё одним интересным свойством: все вершины Q_5 принадлежат границе симплекса $5S$. Вычисления по формулам п. 5 дают $\text{vol}_j(S) = \frac{1}{3}$, $j = 1, \dots, 5$. Таким образом, для этого симплекса равноотсечение имеет место.

Однако именно в случае $n = 5$ гипотезу о равноотсечении всё же удаётся опровергнуть. Как оказалось, симплекс S не является единственным пятимерным симплексом с коэффициентом поглощения n (с точностью до ортогональных преобразований). Рассмотрим симплекс $F = F(t)$ с вершинами $(1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, t, 1, 0)$, $(0, 0, 1 - t, 1, 0)$, $(0, 1, t, 0, 0)$, $(0, 1, 1 - t, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0, 1)$. Для $t \in [0, 1]$ симплекс F принадлежит Q_5 . В [9] доказано, что при $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ справедливы включения $F \subset Q_5 \subset 5F$, т. е. $\xi(F) = \xi_5 = 5$.

Вычисления показывают, что при $t \in [0, 1]$ для объёмов, отсекаемых гиперплоскостями граней симплекса от куба Q_5 , справедливы равенства

$$\text{vol}_1(F(t)) = \text{vol}_6(F(t)) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ f(x), & t < \frac{1}{3}, \\ g(x), & t > \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\text{vol}_j(F(t)) = \frac{13}{48} = 0.2708\dots, \quad j = 2, 3, 4, 5.$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, выражения для которых мы не приводим из-за их громоздкости и несущественности для дальнейшего. График зависимости объёмов $\text{vol}_1(F(t))$ и $\text{vol}_6(F(t))$ от параметра t приведён на Рис. 4. Отметим, что для значений t , при которых $F(t) \subset Q_5 \subset 5F(t)$, объёмы $\text{vol}_1(F(t))$ и $\text{vol}_6(F(t))$ остаются постоянными и равны $\frac{1}{3}$.

Семейства экстремальных симплексов, аналогичные семейству симплексов $F(t)$, были найдены вторым автором также для $n = 7$ и $n = 9$. Статья с их описанием готовится к публикации. Наши вычисления показывают, что для этих семейств отсекаемые объёмы подчиняются тем же закономерностям: при значениях параметра, соответствующих включениям $S(t) \subset Q_n \subset nS(t)$, имеются в точности два значения,

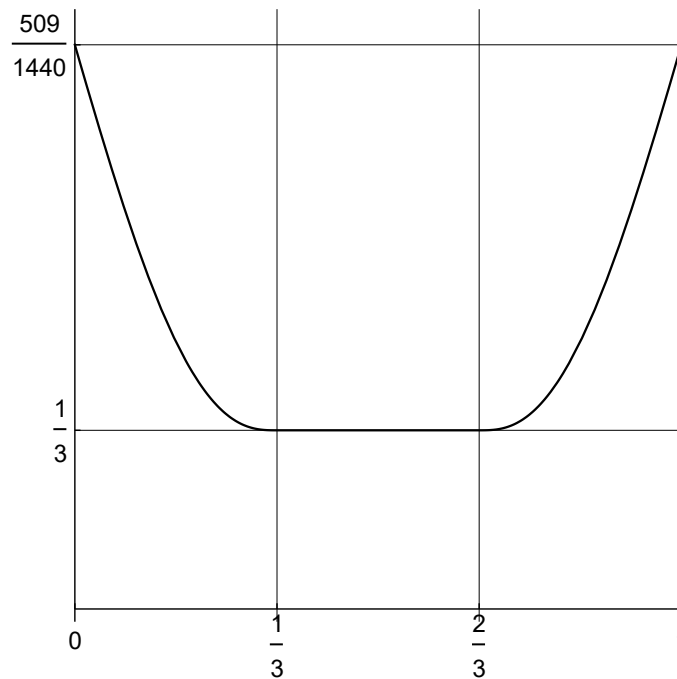


Рис. 4: График функции $\text{vol}_1(F(t))$
 Fig. 4: Graph of the function $\text{vol}_1(F(t))$

которые принимает отсекаемый объём. Объёмы $\text{vol}_1(S(t))$ и $\text{vol}_{n+1}(S(t))$ отличаются от остальных и зависят от t . Графики этих зависимостей похожи на график, приведённый на Рис. 4.

На основании изложенного сделаем следующие выводы. Гипотеза о равноотсечении в приведённой нами формулировке не верна. Однако отсекаемые объёмы подчиняются некоторым закономерностям. Хотя эти объёмы могут быть и неодинаковыми, численно они довольно близки. Кроме того, для каждого из найденных экстремальных симплексов обнаружено не более двух значений, которые могут принимать отсекаемые объёмы.

Представляется важным и интересным дальнейшее изучение связи между экстремальностью симплексов и значениями отсекаемых объёмов.

8. Гипотеза о равноотсечении относительно θ_n

Обозначим через $C(Q_n)$ пространство непрерывных функций $f : C(Q_n) \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 (линейных функций n переменных).

Пусть $x^{(j)}$ — вершины невырожденного симплекса $S \subset Q_n$. Введём в рассмотрение интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по набору узлов $x^{(j)}$. Этот оператор определяется равенствами

$$Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)}), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть вычислена по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Через θ_n обозначим минимальную величину $\|P\|$.

Как доказано в [4], для проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1. \quad (26)$$

Из (26) следует, что

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1.$$

Имеет место асимптотика $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Эта проблематика и полученные результаты подробно излагаются в монографии [6].

Точные значения θ_n к настоящему моменту аналитическими методами найдены лишь для $n = 1, 2, 3, 7$. Представляет значительный интерес любое продвижение в этом направлении. Поэтому имеет смысл обратить внимание на следующую гипотезу о равноотсечении относительно θ_n .

Пусть $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, для которого $\|P\| = \theta_n$, S — симплекс с вершинами в узлах интерполяции. Тогда $(n-1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , отсекают от куба Q_n равные по объёму части.

В [6] доказано, что минимальные по норме интерполяционные проекторы при $n = 2$ и $n = 3$ имеют узлы в вершинах симплексов, для которых $\xi(S) = \xi_n$. Значит, для $n = 2$ и $n = 3$ сформулированное утверждение верно (см. п. 4). Следующее число θ_4 известно лишь предположительно. На основе компьютерных вычислений авторы в статье [8] высказали предположение, что $\theta_4 = \frac{7}{3}$. Это значение нормы достигается для проектора по узлам $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$. Для симплекса S с вершинами в этих точках имеем

$$\text{vol}_j(S) = \frac{13}{48} = 0.2708 \dots, \quad j = 1, 2, 3, 5; \quad \text{vol}_4(S) = \frac{1}{24} = 0.0416 \dots$$

Следовательно, этот симплекс не является равноотсекающим. Однако, строго говоря, вопрос о справедливости гипотезы о равноотсечении относительно θ_n остаётся открытым, поскольку аналитического доказательства равенства $\theta_4 = \frac{7}{3}$ пока получить не удалось.

Авторы выражают благодарность Юрию Викторовичу Богомолу и Владимиру Степановичу Климову за ценное обсуждение и полезные советы.

Список литературы / References

- [1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]
- [2] Малышев Ф. М., “Семейство равновеликих n -мерных многогранников, удовлетворяющих принципу Кавальери”, *Матем. заметки*, **97:2** (2015), 231–248; English transl.: Malyshev F. M., “Family of equal-sized n -dimensional polyhedra satisfying Cavalieri’s principle”, *Math. Notes*, **97:1** (2015), 213–229.
- [3] Невский М. В., “Неравенства для норм интерполяционных проекторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **15:3** (2008), 28–37; [Nevskij M. V., “Inequalities for the norms of interpolating projections”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15:3** (2008), 28–37, (in Russian).]
- [4] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16:1** (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16:1** (2009), 24–43, (in Russian).]
- [5] Невский М. В., “Об одном свойстве n -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87:4** (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n -dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87:4** (2010), 543–555.
- [6] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpoliyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, (in Russian).]
- [7] Невский М. В., “Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18:2** (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., “Computation of the longest segment of a given direction in a simplex”, *Journal of Math. Sciences*, **203:6** (2014), 851–854.
- [8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23:5** (2016), 602–618; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical characteristics of a simplex and their estimates”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23:5** (2016), 602–618, (in Russian).]
- [9] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24:1** (2017), 94–110; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:1** (2017), 94–110, (in Russian).]
- [10] Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusetts) – Toronto – London, 1967, (in English).]
- [11] Frank R., Riede H., “Hyperplane sections of the n -dimensional cube”, *Amer. Math. Monthly*, **119:10** (2012), 868–872.
- [12] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.
- [13] Lassak M., “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.
- [14] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O’Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.
- [15] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46:2** (2011), 301–312.
- [16] Scott P. R., “Lattices and convex sets in space”, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.

[17] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On n -Dimensional Simplices Satisfying Inclusions $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 578–595.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-578-595

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0, 1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS we denote the homothetic image of S with the center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ . By $d_i(S)$ we mean the i -th axial diameter of S , i.e. the maximum length of a line segment in S parallel to the i th coordinate axis. Let $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. By $\alpha(S)$ we denote the minimal $\sigma > 0$ such that Q_n is contained in a translate of simplex σS . Consider $(n+1) \times (n+1)$ -matrix $\mathbf{A}$ with the rows containing coordinates of vertices of S ; the last column of $\mathbf{A}$ consists of 1's. Put $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Denote by λ_j a linear function on $\mathbb{R}^n$ with coefficients from the j -th column of $\mathbf{A}^{-1}$, i.e. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Earlier, the first author proved the equalities $\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$, $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}$. In the present paper, we consider the case $S \subset Q_n$. Then all the $d_i(S) \leq 1$, therefore, $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$. If for some simplex $S' \subset Q_n$ holds $\xi(S') = n$, then $\xi_n = n$, $\xi(S') = \alpha(S')$, and $d_i(S') = 1$. However, such simplices S' do not exist for all the dimensions n . The first value of n with such a property is equal to 2. For each 2-dimensional simplex, $\xi(S) \geq \xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots > 2$. We have an estimate $n \leq \xi_n < n+1$. The equality $\xi_n = n$ takes place if there exists an Hadamard matrix of order $n+1$. Further study showed that $\xi_n = n$ also for some other n . In particular, simplices with the condition $S \subset Q_n \subset nS$ were built for any odd n in the interval $1 \leq n \leq 11$. In the first part of the paper, we present some new results concerning simplices with such a condition. If $S \subset Q_n \subset nS$, the center of gravity of S coincide, with the center of Q_n . We prove that $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2$ ($1 \leq i \leq n$), $\sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1}$ ($1 \leq j \leq n+1$). Also we give some corollaries. In the second part of the paper, we consider the following conjecture. *Let for simplex $S \subset Q_n$ an equality $\xi(S) = \xi_n$ holds. Then $(n-1)$ -dimensional hyperplanes containing the faces of S cut from the cube Q_n the equal-sized parts.* Though it is true for $n=2$ and $n=3$, in the general case this conjecture is not valid.

Keywords: n -dimensional simplex, n -dimensional cube, homothety, axial diameter, interpolation, projection, numerical methods

On the authors:

Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, doctor of science,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Y. Ukhalov, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Acknowledgments:

The work was supported by the initiative research of Yaroslavl State University VIP-008.

©Нестеров П. Н., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-596-614

УДК 517.968.72

Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Нестеров П. Н.

получена 26 марта 2017

Аннотация. В работе исследуется задача построения асимптотических представлений для слабых решений некоторого класса линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве при стремлении независимой переменной к бесконечности. Исследуется класс уравнений, являющихся возмущением линейного автономного уравнения, вообще говоря, с неограниченным оператором. В качестве возмущения выступает семейство ограниченных операторов, которое в определенном смысле убывает колебательным образом на бесконечности. Относительно невозмущенного уравнения предполагаются выполненными стандартные требования теории центральных многообразий. Суть предложенного метода асимптотического интегрирования состоит в доказательстве существования у исходного уравнения многообразия типа центрального (критического многообразия). Это многообразие является положительно инвариантным для исходного уравнения и притягивает все траектории слабых решений. Динамика исходного уравнения на критическом многообразии описывается конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Асимптотика фундаментальной матрицы этой системы может быть построена с помощью разработанного автором метода асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами. В качестве примера использования предложенной техники в работе строятся асимптотические представления для решений возмущенного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: асимптотика, дифференциальное уравнение, банахово пространство, колебательно убывающие коэффициенты, метод центральных многообразий, возмущенное уравнение теплопроводности

Для цитирования: Нестеров П. Н., "Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:5** (2017), 596–614.

Об авторе:

Нестеров Павел Николаевич, orcid.org/0000-0002-9102-9436, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-4625.2016.1.

Постановка задачи

В работе изучается уравнение

$$\dot{u} = [A + G(t)]u, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ ($t \geq 0$). Далее, $G(t)$ ($t \geq t_0$) — семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \quad (2)$$

В представлении (2) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geq t_0$, и $\|B(t)u\|$ стремится к нулю колебательным образом при $t \rightarrow \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Более точно структура этого семейства операторов будет определена позднее. Далее, семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geq t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\|R(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma(t)\|u\|_{\mathcal{B}} \quad (3)$$

для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (1), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии [6, стр. 230].

Всюду в этой работе решение уравнения (1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ понимается в слабом смысле (см. [9]), точнее, как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)G(s)u(s)ds. \quad (4)$$

Из результатов работ [9, 10] (см. также [8]) следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное непрерывное на отрезке $[t_0, T]$ ($T \geq t_0$) слабое решение уравнения (1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, и это решение задается формулой (4). Нас будет интересовать вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (4) при $t \rightarrow \infty$, если на оператор A наложены следующие дополнительные условия. Предположим, что

(i)

$$\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \quad (5)$$

где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A , отвечающих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{-\alpha t}\|y\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $K, \alpha > 0$.

Сформулированные условия (i) и (ii) — это стандартные требования теории центральных многообразий (см., например, [3, 11, 20]). Мы воспользуемся основными идеями этой теории, а также вариантом метода усреднения, предложенным в работе [4], для построения асимптотики слабых решений уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$.

1. Критическое многообразие и его свойства

Мы начнем этот раздел с уточнения вида операторной функции $B(t)$ в (2). Следуя [4, 6], будем считать, что

$$B(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) B_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \dots i_k}(t). \quad (7)$$

Здесь $B_{i_1 \dots i_l}(t)$ — операторные функции, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \dots i_l}(t) = \sum_{j=1}^M e^{i\omega_j t} b_j^{(i_1 \dots i_l)}, \quad (8)$$

где $b_j^{(i_1 \dots i_l)}$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Наконец, $v_1(t), \dots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

- 1⁰. $v_1(t) \rightarrow 0, v_2(t) \rightarrow 0, \dots, v_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- 2⁰. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \dots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;
- 3⁰. Произведение $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любого набора $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$.

Определение 1. *Линейное N -мерное подпространство $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{B}$ будем называть критическим многообразием для уравнения (1) при $t \geq t_* \geq t_0$, если выполнены следующие условия:*

1. *Существует вектор-строка $H(t) = (h_1(t), \dots, h_N(t)) \in \mathcal{Y}^N$, составленная из непрерывных при $t \geq t_*$ функций со значениями из подпространства $\mathcal{Y}$, такая что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где*

$$\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} = |(\|h_1(t)\|_{\mathcal{B}}, \dots, \|h_N(t)\|_{\mathcal{B}})| \quad (9)$$

и $|\cdot|$ — некоторая норма в пространстве вектор-строк длины N ;

2. *Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой*

$$\mathcal{W}(t) = \left\{ u \in \mathcal{B} \mid u = \Phi w + H(t)w, w \in \mathbb{C}^N \right\}. \quad (10)$$

Здесь вектор-строка $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{B}^N$ составлена из обобщенных собственных векторов оператора A , отвечающих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ из условия (i), которые образуют базис подпространства $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство комплекснозначных вектор-столбцов длины N , а произведение

вектор-строки $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathcal{B}^N$ и вектор-столбца $w = (w_1, \dots, w_N)^T$ понимается в стандартном смысле: $Uw = u_1w_1 + \dots + u_Nw_N$;

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно решений уравнения (1), т.е. если $u(T) \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $u(t) \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.

Перед тем, как вывести систему уравнений, описывающую динамику решений уравнения (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, напомним следующие факты из теории сопряженных операторов в банаховых пространствах. Пусть $\mathcal{B}^*$ — сопряженное к $\mathcal{B}$ пространство (пространство линейных ограниченных функционалов, заданных на $\mathcal{B}$) и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$, так что

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \psi(\varphi) \in \mathbb{C} \quad (11)$$

для любых $\varphi \in \mathcal{B}$ и $\psi \in \mathcal{B}^*$. При этом если $U = (u_1, \dots, u_l) \in \mathcal{B}^l$ и $V = (v_1, \dots, v_m)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$, то $\langle U, V \rangle$ есть $(m \times l)$ матрица, такая что

$$\langle U, V \rangle = \left\{ v_i(u_j) \right\}_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq l}}.$$

Пусть A' — сопряженный к A линейный замкнутый оператор, действующий из пространства $\mathcal{B}^*$ в $\mathcal{B}^*$. Как известно (см., например, [1, 14]), в силу предположения (i) относительно оператора A оператор A' также имеет собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, причем размерности соответствующих друг другу обобщенных собственных подпространств этих операторов, отвечающих одинаковым собственным числам, совпадают. Обозначим символом $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$ вектор-столбец длины N , состоящий из линейно независимых обобщенных собственных векторов оператора A' , отвечающих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Считаем, что вектор-столбец Ψ выбран так что

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = I, \quad (12)$$

где $I = (N \times N)$ единичная матрица (см., [7, 13]). Заметим, в частности, что одним из возможных выборов дополнительного подпространства к $\mathcal{X}$ в условии (i) является выбор в качестве этого подпространства множества $\mathcal{Y} = \{u \in \mathcal{B} \mid \langle u, \Psi \rangle = 0\}$.

Построим далее систему, описывающую динамику решений уравнения (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, в предположении существования этого многообразия при достаточно больших t . Пусть P — оператор проектирования на подпространство $\mathcal{X}$ вдоль $\mathcal{Y}$. Заметим, что P есть линейный ограниченный оператор, определенный во всем пространстве $\mathcal{B}$ (см., например, [14]). В силу условия (i) заключаем, что если $u \in \mathcal{B}$, то

$$u(t) = u_{\mathcal{X}}(t) + u_{\mathcal{Y}}(t), \quad t \geq t_0, \quad (13)$$

где

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) \in \mathcal{X}, \quad u_{\mathcal{Y}}(t) = (1 - P)u(t) \in \mathcal{Y} \quad (14)$$

и символом 1 обозначен тождественный оператор. Заметим, что поскольку подпространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ инвариантны относительно оператора A и полугруппы $T(t)$, то для всех $t \geq 0$ и $u \in \mathcal{B}$ имеют место равенства

$$PT(t)u = T(t)Pu, \quad (1 - P)T(t)u = T(t)(1 - P)u. \quad (15)$$

Подставляя (13) в интегральное уравнение (4) и учитывая (14), (15), получаем

$$u_{\mathcal{X}}(t) = T(t - t_0)u_{\mathcal{X}}(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - s)PG(s)u(s)ds, \quad (16)$$

$$u_{\mathcal{Y}}(t) = T(t - t_0)u_{\mathcal{Y}}(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - s)(1 - P)G(s)u(s)ds. \quad (17)$$

Поскольку

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) = \Phi w(t) \quad (18)$$

для некоторого $w(t) \in \mathbb{C}^N$, то

$$\Phi w(t) = T(t - t_0)\Phi w(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - s)PG(s)u(s)ds. \quad (19)$$

Кроме того, из (i) следует, что $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, а значит, существует такая $(N \times N)$ -матрица D , спектром которой является множество $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, что

$$A\Phi = \Phi D. \quad (20)$$

Заметим, что если элемент $u \in \mathcal{B}$ принадлежит области определения оператора A , то на основании [18, р. 4, Theorem 2.4] имеем

$$\frac{dT}{dt}u = T Au = ATu. \quad (21)$$

Очевидно, что все элементы подпространства $\mathcal{X}$ заведомо принадлежат области определения оператора A . Дифференцируя тогда выражение (19) и учитывая (21), получаем

$$\begin{aligned} \Phi \dot{w}(t) &= AT(t - t_0)\Phi w(t_0) + PG(t)u(t) + A \int_{t_0}^t T(t - s)PG(s)u(s)ds = \\ &= A\Phi w(t) + PG(t)u(t). \end{aligned}$$

Откуда в силу (20) выводим, что

$$\Phi \dot{w} = \Phi Dw(t) + PG(t)u(t) \quad (22)$$

или с учетом (12)

$$\dot{w} = Dw(t) + \langle PG(t)u(t), \Psi \rangle. \quad (23)$$

Пусть $u(t_*) \in \mathcal{W}(t_*)$, тогда в силу инвариантности критического многообразия, используя (10), заключаем, что при $t \geq t_*$ для решения $u(t)$ имеет место представление

$$u(t) = \Phi w(t) + H(t)w(t). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), имеем

$$\dot{w} = [D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi \rangle]w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{C}^N. \quad (25)$$

Систему (25) будем называть проекцией уравнения (1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или просто системой на критическом многообразии.

Теорема 1. При достаточно больших t у системы (1) существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой (10).

Доказательство. В силу представления (24) имеем

$$(1 - P)u(t) = u_Y(t) = H(t)w(t).$$

Используя это равенство наряду с формулой (24) в (17) и полагая $t_0 = t_*$, приходим к уравнению

$$H(t)w(t) = T(t - t_*)H(t_*)w(t_*) + \int_{t_*}^t T(t - s)(1 - P)G(s)[\Phi + H(s)]w(s)ds. \quad (26)$$

Пусть $W_H(t, s)$ ($t, s \geq t_*$) — матрица Коши системы (25) ($W_H(s, s) = I$). Тогда, учитывая, что $w(t) = W_H(t, t_*)w(t_*)$ и используя свойства матрицы $W_H(t, s)$, запишем уравнение (26) в следующем операторном виде:

$$\begin{aligned} H(t) &= \Gamma H(t), \\ \Gamma H(t) &= T(t - t_*)H(t_*)W_H(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t - s)(1 - P)G(s)[\Phi + H(s)]W_H(s, t)ds. \end{aligned} \quad (27)$$

$$(28)$$

Областью определения оператора Γ будем считать банахово пространство $\mathcal{C}$ непрерывных по $t \geq t_*$ вектор-строк $H(t)$ длины N со значениями из пространства $\mathcal{Y}^N$ и фиксированным начальным условием $H(t_*)$ таких, что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|H\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \geq t_*} \|H(t)\|_{\mathcal{B}^N}. \quad (29)$$

В силу (6) для любого $U \in \mathcal{B}^N$ имеет место оценка

$$\|T(t)(1 - P)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq Ke^{-\alpha t}\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Здесь и всюду далее различные константы, точные значения которых нам не важны, мы будем обозначать одинаковыми символами. Кроме того, из (2), (3), (7) и (8) следует, что

$$\|G(t)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq p(t)\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \quad p(t) = f(t) + \gamma(t). \quad (31)$$

Здесь $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\gamma(t)$ — некоторая функция из класса $L_1[t_0, \infty)$.

Дальнейшие шаги в доказательстве опираются на использование принципа сжимающих отображений. Аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы 1 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.3]), несложно показать, что оператор Γ переводит некоторый замкнутый шар $\|H\|_{\mathcal{C}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{C}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а начальное условие $\|H(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ выбрано достаточно малым. $\square$

Для приближенного нахождения вектор-строки $H(t)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ в силу формулы (10), будем действовать следующим образом. Подставим представление (24) в уравнение (1) и учтем (20), (22) и (25). Имеем,

$$\begin{aligned} \Phi Dw(t) + PG(t)(\Phi + H(t))w(t) + \dot{H}w(t) + H[D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi \rangle]w(t) = \\ = A\Phi w(t) + AH(t)w(t) + G(t)[\Phi + H(t)]w(t). \end{aligned}$$

Откуда с учетом (20) выводим

$$\dot{H} = AH - HD + (1 - P)G(t)(\Phi + H(t)) - H\langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi \rangle. \quad (32)$$

Попытаемся удовлетворить уравнению (32) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t)$ таких, что $\|\hat{R}(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Именно, положим

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)H_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1 i_2}(t) + \dots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t)H_{i_1 \dots i_k}(t). \quad (33) \end{aligned}$$

Здесь элементы подлежащих определению вектор-строк $H_{i_1 \dots i_l}(t)$ длины N принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и являются тригонометрическими многочленами в том смысле, что

$$H_{i_1 \dots i_l}(t) = \sum_j \beta_j^{(i_1 \dots i_l)} e^{i\omega_j t}, \quad (34)$$

где $\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, значение целочисленной величины $k \geq 0$ определяется свойством $\mathcal{Z}^0$ функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$.

Подставим выражение (33) в уравнение (32) вместо $H(t)$ и соберем слагаемые при одинаковых множителях $v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_l}(t)$ ($l \leq k$). Получаем следующие однотипные уравнения для определения вектор-строк $H_{i_1 \dots i_l}(t)$:

$$\dot{H}_{i_1 \dots i_l} = AH_{i_1 \dots i_l} - H_{i_1 \dots i_l}D + F_{i_1 \dots i_l}(t). \quad (35)$$

Здесь мы учли формулы (2), (7) и (8), из которых, в частности, следует, что для решения уравнения (35) необходимо определить сначала все вектор-строки $H_{j_1 \dots j_s}(t)$ с $s < l$. Далее, $F_{i_1 \dots i_l}(t)$ — некоторая известная вектор-строка, которая в силу (8) и (34) имеет вид, аналогичный (34):

$$F_{i_1 \dots i_l}(t) = \sum_j f_j^{(i_1 \dots i_l)} e^{i\omega_j t}, \quad (36)$$

где $f_j^{(i_1 \dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, вектор-строки $f_j^{(i_1 \dots i_l)}$ принадлежат пространству $\mathcal{Y}^N$. Действительно, это следует из того, что вектор-строки $H_{j_1 \dots j_s}(t)$ принимают значения из пространства $\mathcal{Y}^N$ при всех $s < l$ и, кроме того, в уравнении (32) вектор-строка $(1 - P)G(t)(\Phi + H(t))$ принимает значения из пространства $\mathcal{Y}^N$.

Решение уравнения (35) будем искать в виде (34). Подставляя последнее в (35), получаем с учетом (36) следующее операторное уравнение для нахождения элемента $\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$:

$$A\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} - \beta_j^{(i_1 \dots i_l)}D - i\omega_j \beta_j^{(i_1 \dots i_l)} = -f_j^{(i_1 \dots i_l)}. \quad (37)$$

Лемма 1. Уравнение (37) имеет единственное решение в пространстве $\mathcal{Y}^N$ при любой правой части $f_j^{(i_1 \dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$.

Доказательство. Определим оператор $L: \mathcal{Y}^N \rightarrow \mathcal{Y}^N$ по формуле

$$L\beta = A\beta - \beta D, \quad (38)$$

где $\beta \in \mathcal{Y}^N$. В силу наложенных на оператор A условий оператор L является замкнутым линейным оператором с плотной в $\mathcal{Y}^N$ областью определения. Кроме того, несложно проверить, что оператор L является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $U(t): \mathcal{Y}^N \rightarrow \mathcal{Y}^N$ ($t \geq 0$), которая определяется по правилу

$$U(t)\beta = T(t)\beta e^{-tD}. \quad (39)$$

Поскольку все собственные числа матрицы D расположены на мнимой оси, то в силу (6) для всех $\beta \in \mathcal{Y}^N$ имеет место неравенство

$$\|U(t)\beta\|_{\mathcal{B}^N} \leq K e^{-\nu t} \|\beta\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0, \quad (40)$$

где $K, \nu > 0$. Из (40) выводим, что

$$|\sigma(U(t))| \leq K e^{-\nu t}, \quad t \geq 0, \quad (41)$$

где $\sigma(U(t))$ — спектр оператора $U(t)$. Неравенство (41) понимается в том смысле, что оно выполнено для любого $\mu \in \sigma(U(t))$. Согласно [18, р. 45, Theorem 2.3], имеем

$$e^{t\sigma(L)} \subset \sigma(U(t)), \quad t \geq 0. \quad (42)$$

В силу (41), (42) заключаем, что число вида $i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, не может принадлежать множеству $\sigma(L)$, т.е. спектру оператора L . Таким образом, вся мнимая ось принадлежит резольвентному множеству оператора L . Следовательно (см., например, [1]), для любого $\omega \in \mathbb{R}$ существует определенный во всем пространстве $\mathcal{Y}^N$ линейный непрерывный оператор $(L - i\omega I)^{-1}$. Таким образом, уравнение (37) имеет единственное решение

$$\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} = -(L - i\omega_j I)^{-1} f_j^{(i_1 \dots i_l)}.$$

□

Следствие 1. Единственное решение уравнения (37) определяется формулой

$$\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} = \int_0^\infty e^{-i\omega_j s} U(s) f_j^{(i_1 \dots i_l)} ds, \quad (43)$$

где полугруппа операторов $U(t)$ имеет вид (39).

Доказательство. Сходимость интеграла в (43) следует из неравенства (40). Аналогично тому, как это делается в [18, р. 8, Theorem 3.1], можно показать, что интеграл (43) принадлежит области определения оператора L , который описывается формулой (38). И, кроме того, справедливо равенство

$$L\beta_j^{(i_1 \dots i_l)} = i\omega_j \beta_j^{(i_1 \dots i_l)} - f_j^{(i_1 \dots i_l)},$$

которое эквивалентно (37). □

Построенная нами вектор-строка $\hat{H}(t)$, определяемая формулой (33), удовлетворяет, таким образом, следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = A\hat{H} - \hat{H}D + (1 - P)G(t)(\Phi + \hat{H}(t)) - \hat{H}\langle PG(t)(\Phi + \hat{H}(t)), \Psi \rangle + \hat{R}(t), \quad (44)$$

где $\hat{R}(t)$ — некоторая вектор-строка, принимающая значения из пространства $\mathcal{Y}^N$, такая что $\|\hat{R}(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения (1), существующее согласно теореме 1 при достаточно больших t . Тогда найдется такое достаточно большое t_* , что при $t \geq t_*$ вектор-строка $H(t)$ из (10) допускает представление в виде

$$H(t) = \hat{H}(t) + Z(t), \quad t \geq t_* \geq t_0. \quad (45)$$

Здесь вектор-строка $\hat{H}(t)$ описывается формулой (33) и удовлетворяет уравнению (44), а вектор-строка $Z(t)$, принимающая значения из $\mathcal{Y}^N$, такова, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$.

Доказательство. Вектор-строку $H(t)$, являющуюся решением операторного уравнения (27), (28), запишем в виде суммы (45). Тогда уравнение (27) можно записать относительно неизвестной вектор-строки $Z(t)$:

$$Z(t) = \Pi Z(t), \quad (46)$$

$$\Pi Z(t) = \Gamma(\hat{H}(t) + Z(t)) - \hat{H}(t, \theta), \quad (47)$$

где оператор Γ определен формулой (28). Будем рассматривать оператор Π действующим в пространстве $\mathcal{CL}$ непрерывных при $t \geq t_*$ вектор-строк $Z(t)$, принимающих значения в пространстве $\mathcal{Y}^N$, с фиксированным начальным условием $Z(t_*)$ таких, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$. Здесь функция $p(t)$ определяется в силу (31). Пространство $\mathcal{CL}$ будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{\mathcal{CL}} = \|Z\|_{\mathcal{C}} + \|Z\|_{\mathcal{L}}, \quad \|Z\|_{\mathcal{L}} = \int_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} dt, \quad (48)$$

где норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ введена согласно (29).

Запишем далее оператор Π в несколько ином виде. Пусть вектор-функция $w(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (25), в которой $H(t)$ есть сумма (45). В силу вида $\hat{H}(t)$ (см. формулы (33), (34)) с учетом следствия 1 заключаем, что элементы вектор-строки $\hat{H}(s)$ принадлежат области определения оператора A . Тогда, имея в виду абсолютную непрерывность функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$ и [18, р. 4, Theorem 2.4], приходим к выводу, что

$$\hat{H}(t)w(t) = T(t - t_*)\hat{H}(t_*)w(t_*) + \int_{t_*}^t \frac{d}{ds}(T(t - s)\hat{H}(s)w(s))ds, \quad (49)$$

где

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)) = -T(t-s)A\hat{H}(s)w(s) + T(t-s)\frac{d\hat{H}}{ds}w(s) + T(t-s)\hat{H}(s)\dot{w}(s).$$

Далее, принимая во внимание (25), (44) и (45), имеем

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)) = T(t-s)\left((1-P)G(s)(\Phi+\hat{H}(s))+\hat{H}\langle PG(s)Z(s), \Psi\rangle+\hat{R}(s)\right)w(s). \quad (50)$$

Вектор-функцию $w(t)$ запишем в виде $w(t) = W_{\hat{H}+Z}(t, t_*)w(t_*)$, где $W_{\hat{H}+Z}(t, s)$ ($t, s \geq t_*$) — матрица Коши системы (25) ($W_{\hat{H}+Z}(t, t) = I$), в которой $H(t)$ есть сумма (45). Подставляя (50) в (49) и возвращаясь к (47), получаем с учетом (28) следующее представление для оператора Π :

$$\begin{aligned} \Pi Z(t) = T(t-t_*)Z(t_*)U_{\hat{H}+Z}(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t-s)\left((1-P)G(s)Z(s)- \right. \\ \left. -\hat{H}(s)\langle PG(s)Z(s), \Psi\rangle - \hat{R}(s)\right)W_{\hat{H}+Z}(s, t)ds. \quad (51) \end{aligned}$$

Точно так же, как это делается в доказательстве теоремы 2 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.4]), можно установить, что оператор Π переводит некоторый замкнутый шар $\|Z\|_{\mathcal{CL}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{CL}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а величина $\|Z(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ достаточно мала. При этом оказывается, что не только функция $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$, но и функция $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Отметим, что существенную роль при доказательстве играют оценки (6) и (30). $\square$

Следствие 2. Пусть имеет место оценка

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n} |v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_{k+1}}(t)| + \sum_{i=1}^n |\dot{v}_i(t)| + \gamma(t) \leq \varphi(t), \quad t \geq t_0,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая положительная при $t \geq t_0$ функция, а функция $\gamma(t)$ определена в силу (3). Предположим, что существует такое $\beta \in (0, \alpha)$, где $\alpha > 0$ — величина из неравенств (6) и (30), что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \leq \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Тогда для вектор-строки $Z(t)$ из представления (45) при $t \geq t_* \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \leq K\varphi(t)$$

с некоторой постоянной K .

Доказательство этого утверждения абсолютно идентично установлению аналогичного результата из [5]. Критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ обладает свойством глобального притяжения в следующем смысле.

Теорема 3. Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения (1), т.е. решение интегрального уравнения (4), определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$u(t) = \Phi w_H(t) + H(t)w_H(t) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Здесь величина $\alpha > 0$ выбрана в силу неравенства (6), $\varepsilon \in (0, \alpha)$ — произвольно и $w_H(t)$ ($t \geq t_*$) — некоторое решение системы на критическом многообразии (25).

Доказательство. В силу (13), (18) решение $u(t)$ может быть записано в виде

$$u(t) = \Phi w(t) + u_Y(t), \quad t \geq t_*, \quad (53)$$

где функция $u_Y(t)$, принимающая значения из подпространства $\mathcal{Y}$, удовлетворяет интегральному уравнению (17) с $t_0 = t_*$, а функция $w(t)$ является решением системы (23) с начальным условием $w(t_*) = \langle Pu(t_*), \Psi \rangle$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения (1), существующее в силу теоремы 1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (10). Пусть $w_H(t)$ ($t \geq t_*$) — решение системы на критическом многообразии (25) с начальным условием $w_H(t_*) = w(t_*)$, тогда функция

$$\tilde{u}(t) = \Phi w_H(t) + H(t)w_H(t) \quad (54)$$

представляет собой некоторое слабое решение уравнения (1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$. Покажем, что $u(t) = \tilde{u}(t) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая

$$z(t) = u_Y(t) - H(t)w_H(t), \quad r(t) = w(t) - w_H(t)$$

и вычитая (54) из (53), получаем

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \Phi r(t) + z(t), \quad t \geq t_*. \quad (55)$$

Далее, замечая, что функция $H(t)w_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (26) с $w(t) = w_H(t)$ и вычитая (26) из (17) (с $t_0 = t_*$), с учетом (53) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t)$:

$$z(t) = T(t - t_*)z(t_*) + \int_{t_*}^t T(t - s)(1 - P)G(s)[\Phi r(s) + z(s)]ds, \quad t \geq t_*. \quad (56)$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $u(t)$ в силу линейности уравнения (4) перейти к рассмотрению решения $\delta u(t)/\|u(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (25) (где $w(t) = w_H(t)$) из (23) и учитывая (53), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{r} = Dr(t) + \langle PG(t)(\Phi r(t) + z(t)), \Psi \rangle, \quad r(t_*) = 0. \quad (57)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что матрица D имеет жорданову нормальную форму. Следовательно, ее можно представить в виде

$$D = D_1 + D_2,$$

где $D_1 = \text{diag } D$ и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в уравнении (57) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde{r}$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (57) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = \int_{t_*}^t e^{D_1(t-s)} [D_2 r(s) + \langle PG(s)(\Phi r(s) + z(s)), \Psi \rangle] ds. \quad (58)$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{D}$, элементами которого являются пары $(z(t), r(t))$. Функции $z(t)$ и $r(t)$ непрерывны при $t \geq t_*$. Считаем, что начальный элемент $z(t_*)$ фиксирован и принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t)\|_{\mathcal{B}} \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad |r(t)| \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad t \geq t_*, \quad (59)$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Пространство $\mathcal{D}$ становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|(z(t), r(t))\|_{\mathcal{D}} = \sup_{t \geq t_*} (e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)} (\|z(t)\|_{\mathcal{B}} + |r(t)|)).$$

Заметим, что если система (56), (58) имеет решение $(z(t), r(t)) \in \mathcal{D}$, то уравнение (58) можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (59), а также тот факт, что все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$\int_{t_*}^{\infty} e^{-D_1 s} [D_2 r(s) + \langle PG(s)(\Phi r(s) + z(s)), \Psi \rangle] ds = 0.$$

Используя это соотношение в (58), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = - \int_t^{\infty} e^{D_1(t-s)} [D_2 r(s) + \langle PG(s)(\Phi r(s) + z(s)), \Psi \rangle] ds, \quad t \geq t_*. \quad (60)$$

Систему уравнений (56), (60) запишем в виде операторного уравнения в пространстве $\mathcal{D}$:

$$(z(t, \theta), r(t)) = \Sigma(z(t, \theta), r(t)) = (\Sigma_1(z(t, \theta), r(t)), \Sigma_2(z(t, \theta), r(t))), \quad (61)$$

где операторы $\Sigma_1: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $\Sigma_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^N$ определяются правыми частями уравнений (56) и (60) соответственно. Можно показать, что оператор Σ будет сжимающим в пространстве $\mathcal{D}$, если величина $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ достаточно мала, t_* достаточно велико, а константа K в (59) подходящим образом выбрана. Это делается точно так же, как и в доказательстве теоремы 3 в работе [5] (см. также [17, Theorem 4.7]). $\square$

Пусть $w^{(1)}(t), \dots, w^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (25), а $u(t)$ — произвольное слабое решение уравнения (1), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 3 имеет место следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$u(t) = (\Phi + H(t)) \sum_{i=1}^N c_i w^{(i)}(t) + O(e^{-\hat{\alpha}t}), \quad (62)$$

где $c_1, \dots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\hat{\alpha} > 0$ — некоторое действительное число. Таким образом, вопрос построения асимптотик для слабых решений уравнения (1) сводится, по существу, к задаче асимптотического интегрирования N -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25).

С учетом теоремы 3 и формул (33), (34), определяющих вектор-строку $\hat{H}(t)$, система на критическом многообразии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \left[D + \sum_{i=1}^n v_i(t) D_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) D_{i_1 i_2}(t) + \dots + \right. \\ & \left. + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) D_{i_1 \dots i_k}(t) + L(t) \right] w, \quad w \in \mathbb{C}^N. \end{aligned} \quad (63)$$

В этой системе $(N \times N)$ -матрицы $D_{i_1 \dots i_l}(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е. матрицы вида (8), где $b_j^{(i_1 \dots i_l)}$ — некоторые постоянные матрицы. Кроме того, $L(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Система (63) относится к классу систем с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования систем такого типа был предложен в работе [4]. Суть этого метода состоит в проведении некоторых специальных замен, диагонализующих в конечном итоге главную часть системы (63). Более точно, с помощью таких замен система (63) приводится к так называемому L -диагональному виду. Асимптотика фундаментальных решений L -диагональных систем может быть построена с помощью теоремы Н. Левинсона (см. [2, 12, 16]). Подробное изложение метода асимптотического интегрирования систем вида (63) читатель может найти в работах [4, 5, 17].

Пример

В качестве простого примера, иллюстрирующего использование описанной выше методики, рассмотрим возмущенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x) \frac{\sin \omega t}{t^\rho} u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0 > 0 \quad (64)$$

с начальным условием

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \quad (65)$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (66)$$

Здесь функция $u(t, x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u/\partial\nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x . Вопрос построения асимптотики решений уравнения (64) с условиями (65), (66) обсуждался в работе [15]. Здесь мы продемонстрируем иной подход к решению этой задачи.

Начально-краевую задачу (64)–(66) будем рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathcal{B} = L_2(\Omega)$. Областью определения оператора Δ будем считать множество $C_0^2(\bar{\Omega})$ дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, удовлетворяющих на границе $\partial\Omega$ краевому условию (66). Известно (см., например, [19, 20]), что определенный таким образом оператор Δ допускает в пространстве $L_2(\Omega)$ замыкание в виде оператора A . Оператор A , в свою очередь, является генератором сильно непрерывной (даже аналитической) компактной полугруппы операторов $T(t)$. Отметим, что точечный спектр оператора $(-A)$ имеет вид:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

По этой причине представим пространство $L_2(\Omega)$ в виде прямой суммы (5), выбрав в качестве пространства $\mathcal{X}$ собственное подпространство оператора A , отвечающее собственному числу λ_0 . Очевидно, что тогда $\mathcal{X} = \{f(x) \equiv \text{const}, x \in \Omega\}$. Поскольку $\mathcal{B}$ является гильбертовым пространством, то $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ и скобка двойственности (11) есть скалярное произведение в пространстве $\mathcal{B}$:

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

Заметим, что оператор A является самосопряженным оператором, а следовательно, $A' = A$. Элементы Φ и Ψ пространства $\mathcal{B}$ выберем так, чтобы было выполнено условие нормировки (12):

$$\Phi(x) \equiv 1, \quad \Psi(x) \equiv \frac{1}{|\Omega|}, \quad (67)$$

где $|\Omega|$ — лебегова мера множества Ω . Наконец, положим

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp = \{y(x) \in \mathcal{B} \mid (y(x), \Psi) = 0\}. \quad (68)$$

Справедливость оценки (6) тогда есть следствие лемм 7.4.1 и 7.4.2 из [7] и компактности полугруппы $T(t)$.

Поскольку в силу (68) для любого $u \in \mathcal{B}$ имеет место равенство

$$(u, \Psi) = (Pu, \Psi),$$

то уравнение на критическом многообразии (25) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\dot{w} = \frac{\sin \omega t}{t^\rho} (g(x)(\Phi + H(t, x)), \Psi) w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (69)$$

Здесь функция $H(t, \cdot)$ при всех $t \geq t_*$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и, кроме того, $\|H(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу теоремы 2 для этой функции справедливо следующее представление:

$$H(t, x) = \hat{H}(t, x) + Z(t, x), \quad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0. \quad (70)$$

Здесь функция $Z(t, \cdot)$, принадлежащая подпространству $\mathcal{Y}$, такова, что $\|Z(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\|Z(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_*, \infty)$. Функция $\hat{H}(t, x)$, принадлежащая по переменной x подпространству $\mathcal{Y}$, является приближенным решением уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = AH + g(x) \frac{\sin \omega t}{t^\rho} (\Phi + H(t, x)) - \frac{\sin \omega t}{t^\rho} (\Phi + H(t, x)) (g(x)(\Phi + H(t, x)), \Psi) \quad (71)$$

с точностью до слагаемых $\hat{R}(t, x)$ таких, что $\|\hat{R}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0, \infty)$. Здесь мы также учли тот факт, что для любого $u \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$u - Pu = u - \Phi(u, \Psi). \quad (72)$$

Функцию $\hat{H}(t, x)$ ищем в виде

$$\hat{H}(t, x) = t^{-\rho} H_1(t, x) + t^{-\rho} H_2(t, x) + \dots, \quad (73)$$

где функции $H_1(t, x), H_2(t, x), \dots$ по переменной x принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ и являются тригонометрическими многочленами переменной t . Подставим выражение (73) в уравнение (71) и соберем слагаемые при $t^{-\rho}$, отбрасывая слагаемые $\hat{R}(t, x)$, такие что $\|\hat{R}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0, \infty)$. Учитывая (67), получим следующее уравнение для нахождения функции $H_1(t, x)$:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = AH_1 + g(x) \sin \omega t - \sin \omega t (g(x), \Psi). \quad (74)$$

Решение уравнения (74) будем искать в виде

$$H_1(t, x) = h_1(x) e^{i\omega t} + \overline{h_1(x)} e^{-i\omega t}, \quad (75)$$

где функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$ пространства $L_2(\Omega)$. Подставляя (75) в (74) и собирая слагаемые при $e^{i\omega t}$, получим уравнение для отыскания функции $h_1(x)$:

$$Ah_1 - i\omega h_1 = \frac{ig(x)}{2} - \frac{i}{2} (g(x), \Psi). \quad (76)$$

В силу леммы 1 это уравнение имеет единственное решение в подпространстве $\mathcal{Y}$. Используя (70), (73), (75) в уравнении (69), с учетом следствия 2 получаем следующее представление для уравнения на критическом многообразии:

$$\dot{w} = \left[t^{-\rho} a_1(t) + t^{-2\rho} a_2(t) + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(2\rho+1)}) \right] w(t). \quad (77)$$

Здесь

$$a_1(t) = \sin \omega t (g(x) \Phi, \Psi) = \frac{\sin \omega t}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) dx, \quad (78)$$

$$a_2(t) = \sin \omega t (g(x) H_1(t, x), \Psi) = \frac{\sin \omega t}{|\Omega|} \left[e^{i\omega t} \int_{\Omega} g(x) h_1(x) dx + e^{-i\omega t} \int_{\Omega} g(x) \overline{h_1(x)} dx \right]. \quad (79)$$

Следуя методике из работы [4], осуществим в уравнении (77) усредняющую замену переменной

$$w = [1 + t^{-\rho}y_1(t) + t^{-2\rho}y_2(t) + \dots + t^{-k\rho}y_k(t)]w_1. \quad (80)$$

Здесь целочисленный неотрицательный параметр k выбран так, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, а функции $y_1(t), \dots, y_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами с нулевым средним значением. В результате этой замены уравнение (77) преобразуется к усредненному виду

$$\dot{w}_1 = [t^{-\rho}a_1 + t^{-2\rho}a_2 + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(\rho+1)})]w_1(t). \quad (81)$$

Здесь

$$a_1 = M[a_1(t)], \quad a_2 = M[a_2(t) + a_1(t)y_1(t)],$$

где символом $M[\cdot]$ обозначено среднее значение почти периодической функции $p(t)$, т. е. величина

$$M[p(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Тригонометрический многочлен $y_1(t)$ определяется как решение уравнения

$$\dot{y}_1 = a_1(t) - a_1$$

с нулевым средним значением. Несложные расчеты, использующие формулы (78), (79), приводят нас к следующим выражениям для величин a_1 и a_2 :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = M[a_2(t)] = \frac{1}{|\Omega|} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{\Omega} g(x) h_1(x) dx \right\}. \quad (82)$$

Покажем, что величина a_2 неотрицательна. Заметим, что, поскольку функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$, то в силу (68)

$$(h_1, \Psi) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} h_1(x) dx = 0. \quad (83)$$

Вычислим комплексное сопряжение от обеих частей уравнения (76) и умножим каждую из них на функцию $h_1(x)$. Умножая затем каждую из частей скалярно на элемент Ψ и приравнявая действительные части полученного равенства, с учетом (83) и самосопряженности оператора A приходим к выражению

$$a_2 = -\frac{2}{|\Omega|} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} A h_1(x) \overline{h_1(x)} dx \right\}. \quad (84)$$

Предположим сначала, что функция $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ . Следовательно, в формуле (84) выполнено равенство $A h_1 = \Delta h_1$. Используя формулу интегрирования по частям для многомерного случая, имеем

$$\int_{\Omega} \Delta h_1(x) \overline{h_1(x)} dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial \nu} \overline{h_1(x)} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla h_1(x) \nabla \overline{h_1(x)} dx, \quad (85)$$

где $d\sigma$ — мера на $\partial\Omega$. Поскольку $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ , то эта функция удовлетворяет граничному условию (66). Таким образом,

$$\int_{\Omega} \Delta h_1(x) \overline{h_1(x)} dx = - \int_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx. \quad (86)$$

В силу определения оператора A , осуществляя предельный переход в (86), легко видеть, что для любой функции h_1 из области определения этого оператора выполнено равенство

$$\int_{\Omega} Ah_1(x) \overline{h_1(x)} dx = - \int_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx. \quad (87)$$

Окончательно получаем, что

$$a_2 = \frac{2}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\nabla h_1(x)|^2 dx \geq 0. \quad (88)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (81), учитывая формулы (82), (88). Получим следующие асимптотические представления для его решений при $t \rightarrow \infty$:

$$w(t) = \begin{cases} c(1 + O(t^{-\rho})), & \rho \geq 1, \\ c(1 + O(t^{-2\rho+1})), & \frac{1}{2} < \rho < 1, \\ c(1 + O(t^{-1/2}))t^{a_2}, & \rho = \frac{1}{2}, \\ c(1 + O(t^{-3\rho+1})) \exp\left\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}\right\}, & \frac{1}{3} < \rho < \frac{1}{2}, \\ c(1 + O(t^{-(k+1)\rho+1})) \exp\left\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}(1 + o(1))\right\}, & \frac{1}{k+1} < \rho \leq \frac{1}{k}, \quad k \geq 3, \end{cases} \quad (89)$$

где c — произвольная действительная постоянная. В силу теоремы 3, учитывая (67), для слабых решений исходной задачи (64)–(66) имеем тогда следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$u(t, x) = (1 + H(t, x))w(t) + r(t, x). \quad (90)$$

Здесь функция $w(t)$ определяется формулами (89), функция $H(t, x)$ обладает тем свойством, что $\|H(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а функция $r(t, x)$ допускает оценку $\|r(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} = O(e^{-\alpha t})$, где $\alpha > 0$ — некоторое действительное число.

Анализируя формулы (89), (90), мы приходим к выводу, что при $\rho > 1/2$ все решения задачи (64)–(66) ограничены при $t \rightarrow \infty$ (в норме пространства $L_2(\Omega)$), а в случае $\rho \leq 1/2$ решения, вообще говоря, не ограничены. Особо отметим, что существование неограниченных решений является следствием пространственной неоднородности коэффициента возмущения в уравнении (64). Действительно, предположим, что в этом уравнении $g(x) \equiv g = \text{const}$. Тогда интегральное уравнение (26) с учетом формул (67), (72) имеет решение $H(t, x) \equiv 0$. Следовательно, уравнение на критическом многообразии (69) приобретает вид

$$\dot{w} = \frac{g \sin \omega t}{t^\rho} w(t).$$

Несложно показать, что все решения этого уравнения имеют следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$w(t) = c(1 + O(t^{-\rho})),$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Список литературы / References

- [1] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: Yosida K., *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965.
- [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [3] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: Marsden J. E., McCracken M., *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [4] Нестеров П. Н., “Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **43**:6 (2007), 731–742; англ. пер.: Nesterov P. N., “Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients”, *Differ. Equ.*, **43**:6 (2007), 745–756.
- [5] Нестеров П. Н., “Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II”, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:5 (2014), 5–37; [Nesterov P. N., “Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. II”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **21**:5 (2014), 5–37, (in Russian).]
- [6] Фомин В. Н., *Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах*, Изд-во ЛГУ, Л., 1972; [Fomin V. N., *Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems*, Leningr. Univ. Publ., Leningrad, 1972, (in Russian).]
- [7] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: Hale J. K., *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [8] Balakrishnan A. V., *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [9] Ball J. M., “Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**:2 (1977), 370–373.
- [10] Ball J. M., “On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations”, *J. Differential Equations*, **27** (1978), 224–265.
- [11] Carr J., *Applications of centre manifold theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [12] Eastham M. S. P., *The asymptotic solution of linear differential systems*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [13] Hale J., Verduyn Lunel S. M., *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [15] Langer M., Kozlov V., “Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **397**:2 (2013), 481–493.
- [16] Levinson N., “The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations”, *Duke Math. J.*, **15**:1 (1948), 111–126.

- [17] Nesterov P., "Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, № 33, 1–43.
- [18] Pazy A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [19] Rothe F., *Global solutions of reaction-diffusion systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [20] Wu J., *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Nesterov P. N., "Asymptotic Integration of Certain Differential Equations in Banach Space", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:5** (2017), 596–614.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-596-614

Abstract. We investigate the problem of constructing the asymptotics for weak solutions of certain class of linear differential equations in the Banach space as the independent variable tends to infinity. The studied class of equations is the perturbation of linear autonomous equation, generally speaking, with an unbounded operator. The perturbation takes the form of the family of the bounded operators that, in a sense, decreases oscillatory at infinity. The unperturbed equation satisfies the standard requirements of the center manifold theory. The essence of the proposed asymptotic integration method is to prove the existence for the initial equation of the center-like manifold (critical manifold). This manifold is positively invariant with respect to the initial equation and attracts all the trajectories of the weak solutions. The dynamics of the initial equation on the critical manifold is described by the finite-dimensional ordinary differential system. The asymptotics for the fundamental matrix of this system may be constructed by using the method proposed by the author for asymptotic integration of the systems with oscillatory decreasing coefficients. We illustrate the suggested technique by constructing the asymptotic formulas for solutions of the perturbed heat equation.

Keywords: asymptotics, differential equation, Banach space, oscillatory decreasing coefficients, center manifolds method, perturbed heat equation

On the author:

Pavel N. Nesterov, orcid.org/0000-0002-9102-9436, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: nesterov.pn@gmail.com

Acknowledgments:

This research was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-4625.2016.1.

©Секацкая А. В., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-615-628

УДК 517.956.4

Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского

Секацкая А. В.

получена 15 марта 2017

Аннотация. В работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными параболического типа, в котором неизвестная функция зависит от трех независимых переменных: времени и двух пространственных. Данное уравнение можно назвать обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского, и оно описывает процесс формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки. В работе это уравнение рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Для данной краевой задачи изучается вопрос о локальных бифуркациях пространственно неоднородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Показано, что в результате бифуркации могут появиться пространственно неоднородные состояния равновесия трех типов. Выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного рельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть нормальной формой Пуанкаре–Дюлака. Для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий), такие как: метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм. В частности, изучен вопрос об устойчивости найденных решений, а также получены асимптотические формулы для бифурцирующих пространственно неоднородных решений. Подтверждено, что формирование неоднородного рельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Ключевые слова: бифуркации и устойчивость, волновой нанорельеф, пространственно неоднородные решения

Для цитирования: Секацкая А. В., "Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:5 (2017), 615–628.

Об авторе:

Секацкая Алина Вадимовна, orcid.org/0000-0002-8421-9119, аспирант, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alinastart@mail.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке проекта № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Введение

В работе рассматривается нелинейное уравнение с частными производными, которое моделирует процесс формирования нанорельефа при бомбардировке ионами плоской поверхности мишени (подложки). Этот технологический процесс имеет широкое применение в современной микроэлектронике (наноэлектронике) при обработке полупроводниковых материалов. Математические модели опираются на теорию П. Зигмунда (см. [1–2]) взаимодействия потока ионов с поверхностью твердого тела. Уравнение Курамото–Сивашинского (КС) [3–4] встречается во многих разделах физики, в химической кинетике. Часто к этому уравнению могут быть сведены уравнения, которые моделируют процесс эрозии поверхности [5–7] под воздействием потока ионов.

Рассмотрим уравнение

$$h_t = -v_0 + v_x h_{xx} + v_y h_{yy} - D_{xx} h_{xxx} - D_{xy} h_{xxy} - D_{yy} h_{yyy} + \gamma_x (h_x)^2 + \gamma_y (h_y)^2. \quad (1)$$

Здесь $v_0, v_x, v_y, D_{xx}, D_{yy}, \gamma_x, \gamma_y \in \mathbb{R}, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} > 0, \gamma_x, \gamma_y \neq 0$. Уравнение $z = h(t, x, y)$ задает форму поверхности, образовавшуюся под воздействием потока ионов интенсивности J , оно содержит в правой части функцию $h(t, x, y)$, которая зависит от t и пространственных переменных x, y . Коэффициенты уравнения (1) зависят от характеристик изучаемого физического (технологического) процесса и характеризуют условия, при которых происходит обработка мишени. Все они зависят от угла Θ между направляющей потока ионов и нормалью к недеформированной поверхности. Также эти коэффициенты зависят от интенсивности потока J . Положительный коэффициент v_x обратно пропорционален интенсивности потока ионов, то есть $v_x = v_x(J, \Theta)$, а при фиксированном Θ данная функция убывает при возрастании J . Если $\Theta = 0$, то такой случай называется квазиизотропным, то есть пучок ионов падает под прямым углом к недеформированной поверхности. Постоянная $v_0 > 0$ характеризует скорость понижения поверхности согласно терминологии Дж. Картера [8]. Вычислению скорости эрозии, в частности, посвящена основополагающая работа П. Зигмунда [9].

В данной работе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана:

$$\begin{aligned} h_x(t, 0, y) = h_x(t, \pi, y) = h_{xxx}(t, 0, y) = h_{xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ h_y(t, x, 0) = h_y(t, x, \pi) = h_{yyy}(t, x, 0) = h_{yyy}(t, x, \pi) = 0, x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что функция

$$h(t, x, y) = -v_0 t + h_0 \quad (h_0 \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

является решением краевой задачи (1), (2). Это решение описывает плоский профиль при обработке образца потоком ионов.

Допустима замена

$$h(t, x, y) = (-v_0 t + h_0) + u(t, x, y), \quad (4)$$

где $u(t, x, y)$ — нормированное отклонение от плоского профиля (3) мишени. Подстановка (4) в уравнение (1) позволяет получить уравнение для отклонений от плоского

профиля распыляемой поверхности. В результате для $u(t, x, y)$ получаем краевую задачу:

$$u_t = -b_1 u_{xx} - b_2 u_{yy} - d_1 u_{xxxx} - d_3 u_{xxyy} - d_2 u_{yyyy} + c_1 (u_x)^2 + c_2 (u_y)^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, 0, y) = u_x(t, \pi, y) = u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, \pi) = u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, \pi) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}, d_1, d_2, d_3 > 0, c_1, c_2 \neq 0$.

Для краевой задачи (5), (6) плоский фронт мишени задается равенством $u(t, x, y) = 0$. Эта задача также инвариантна относительно замены $u \rightarrow u + \text{const}$. Это означает, что уравнение плоского рельефа зависит от выбора системы координат. Окрестность иных состояний равновесия $u(t, x, y) = \text{const}$, в силу выше сказанного, может быть заменена на окрестность нулевого решения. С точки зрения приложений, особый интерес представляет наличие у нелинейной краевой задачи устойчивых решений $u(t, x, y)$, которые существенно зависят от пространственных переменных x, y ($u_x^2 + u_y^2 \neq 0$) и задают неоднородный профиль рельефа.

Положим

$$u(0, x, y) = f(x, y). \quad (7)$$

Смешанная задача (5), (6), (7) локально корректно разрешима, если $f(x, y) \in \overset{\circ}{W}_2^4(D)$ [10]. Здесь через $\overset{\circ}{W}_2^4(D)$ обозначено замыкание линеала достаточно гладких функций $f(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям (6), по норме пространства Соболева $W_2^4(D)$. Напомним, что $g(x, y) \in W_2^4(D)$, если функция $g(x, y)$ имеет обобщенные производные $\frac{\partial g}{\partial x}; \frac{\partial g}{\partial y}; \dots; \frac{\partial^4 g}{\partial x \partial y^3}; \frac{\partial^4 g}{\partial y^4}$ до четвертого порядка включительно, которые принадлежат $L_2(D)$. Подчеркнем, что в силу теорем вложения $g(x, y) \in C^2(D)$, то есть пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций [10].

1. Линейная краевая задача

Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (5)–(6) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, 0, y) = u_x(t, \pi, y) = u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, \pi) = u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, \pi) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b_1 v_{xx} - b_2 v_{yy} - d_1 v_{xxxx} - d_2 v_{yyyy} - d_3 v_{xxyy}$$

определен на достаточно гладких функциях $v = v(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{aligned} v_x(0, y) = v_x(\pi, y) = v_{xxx}(0, y) = v_{xxx}(\pi, y) = 0, \\ v_y(x, 0) = v_y(x, \pi) = v_{yyy}(x, 0) = v_{yyy}(x, \pi) = 0. \end{aligned}$$

Пусть λ — собственное значение (СЗ), а $v(x, y)$ — собственная функция (СФ) линейного дифференциального оператора A . Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (8), (9) найдем все ее решения следующего вида:

$$u(t, x, y) = \exp(\lambda t) \cdot v(x, y).$$

Для нахождения СЗ λ , а также соответствующей СФ, получим краевую задачу

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ v_x(0, y) &= v_x(\pi, y) = v_{xxx}(0, y) = v_{xxx}(\pi, y) = 0, \\ v_y(x, 0) &= v_y(x, \pi) = v_{yyy}(x, 0) = v_{yyy}(x, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановкой проверяется, что краевая задача (10) имеет нетривиальные решения, если линейный дифференциальный оператор A имеет СЗ

$$\lambda = \lambda(n, k) = (b_1 n^2 + b_2 k^2) - (d_1 n^4 + d_2 k^4 + d_3 n^2 k^2),$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$v(x, y) = e_{n,k}(x, y) = \cos nx \cdot \cos ky,$$

где $n, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Как хорошо известно, собственные функции $e_{n,k}(x, y)$ в пространстве $L_2(D)$ образуют полную ортогональную систему функций. Поэтому линейный дифференциальный оператор A не может иметь иных собственных значений, отличных от $\lambda(n, k)$.

Среди СЗ могут быть и кратные, если существуют такие пары (n_1, k_1) и (n_2, k_2) , что

$$(b_1 n_1^2 + b_2 k_1^2) - (d_1 n_1^4 + d_2 k_1^4 + d_3 n_1^2 k_1^2) = (b_1 n_2^2 + b_2 k_2^2) - (d_1 n_2^4 + d_2 k_2^4 + d_3 n_2^2 k_2^2).$$

Отметим, что $\lambda(0, 0) = 0$. Понятно, что если $\lambda(n, k) < 0$ при всех $n^2 + k^2 \neq 0$, то любое состояние равновесия задачи (8), (9) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий). Например, пространства Соболева $W_2^4(D)$ [10]. Если же существует такая пара (n_0, k_0) , где $n_0^2 + k_0^2 \neq 0$, что $\lambda(n_0, k_0) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются условиями: пусть для некоторых пар (n_0, k_0) выполнено равенство

$$\lambda(n_0, k_0) = 0, \quad k_0^2 + n_0^2 \neq 0,$$

а для остальных номеров n, k ($n^2 + k^2 \neq 0$) имеет место неравенство $\lambda(n, k) < 0$. Отметим также, что в нашем случае все собственные значения $\lambda(n, k)$ действительны. В терминах коэффициентов уравнения (8) условия устойчивости приобретают вид двух неравенств: $b_1 - d_1 < 0$, $b_2 - d_2 < 0$. Следовательно, можно выделить три критических случая:

$$1) \ b_1 = d_1, \ b_2 < d_2; \quad 2) \ b_1 < d_1, \ b_2 = d_2; \quad 3) \ b_1 = d_1, \ b_2 = d_2.$$

При проверке следует учитывать, что $d_1, d_2, d_3 > 0$. В первом случае нулевое СЗ оператора A двукратно. Ему соответствуют СФ:

$$e_{0,0}(x, y) = 1, \quad e_{1,0}(x, y) = \cos x.$$

При таком выборе коэффициентов удобно обозначить соответствующий оператор через A_1 . При реализации второго критического случая оператор обозначим через A_2 . Как и в первом случае, нулевое СЗ двукратно. Ему соответствуют две следующие СФ:

$$e_{0,0}(x, y) = 1, \quad e_{0,1}(x, y) = \cos y.$$

Наконец, в последнем случае соответствующий оператор обозначим A_3 . СЗ $\lambda = 0$ здесь уже имеет кратность, равную трем, так как ему соответствуют следующие 3 СФ:

$$e_{0,0}(x, y) = 1, \quad e_{1,0}(x, y) = \cos x, \quad e_{0,1}(x, y) = \cos y.$$

В следующем разделе будут рассмотрены варианты выбора коэффициентов оператора A , при которых реализуются случаи, близкие к критическим, отмеченным выше.

Положим $b_1 - d_1 = \gamma_1 \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $\gamma_1 = \pm 1$ и введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор ($b_2 < d_2$)

$$A_1(\varepsilon)v = -(d_1 + \varepsilon)v_{xx} - b_2v_{yy} - d_1v_{xxx} - d_2v_{yyy} - d_3v_{xyy}.$$

Во втором варианте рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$A_2(\varepsilon)v = -b_1v_{xx} - (d_2 + \varepsilon)v_{yy} - d_1v_{xxx} - d_2v_{yyy} - d_3v_{xyy}$$

и, наконец, обозначим

$$A_3(\varepsilon)v = -(d_1 + \alpha_1\varepsilon)v_{xx} - (d_2 + \alpha_2\varepsilon)v_{yy} - d_1v_{xxx} - d_2v_{yyy} - d_3v_{xyy}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Нелинейная краевая задача

В первой части этого раздела рассмотрим краевую задачу

$$u_t = A_1(\varepsilon)u + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, 0, y) &= u_x(t, \pi, y) = u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_y(t, x, 0) &= u_y(t, x, \pi) = u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, \pi) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u = u(t, x, y)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Поведение решений краевой задачи при достаточно малых начальных условиях определяется поведением решений двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на центральном инвариантном многообразии [11–14], которую принято называть нормальной формой.

Для построения нормальной формы на двумерном инвариантном многообразии воспользуемся аналогом метода Крылова–Боголюбова. Будем искать решения краевой задачи (11), (12) в виде суммы:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(s, x, y) + \varepsilon u_2(s, x, y) + \varepsilon^{3/2}u_3(s, x, y) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (13)$$

где $s = \varepsilon t$ — «медленное время», $u_j(s, x, y) \in \overset{\circ}{W}_2^4$ при любом рассматриваемом s , $j = 1, 2, 3$. Также отметим для дальнейших построений, что

$$\dot{\psi} = \varepsilon\psi', \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \dot{u}_j + u'_j\varepsilon,$$

где точкой обозначена частная производная по t , а штрихом – по s . Наконец, положим

$$u_1(s, x, y) = z(s) \cdot \cos x.$$

Действительные функции $z = z(s)$, $\psi = \psi(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \quad (14)$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \quad (15)$$

где a_0, a, α — действительные числа. Уравнения (14), (15) выписаны с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Система (14), (15) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре–Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (11), (12) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие») [11–14]. Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому двумерному многообразию со скоростью экспоненты.

Подстановка суммы (13) в краевую задачу (11), (12) с последующим приравнованием выражений при одинаковых степенях ε приводит к линейным краевым задачам для определения u_j , $j = 1, 2, 3$. При их формировании и изучении будем интерпретировать s как параметр.

В итоге для u_2, u_3 получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$\psi' + u_2 = A_1(0) \cdot u_2 + c_1(u_{1x})^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_{2x}(t, 0, y) = u_{2x}(t, \pi, y) = u_{2xxx}(t, 0, y) = u_{2xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_{2y}(t, x, 0) = u_{2y}(t, x, \pi) = u_{2yyy}(t, x, 0) = u_{2yyy}(t, x, \pi) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$z' \cos x + u_3 = A_1(0) \cdot u_3 - u_{1xx} + 2c_1 u_{1x} u_{2x}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_{3x}(t, 0, y) = u_{3x}(t, \pi, y) = u_{3xxx}(t, 0, y) = u_{3xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_{3y}(t, x, 0) = u_{3y}(t, x, \pi) = u_{3yyy}(t, x, 0) = u_{3yyy}(t, x, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При формировании краевых задач для u_2 и u_3 учтено, что $(u_1(x))_y = 0$, то есть отсутствует, например, слагаемое $c_2(u_{1y})^2$. Линейный оператор $A_1(0)$ имеет двукратное нулевое СЗ, которому отвечают СФ $e_{0,0}(x, y)$, $e_{1,0}(x, y)$. Поэтому, как известно (см., например, [10] или §29 из [15]), неоднородная краевая задача

$$A_1(0) \cdot v(x, y) = F(x, y)$$

имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости):

$$\int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) \cos x dx dy = 0.$$

Равенства

$$\int_0^\pi \int_0^\pi v(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi v(x, y) \cos x dx dy = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (16), (17), получаем, что

$$\psi' = \frac{c_1}{2} z^2.$$

Далее решение краевой задачи (16), (17) будем искать в виде

$$u_2 = \eta z^2 \cos 2x. \quad (20)$$

После подстановки (20) в (16), (17) находим, что

$$\eta = -\frac{c_1}{24d_1},$$

а соответственно решение u_2 равно

$$u_2(s, x, y) = -\frac{c_1}{24d_1} z^2 \cos 2x.$$

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (18), (19) вытекает, что

$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1} z^3.$$

Решение u_3 ищем в виде

$$u_3(s, x, y) = \eta z^3 \cos 3x. \quad (21)$$

После подстановки (21) в (18), (19) находим, что

$$u_3(s, x, y) = \frac{c_1^2}{864d_1^2} z^3 \cos 3x.$$

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (14), (15). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение

$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{3d_1} z^3. \quad (22)$$

Стандартный анализ показывает, что дифференциальное уравнение (22) имеет ненулевые состояния равновесия $S_{\pm 1}$, если $\gamma_1 = 1$, вида

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}. \quad (23)$$

При $\gamma = -1$ уравнение (23) имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво. Состояния равновесия $S_{\pm 1}$ асимптотически устойчивы. Каждому решению (23) соответствует следующее решение нормальной формы (14), (15)

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}, \quad \psi(s) = 6 \frac{d_1}{c_1} s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Используя результаты работ [12–14, 16–19], можно обосновать справедливость утверждения.

Теорема 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому решению (23) соответствует решение краевой задачи (11), (12)

$$u_{11}(t, x, y, \varepsilon) = K_{11} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (24)$$

$$u_{12}(t, x, y, \varepsilon) = K_{12} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t - \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (25)$$

где K_{11}, K_{12} — произвольные постоянные. Каждое из этих семейств решений формирует интегральное многообразие $M_1(\varepsilon)$ размерности 1 нелинейной краевой задачи (11), (12).

Уместно подчеркнуть, что решения $u_{11}(x, \varepsilon)$ и $u_{12}(x, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$u_{12}(x, \varepsilon) = u_{11}(\pi - x, \varepsilon).$$

Второй вариант выделяется условиями $b_2 = d_2 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), b_1 < d_1$. Это означает, что следует рассматривать краевую задачу

$$u_t = A_2(\varepsilon)u + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \quad (26)$$

$$u_x(t, 0, y) = u_x(t, \pi, y) = u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, \pi, y) = 0,$$

$$u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, \pi) = u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, \pi) = 0. \quad (27)$$

Практически дословно повторяя построения при анализе нелинейной краевой задачи (11), (12), можно доказать справедливость утверждения.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует 2 семейства устойчивых решений

$$u_{21}(t, x, y, \varepsilon) = K_{21} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos y -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2y + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$u_{22}(t, x, y, \varepsilon) = K_{22} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t - \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos y -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2y - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2})$$

краевой задачи (26), (27). Здесь K_{21}, K_{22} — произвольные действительные постоянные.

Более сложный вариант бифуркационной задачи выделяется равенствами

$$b_1 = d_1 + \alpha_1 \varepsilon, \quad b_2 = d_2 + \alpha_2 \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Анализу подлежит краевая задача

$$u_t = A_3(\varepsilon)u + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, 0, y) = u_x(t, \pi, y) = u_{xxx}(t, 0, y) = u_{xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, \pi) = u_{yyy}(t, x, 0) = u_{yyy}(t, x, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Этот случай отличается тем, что линейный дифференциальный оператор $A_3(0)$ имеет нулевое собственное число кратности 3, которому отвечают собственные функции

$$e_{0,0}(x, y) = 1, \quad e_{1,0}(x, y) = \cos x, \quad e_{0,1}(x, y) = \cos y.$$

Будем искать решения краевой задачи, которые могут быть представлены в форме

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(s, x, y) + \varepsilon u_2(s, x, y) + \varepsilon^{3/2}u_3(s, x, y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $s = \varepsilon t$, функции $u_j(s, x, y) \in W_2^4$ при всех рассматриваемых $s, j = 1, 2, 3$, а

$$u_1(s, x, y) = z_1(s) \cdot \cos x + z_2(s) \cdot \cos y.$$

В данном случае центральное инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$ имеет размерность, равную 3. На этом многообразии $M_3(\varepsilon)$ краевая задача сводится к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2, \quad (30)$$

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + a_{11} z_1^3, \quad z_2' = \alpha_2 z_2 + a_{21} z_2^3 \quad (31)$$

для функций $\psi = \psi(s)$, $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$, где a_1, a_2, a_{11}, a_{21} — действительные числа. Функции $u_2(s, x, y)$, $u_3(s, x, y)$ и коэффициенты нормальной формы (30), (31) могут быть определены из анализа неоднородных краевых задач для u_2, u_3 :

$$a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 = A_3(0)u_2 + c_1(u_{1x})^2 + c_2(u_{1y})^2, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} u_{2x}(t, 0, y) = u_{2x}(t, \pi, y) = u_{2xxx}(t, 0, y) = u_{2xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_{2y}(t, x, 0) = u_{2y}(t, x, \pi) = u_{2yyy}(t, x, 0) = u_{2yyy}(t, x, \pi) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$g_1 \cos x + g_2 \cos y = A_3(0)u_3 + 2c_1(u_{1x})(u_{2x}) + 2c_2(u_{1y})(u_{2y}), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} u_{3x}(t, 0, y) = u_{3x}(t, \pi, y) = u_{3xxx}(t, 0, y) = u_{3xxx}(t, \pi, y) = 0, \\ u_{3y}(t, x, 0) = u_{3y}(t, x, \pi) = u_{3yyy}(t, x, 0) = u_{3yyy}(t, x, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В уравнении (34) использованы обозначения

$$g_1 = \alpha_1 z_1 + a_{11} z_1^3, \quad g_2 = \alpha_2 z_2 + a_{21} z_2^3.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае неоднородная краевая задача

$$A_3(0) \cdot v(x, y) = F(x, y),$$

$$\begin{aligned}v_x(0, y) = v_x(\pi, y) = v_{xxx}(0, y) = v_{xxx}(\pi, y) = 0, \\v_y(x, 0) = v_y(x, \pi) = v_{yyy}(x, 0) = v_{yyy}(x, \pi) = 0\end{aligned}$$

имеет решение, если

$$\int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) \cos x dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi F(x, y) \cos y dx dy = 0.$$

Используя условия разрешимости, находим, что

$$a_1 = \frac{c_1}{2}, \quad a_2 = \frac{c_2}{2}, \quad a_{11} = -\frac{c_1^2}{12d_1}, \quad a_{21} = -\frac{c_2^2}{12d_2}.$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Тогда замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений (31) для $z_1(s), z_2(s)$ имеет 9 состояний равновесия

$$\begin{aligned}S_{0,0} &: z_1 = z_2 = 0; \\S_{\pm 1,0} &: z_1 = \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{d_1 \alpha_1}{|c_1|}, \quad z_2 = 0; \\S_{0,\pm 1} &: z_1 = 0, z_2 = \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{d_2 \alpha_2}{|c_2|}; \\S_{\pm 1,\pm 1} &: z_j = \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{d_j \alpha_j}{|c_j|}, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Состояния равновесия $S_{0,0}, S_{\pm 1,0}, S_{0,\pm 1}$ неустойчивы, состояния равновесия $S_{\pm 1,\pm 1}$ соответственно асимптотически устойчивы как решения замкнутой подсистемы (31).

При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений (30), (31) имеет 4 семейства устойчивых решений

$$\begin{aligned}\psi(s) &= 6 \left(\frac{d_1 \alpha_1}{c_1} + \frac{d_2 \alpha_2}{c_2} \right) s + \psi_0, \quad \psi_0 \in \mathbb{R}, \\z_j(s) &= \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{d_j \alpha_j}}{|c_j|}, \quad j = 1, 2\end{aligned} \tag{36}$$

и 4 неустойчивых семейства решений, соответствующих $S_{\pm 1,0}$ и $S_{0,\pm 1}$

$$\begin{aligned}\psi(s) &= 6 \frac{d_1 \alpha_1}{c_1} s + \psi_0, \\z_1 &= \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{d_1 \alpha_1}}{c_1}, \quad z_2 = 0\end{aligned} \tag{37}$$

и

$$\begin{aligned}\psi(s) &= 6 \frac{d_2 \alpha_2}{c_2} s + \psi, \\z_2 &= \pm 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{d_2 \alpha_2}}{c_2}, \quad z_1 = 0.\end{aligned} \tag{38}$$

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ каждому решению семейства (36) соответствует семейство устойчивых решений краевой задачи (11), (12)*

$$\begin{aligned} u_{31}(t, x, y, \varepsilon) &= K_{31} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ u_{32}(t, x, y, \varepsilon) &= K_{32} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ u_{33}(t, x, y, \varepsilon) &= K_{33} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + \varepsilon^{1/2} \left(-\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \varepsilon^{3/2} \left(-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ u_{34}(t, x, y, \varepsilon) &= K_{34} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t - \varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) - \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34}$ — произвольные действительные постоянные.

Теорема 4. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ каждому решению семейств решений (37), (38) нормальной формы (30), (31) соответствуют 4 неустойчивых семейства решений краевой задачи (11), (12) следующего вида:*

$$\begin{aligned} u_{\pm 1,0}(t, x) &= K_{4,\pm 1} + \left(6\varepsilon \frac{d_1\alpha_1}{c_1} + o(\varepsilon) \right) t + \varepsilon^{1/2} \left(\pm \frac{2\sqrt{3d_1\alpha_1}}{|c_1|} \cos x \right) - \varepsilon \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + o(\varepsilon), \\ u_{0,\pm 1}(t, y) &= K_{4,\pm 2} + \left(6\varepsilon \frac{d_2\alpha_2}{c_2} + o(\varepsilon) \right) t + \varepsilon^{1/2} \left(\pm \frac{2\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь $K_{4,\pm 1}, K_{4,\pm 2} \in \mathbb{R}$ и произвольны. Эти решения неустойчивы.

В рамках теорем 3, 4 были указаны 8 семейств решений. Решения, принадлежащие этим семействам, можно назвать состояниями равновесия второго рода, так как для этих решений $u_*(t, x)$ выполнены следующие свойства:

- 1) $\frac{\partial u_*}{\partial t}$ не зависит от t и x ;
- 2) $\frac{\partial u_*}{\partial x}$ не зависит от t .

Решения, указанные в теореме 4, не представляют интереса с прикладной точки зрения, так как физически не реализуются в силу того обстоятельства, что они неустойчивы по Ляпунову. В теоремах 1, 2, 3 были найдены решения (двухпараметрические семейства решений) вспомогательной краевой задачи (11), (12). Этим решениям соответствуют решения уже основной краевой задачи (1), (2). Так, решениям краевой задачи (11), (12) из теоремы 1 соответствуют решения

$$h_{11}(t, x, \varepsilon) = -v_0 t + u_{11}(t, x, y, \varepsilon),$$

$$h_{12}(t, x, \varepsilon) = -v_0 t + u_{12}(t, x, y, \varepsilon)$$

краевой задачи (1), (2). Аналогично во втором случае

$$h_{21}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{21}(t, x, y, \varepsilon),$$

$$h_{22}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{22}(t, x, y, \varepsilon),$$

и в третьем случае

$$h_{31}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{31}(t, x, y, \varepsilon), \quad h_{32}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{32}(t, x, y, \varepsilon),$$

$$h_{33}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{33}(t, x, y, \varepsilon), \quad h_{34}(t, x, y, \varepsilon) = -v_0 t + u_{34}(t, x, y, \varepsilon).$$

Решения $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}$ наследуют устойчивость соответствующих решений $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34}$.

Заключение

Методами качественной теории дифференциальных уравнений в данной работе были исследованы механизмы формирования нанорельефа для обобщенного двумерного уравнения Курамото–Сивашинского. Были исследованы различные варианты краевой задачи (1), (2). Показано, что у нее возникают, или точнее, могут появиться пространственно неоднородные решения, и в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. Для бифурцирующих решений приведены асимптотические формулы. С точки зрения приложения к физике (нано- и микроэлектронике) наибольший интерес для приложений представляют именно пространственно неоднородные решения. Они описывают неоднородный рельеф на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки. Изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия. В частности, выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях. Показано, что вопрос о формировании неоднородного нанорельефа с математической точки зрения сводится к изучению вспомогательных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые принято называть нормальной формой Пуанкаре–Дюлака. Подтверждено, что формирование нанорельефа можно рассматривать как явление самоорганизации.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Анатолию Николаевичу Куликову за постановку задачи и помощь при написании статьи.

Список литературы / References

- [1] Sigmund P., “A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment”, *J. Mat. Sci.*, **8** (1973), 1545.
- [2] Sigmund P., “Theory of sputtering. Sputtering yield of amorphous and polycrystalline targets”, *Phys. Rev.*, **184**:2 (1969), 383–416.
- [3] Syvashinsky G. I., “Weak Turbulence in Periodic Flow”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **17**, 1985, 243–255.

- [4] Kuramoto Y., *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer, Berlin, 1984, 136 pp.
 - [5] Bradley R.M., Harper J.M.E., “Theory of Ripple Topography by ion bombardment”, *J. Vac. Tech.*, **A6**, 1988, 2390–2395.
 - [6] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н., “Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке”, *Ядерная физика и инжиниринг*, **1, 2**, 2010, 151–158; [Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Strikhanov M. N., “Chislennoe modelirovaniye formirovaniya nanostruktur na poverkhnosti ploskikh podlozhek pri ionnoy bombardirovke”, *Yadernaya fizika i inzhiniring*, **1, 2**, 2010, 151–158, (in Russian).]
 - [7] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е., “Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке”, *Математическое моделирование*, **24**, 2012, 23–28; [Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Fedyanin T. E., “On self-organization processes of nanostructures on semiconductor surface by ion bombardment”, *Matem. Mod.*, **24**:12 (2012), 23–28, (in Russian).]
 - [8] Carter G., “The physics and applications of ion beam erosion”, *J.Phys. D.: Appl. Phys.*, **34**, 2001.
 - [9] Sigmund P., *Sputtering by ion bombardment. Theoretical concepts. Sputtering by particle bombardment*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
 - [10] *Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека*, Наука, М., 1972, 544 с.; [*Funktsionalnyy analiz. Spravochnaya matematicheskaya biblioteka*, Nauka, M., 1972, 544 pp., (in Russian).]
 - [11] Марсден Дж., Мак-Кракен М., *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, 1950, 367 с.; [Marsden Dzh., Mak-Kraken M., *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya*, Mir, 1950, 367 pp., (in Russian).]
 - [12] Куликов А. Н., *Интегральные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве*, Препринт №85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991; [Kulikov A.N., *Integralnye mnogoobraziya nelineynykh avtonomnykh differentsialnykh uravneniy v gilbertovom prostranstve*, 1991, (in Russian).]
 - [13] Мищенко Е. Ф., Садовнический В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, 2005, 431 с.; [Mishchenko E. F., Sadovnichiy V. A., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., *Autovolnovye protsessy v nelineynykh sredakh s diffuziey*, Fizmatlit, 2005, 431 pp., (in Russian).]
 - [14] Люстерник Л. А., Соболев В. И., *Элементы функционального анализа*, Гос.изд-во технико-теоретической литературы, М.-Л., 1951, 360 с.; [Lyusternik L. A., Sobolev V. I., *Elementy funktsional'nogo analiza*, Gos.izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, M.-L., 1951, 360 pp., (in Russian).]
 - [15] Куликов А. Н., Куликов Д. А., “Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:5 (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A.N., Kulikov D.A., “Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52**:5 (2012), 800–814.
 - [16] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С., “Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, 2011, № 4, 86–99; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., Rudyy A. S., “Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, 86–99, (in Russian).]
 - [17] Kulikov A.N., Kulikov D.A., “Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:2 (2015), 211–221.
 - [18] Kulikov A.N., Kulikov D.A., “Bifurcation in Kuramoto–Syvashinsky equation”, *Pliska Stud. Math.*, **25** (2015), 81–90.
-

Sekatskaya A. V., "Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 615–628.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-615-628

Abstract. In this paper, a differential partial equation with an unknown function of three variables time and two spatial variables – is considered. The given equation is commonly called the generalized Kuramoto–Sivashinsky (gKS) equation. This equation represents a model of the formation of a nanorelief on a surface by ion bombardment. In the work, this equation is considered with the homogeneous Neumann boundary conditions. Local bifurcations of spatially inhomogeneous equilibrium states is studied in the case of their stability changes. It is shown that the inhomogeneous surface relief can occur when the stability of the homogeneous states of equilibrium changes. The conditions were obtained for coefficients when the stability changes. In the cases close to critical cases the local bifurcation problems are considered. It was shown that a question about the formation of inhomogeneous surface relief from a mathematical point of view is reduced to the study of auxiliary ordinary differential equations which are called a Poincaré–Dulac normal form. The stability analysis of spatially homogeneous equilibrium states is given, as well as local bifurcations are studied in the case of their stability changes. The method of invariant manifolds coupled with the normal form theory were used to solve this problem. For the bifurcating solutions the asymptotic formulas are given.

Keywords: bifurcation, stability, ripple structures, spatially inhomogeneous solutions

On the author:

Alina V. Sekatskaya, orcid.org/0000-0002-8421-9119, graduate student
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alinastart@mail.ru

Acknowledgments:

This work was supported by State assignment, project № 1.5722.2017/8.9

©Беляев В. А., Шапеев В. П., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648

УДК 519.632.4, 519.635.1

Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях

Беляев В. А., Шапеев В. П.

получена 18 апреля 2017

Аннотация. Предложены и реализованы новые варианты метода коллокации и наименьших невязок (КНН) для численного решения краевых задач для уравнений с частными производными в выпуклых четырехугольных областях. Их реализация и численные эксперименты выполнены на примерах решения уравнений Пуассона и бигармонического. Решение второго уравнения использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния изотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Дифференциальные задачи методом КНН проектировались в пространство полиномов четвертой степени. Граничные условия для приближенного решения задач выписывались точно на границе расчетной области. Реализованы варианты метода КНН на сетках, построенных двумя различными способами. В первом варианте в области строится некоторая “квазирегулярная” сетка, крайние линии которой совпадают с границами области. Во втором — область сначала покрывается регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. При этом в граничных ячейках, которые пересекала граница, для аппроксимации дифференциальных уравнений использованы “законтурные” (расположенные вне расчетной области) точки коллокации и точки согласования решения задачи. Кроме этого, “малые” нерегулярные треугольные ячейки, отсеченные границей области от прямоугольных ячеек начальной регулярной сетки, присоединялись к соседним четырехугольным ячейкам. Этот прием позволил существенно уменьшить обусловленность системы линейных алгебраических уравнений приближенной задачи по сравнению со случаем, когда малые ячейки наряду с другими ячейками использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи. В численных экспериментах по сходимости приближенного решения различных задач на последовательности сеток установлено, что оно сходится с повышенным порядком и с высокой точностью совпадает с аналитическим решением задачи в случае, когда оно известно.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших невязок, краевая задача, неканоническая область, нерегулярная сетка, повышенный порядок аппроксимации, уравнение Пуассона, бигармоническое уравнение

Для цитирования: Беляев В. А., Шапеев В. П., "Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:5 (2017), 629–648.

Об авторах: Беляев Василий Алексеевич, orcid.org/0000-0001-5901-2880, старший лаборант, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, e-mail: belyaevasily@mail.ru

Шапеев Василий Павлович, orcid.org/0000-0001-6761-7273, доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, Новосибирский национальный исследовательский университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: vshapeev@ngs.ru

Введение

Многие численные методы, дающие высокую точность решения краевых задач для уравнений с частными производными (PDE) в прямоугольных областях, не имеют своих аналогов в случае областей иной формы. Однако многие явления в реальном мире, которые моделируются с помощью численных методов, происходят в областях, отличных от прямоугольных. Отсюда настоятельная потребность иметь возможность моделировать эти явления в областях с формой, соответствующей действительности, чтобы на практике получать в расчетах моделируемых изделий, физических процессов и других объектов достоверные результаты.

В данной работе краевые задачи для PDE решаются с повышенной точностью проекционным, сеточным методом КНН (коллокации и наименьших невязок — вариантом метода коллокации и наименьших квадратов) [1, 2] в выпуклых четырехугольных областях. В методе КНН путем проектирования задачи для PDE в конечномерное линейное функциональное пространство ставится в соответствие приближенная задача, решение которой сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение последней определяет приближенное решение дифференциальной задачи. Поскольку в методе КНН приближенное решение кусочно-аналитическое (в данной работе кусочно-полиномиальное), в нем относительно просто реализуются варианты метода в областях различной формы и на сетках с различной формой ячеек, в том числе варианты повышенной точности и на адаптивных сетках [1, 3, 4].

Здесь реализованы два разных варианта построения расчетной сетки в выпуклых четырехугольных областях. Их возможности были проверены на решении краевых задач для уравнения Пуассона и для бигармонического уравнения, которое описывает напряженно-деформированное состояние (НДС) под различными нагрузками изотропной пластины в форме выпуклого четырехугольника. Задача о НДС прямоугольной пластины методом КНН с повышенной точностью решена в [5]. В данной работе на решении тестовой задачи для четырехугольной пластины показана высокая точность предложенных вариантов метода КНН.

Описание, характеристика, история возникновения, некоторые возможности метода КНН и библиография по нему приведены в [1, 4–11]. Здесь коротко отметим, что в методе КНН для нахождения решения приближенной задачи в каждой ячейке выписывается переопределенная система уравнений, после подстановки в которую искомого приближенного решения из нее получается переопределенная СЛАУ для определения коэффициентов представления в линейном функциональном пространстве решения приближенной задачи. Решение переопределенной СЛАУ ищется из требования минимизации функционала невязки, составленного из невязок всех ее уравнений. В качестве функционала обычно берется сумма квадратов невязок. Его минимум может отыскиваться разными способами. В случае переопределенной СЛАУ он достигается на ее псевдорешении, построенном методом наименьших квадратов или ортогональным методом [4, 5, 9]. Детальное описание алгоритма метода КНН применительно к рассмотренным здесь задачам дано ниже в ходе изложения работы.

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

1.1. Постановка задачи и описание метода

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta v = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ v|_{\delta\Omega} = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , имеющей форму произвольного выпуклого четырехугольника, с границей $\delta\Omega$ (рис. 1), где $v(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ — заданные функции. Реализация рассматриваемых вариантов метода КНН решения других краевых задач для уравнения Пуассона осуществляется по аналогичным алгоритмам, описанным далее.

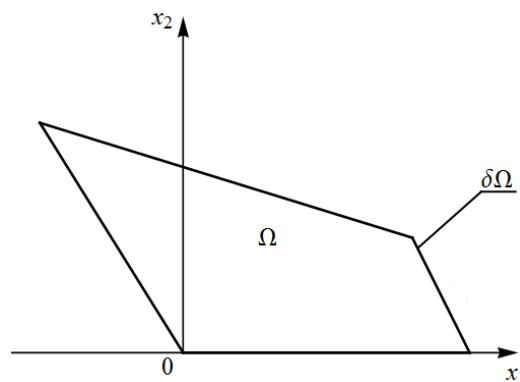


Рис. 1. Область решения задачи
Fig. 1. The domain of problem solution

Вариант I. Пронумеруем последовательно стороны четырехугольника от 1 до 4 при непрерывном обходе его границы. Пусть l_1 и l_3 — длины первой и третьей противоположных сторон четырехугольника, l_2 и l_4 — длины второй и четвертой его сторон. Чтобы покрыть Ω сеткой с четырехугольными ячейками, разобьем точками каждую сторону с номерами 1 и 3 на m_1 равных частей, а стороны с номерами 2 и 4 на m_2 равных частей. Числа m_1 и m_2 выбираются такими, чтобы величины сумм длин противоположных сторон ячеек сетки по возможности меньше различались между собой, если из каких-либо определенных соображений нет необходимости ее адаптировать к решению задачи. Пронумеруем точки, расставленные на сторонах четырехугольника, однозначными последовательностями номеров, одинаковыми для противоположных его сторон. При этом на противоположных сторонах четырехугольника отсчет точек начнем от вершин ее углов, имеющих общую сторону. Соединим отрезками прямых точки с одинаковыми номерами, расположенные на противоположных сторонах. Таковую сетку в выпуклом четырехугольнике для краткости назовем “квазирегулярной”. Полученные четырехугольные ячейки, которые полностью расположены внутри области, назовем внутренними. Ячейки, стороны которых расположены около границы области $\delta\Omega$, назовем граничными. Две ячейки называются соседними, если они имеют общую сторону. Для удобства реализации

метода в каждой ячейке области введем локальные координаты

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_1}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_2}, \quad (2)$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j -й ячейки, $j = 1, \dots, N$, $N = m_1 \times m_2$ — количество ячеек, $v(x_1, x_2) = u(y_1, y_2)$. Координаты центра j -й ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат вершин четырехугольника. В данной работе при реализации варианта I построения сетки было положено $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l_1+l_3)}{2m_1} \cdot \frac{(l_2+l_4)}{2m_2}}$. Опять-таки, если есть веские причины, величины h_1 и h_2 в этом варианте алгоритма можно брать различными. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных в ячейке Ω_j примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega_j \subset \Omega, \\ u = g(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega \cap \delta\Omega_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta\Omega_j$ — сторона граничной ячейки, расположенная на границе области.

В каждой j -й ячейке сетки приближенное решение u_{hj} задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов четвертой степени от двух переменных. Здесь в качестве базисных элементов ϕ_i ($i = 1, \dots, 15$) взяты мономы:

$$\begin{aligned} u_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{15} b_{ij} \phi_i = & b_{1j} + b_{2j}y_1 + b_{3j}y_2 + b_{4j}y_1^2 + b_{5j}y_2^2 + \\ & b_{6j}y_1y_2 + b_{7j}y_1^2y_2 + b_{8j}y_1y_2^2 + b_{9j}y_1^2y_2^2 + b_{10j}y_1^3 + b_{11j}y_2^3 + b_{12j}y_1^3y_2 + \\ & b_{13j}y_1y_2^3 + b_{14j}y_1^4 + b_{15j}y_2^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты b_{ij} в методе КНН находятся из переопределенной системы уравнений, состоящей в каждой ячейке из уравнений коллокации, условий согласования (глобального решения задачи, искомого в виде кусков, связанных с центром соответствующей им ячейки) на общих сторонах, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной [1, 4, 8, 10].

Определим по следующему алгоритму расстановку точек коллокации, записи условий согласования в любой ячейке или краевых условий для граничной ячейки. Поделим ее каждую сторону на четыре равных (“частичных”) отрезка. В середине каждого частичного отрезка запишем условия согласования или, соответственно, краевые условия, если взятая сторона принадлежит внешней границе.

Для расстановки точек коллокации в любой ячейке соединим отрезками прямых расположенные на ее левой стороне точки записи условий согласования (или краевых условий в случае граничной ячейки) с соответствующими точками на ее правой стороне. Затем каждый такой полученный отрезок поделим на четыре равных частичных отрезка. В середине каждого частичного отрезка запишем уравнения коллокации. Сформулированный алгоритм однозначно определяет в каждой ячейке координаты y_1, y_2 точек коллокации, записи условий согласования и краевых условий.

На рисунке 2 изображен фрагмент расчетной области, покрытой квазирегулярной сеткой с четырехугольными ячейками, в которых по описанному выше правилу расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. Для краткости изложения этот алгоритм построения сетки и расстановки точек, в которых записываются уравнения приближенной задачи, назовем вариантом I.

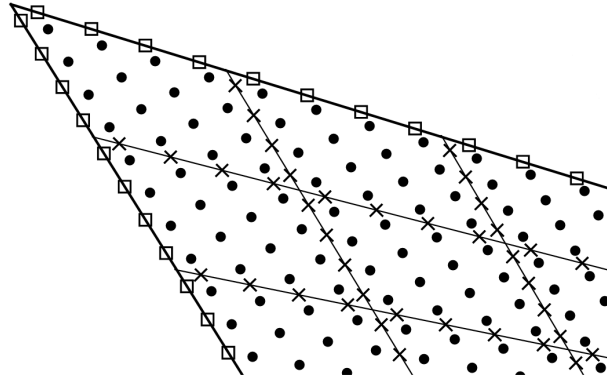


Рис. 2. Фрагмент расчетной области. Здесь • обозначает точки записи уравнений коллокации; × — точки записи условий согласования; □ — точки записи краевых условий

Fig. 2. The fragment of the numerical domain. The symbol • denotes the collocation points; × — the matching points; □ — the points for record of the boundary conditions

Уравнения коллокации в каждой ячейке выписываются в 16 точках коллокации и имеют вид:

$$\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_{1c}, y_{2c}), x_2(y_{1c}, y_{2c})), \quad (5)$$

где (y_{1c}, y_{2c}) , $(c = 1, \dots, 16)$ — точки коллокации.

В качестве условия согласования решения в четырех указанных выше точках согласования на каждой общей стороне между соседними ячейками требуем непрерывность линейной комбинации с весами функции u и ее производной по нормали

$$k_1 \frac{\partial u^+}{\partial n_j} + k_2 u^+ = k_1 \frac{\partial u^-}{\partial n_j} + k_2 u^-. \quad (6)$$

Здесь n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, u^+ и u^- — пределы значений функции в точке при ее стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки, соответственно; k_1, k_2 — весовые параметры.

Если сторона ячейки совпадает с некоторым куском границы области, в четырех указанных выше точках на ней выпишем краевые условия

$$k_3 u = k_3 g(x_1, x_2), \quad (7)$$

где k_3 — весовой параметр краевого условия в переопределенной системе уравнений.

В каждой ячейке, объединяя уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов b_{ij} получим переопределенную СЛАУ вида

$$\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} = F_l, \quad l = 1, \dots, 32, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

которую для краткости назовем “локальной”, поскольку она определяет локальное решение в окрестности начала системы координат в ячейке. Для того, чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = \sum_{l=1}^{32} \left(\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} - F_l \right)^2. \quad (9)$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи. Решение системы (8) на каждой итерации находится из условия минимума функционала Φ по коэффициентам b_{ij} , $i = 1, \dots, 15$ [1,8,9,11]. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области (глобальная СЛАУ), решается в итерационном процессе Гаусса–Зейделя. В ней одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (8) во всех ячейках области. Здесь и далее в условиях согласования значения решения в соседних ячейках брались с предыдущей итерации, если они не были сосчитаны на текущей итерации, или в противном случае их значения с текущей итерации. При построении решения в каждой ячейке матрица системы из 32 уравнений приводится к верхнетреугольному виду ортогональным методом Гивенса [4,9].

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{ij} |b_{ij}^{n+1} - b_{ij}^n| < \epsilon, \quad (10)$$

b_{ij}^n — i -й ($i = 1, \dots, 15$) коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации. Величина ϵ — заданная константа, называемая псевдопогрешностью решения. Ее значение выбирается таким, чтобы погрешность решения глобальной СЛАУ была существенно меньше погрешности аппроксимации исходной задачи.

Вариант II. Как уже было отмечено в [4], в случае наличия на границе области точек ее излома желательно изначально построить сетку так, чтобы они оказались на координатных линиях сетки. При решении задачи на последовательности сеток с кратным измельчением ячеек точки излома границы останутся на координатных линиях сетки. Иначе изначально и при дальнейшем измельчении ячеек будут присутствовать маленькие четырехугольные ячейки сетки. Из дальнейшего изложения будет ясно, что наличие таких ячеек зачастую уменьшает точность приближенного решения задачи, а также усложняет алгоритм построения сетки. Сначала одну из сторон четырехугольника расположим на оси x_1 . Впишем заданную область в прямоугольник, чтобы после покрытия его регулярной сеткой с прямоугольными ячейками размера $2h_1 \times 2h_2$, все вершины четырехугольника оказались на координатных линиях сетки. Для этого две противоположные стороны прямоугольника возьмем равными высоте, опущенной на ось x_1 из вершины четырехугольника с

максимальной координатой по оси x_2 . В результате три вершины четырехугольника будут располагаться на горизонтальных координатных линиях сетки. Чтобы поместить оставшуюся четвертую вершину на вертикальную координатную линию, распорядимся величинами шага сетки $2h_1$ и длиной стороны прямоугольника, лежащей на оси x_1 (рис. 3). В данной работе при численном решении задачи применялся многосеточный комплекс, в котором самая грубая сетка бралась размера 5×5 .

Прямоугольные ячейки, которые полностью расположены внутри области назовем внутренними (рис. 3, ячейки 2, 3, 7, 8, 11, 12). Ячейки, пересеченные границей области, для краткости здесь назовем граничными (рис. 3, ячейки 1, 4, 5, 6, 9, 10, 13-20). Стоит отметить, что у внутренней прямоугольной ячейки одна из сторон может полностью совпадать с границей области $\delta\Omega$ (рис. 3, ячейки 2, 3). Часть граничной ячейки, отсеченную границей и лежащую внутри области, назовем нерегулярной ячейкой (далее, н-ячейка). Н-ячейка может быть либо треугольного вида (далее треугольная ячейка (рис. 3, ячейки 5, 14, 18, 20)), либо четырехугольного вида (далее четырехугольная ячейка (рис. 3, ячейки 1, 4, 6, 9, 10, 13, 15-17, 19)). При этом часть граничной ячейки, лежащую вне области, назовем законтурной. Прямоугольную ячейку сетки, от которой границей области отсечена н-ячейка, назовем коротко материнской. Назовем внешней стороной н-ячейки часть границы $\delta\Omega$ области Ω , которая оказалась внутри граничной ячейки. Стороны и отсеченные границей части сторон граничной ячейки, расположенные внутри области, назовем внутренними сторонами н-ячейки. Решение в прямоугольных ячейках, которые не содержат какую-либо часть области Ω , естественно, не строим.

Для удобства реализации метода, как и выше, по формулам (2) введем локальные координаты в каждой ячейке области. Координаты центра ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат вершин прямоугольной ячейки (для граничных ячеек — вершин материнской ячейки).

Если в расчетной сетке имеется или появилась после измельчения шагов сетки маленькая треугольная н-ячейка, то глобальная СЛАУ задачи, как правило, становится хуже обусловленной. Такие ячейки могут быть причиной низкой точности приближенного решения задачи на содержащей их сетке. Чтобы избежать эту неприятность, здесь используется идея присоединения таких треугольных н-ячеек к соседним четырехугольным ячейкам (рис. 3). Предлагается треугольную н-ячейку всегда присоединять к той соседней четырехугольной ячейке, с которой она имеет наибольшей длины сторону среди ее сторон, общих с другими соседними четырехугольными ячейками. Если треугольная н-ячейка имеет одинаковую длину с двумя общими сторонами соседних с ней ячеек, то ее присоединяем к ячейке с наименьшим индексом j . Через эту сторону в присоединенную треугольную(ые) н-ячейку(ки) продолжается решение из ячейки, к которой ее (их) присоединили. При этом согласно сформулированному правилу к ячейке могут быть присоединены одна, две или три малые треугольные н-ячейки. В этом случае внешняя сторона объединенной ячейки состоит из внешних сторон всех объединенных в ней ячеек. На этой внешней стороне расставляются столько точек для записи краевых условий, чтобы в сумме число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в объединенной ячейке было равно 32. Эти краевые условия включаются в переопределенную систему уравнений этой ячейки. Для простоты реализации ва-

рианта II, считаем, что центр объединенной ячейки совпадает с центром исходной ячейки, к которой присоединяли ячейку(ки). Объединенную ячейку также считаем н-ячейкой.

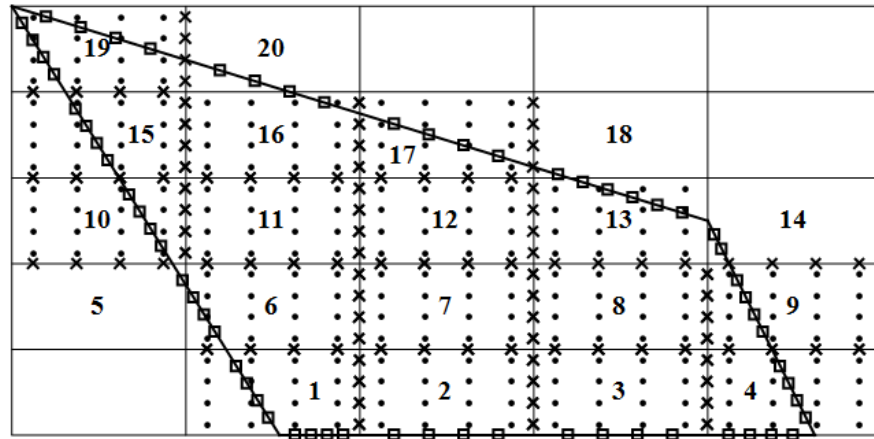


Рис. 3. Расчетная область (размер сетки 5×5). Здесь • обозначает точки записи уравнений коллокации; × — точки записи условий согласования; □ — точки записи краевых условий. Треугольная н-ячейка 5 присоединяется к ячейке 6, ячейки 14 и 18 к ячейке 13, ячейка 20 к ячейке 16

Fig. 3. The numerical domain (the size of grid 5×5). The symbol • denotes the collocation points; × — the matching points; □ — the points for record of the boundary conditions. The triangle irregular cell number 5 joins to cell number 6, the cells with numbers 14 and 18 join to cell number 13, the cell number 20 joins to cell number 16

Левую и правую стороны всех прямоугольных ячеек (в случае граничных ячеек — левую и правую стороны материнской ячейки (для объединенной н-ячейки — левую и правую стороны исходной ячейки, к которой присоединяли н-ячейку(ки))) поделим на четыре равных отрезка. Каждый отрезок прямой, соединяющий соответствующие середины этих отрезков, поделим на четыре равных частичных отрезка. Середину каждого такого частичного отрезка возьмем в качестве точки коллокации (всего 16 точек коллокации в каждой ячейке, рис. 3), в которой запишем уравнение коллокации.

Если у ячейки есть соседняя ячейка, то их общую сторону (в случае граничных ячеек — общую сторону материнской ячейки) поделим на четыре равных отрезка. В середине каждого отрезка запишем условия согласования (рис. 3). Очевидно, что в некоторых граничных н-ячейках точки для записи уравнений коллокации или условий согласования могут быть вне области Ω . Чтобы такой подход был применим, как и в случае других численных методов, предполагается, что решаемое уравнение справедливо не только в расчетной области, но и в малой окрестности ее границы.

Если н-ячейка или прямоугольная внутренняя ячейка имеет три соседние ячейки, то ее внешнюю сторону разобьем на пять равных отрезков. В концах второго и четвертого отрезков запишем краевые условия (равномерная расстановка четырех точек на отрезке), (рис. 3, прямоугольные внутренние ячейки 2, 3; н-ячейки 6, 9, 10, 15, 16, 17). Если внешняя сторона состоит из двух частей, то на каждой ее части равномерно расставим по две точки для записи краевых условий. Если одна из

этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда в середине этой части внешней стороны записываем одно краевое условие, а на другой части внешней стороны аналогично равномерно расставим три точки для записи краевых условий.

Если n -ячейка имеет две соседние ячейки, являясь при этом треугольной (это, согласно изложенному выше, возможно только в том случае, если она объединенная), то на внешней стороне этой ячейки равномерно расставим восемь точек для записи краевых условий. Также возможен случай, когда n -ячейка является четырехугольной. Тогда внешняя сторона этой n -ячейки состоит из двух частей, поэтому на каждой такой части равномерно расставим по четыре точки для записи краевых условий (рис. 3, n -ячейки 1, 4, 19). Если одна из этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда на этой части внешней стороны равномерно расставим две точки для записи краевых условий, а на другой шесть (рис. 3, n -ячейка 13).

Если треугольная n -ячейка имеет только одну соседнюю ячейку, то на каждой части ее внешней стороны (состоящей из двух частей), равномерно расставим по шесть точек для записи краевых условий. Если четырехугольная n -ячейка имеет только одну соседнюю ячейку, то на каждой части ее внешней стороны (состоящей из трех частей), равномерно расставим по четыре точки для записи краевых условий. Если одна из этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда на этой части внешней стороны равномерно расставим две точки для записи краевых условий, а на других двух по пять.

На рисунке 3 изображена расчетная область, покрытая сеткой с прямоугольными ячейками. В получившихся расчетных ячейках по сформулированным правилам расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

1.2. Численные эксперименты и результаты расчетов

В численных экспериментах на сходимость приближенного решения на последовательности сеток при измельчении шагов сетки вдвое рассматривалась задача (1) в четырехугольных областях. В качестве тестовых решений здесь брались аналитические функции, подстановкой которых в уравнения подбирались их правая часть (в том числе в пункте 2) для того, чтобы эти функции удовлетворяли рассматриваемым дифференциальным уравнениям. Краевые условия брались из значений тестовых функций и их производных на $\delta\Omega$. Во всех представленных ниже таблицах в этом пункте приведены значения погрешности приближенного решения в равномерной норме

$$\|u - u_h\|_c = \max_{j=1, \dots, N} \max_{s=1, \dots, L_j} |u(x_{1s}, x_{2s}) - u_{hj}(x_{1s}, x_{2s})|, \quad (11)$$

где N — количество расчетных ячеек в области, L_j — количество равномерно распределенных точек (x_{1s}, x_{2s}) , взятых в j -й ячейке для подсчета в них погрешности, u — точное решение задачи (1), u_h — приближенное решение в области Ω , u_{hj} — приближенное решение в j -й ячейке. Порядок сходимости численного решения определяется следующим образом:

$$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}, \quad (12)$$

где E_{N_1, N_2} — значение ее абсолютной погрешности на сетке размера $N = N_1 \times N_2$, $E_{N_1/2, N_2/2}$ — значение ее абсолютной погрешности на сетке $N_1/2 \times N_2/2$. В случае варианта II порядок сходимости численного решения вычислялся по формуле (12) формально. Так как в случае нерегулярной сетки, строго говоря, определение порядка сходимости отсутствует. Тем не менее величина (12) показывает порядок малости погрешности решения относительно малой величины шага сетки. В численных экспериментах в одном случае были взяты следующие значения параметров: $L_j = 100$, $\epsilon = 10^{-14}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5h$ в случае варианта I и $k_2 = 5(|\cos(\alpha)|h_1 + |\sin(\alpha)|h_2)$, где $n_j = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ — вектор внешней нормали к стороне j -й ячейки в случае варианта II, $k_3 = 1.5$. Во всех численных экспериментах здесь в начальном приближении решения взяты $b_{ij} = 0.4$, где $i = 1, \dots, 15$, $j = 1, \dots, N$. Обозначим через N_{iter} — количество итераций. В расчетах использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и на промежуточных сетках комплекса метода ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [11–13].

Из приведенных таблиц 1 – 3 видно, что численное решение имеет порядок сходимости не хуже четвертого. В рамках численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \sin(x_2)$ в области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.5)$, $(0.2, 0.8)$, на сетке 80×80 была достигнута точность решения $1.77 \cdot 10^{-12}$ за 729 итераций в случае применения варианта I. Решение в случае применения варианта II на сетке 80×80 получено с точностью $2.90 \cdot 10^{-13}$, для ее достижения потребовалось 613 итераций. Следует отметить, что приближенная задача Дирихле для уравнения Пуассона в методе КНН достаточно хорошо обусловлена [14]. В результате многих численных экспериментов с вариантом I установлено, что в случае хорошо обусловленной приближенной задачи наблюдается сходимость численного решения даже при появлении таких вытянутых ячеек, наличие которых в случае плохо обусловленной задачи приводит к расходимости численного решения. Однако в последнем случае в численных экспериментах по варианту II метода КНН нередко эффективно строилось решение приближенной задачи. Здесь в качестве плохо обусловленных рассматривались приближенные задачи для бигармонического уравнения. Некоторые характерные сравнительные результаты численных экспериментов приведены далее.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.3)$, $(-0.3, 0.9)$

Table 1. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.3)$, $(-0.3, 0.9)$

$N_1 \times N_2$	Version I			Version II		
	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$8.19 \cdot 10^{-9}$	63	—	$4.93 \cdot 10^{-8}$	160	—
20×20	$3.41 \cdot 10^{-10}$	120	4.58	$3.95 \cdot 10^{-9}$	162	3.64
40×40	$1.75 \cdot 10^{-11}$	321	4.28	$1.47 \cdot 10^{-10}$	239	4.74
80×80	$3.92 \cdot 10^{-13}$	729	5.48	$5.61 \cdot 10^{-12}$	908	4.71

Таблица 2. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, имеющим большие градиенты в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1.2, 0.3)$, $(0.9, 0.7)$. Здесь применялся вариант I при $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$

Table 2. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, that has large gradients in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1.2, 0.3)$, $(0.9, 0.7)$. The I version was used here at $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$1.55 \cdot 10^1$	68	—
20×20	$8.65 \cdot 10^{-2}$	123	4.16
40×40	$5.03 \cdot 10^{-3}$	354	4.10
80×80	$3.14 \cdot 10^{-4}$	747	4.00

Таблица 3. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 8.0)$, $(-0.3, 10.0)$ при применении варианта I

Table 3. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 8.0)$, $(-0.3, 10.0)$ with the use of I version

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
5×25	$4.04 \cdot 10^{-6}$	81	—
10×50	$1.63 \cdot 10^{-7}$	89	4.63
20×100	$7.32 \cdot 10^{-9}$	226	4.47

2. Бигармоническое уравнение

2.1. Постановка задачи и описание метода

Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) упругой, изотропной выпуклой четырехугольной пластины, закрепленной на краях и находящейся под действием поперечных нагрузок произвольного вида. При этом нагрузки такие, что материал деформированной пластины остается упругим. Пластина предполагается тонкой, что позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких пластин. Следуя Тимошенко [15], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, определив которые можно будет полностью восстановить НДС пластины. В этом случае величины прогибов пластины определяются из решения бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (13)$$

В (13) $w(x_1, x_2)$ — прогиб срединной поверхности пластины, $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — жесткость пластины при изгибе, h — толщина пластины, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины, четырехугольная область Ω — проекция срединной поверхности пластины

ны на плоскость (x_1, x_2) . На каждом куске границы (края) пластины может быть задано одно из следующих условий закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{— защемленный край;} \quad (14)$$

$$w = 0, \quad M_n w = 0 \quad \text{— шарнирно закрепленный край;} \quad (15)$$

$$M_n w = 0, \quad V_n w = 0 \quad \text{— свободный край.} \quad (16)$$

Здесь и далее n — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$, M_n — дифференциальный оператор второго порядка, V_n — дифференциальный оператор третьего порядка. Здесь дифференциальные операторы M_n , V_n взяты из [15]. Условие (16) может быть задано только на некоторой части границы, а на оставшейся ее части должны быть заданы другие условия, иначе задача некорректна.

Область Ω покрывается расчетной сеткой с прямоугольными ячейками Ω_j ($j=1, \dots, N$, N — число расчетных ячеек сетки). Далее для численного решения задачи применим алгоритмы, аналогичные описанным выше вариантам I и II с использованием пространства полиномов 4 степени. Алгоритмы, примененные к задаче (13) – (16), будут отличаться от них в записи уравнений дискретной задачи.

В каждой ячейке Ω_j делается переход к локальным переменным (y_1, y_2) . Для определения решения w_j в Ω_j на k -й итерации выписываются:

уравнения коллокации

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_2^4} = h_1^2 h_2^2 \frac{q(y_1, y_2)}{D}, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_j \quad (17)$$

— требования удовлетворения приближенным решением уравнению (17) в заданных точках коллокации;

условия согласования

$$w_j^k + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_j^k}{\partial n} = w_{adj} + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_{adj}}{\partial n}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 w_j^k}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_j^k}{\partial n^3} = \frac{\partial^2 w_{adj}}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_{adj}}{\partial n^3}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega \quad (19)$$

— условия склейки решения w_j с решением в соседней ячейке w_{adj} в точках согласования на общей с соседней ячейкой стороне, где $h_n = h_1$, если направление n совпадает с направлением оси y_1 , и $h_n = h_2$, если направление n совпадает с направлением оси y_2 ;

краевые условия в указанных выше точках записи краевых условий.

В данном случае в каждой ячейке выписывается переопределенная система из 48 уравнений: 16 уравнений коллокации и по два уравнения в каждой точке для записи условий согласования или краевых условий.

2.2. Численные эксперименты

2.2.1. Пластина под специальной нагрузкой

Рассмотрим шарнирно закрепленную на краях прямоугольную пластину размера $d_1 \times d_2$, находящуюся под действием нагрузки q (Па) вида

$$q = 10^5 \sin\left(\frac{\pi x_1}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{d_2}\right). \quad (20)$$

В этом случае задача имеет точное аналитическое решение [15]

$$w(x_1, x_2) = \frac{q d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (21)$$

Пусть проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) имеет форму четырехугольной области Ω с вершинами: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 3)$, $(-3, 9)$. Для того, чтобы воспользоваться приведенным аналитическим решением в качестве теста, в численном эксперименте зададим на границе $\delta\Omega$ точные значения функции w (21) и изгибающего момента $M_n w$. Ранее в [5] методом КНН была решена задача для прямоугольной пластины. В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 13$, $d_2 = 9$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $\epsilon = 10^{-10}$. Здесь значения параметров p_1 и p_2 в условиях согласования взяты из работы [5]. Для определения порядка сходимости проведены численные эксперименты на последовательности сеток с уменьшением шага сетки вдвое. Для расчета погрешности в каждой расчетной ячейке равномерно распределялись 100 точек. Относительная погрешность численного решения во всей области вычислялась в этих точках по формуле

$$E_{N_1, N_2} = \frac{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2) - w_h(x_1, x_2)|}{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2)|}, \quad (22)$$

где $w_h(x_1, x_2)$ — приближенное решение, полученное методом КНН, $N = N_1 \times N_2$ — размер сетки. Порядок сходимости решения в данной работе вычислялся по формуле (12). В расчетах, как и выше, использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и метода Крылова [11–13].

В таблице 4 приведены результаты численных экспериментов, полученные применением вариантов I и II метода КНН. При измельчении шагов сетки в случае варианта I появляются сильно вытянутые ячейки, из-за чего ухудшается обусловленность глобальной СЛАУ. В итоге уменьшается точность построенного решения. В этих случаях целесообразно использовать для решения задач вариант II.

Вычислим на каждой сетке N_c — количество ячеек, в которых числа обусловленности локальных переопределенных СЛАУ имеют соответственно порядки 10^2 , 10^3 и 10^4 . В таблице 5 приведены значения N_c на последовательности сеток для вариантов I и II. Как ранее было установлено в работе [14], обусловленность глобальной СЛАУ жестко коррелирует с обусловленностью локальных СЛАУ. Поэтому плохой обусловленности локальных СЛАУ соответствует плохая обусловленность глобальной СЛАУ. Из этой таблицы видно, что в случае применения варианта I обусловленность локальных СЛАУ (следовательно, и глобальной СЛАУ) хуже, чем в случае применения варианта II.

Таблица 4. Результаты численного эксперимента при применении вариантов I и II

Table 4. The results of the numerical experiment with the use of I and II versions

$N_1 \times N_2$	Version I			Version II		
	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$1.52 \cdot 10^{-3}$	121	—	$1.78 \cdot 10^{-3}$	253	—
20×20	$5.05 \cdot 10^{-4}$	281	1.58	$1.48 \cdot 10^{-4}$	508	3.58
40×40	$1.45 \cdot 10^{-4}$	721	1.80	$6.81 \cdot 10^{-6}$	996	4.44
80×80	—	—	—	$6.98 \cdot 10^{-7}$	1888	3.28

Таблица 5. Количество ячеек N_c в вариантах I и II метода КНН, локальные СЛАУ в которых имеют числа обусловленности порядка $10^2, 10^3, 10^4$ Table 5. The amount of cells N_c in the I and II versions of CLR method in which local SLAE have the condition numbers of order $10^2, 10^3, 10^4$

$N_1 \times N_2$	N_c with conditionality of order		
	10^2	10^3	10^4
Version I			
10×10	74	26	0
20×20	324	56	20
40×40	548	909	143
80×80	0	6084	316
Version II			
10×10	51	0	0
20×20	188	2	0
40×40	686	52	0
80×80	2718	169	22

Хотя, как это следует из приведенных выше примеров, нередко могут иметь место задачи, для решения которых вариант I может быть эффективен. При этом, когда область близка к прямоугольной, результаты численных экспериментов в вариантах I и II близки друг к другу. Пусть теперь проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) имеет форму четырехугольной области Ω с вершинами: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(9, 10)$, $(1, 10)$. На сетке 80×80 была достигнута точность решения $5.16 \cdot 10^{-5}$ за 1321 итераций в случае применения варианта I. В свою очередь, в случае применения варианта II, на сетке 80×80 была достигнута точность решения $1.02 \cdot 10^{-5}$ за 1452 итераций. Естественно, что могут быть предложены какие-то другие варианты метода КНН, в которых, например, вытянутые четырехугольные ячейки присоединяются к соседним с целью уменьшения обусловленности приближенной задачи [4]. Скорее всего алгоритмы построения расчетной сетки в таких вариантах окажутся сложнее по сравнению с рассмотренными в данной работе. Из полученных результатов видно, что сходимость решения начинается уже на достаточно грубых сетках.

2.2.2. Пластина, защемленная по трем краям, вариант II

Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная пластина находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. Вершины четырехугольника в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 8)$, $(3, 8)$, т.е. в данном случае четырехугольник — трапеция. Три края пластины защемлены, а оставшийся край свободен.

Для иллюстрации напряженного состояния пластины используем поведение в области решения задачи величины интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_x = -\bar{E}(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad \sigma_y = -\bar{E}(w_{yy} + \nu w_{xx}), \quad \sigma_{xy} = -\bar{E}(w_{xy}), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (23)$$

Отметим, что одним из важных преимуществ предложенного варианта метода КНН является то, что легко можно вычислить любые производные полученного численного решения, так как это решение кусочно-полиномиальное.

На рис. 4 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 0.1$ МПа, $\epsilon = 10^{-10}$. В расчетах использована сетка 20×20 .

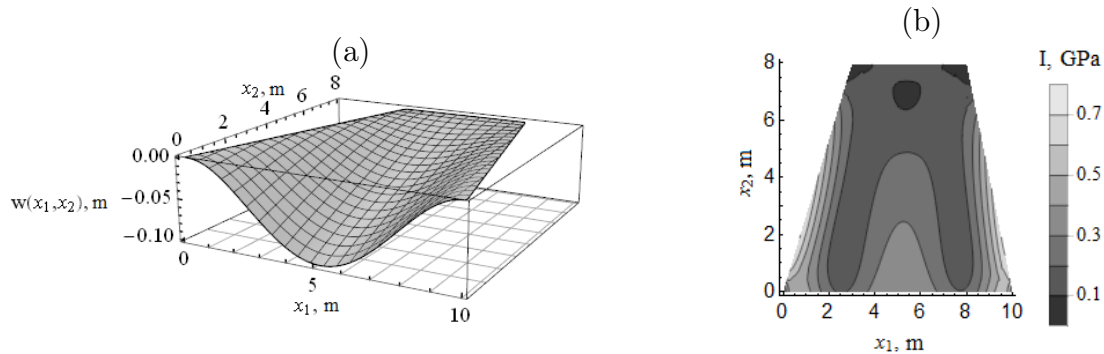


Рис. 4. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (три края защемлены, другой край свободен) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 4. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the three edges are clamped, another one is free) and stress intensity I (b)

Для наглядности слева на рисунках 4 – 7 по вертикальной оси взят увеличенный масштаб.

2.2.3. Пластина с двумя свободными краями, вариант II

Пример 1. Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная пластина находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. Вершины четырехугольника в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 5)$, $(2, 8)$. Два края пластины шарнирно закреплены, а другие два края свободны.

На рис. 5 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 30$ КПа, $\epsilon = 10^{-10}$. В расчетах использована сетка 20×20 .

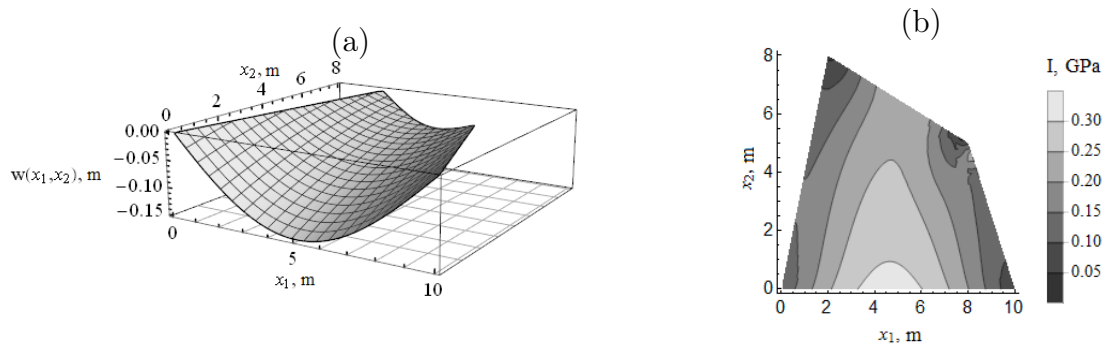


Рис. 5. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два края шарнирно закреплены, другие два края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 5. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two edges are simply supported, another two are free) and stress intensity I (b)

Пример 2. Рассмотрим аналогичный эксперимент, когда два края защемлены, а два другие края свободны. Очевидно, что в этом случае прогиб будет меньше (рис. 6), чем в предыдущем случае.

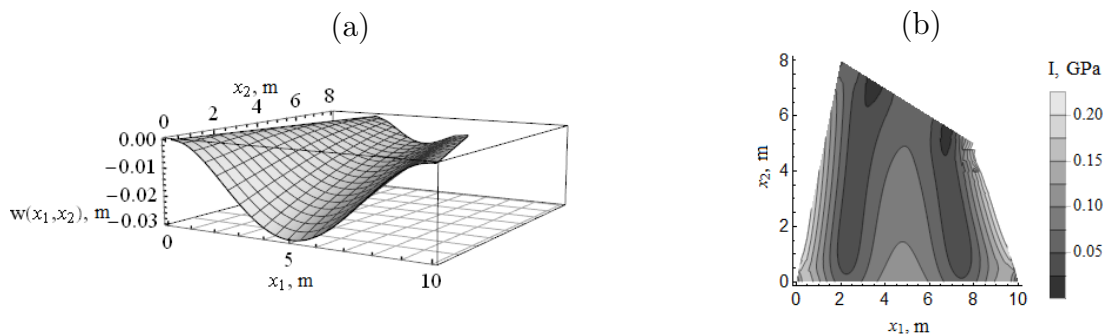


Рис. 6. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два края защемлены, а другие два края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 6. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two edges are clamped, another two are free) and stress intensity I (b)

Пример 3. Теперь рассмотрим эксперимент в той же области, но нагрузка теперь $q = 3$ КПа, два соседних края шарнирно закреплены, а два других соседних края свободны. В этом случае задача хуже обусловлена, чем в предыдущих случаях. Поэтому потребовалось больше итераций, чтобы итерационный процесс сошелся при том же значении $\epsilon = 10^{-10}$, что и в предыдущих случаях. На рис. 7 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$. В расчетах использована сетка 10×10 .

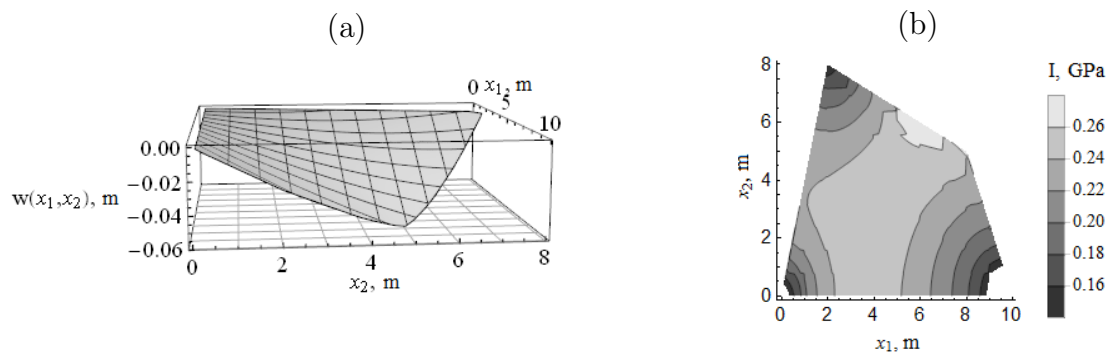


Рис. 7. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два соседних края шарнирно закреплены, другие два соседних края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 7. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two adjacent edges are clamped, another two are free) and stress intensity I (b)

Заключение

В представленной работе реализованы два различных подхода к построению вариантов метода КНН решения краевых задач для PDE в четырехугольных выпуклых областях. Показано, что приближенные решения задач, полученные применением этих вариантов, сходятся с повышенным порядком, а в случаях тестовых численных экспериментов они с высокой точностью совпадают с известными решениями. Важным обстоятельством является наличие кусочно-аналитического решения задачи в методе КНН, которое не столь жестко, как в некоторых других методах, связано с формой ячейки расчетной сетки и с конфигурацией узлов сетки. Это позволяет внутри области брать регулярную сетку, а на границе относительно просто использовать “одинарный слой” n -ячеек. Кроме того, регулярность сетки внутри области существенно упрощает программную реализацию решения приближенной задачи, например, в сравнении со случаем, когда нужно запрограммировать и реализовать для каждой ячейки поиск соседних ячеек на нерегулярной сетке. Последнее приводит к увеличению программы и времени решения задачи на ЭВМ.

Установлено, что обусловленность приближенной задачи зависит прежде всего от обусловленности дифференциальной задачи, которую она аппроксимирует, от геометрии области и существенно от способа построения расчетной сетки. В конечном итоге от указанных факторов зависит возможность эффективного численного решения методом КНН краевых задач для уравнений с частными производными. Как показали численные эксперименты, с применением варианта II алгоритма построения сетки за счет нового подхода построения сетки и присоединения треугольных n -ячеек к соседним ячейкам почти всегда удавалось уменьшить обусловленность СЛАУ приближенной задачи по сравнению со случаем применения варианта I. Поэтому для хорошо обусловленных задач предпочтительным является вариант I ввиду его простоты, а для плохо обусловленных задач рекомендуется применять вариант II.

Показанная здесь возможность решать задачи теории упругости с повышенной точностью в неканонических областях имеет самостоятельное прикладное значение.

С другой стороны, проделанная работа может рассматриваться как методическая с точки зрения поиска эффективных и достаточно просто реализуемых алгоритмов решения с повышенной точностью PDE в неканонических областях с более сложными границами, состоящими из сочетания криволинейных и полигональных участков. Скорее всего, в этом случае будет эффективно сочетание разных подходов, которые проверялись в [4], в данной работе и, возможно, появятся в ходе дальнейшего поиска.

Авторы выражают благодарность Идимешеву С.В. за интерес, проявленный к данной работе, и ее полезное обсуждение.

Список литературы / References

- [1] Слепцов А. Г., “Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач”, *Моделирование в механике*, **5(22)**:2 (1991), 101–126; [Sleptsov A. G., “Kollokatsionno-setochnoe resheniya ellepticheskikh zadach”, *Modelirovanie v mekhanike*, **5(22)**:2 (1991), 101–126, (in Russian).]
- [2] Слепцов А. Г., Шокин Ю. И., “Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:5 (1997), 572–586; English transl.: Sleptsov A. G., Shokin Yu. I., “An adaptive grid-projection method for elliptic problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **37** (1997), 558–571.
- [3] Беляев В. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей”, *Вычислительные технологии*, **5**:4 (2000), 12–21; [Belyaev V. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshikh kvadratov na adaptivnykh setkakh v oblasti s krivolineinoi granitse”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **5**:4 (2000), 12–21, (in Russian).]
- [4] Шапеев В. П., Беляев В. А., “Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей”, *Вычислительные технологии*, **21**:5 (2016), 95–110; [Shapeev V. P., Belyaev V. A., “Varianty metoda kollokatsiy i naimenshikh nevyazok povushennoy tochnosti v oblasti s krivolineinoi granitse”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **21**:5 (2016), 95–110, (in Russian).]
- [5] Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин”, *Вычислительные технологии*, **18**:6 (2013), 31–43; [Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **18**:6 (2013), 31–43, (in Russian).]
- [6] Семин Л. Г., Слепцов А. Г., Шапеев В. П., “Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса”, *Вычисл. технологии*, **1**:2 (1996), 90–98; [Semin L. G., Sleptsov A. G., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy-naimenshikh kvadratov dlya uravneniy Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **1**:2 (1996), 90–98, (in Russian).]
- [7] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов”, *Труды ИММ УрО РАН*, **14**:1 (2008), 41–60; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “Development of the collocations and least squares method”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **261** (2008), 87–106.
- [8] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:10 (2010), 1758–1770; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 1670–1681.
- [9] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В., “Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса”, *Вычислит. методы и программирование*, **14** (2013), 306–322; [Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok dlya trekhmernykh

- uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, **14** (2013), 306–322, (in Russian).]
- [10] Shapeev V., “Collocation and least residuals method and its applications”, *EPJ Web of Conferences*, **108**:01009 DOI: 10.1051/epjconf/201610801009 (2016).
- [11] Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., “О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса”, *Вычислит. методы и программирование*, **18** (2017), 80–102; [Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P., “O kombinirovaniy sposobov uskoreniya iteratsionnyh processov pri chislennom reshenii uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, **18** (2017), 80–102, (in Russian).]
- [12] Слепцов А. Г., “Об ускорении сходимости линейных итераций И”, *Моделирование в механике*, **3(20)**:5 (1989), 118–125; [Sleptsov A. G., “Ob uskorenii skhodimosti lineinykh iteratsiy И”, *Modelirovaniye v mekhanike*, **3(20)**:5 (1989), 118–125, (in Russian).]
- [13] Saad Y., *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester University Press, Manchester, 1991.
- [14] Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А., “Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса”, *Вычислительные технологии*, **12**:3 (2007), 1–19; [Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A., “Issledovanie svoystv metoda kollokatsii i naimenshih kvadratov resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **12**:3 (2007), 1–19, (in Russian).]
- [15] Timoshenko S. P. Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2dn edn., McGraw-Hill Book Company, 1959.

Belyaev V. A., Shapeev V. P., "Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 629–648.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648

Abstract. The new versions of the collocations and least residuals (CLR) method of high-order accuracy are proposed and implemented for the numerical solution of the boundary value problems for PDE in the convex quadrangular domains. Their implementation and numerical experiments are performed by the examples of solving the biharmonic and Poisson equations. The solution of the biharmonic equation is used for simulation of the stress-strain state of an isotropic plate under the action of the transverse load. Differential problems are projected into the space of fourth-degree polynomials by the CLR method. The boundary conditions for the approximate solution are put down exactly on the boundary of the computational domain. The versions of the CLR method are implemented on the grids, which are constructed by two different ways. In the first version, a “quasiregular” grid is constructed in the domain, the extreme lines of this grid coincide with the boundaries of the domain. In the second version, the domain is initially covered by a regular grid with rectangular cells. Herewith, the collocation and matching points that are situated outside the domain are used for approximation of the differential equations in the boundary cells that had been crossed by the boundary. In addition the “small” irregular triangular cells that had been cut off by the domain boundary from rectangular cells of the initial regular grid are joined to adjacent quadrangular cells. This technique allowed to essentially reduce the conditionality of the system of linear algebraic equations of the approximate problem in comparison with the case when small irregular cells together with other cells were used as independent ones for constructing an approximate solution of the problem. It is shown that the approximate solution of problems converges with high order and matches with high accuracy with the analytical solution of the test problems in the case of the known solution in numerical experiments on the convergence of the solution of various problems on a sequence of grids.

Keywords: collocations and least residuals method, boundary value problem, non-canonical domain, irregular grid, high order approximation, Poisson’s equation, biharmonic equation

On the authors:

Vasily A. Belyaev, orcid.org/0000-0001-5901-2880,
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1 Institutskaya str., Novosibirsk, 630090, Russia,
e-mail: belyaevasily@mail.ru

Vasily P. Shapeev, orcid.org/0000-0001-6761-7273, Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1 Institutskaya str., Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk National Research University, 2 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: vshapeev@ngs.ru

©Кащенко А. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-649-654

УДК 517.9

Семейство негрубых циклов в системе двух связанных генераторов с запаздыванием

Кащенко А. А.

получена 15 июня 2017

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная динамика модели двух связанных генераторов с запаздывающей обратной связью. Эта модель имеет вид системы двух дифференциальных уравнений с запаздыванием. Функция обратной связи является нелинейной, финитной и гладкой. Главным предположением в задаче является то, что связь между генераторами достаточно малая. Асимптотическими методами исследуется существование релаксационных периодических решений данной системы. Для этого в фазовом пространстве исходной системы выделяется специальное множество. Затем находится асимптотика решений данной системы с начальными условиями из этого множества. С помощью этой асимптотики строится специальное отображение, описывающее в главном динамику исходной задачи. Доказывается, что все решения данного отображения являются негрубыми циклами периода два. В результате удается сформулировать условия на параметр связи, при выполнении которых исходная система имеет двухпараметрическое семейство негрубых неоднородных релаксационных периодических асимптотических по невязке решений.

Ключевые слова: большой параметр, релаксационное колебание, периодическое решение, асимптотика, запаздывание

Для цитирования: Кащенко А. А., "Семейство негрубых циклов в системе двух связанных генераторов с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:5** (2017), 649–654.

Об авторах:

Кащенко Александра Андреевна, orcid.org/0000-0003-3823-9351, канд. физ.-мат. наук, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Благодарности:

Исследование выполнено в рамках государственного задания, работа №1.6074.2017/П220.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t - T)). \quad (1)$$

Здесь u — скалярная функция, параметр запаздывания T и коэффициент λ положительны, а $F(u)$ — некоторая нелинейная функция. Предполагаем, что функция $F(u)$ является финитной, то есть для некоторого $p > 0$ имеет место равенство

$$F(u) = \begin{cases} f(u), & |u| < p, \\ 0, & |u| \geq p. \end{cases}$$

Уравнения такого вида возникают в электротехнике [1–3] и радиофизике [4, 5].

Будем предполагать, что параметр λ является достаточно большим:

$$\lambda \gg 1. \quad (2)$$

В [6, 7] было показано, что при условии невырожденности при всех достаточно больших $\lambda > 0$ (1) имеет одно или два устойчивых релаксационных периодических решения, и была найдена их асимптотика при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим систему из двух связанных уравнений вида (1) при условии (2).

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + u_1 &= \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 + u_2 &= \lambda F(u_2(t-T)) + \gamma(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где параметр связи γ положителен. Эта система, очевидно, имеет однородный ($u_1 \equiv u_2$) релаксационный цикл, однако его устойчивость или неустойчивость определяется величиной параметра γ . В работе [8] было показано, что при некоторых условиях на функцию $f(u)$ при $\gamma = \gamma_1(\ln \lambda)^{-1}$ (где $\gamma_1 > 0$) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ структура аттракторов (3) определяется аттракторами специальных одномерных отображений. Приведены соответствующие формулы для таких отображений и построена асимптотика решений (3). Также было доказано, что для каждого достаточно большого значения $\lambda > 0$ существует $\gamma_1^* > 0$ такое, что при всех $\gamma_1 > \gamma_1^*$ однородное периодическое релаксационное решение (3) будет устойчивым.

В данной работе исследуется нелокальная динамика системы (3) при условии

$$\gamma = \gamma_1 \lambda^{-\alpha}, \quad \gamma_1 > 0, \quad 1/2 < \alpha < 1. \quad (4)$$

Также предполагается, что функция $f(u)$ гладкая и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} uf(u) > 0, & 0 < |u| < p, \\ f(-p) = f(0) = f(p) = 0, \\ f(u) = \text{const}_1(p-u)^2, & 0 < p-u \ll 1, \\ f(u) = \text{const}_2(p+u)^2, & 0 < p+u \ll 1. \end{cases} \quad (5)$$

1. Метод исследования

Мы изучаем нелокальную динамику системы (3) при условиях (2), (4), (5) с помощью специального метода большого параметра [9, 10].

Опишем суть данного метода. В фазовом пространстве $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$ исходной системы выбираем множество $S(x)$, зависящее от параметра x . Далее находим асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ всех решений $u(t, \phi, \lambda) = (u_1(t, \phi, \lambda), u_2(t, \phi, \lambda))^T$ с начальными условиями $u(s, \phi) = \phi(s)$ из множества $S(x)$. Доказываем, что существует значение $\bar{x}$ такое, что каждое решение $u(t, \phi, \lambda)$ через некоторое время $t(\phi, \lambda)$ принадлежит множеству $S(\bar{x})$: $u(s + t(\phi, \lambda), \phi, \lambda) \in S(\bar{x})$. Это означает, что существует оператор последования Π такой, что

$$\Pi(\phi(s)) = u(s + t(\phi, \lambda), \phi), \text{ и } \Pi S(x) \subset S(\bar{x}).$$

По асимптотике решений аналитически получаем зависимость $\bar{x}$ от x в виде $\bar{x} = \psi(x) + o(1)$.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ – цикл отображения $\bar{x} = \psi(x)$, причем $|\psi'(x_1) \cdot \dots \cdot \psi'(x_k)| \neq 1$. Тогда для всех достаточно больших $\lambda > 0$ получаем $\Pi^k(x_1) \in S(x_1)$. Отсюда следует, что оператор Π^k имеет неподвижную точку. Следовательно, существует функция $\phi_*(s) \in S(x_1)$ такая, что $\Pi^k(\phi_*(s)) = \phi_*(s)$. Поэтому решение $u(t, \phi_*, \lambda)$ исходной системы периодическое с периодом $t(\phi_*, \lambda) + t(\Pi(\phi_*), \lambda) + \dots + t(\Pi^{k-1}(\phi_*), \lambda)$. Данное решение имеет ту же устойчивость, что и цикл $x_1, x_2, \dots, x_k$ отображения $\bar{x} = \psi(x)$.

Данный метод применялся в работах [11–14].

2. Динамика системы (3) при условиях (2), (4), (5)

Для исследования асимптотики решений (3) применим схему из предыдущего раздела. Определим множество $S(x) \subset C_{[-T, 0]}(\mathbb{R}^2)$ начальных условий. Введем обозначения. Пусть параметр k равен 1 или -1 , параметр $x \neq 0$, причем $kx > 0$, а для параметра β выполнено неравенство $0 < \beta < \alpha$. Фиксируем значения k, x, β . Множество функций $u_1(t, \beta, x), u_2(t, \beta, x)$, удовлетворяющих условиям

$$|u_1| > p, \quad |u_2| > p, \quad \text{при } t \in [-T, 0), \quad (6)$$

$$u_1|_{t=0} = kp, \quad u_2|_{t=0} = xp\lambda^\beta, \quad (7)$$

обозначим через $S(x)$.

Тогда при $t \in [0, T]$ выполняются условия $F(u_1(t - T)) \equiv F(u_2(t - T)) \equiv 0$. Следовательно, имеют место формулы

$$u_1(t, \beta, x) = kp(1 + o(1)) \exp(-t), \quad u_2(t, \beta, x) = xp\lambda^\beta(1 + o(1)) \exp(-t).$$

Заметим, что в силу того, что на отрезке $t \in [0, T]$ система (3) имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то при фиксированных значениях k_0, x_0, β_0 все решения (3) с начальными условиями из класса $S(x_0)$ совпадают при $t \in [0, T]$, и, следовательно, совпадают при всех $t \geq 0$.

При $t \in [T, 2T]$ имеем

$$u_1(t, \beta, x) = \lambda[g(t) + o(1)],$$

$$u_2(t, \beta, x) = xp\lambda^\beta(1 + o(1)) \exp(-t) + \gamma_1 \lambda^{1-\alpha}[g_1(t) + o(1)],$$

где

$$g(t) = \int_T^t \exp(s - t) f(kp \exp(T - s)) ds, \quad g_1(t) = \int_T^t \exp(s - t) g(s) ds.$$

Отсюда получаем, что

$$u_1(2T, \beta, x) = \lambda[g(2T) + o(1)],$$

$$u_2(2T, \beta, x) = \begin{cases} xp\lambda^\beta \exp(-2T)[1 + o(1)], & \text{при } 1 - \alpha < \beta < \alpha; \\ \gamma_1 \lambda^{1-\alpha} g_1(2T)[1 + o(1)], & \text{при } 0 < \beta < 1 - \alpha; \\ \lambda^{1-\alpha}[xp \exp(-2T) + \gamma_1 g_1(2T) + o(1)], & \text{при } \beta = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Из (5) следует, что при $t \in [2T, 3T]$ будут совпадать главные члены асимптотики решений системы (3) и системы

$$\dot{u}_1 + u_1 = \gamma_1 \lambda^{-\alpha} (u_2 - u_1), \quad \dot{u}_2 + u_2 = \gamma_1 \lambda^{-\alpha} (u_1 - u_2). \quad (8)$$

Следовательно, при $t \in [2T, 3T]$ верны неравенства $|u_1(t, \beta, x)| > p$ и $|u_2(t, \beta, x)| > p$. Пусть t_i ($i = 1, 2$) — первый момент времени такой, что $t_i > 2T$ и $|u_i(t_i, \beta, x)| = p$. Обозначим $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$, $\tilde{t} = t - 2T$. Тогда при $t \in [2T, t_0]$ система (3) имеет вид (8) и верны следующие асимптотические формулы:

$$u_1(t, \beta, x) = \lambda[g(2T) + o(1)] \exp(-\tilde{t}),$$

$$u_2(t, \beta, x) = \begin{cases} xp\lambda^\beta \exp(-2T)[1 + o(1)]e^{-\tilde{t}}, & \text{при } 1 - \alpha < \beta < \alpha; \\ \gamma_1 \lambda^{1-\alpha}(g_1(2T) + g(2T)\tilde{t} + o(1))e^{-\tilde{t}}, & \text{при } 0 < \beta < 1 - \alpha; \\ \lambda^{1-\alpha}(xp \exp(-2T) + \gamma_1(g_1(2T) + g(2T)\tilde{t}) + o(1))e^{-\tilde{t}}, & \text{при } \beta = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Из данных формул следует, что

$$t_0 = \begin{cases} (\beta + o(1)) \ln \lambda, & \text{при } 1 - \alpha < \beta < \alpha; \\ (1 - \alpha + o(1)) \ln \lambda, & \text{при } 0 < \beta \leq 1 - \alpha. \end{cases}$$

В итоге при $t = t_0$ приходим к равенствам

$$u_2(t_0, \beta, x) = kp, \quad u_1(t_0, \beta, x) = \bar{x}p\lambda^{\bar{\beta}},$$

в которых с точностью до $o(1)$

$$\bar{\beta} = \begin{cases} 1 - \beta, & \text{при } 1 - \alpha < \beta < \alpha, \\ \alpha, & \text{при } 0 < \beta \leq 1 - \alpha; \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{g(2T)}{|x|pe^{-2T}}, & \text{при } 1 - \alpha < \beta < \alpha, \\ k[\gamma_1(1 - \alpha) \ln \lambda]^{-1}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1 - \alpha. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, при $t = t_0$ ситуация вернулась к исходной (при $t = 0$) с заменой u_1 на u_2 , u_2 на u_1 и заменой параметров β и x соответственно на $\bar{\beta}$ и $\bar{x}$ согласно формулам (9), (10).

При β из интервала $(1 - \alpha, \alpha)$ получаем итерационный процесс по параметрам β и x

$$\beta_{n+1} = 1 - \beta_n, \quad x_{n+1} = \frac{g(2T)}{|x_n|pe^{-2T}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Из равенства (11) следует, что $\beta_{n+2} = \beta_n$ и $x_{n+2} = x_n$. Таким образом, все решения отображения (11) являются негрубыми циклами периода 2. Для исходной системы (3) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ можно утверждать существование асимптотических по невязке семейств периодических решений с периодом $T_0(\lambda) = (1 + o(1)) \ln \lambda$, у которых значения параметров β и x с точностью до $o(1)$ меняются по закону (11). Выводы о существовании точных периодических решений и об их устойчивости сделать нельзя.

Отметим, что каждая компонента негрубых асимптотических по невязке решений системы (3) один раз на периоде $T_0(\lambda)$ за короткий промежуток времени (порядка $O(1)$) совершает скачок от величины порядка единицы до величины порядка $O(\lambda)$, а остальной промежуток времени убывает по экспоненциальному закону до величины порядка единицы.

3. Выводы

Асимптотическими методами исследована нелокальная динамика системы из двух связанных автогенераторов с нелинейной финитной запаздывающей обратной связью. Показано, что при условиях (4) и (5) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ система (3) имеет двупараметрическое семейство негрубых неоднородных релаксационных периодических асимптотических по невязке решений.

Список литературы / References

- [1] Kiliyas T. et al., “Electronic chaos generators-design and applications”, *International journal of electronics*, **79**:6 (1995), 737–753.
- [2] Kiliyas T., Mogel A., Schwarz W., “Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems”, *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*, Akademie Verlag, Berlin, 1995, 92–111.
- [3] Balachandran B., Kalmar-Nagy T., Gilsinn D.E., *Delay differential equations*, Springer, Berlin, 2009.
- [4] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., *Стохастические колебания в радиотехнике*, Наука, Москва, 1989; [Dmitriev A. S., Kislov V. Ya., *Stokhasticheskie kolebaniya v radiotekhnike*, Nauka, Moskva, 1989, (in Russian).]
- [5] Дмитриев А. С., Кащенко С. А., “Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка”, *Радиотехника и электроника*, **34**:12 (1989), 24–39; [Dmitriev A. S., Kaschenko S. A., “Dinamika generatora s zapazdyvayushchey obratnoy svyazyu i nizkodobrotnym filtrom vtorogo poriyadka”, *Radiotekhnika i elektronika*, **34**:12 (1989), 24–39, (in Russian).]
- [6] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:8 (1995), 1330–1339; English transl.: Kaschenko S. A., “Asymptotics of relaxation oscillations in systems of differential-difference equations with a compactly supported nonlinearity. I”, *Differential Equations*, **31**:8 (1995), 1275–1285.
- [7] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. II”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:12 (1995), 1968–1976; English transl.: Kaschenko S. A., “Asymptotics of relaxation oscillations in systems of differential-difference equations with a compactly supported nonlinearity. II”, *Differential Equations*, **31**:12 (1995), 1938–1946.
- [8] Кащенко А. А., “Динамика системы из двух простейших автогенераторов с нелинейными финитными обратными связями”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:6 (2016), 841–849; [Kashchenko A. A., “Dynamics of a system of two simplest oscillators with finite non-linear feedbacks”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:6 (2016), 841–849, (in Russian).]
- [9] Кащенко С. А., “Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник — жертва”, *Доклады Академии наук СССР*, **266**:4 (1982), 792–795; English transl.: Kaschenko S. A., “Investigation, by large parameter methods, of a system of nonlinear differential-difference

- equations modeling a predator-prey problem", *Soviet Mathematics. Doklady*, **26**:2 (1982), 420–423.
- [10] Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., "Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**:6 (1993), 1515–1528.
 - [11] Bestehorn M., Grigorieva E. V., Kaschenko S. A., "Spatiotemporal structures in a model with delay and diffusion", *Physical Review E*, **70**:2 (2004), 026202.
 - [12] Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., "Dynamics of spikes in delay coupled semiconductor lasers", *Regular and Chaotic Dynamics*, **15**:2/3 (2010), 319–327.
 - [13] Kaschenko D., Kaschenko S., Schwarz W., "Dynamics of First Order Equations with Nonlinear Delayed Feedback", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22**:8 (2012), 1250184.
 - [14] Кащенко С. А., "Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу «хищник–жертва»", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:1 (2013), 52–98; English transl.: Kaschenko S. A., "Relaxation oscillations in a system with delays modeling the predator-prey problem", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 547–581.

Kashchenko A. A., "A Family of Non-rough Cycles in a System of Two Coupled Delayed Generators", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 649–654.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-649-654

Abstract. In this paper, we consider the nonlocal dynamics of the model of two coupled oscillators with delayed feedback. This model has the form of a system of two differential equations with delay. The feedback function is non-linear, finite and smooth. The main assumption in the problem is that the coupling between the generators is sufficiently small. With the help of asymptotic methods we investigate the existence of relaxation periodic solutions of a given system. For this purpose, a special set is constructed in the phase space of the original system. Then we build an asymptotics of the solutions of the given system with initial conditions from this set. Using this asymptotics, a special mapping is constructed. Dynamics of this map describes the dynamics of the original problem in general. It is proved that all solutions of this mapping are non-rough cycles of period two. As a result, we formulate conditions for the coupling parameter such that the initial system has a two-parameter family of non-rough inhomogeneous relaxation periodic asymptotic (with respect to the residual) solutions.

Keywords: large parameter, relaxation oscillation, periodic solution, asymptotics, delay

On the authors:

Aleksandra A. Kashchenko, orcid.org/0000-0003-3823-9351, PhD,
 P.G. Demidov Yaroslavl State University,
 14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003 Russia, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:

This work was supported by State assignment, work No 1.6074.2017/II220.

©Балабаев В. Е., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-655-670

УДК 517.95

Конструктивное решение проблемы эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка

Балабаев В. Е.

получена 6 февраля 2017

Аннотация. Построены эллиптические системы первого порядка с любым возможным числом неизвестных функций и максимально возможным числом неизвестных, т.е. в общем случае. Эти системы служат основой для изучения свойств любых эллиптических систем первого порядка. Проведенное изучение системы Коши–Римана и ее обобщений привело к выделению целого класса эллиптических систем первого порядка специальной структуры. Важное значение в исследовании этих систем играет интегральное представление их решений. Лишь при помощи конструктивного метода интегральных представлений можно решить ряд проблем в теории эллиптических систем, связанных, в основном, с граничными свойствами решений. Найденное интегральное представление удалось применить также для решения ряда задач, которые трудно решить, если опираться только на неконструктивные методы. Установлены, в частности, аналоги теорем Лиувилля, Вейерштрасса, Коши, Гаусса, Морера, аналог формулы Грина, а также аналог принципа максимума модуля. Используемые матричные операторы позволяют осуществить новое конструктивное построение максимально возможного числа линейно независимых векторных полей на сферах в общем случае любой возможной размерности. Кроме того, построенные операторы позволяют получить конструктивное решение расширенной задачи «о сумме квадратов», известной в алгебре.

Ключевые слова: эллиптические системы, дифференциальные уравнения

Для цитирования: Балабаев В. Е., "Конструктивное решение проблемы эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:5** (2017), 655–670.

Об авторе:

Балабаев Владимир Евгеньевич, orcid.org/0000-0001-5349-6917, доктор физ.-мат. наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: balabaev49@mail.ru

Проблема эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка хорошо известна. И.Р. Шафаревич сформулировал ее в своей монографии [1, с. 288] в следующем виде.

Дана система дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1)$$

При каких n и m она будет эллиптической?

Как указывает И.Р. Шафаревич [1, с. 288], эта проблема равносильна следующей проблеме. При каких m и n система уравнений

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^k x_i y_j = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

не имеет ненулевых вещественных решений?

Заметим, что эта проблема тесно связана с проблемой ортогонального спаривания евклидовых пространств [2]. Кроме того, она взаимосвязана с проблемой существования ортогональных полей на сферах [3], решение которой Адамсом [3] позволяет получить решение данной проблемы [4]. Следует, однако, отметить, что полученное таким образом решение не является конструктивным и не дает способа построения эллиптических систем первого порядка с любым числом независимых переменных. В настоящей работе укажем иное конструктивное решение поставленной проблемы. Справедлива

Теорема 1. *Эллиптические системы (1) с вещественными коэффициентами существуют для любых $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда порядок матрицы системы $m = l \cdot 2^{r(n)}$, где l – натуральное, а $r(n)$ – число Радона–Гурвица, определяемое формулой*

$$r(n) = \begin{cases} (n-2)/2, & n \equiv 1, 7 \pmod{8} \\ (n+1)/2, & n \equiv 3, 5 \pmod{8} \\ n/2, & n \equiv 2, 4, 6 \pmod{8} \\ (n-2)/2, & n \equiv 0 \pmod{8}. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость следует, как было отмечено [4], из известного результата Адамса [3] о максимальном числе линейно независимых векторных полей на сфере, полученного методами K -теории.

Для доказательства достаточности установим, что такие системы существуют при $m = 2^{r(n)}$ для любого $n \geq 2$. Для этого построим матрицы $A_n(a_1, \dots, a_n)$ порядка $2^{r(n)}$, удовлетворяющие соотношению

$$A_n(a_1, \dots, a_n) A_n^t(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 E_{2^{r(n)}},$$

где A_n^t – транспонированная к A_n матрица, E_m – единичная матрица порядка m . Построение будем вести рекуррентно по размерности пространства n . Определим матрицы A_n ($n = 1, 2, \dots$) следующим образом:

$$A_1(a_1) = a_1, \quad A_2(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, пишем для краткости $A_n(a)$ вместо $A_n(a_1, \dots, a_n)$. Матрица A_3 блочная, она имеет вид

$$A_3(a) = \begin{pmatrix} A_2(a) & -A_3 E_2 \\ A_3 E_2 & A_2^t(a) \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A_4(a) = \begin{pmatrix} A_2(a) & -A_2^t(a_3, a_4) \\ A_2(a_3, a_4) & A_2^t(a) \end{pmatrix}.$$

Для построения матрицы A_5 и ряда других введем матрицу

$$B_2(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью определим матрицу

$$B_4(b) = \begin{pmatrix} -A_2^t(b) & B_2(b_3, b_4) \\ B_2(b_3, b_4) & -A_2^t(b) \end{pmatrix}.$$

Матрица B_4 — это другое матричное представление алгебры кватернионов. С помощью матриц A_4 и B_4 образуем важную для дальнейшего построения матрицу

$$A_8(a) = \begin{pmatrix} A_4(a) & B_4(a_5, \dots, a_8) \\ -B_4^t(a_5, \dots, a_8) & A_4^t(a) \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя $A_8(a)$, легче построить A_5 , A_6 , A_7 : $A_5(a) = A_8(a_1, \dots, a_5, 0, 0, 0)$, $A_6(a) = A_8(a_1, \dots, a_6, 0, 0)$, $A_7(a) = A_8(a_1, \dots, a_7, 0)$. Аналогично A_{12} имеет другую конструкцию. Обозначим для краткости $B_4(a_{11}, a_{12})$ матрицу $B_4(a_{11}E_8, 0, 0, a_{12}E_8)$, тогда

$$A_{12}(a) = \begin{pmatrix} A_{10}(a) & B_4(a_{11}, a_{12}) \\ -B_4^t(a_{11}, a_{12}) & A_{10}^t(a) \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы A_{13} и других введем еще одну матрицу $D_4(d_1, d_2) = [D_{i,j}]$, $i, j = 1, 2$, где $D_{11} = -D_{22}$, $D_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -d_1 \\ -d_1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_{12} = D_{21} = -d_2E_2$. Для кратности блочную матрицу $D_4(a_{15}E_8, a_{16}E_8)$ обозначим через $D_4(a_{15}, a_{16})$, тогда $A_{16}(a) = [A_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq 4$, где

$$A_{11} = A_{22}^t = A_{33}^t = A_{44} = A_{10}(a),$$

$$A_{12} = -A_{34} = -A_{21}^t = A_{43}^t = B_4(a_{11}, a_{12}),$$

$$A_{13} = A_{24} = -A_{31}^t = A_{42}^t = B_4(a_{13}, a_{14}),$$

$$A_{14} = -A_{24} = A_{32}^t = -A_{41}^t = D_4(a_{15}, a_{16}).$$

Теперь определим матрицы A_{13} , A_{14} , A_{15} : $A_{13}(a) = A_{16}(a_1, \dots, a_{13}, 0, 0, 0)$, $A_{14}(a) = A_{16}(a_1, \dots, a_{14}, 0, 0)$, $A_{15}(a) = A_{16}(a_1, \dots, a_{15}, 0)$. Матрица A_{17} строится с помощью A_{16} аналогично A_{13} .

Итак, при $n = 1, \dots, 17$ мы уже знаем строение матрицы A_n . Далее конструкция повторяется, т.е. матрицы A_{9+i} и A_{17+i} ($i = 1, 2, \dots$) строятся аналогичным образом.

Пусть мы построили матрицы A_n ($n = 1, \dots, 8k + 1$), ($k \geq 2$) и матрица A_{8k+1} имеет вид

$$A_{8k+1}(a) = \begin{pmatrix} A_{8k}(a) & -a_{8k+1}E_{2^{4k-1}} \\ a_{8k+1}E_{2^{4k-1}} & A_{8k}^t(a) \end{pmatrix},$$

где $A_{8k}(a) = [A_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq 4$, а

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22}^t = A_{33}^t = A_{44} = A_{8k-1}(a), \\ A_{12} &= -A_{34} = -A_{21}^t = A_{43}^t = B_4(a_{8k-5}, a_{8k-4}), \\ A_{13} &= A_{24} = -A_{31}^t = -A_{42}^t = B_4(a_{8k-3}, a_{8k-2}), \\ A_{14} &= -A_{24} = A_{32}^t = -A_{41}^t = D_4(a_{8k-1}, a_{8k}). \end{aligned}$$

Здесь для краткости мы обозначим $B_4(a_{8k-5}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k-5}E_{2^{4k-5}})$ через $B_4(a_{8k-5}, a_{8k-4})$, $B_4(a_{8k-3}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k-3}E_{2^{4k-5}})$ через $B_4(a_{8k-3}, a_{8k-2})$, $D_4(a_{8k-1}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k-1}E_{2^{4k-5}})$ через $D_4(a_{8k-1}, a_{8k})$.

Теперь матрицы $A_{8k+2}, \dots, A_{8(k+1)-1}$ строим аналогично матрицам $A_{10}, \dots, A_{17}$ соответственно.

Таким образом, зная матрицы A_n ($n = 1, \dots, 8k + 1$), мы построили матрицы A_n ($n = 8k + 2, \dots, 8(k + 1) + 1$). Легко видеть, что матрица A_n зависит от $a_1, \dots, a_n$, а ее порядок равен $2^{r(n)}$, где $r(n)$ определяется равенством (2).

Рассмотрим систему

$$A_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) u = 0 \quad (n \geq 2), \quad (3)$$

где матрица A_n определена выше. В силу легко проверяемого соотношения

$$A_n(a) A_n^t(a) = \sum_{i=1}^n a_i^2 E_{2^{r(n)}}$$

система (3) эллиптическая. Чтобы получить эллиптическую систему первого порядка R^n с числом неизвестных функций $m = l \cdot 2^{r(n)}$, нужно в (3) вместо матрицы A_n использовать матрицу, включающую в себя l блоков A_n и имеющую вид $\text{diag}[A_n, \dots, A_n]$. Теорема доказана.

Следствие 1. Эллиптические системы (3) будут системами простейшей структуры (определение см. в [4]), так как их решения являются гармоническими векторами.

Следствие 2. Эллиптические системы (1), имеющие матрицу A порядка $m = t \cdot 2^k$, где t нечетно, существуют тогда и только тогда, когда число независимых переменных n ($n \geq 2$) в системе — любое число, удовлетворяющее неравенству $n \leq n(k)$, где

$$n(k) = \begin{cases} 2k + 1, k \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2k, k \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 2k + 2, k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (4)$$

Следствие 3. Эллиптические системы (1) с числом независимых переменных n , равным числу неизвестных функций m , существуют лишь в случае, когда $n = 2, 4, 8$.

Замечание. Когда $n = 2$, система (3) превращается в систему Коши–Римана. При $n = 3$ система (3) сводится к системе Моисила–Теодореско, которая подробно изучена в работах А.В. Бицадзе (см., например, [5]). Когда $n = 4$, система (3) совпадает с системой, изучавшейся Фьютером, В.С. Виноградовым [6] и др. При $n = 8$

получающаяся система изучалась нами [7], ее матрица связана с матричным представлением алгебры Кэли. В случае произвольного числа независимых переменных аналоги системы Коши–Римана рассматривались А.А. Дезиным [8] и В.С. Виноградовым [6]. Однако системы, рассматривавшиеся в [8], не включают в себя ни систему Фьютера, ни систему, получающуюся из (3) при $n = 8$. Они при числе переменных n содержат 2^{n-1} неизвестных функций и не являются при $n > 3$ системами простейшей структуры. Спинорные системы, изученные в [6], также не включают в себя систему (3) при $n = 8$ и не являются, вообще говоря, системами простейшей структуры. Кроме того, как показано в [6], у них нет нетеровых граничных задач.

В качестве непосредственного приложения предложенного метода дадим новое конструктивное доказательство параллелизуемости сфер S^1 , S^3 , S^7 .

Действительно, для этого нужно доказать существование n линейно независимых векторных полей на S^n ($n = 1, 3, 7$). Докажем большее, а именно построим на S^n n ортонормальных векторных полей. Для этого достаточно определить такие отображения $V_i: S^n \rightarrow R^{n+1}$ ($1 \leq i \leq n$), что

1. $(V_i(x), x) = 0$, $1 \leq i \leq n$, $x \in S^n$;
2. $(V_i(x), V_j(x)) = \delta_i^j$, $1 \leq i, j \leq n$, $x \in S^n$.

В самом деле, когда $n = 1$ положим

$$V_1(x) = (-x_2, x_1).$$

Если $n = 3$, положим

$$\begin{aligned} V_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \\ V_2(x) &= (-x_3, x_4, -x_1, x_2), \\ V_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

При $n = 7$ положим

$$\begin{aligned} V_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, x_8, -x_7), \\ V_2(x) &= (-x_3, x_4, -x_1, x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6), \\ V_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5), \\ V_4(x) &= (-x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, -x_2, -x_3, -x_4), \\ V_5(x) &= (-x_6, -x_5, -x_7, x_2, x_1, x_4, -x_3), \\ V_6(x) &= (-x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, x_1, x_2), \\ V_7(x) &= (-x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_4, x_3, -x_2, x_1). \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления, использующие свойства матриц A_n , показывают, что условия 1, 2 выполняются.

Метод построения эллиптических систем (3) позволяет дать краткое конструктивное решение проблемы нахождения максимального числа линейно независимых полей на сфере. Как известно, эта проблема была решена Адамсом [3] методами

K -теории. Отметим, однако, что его доказательство достаточно громоздко и не является конструктивным, т.е. не указывает способ, которым можно найти решение в явном виде. Ниже указан способ построения максимального числа не только линейно независимых, но и ортонормальных векторных полей на $(m-1)$ -мерной сфере в общем случае, т.е. для любого возможного m .

Следствие 4. Пусть $m = l \cdot 2^k$, где l нечетное, $k = 0, 1, \dots$, тогда максимальное число линейно независимых векторных полей на $(m-1)$ -мерной сфере равно $n(k)-1$, где $n(k)$ определяется формулой (4).

Доказательство. Пусть $n = n(k)$ определено равенством (4). Рассмотрим блочную матрицу, включающую в себя l блоков $A_n(a)$ и имеющую вид $B_n(a) = \text{diag}[A_n, \dots, A_n]$, где матрица $A_n(a)$ определена выше системой (3). Матрица $B_n(a)$ удовлетворяет соотношению $B_n^t(a)B_n(a) = \sum_{i=1}^n a_i^2 E_m$, где E_m — единичная матрица порядка m . Построим следующие ортонормальные векторные поля на $(m-1)$ -мерной сфере $S^{m-1} : V_i(x_1, \dots, x_m) = B_n(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)x$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, где вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1}$. Заметим, что $B_n(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)x = x$, следовательно, учитывая свойства матрицы $B_n(a_1, \dots, a_n)$, имеем

$$(B_n(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)x, B_n(\underbrace{0, \dots, 0}_j, 1, 0, \dots, 0)x) = \delta_j^i \sum_{k=1}^m x_k^2.$$

Поэтому $(V_i(x_1, \dots, x_m), x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1}$, $(V_i(x_1, \dots, x_m), V_j(x_1, \dots, x_m)) = \delta_j^i$, $1 \leq i, j \leq n-1$, $(x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1}$. Отсюда следует, что максимальное число $M(m-1)$ линейно независимых векторных полей на $(m-1)$ -мерной сфере не меньше $n(k)-1$. То, что $M(m-1) \leq n(k)-1$, доказывается, как и в [3]. Следовательно, $M(m-1) = n(k)-1$.

Определение. Систему (3) с построенной выше матрицей A_n порядка $2^{r(n)}$ назовем канонической системой в R^n .

Рассмотрим ряд свойств канонических систем. Можно показать, что для их решений справедливы принцип максимума модуля, теорема Лиувилля и другие свойства, рассматриваемые ниже.

Далее, если не оговорено противное, считаем границу ∂D области $D \subset R^n$ кусочно-гладкой и ориентированной в соответствии с ориентацией D .

Теорема 2. Пусть f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,0)}(\bar{G})$, тогда справедлива формула

$$\int_{\partial D} (f(x), A_n(*dx)g(x)) = \int_G \left[\left(A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x), g(x) \right) + \left(f(x), A_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) \right) \right] dV(x), \quad (5)$$

где $*dx = (*dx_1, \dots, *dx_n)$, $*$ — оператор Ходжса, $(dx_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge [dx_i] \wedge \dots \wedge dx_n)$, $dV(x) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ — элемент объема согласно принятой ориентации.

В самом деле, в силу теоремы Стокса, примененной к дифференциальной форме $(f(x), A_n(*dx)g(x))$, имеем

$$\int_{\partial D} (f(x), A_n(*dx)g(x)) = \int_G d(f(x), A_n(*dx)g(x)). \quad (6)$$

Вычисляя внешний вид дифференциала справа в (6), получим

$$\begin{aligned} d(f(x), A_n(*dx)g(x)) &= (df(x), A_n(*dx)g(x)) + (-1)^{n-1}(f(x), A_n(*dx) \wedge dg(x)) = \\ &= (A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x), g(x)) + (f(x), A_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x)) \times dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (6), получаем (5).

Следствие. Если f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G)$ и $\text{supp } f \subset G$, $\text{supp } g \subset G$, то верна формула

$$\int_G \left(\left(A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x), g(x) \right) + \left(f(x), A_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) \right) \right) dV(x) = 0.$$

Справедливость этой формулы вытекает из равенства нулю в силу условия интеграла слева в (5).

Наряду с системой (3) рассмотрим сопряженную к ней систему

$$A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = 0. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,0)}(\bar{G})$, $g(x)$ удовлетворяет системе (3), $f(x)$ — системе (7) в области G , тогда имеет место равенство

$$\int_{\partial D} (f(x), A_n(*dx)g(x)) = 0. \quad (8)$$

Формула (8) следует из (5), так как интеграл справа в (5) равен нулю по условию.

Теорема 4. Если вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,0)}(\bar{G})$, то верна формула

$$\int_{\partial D} (A_n(*dx)f(x)) = \int_G A_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) dV(x). \quad (9)$$

Формулу (9) можно доказать, применяя теорему Стокса.

Следствие. Если $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)$, $\text{supp } f \subset G$, то

$$\int_G A_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) dV(x) = 0.$$

Теорема 5. Если вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,0)}(\bar{G})$ и удовлетворяет в G системе (3), то

$$\int_{\partial D} (A_n(*dx)f(x)) = 0.$$

Действительно, в силу условия интеграл справа в (9) равен нулю.

Теорема 5 является аналогом теоремы Коши в комплексном анализе.

Верно и обратное утверждение, являющееся аналогом теоремы Морера.

Теорема 6. Пусть вектор $f(x)$ класса $C(G)$ и для любого шара $B \subset G$ $\int_{\partial B} (A_n(*dx)f(x)) = 0$. Тогда $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в G .

Доказательство разобьем на два этапа.

1. Пусть в начале $f(x)$ — гладкий вектор в G . Для любого шара $B \subset G$ в силу условия по теореме 4 имеем

$$\int_{\partial B} (A_n(*dx)f(x)) = \int_B A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)dV(x) = 0.$$

Так как в силу гладкости $f(x)$ выражение под знаком последнего интеграла непрерывно в G и B — произвольный шар из G , то отсюда следует, что $f(x)$ — решение системы (3) в G , и для гладких f теорема доказана.

Прежде чем переходить к общему случаю, докажем следующую лемму.

Лемма 1. (аналог теоремы Вейерштрасса) Если последовательность $f_k(x)$ решений системы (3) в G сходится равномерно внутри G , то её предел $f(x)$ также является решением системы (3) в G .

В самом деле, в силу аналогичного утверждения для гармонических функций $f(x)$ будет класса $C^\infty(G)$. Кроме того, по теореме 5

$$\int_{\partial B} (A_n(*dx)f(x)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

для любого шара $B \subset G$. Так как $f_k(x)$ сходится равномерно внутри G , то можно переходить к пределу при $k \rightarrow \infty$ под знаком последнего интеграла, и мы получим, что $f(x)$ — также решение системы (3) в G .

2. Общий случай. Пусть f только непрерывна в G . Продолжим f во все пространство R^n , полагая $f = 0$ вне G , и построим семейство векторных функций

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n} \int_{R^n} f(t) \varphi\left(\frac{t-x}{\alpha}\right) dV(t), \quad \alpha > 0,$$

где функция $\varphi \geq 0$ бесконечно дифференцируема в R^n , $\varphi = 0$, когда $|t| \geq 1$ и $\int_{\{|t| \leq 1\}} \varphi(t) dV(t) = 1$. Последовательность бесконечно дифференцируемых $f_\alpha(x)$ сходится равномерно при $\alpha \rightarrow 0$ внутри G к функции $f(x)$. Покажем, что $f_\alpha(x)$ удовлетворяет системе (3) на множестве $G_\alpha = \{x \in G : e(x, \partial G) > \alpha\}$, где $e(x, \partial G)$ — евклидово расстояние от точки x до границы ∂G . Действительно, сделав замену переменных в интеграле, представим $f_\alpha(x)$ в следующем виде:

$$f_\alpha(x) = \int_{\{|t| \leq 1\}} \left(\int_{\partial B} A_n(*dx)f(x + \alpha\tau) \right) \varphi(\tau) dV(\tau) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial B} (A_n(*dx)f_\alpha(x)) = \int_{\{|t| \leq 1\}} \left(\int_{\partial B} A_n(*dx)f(x + \alpha\tau) \right) \varphi(\tau) dV(\tau) = 0,$$

где B — произвольный шар из G_α , так как, возвращаясь к старым переменным $t = x + \alpha\tau$, имеем в силу условия теоремы

$$\int_{\partial B} A_n(*dx) f_\alpha(x + \alpha\tau) = \int_{\partial B} A_n(*dx) f(t) = 0,$$

где $\tilde{B} \subset G$ — шар, являющийся образом шара $\tilde{B} \subset G_\alpha$ при сделанной замене координат. Используя доказанность теоремы 6 на первом этапе для гладких f , получим, что $f_\alpha(x)$ — решение системы (3) в G_α . Так как последовательность $f_\alpha(x)$ при $\alpha \rightarrow 0$ сходится равномерно в G , то в силу леммы 1 $f(x)$ также является решением системы (3) в G .

Обозначим через

$$g(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2-n}|t-x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \ln|t-x|, & n = 2 \end{cases}$$

и введем матричную дифференциальную форму

$$H(t, x) = A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n(*dt).$$

Теорема 7. Пусть $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G^+) \cap C^{(0,0)}(\bar{G}^+)$, тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial G^+} H(t, x) f(t) - \int_{G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t) \right] = \\ = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где 0 — нулевой вектор.

Доказательство формулы (10) проведем в несколько этапов.

1. Пусть 0 и E — соответственно нулевая и единичная матрицы, тогда

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} H(t, x) = \begin{cases} E, & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \quad (11)$$

В самом деле, если $x \in G^-$, то форма $H(t, x)$ неособая, и, применяя теорему Стокса, получим

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} H(t, x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{G^+} d(H(t, x)).$$

Прямой подсчет показывает, что

$$d(H(t, x)) = A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) dV(t) = 0,$$

и мы получим (11). Если же $x \in G^+$, то форма $H(t, x)$ особая в G^+ , и мы рассмотрим область $G_r = G^+ \setminus \overline{B(x, r)}$, где шар $B(x, r) \subset G^+$. В G_r , форма $H(t, x)$ неособая, и мы можем применить теорему Стокса:

$$j_r = \int_{\partial G_r} H(t, x) = \int_{G_r} d(H(t, x)) = 0. \quad (12)$$

Интеграл в правой части в (12) равен 0, так как $x \notin \bar{G}_r$ и $d(H(t, x)) = 0$ по той же причине, что и выше. Интеграл в левой части в (12) равен

$$j_r = \int_{\partial G^+} H(t, x) - \int_{\partial B(x, r)} H(t, x). \quad (13)$$

Используя свойства формы $H(t, x)$, находим, что

$$\int_{\partial B(x, r)} H(t, x) = \frac{1}{r^n} \int_{\partial B(x, r)} A_n^t(t - x) A_n(* dx). \quad (14)$$

К интегралу в правой части в (14) снова применим теорему Стокса. Имеем

$$\int_{\partial B(x, r)} H(t, x) = \frac{n}{r^n} \left(\int_{B(x, r)} dV(t) \right) E, \quad (15)$$

где E — единичная матрица. Используя формулу объема шара в R^n , из (15) получим

$$\int_{\partial B(x, r)} H(t, x) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} E}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} E. \quad (16)$$

Из (12), (13) и (16) при $r \rightarrow 0$ получается формула (11).

2. Пусть $f(x)$ класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\overline{B(x^0, R)} \subset R^n$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial B(x^0, R)} H(t, x) f(t) - \int_{\partial B(x^0, R)} A_n^t \left(\frac{t - x}{|t - x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t) \right] = \\ = \begin{cases} f(x), & x \in B(x^0, R), \\ 0, & x \notin \overline{B(x^0, R)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь 0 — нулевой вектор.

Действительно, если $x \notin \overline{B(x^0, R)}$, то по теореме Стокса для $H(t, x)$ в шаре $B(x^0, R)$ имеем

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(x^0, R)} H(t, x) f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{B(x^0, R)} d(H(t, x) f(t)).$$

Так как при $x \neq t$

$$d \left[A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n (* dt) \right] = A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) dV(t) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} d(H(t, x)f(t)) &= \left[A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n (* dt) \right] \wedge f(t) + \\ &+ (-1)^{n-1} A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n (* dt) \wedge df = \\ &= (-1)^{n-1} A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n (* dt) \wedge df + \\ &+ A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t), \end{aligned} \quad (18)$$

и при $x \notin \overline{B(x^0, R)}$ формула (17) доказана. Пусть $x \in B(x^0, R)$, рассмотрим область $D_r = B(x^0, R) \setminus \overline{B(x, R)}$, где r таково, что $\overline{B(x, R)} \subset B(x^0, R)$. В силу теоремы Стокса для $H(t, x)$ в D_r находим

$$j_r = \int_{\partial D_r} H(t, x) f(t) = \int_{D_r} d(H(t, x) f(t)). \quad (19)$$

Интеграл в левой части в (19) представим в виде

$$j_r = \int_{\partial B(x^0, R)} (H(t, x) f(t)) - \int_{\partial B(x, R)} (H(t, x) f(t)).$$

Используя непрерывность $f(t)$ в $B(x^0, R)$, имеем

$$j_r = \int_{\partial B(x, R)} (H(t, x) f(t)) - \int_{\partial B(x, R)} (H(t, x) f(t)) + \alpha(r), \quad (20)$$

где $|\alpha(r)| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Используя доказанную на первом этапе формулу (11), в которой роль G играет шар $B(x, R)$, для интеграла в правой части в (20), из (20) и (19) при $r \rightarrow 0$ получим формулу (17). Отметим, что второй интеграл в (17) является интегралом со слабой особенностью порядка $n-1$, следовательно, он сходится по крайней мере, когда $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) \in L_p(B(x^0, R))$, где $p > n$.

3. Пусть G^+ — область, указанная в условии теоремы, а $f(t)$ класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\overline{C}^+$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial G^+} H(t, x) f(t) - \int_{G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t) \right] = \\ = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

В самом деле, если $x \in G^-$, то по теореме Стокса

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} H(t, x) f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{G^+} d(H(t, x) f(t)).$$

Так как в G^- внешний дифференциал $d[A_n^t(\frac{\partial}{\partial t}) g(t, x) A_n(*dt)] = 0$, то внешний дифференциал произведения форм равен

$$d\left[A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) g(t, x) A_n(*dt)\right] \wedge f(t) = A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) dV(t),$$

и мы получим (21).

Когда $x \in G^+$, рассмотрим, как и на первом этапе, область $G_r = G^+ \setminus \overline{B(x, r)}$. По теореме Стокса

$$j_r = \int_{\partial G_r} H(t, x) f(t) = \int_{G_r} d(H(t, x)). \quad (22)$$

Внешний дифференциал под знаком интеграла в правой части в (22) вычисляется таким же образом, как и на втором этапе. Интеграл в левой части в (22) равен

$$j_r = \int_{\partial G^+} H(t, x) - \int_{\partial B(x, r)} H(t, x) f(t). \quad (23)$$

Второй интеграл в (23) в силу формулы (17), полученный на втором этапе, равен

$$\int_{\partial B(x, r)} H(t, x) f(t) = \int_{B(x, r)} A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) dV(t) + \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} f(x)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (24)$$

Таким образом, при $x \in G^+$ имеем в силу (22)–(24)

$$\int_{\partial G^+} H(t, x) f(t) - \int_G^+ A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) dV(t) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} f(x)}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

откуда имеем (21). Второй интеграл в (21) сходится по крайней мере, если $A_n(\frac{\partial}{\partial t}) f(t) \in L_p(G^+)$, где $p > n$, так как он является интегралом со слабой особенностью порядка $n - 1$.

4. Общий случай. Аппроксимируем область G^+ областями $\{G_m\}$, с кусочно-гладкими границами $\partial G_m : \bar{G}_m \subset G_{m+1} \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G^+$. Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial G_m^+} \omega$ для любой непрерывной в $\overline{G^+} \setminus G_1$ внешней дифференциальной формы ω степени $n - 1$, то формулу (10) достаточно доказать для области G_m с кусочно-гладкой границей ∂G_m и $f(x)$ класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\bar{G}_m$, что было сделано на третьем этапе.

Замечания. 1. Формулу (10) можно записать в эквивалентной форме. Так как

$$A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n(*dt) \wedge df = (-1)^{n-1} A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t), \quad (25)$$

то (10) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^{n-1}} \right) A_n \left(\frac{*dt}{|t-x|^{n-1}} \right) f(t) + \right. \\ \left. + (-1)^n \int_{G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|} \right) A_n \left(\frac{*dt}{|t-x|^{n-1}} \right) \wedge df \right] = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

2. Используя (25), а также равенство

$$A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) = A_n^t \left(\frac{t-x}{(t-x)^n} \right),$$

из (26) имеем формулу

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|} \right) A_n \left(\frac{*dt}{|t-x|^{n-1}} \right) f(t) + \right. \\ \left. + (-1)^n \int_{G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|} \right) A_n \left(\frac{*dt}{|t-x|^{n-1}} \right) \wedge df \right] = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Из формулы (10) находим интегральное представление для решений системы (3).

Теорема 8. (Интегральное представление) Пусть $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в G^+ и непрерывна в $\overline{G}^+$, тогда справедлива формула

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|} \right) A_n(*dt) f(t) = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \quad (27)$$

Формула (27) следует из (10), так как второй интеграл в (10) в этом случае равен нулю.

Замечание. Формулу (27) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|} \right) A_n \left(\frac{*dt}{|t-x|^{n-1}} \right) f(t) = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-, \end{cases}$$

а также в виде

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} A_n^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) g(t, x) A_n(*dt) f(t) = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases}$$

Следствие. Любой вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)$, удовлетворяющий системе (3) в G , принадлежит $C^\infty(G)$. Поэтому если $f \in C^{(1,0)}(G)$ и удовлетворяет системе (3) в G , то $f'_{x_i}(x) \in C^{(1,0)}(G)$.

Теорема 9. Если вектор $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в шаре $B(r, x)$ и непрерывен в $\overline{B(x, r)}$, то верна формула

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial G^+} f(t) dS = f(x). \quad (28)$$

Действительно, в случае шара имеют место равенства

$$A_n^t \left(\frac{t-x}{(t-x)^n} \right) |_{\partial B(x,r)} = \frac{1}{r^n} A_n^t(t-x), \quad A_n(*dt) |_{\partial B(x,r)} = \frac{1}{r} A_n(t-x) dS.$$

Подставляя эти выражения в интегральную формулу (27), получим (28). Теорема 9 является аналогом теоремы Гаусса о среднем.

Теорема 10. Если $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)(G^+)$, $\text{supp} \subset G^+$, то имеет место формула

$$-\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{G^+} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t) = \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \quad (29)$$

В самом деле, из интегральной формулы (10) в силу условия получаем, что первый интеграл в (10) равен нулю, и мы имеем (29).

Полученные выше результаты позволяют найти решение неоднородной системы

$$A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(x) = \varphi(x). \quad (30)$$

Теорема 11. Пусть μ – векторная мера с компактным носителем в R^n , тогда интеграл

$$f(x) = - \int A_n^+ \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) d\mu(t) \quad (31)$$

определяет решение системы (3) класса C^∞ вне носителя K меры μ . Если во всякой области G , в которой $d\mu(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \varphi(t) dV(t)$ для некоторой $\varphi \in C^k(G)$, то $f \in C^k(G)$ и удовлетворяет системе (30) в G , если $k \geq 1$.

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема вне носителя K меры μ , так как $A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right)$ бесконечно дифференцируема от (t, x) , когда $t \in K$, $x \in R^n \setminus K$. А так как $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) = 0$ при $t \neq x$, то $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(x) = 0$

вне носителя K , что вытекает из возможностей дифференцирования в (31) под знаком интеграла. Для доказательства второй части утверждения допустим вначале, что $G = R^n$. После замены переменных $x - t = \tau$ имеем

$$f(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau}{|\tau|^n} \right) \varphi(x - \tau) dV(\tau).$$

Так как $A_n^t \left(\frac{\tau}{|\tau|^n} \right)$ интегрируема на каждом компактном множестве, то можно не менее k раз дифференцировать под знаком интеграла, причем полученные интегралы будут сходиться. Следовательно, $f \in C^k(R^n)$ и

$$\begin{aligned} A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(x) &= (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau}{|\tau|^n} \right) A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x - \tau) = \\ &= - \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau - x}{|\tau - x|^n} \right) A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(t) dV(t). \end{aligned}$$

Применив теперь теорему 10, сформулированную для φ вместо f и для области G^+ , равной шару, содержащую носитель φ , получим $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(x) = \varphi(x)$.

Наконец, пусть G – произвольная область в R^n . Рассмотрим для любой точки $x^0 \in G$ функцию $\varphi \in C_0^k(G)$, т.е. равную нулю вне некоторого компактного множества $K \subset \subset G$ и равную 1 в некоторой окрестности U точки x^0 . Положим $\mu_1 = \varphi\mu$ и $\mu_2 = (1 - \varphi)\mu$, тогда $f = f_1 + f_2$, где

$$f_i(x) = - \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{t - x}{|t - x|^n} \right) A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) d\mu_i(t).$$

Так как $d\mu_i = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \Phi(t) \varphi(t) dv(t)$ и $\Phi\varphi(t) \in C_0^k(R^n)$, то $f_1 \in C^k(R^n)$ и по доказанному выше $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f_1(x) = \Phi(t)\varphi(t)$. А так как $\mu_2 = 0$ в U , то из этого следует, что $f_1 \in C^k(U)$ и $A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(x) = \varphi(t)$ в U .

Список литературы / References

- [1] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, **1**, Наука, М., 1988, 352 с.; English transl.: Shafarevich I. R., “Foundations of algebraic geometry”, *Russian Math. Surveys*, **24**:6 (1969), 178 pp.
- [2] Yuzvinski S., “Orthogonal pairings of Euclidean spaces”, *Michigan Math. J.*, **28**:2 (1981), 131–145.
- [3] Adams J.F., “Vector fields on spheres”, *Ann. of Math.*, **75**:3 (1962), 603–632.
- [4] Соломяк М.З., “О линейных эллиптических системах первого порядка”, *Докл. АН СССР*, **150**:1 (1963), 48–51; [Solomyak M.Z., “O linejnyh ehllipticheskikh sistemah pervogo porjadka”, *Dokl. AN SSSR*, **150**:1 (1963), 48–51, (in Russian)].
- [5] Бицадзе А.В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966; [Bicadze A.V., *Kraevye zadachi dlya ehllipticheskikh uravnenij второго porjadka*, Nauka, Moskva, 1966, (in Russian)].

- [6] Виноградов В.С., “Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка”, *Матем. заметки*, **14:2** (1973), 291–304; English transl.: Vinogradov V.S., “Investigation of boundary value problems for elliptic systems of first order”, *Math. Notes*, **14:2** (1973), 724–731.
- [7] Балабаев В.Е., “Об одной системе уравнений в октавах в восьмимерном евклидовом пространстве”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1:2** (1995), 517–521; [Balabaev V.E., “On one system of equations in octaves in eight dimensional Euclidean space”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **1:2** (1995), 517–521, (in Russian)].
- [8] Дезин А.А., *Многомерный анализ и дискретные модели*, Наука, М., 1990, 240 с.; [Dezin A.A., *Mnogomernyi analiz i diskretnye modeli*, Nauka, Moskva, 1990, 240 pp., (in Russian)].

Balabaev V. E., "Constructive Solution of Ellipticity Problem for the First Order Differential Systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24:5** (2017), 655–670.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-655-670

Abstract. We built first order elliptic systems with any possible number of unknown functions and the maximum possible number of unknowns, i.e, in general. These systems provide the basis for studying the properties of any first order elliptic systems. The study of the Cauchy-Riemann system and its generalizations led to the identification of a class of elliptic systems of first-order of a special structure. An integral representation of solutions is of great importance in the study of these systems. Only by means of a constructive method of integral representations we can solve a number of problems in the theory of elliptic systems related mainly to the boundary properties of solutions. The obtained integral representation could be applied to solve a number of problems that are hard to solve, if you rely only on the non-constructive methods. Some analogues of the theorems of Liouville, Weierstrass, Cauchy, Gauss, Morera, an analogue of Green’s formula are established, as well as an analogue of the maximum principle. The used matrix operators allow the new structural arrangement of the maximum number of linearly independent vector fields on spheres of any possible dimension. Also the built operators allow to obtain a constructive solution of the extended problem “of the sum of squares” known in algebra.

Keywords: elliptic systems, differential equations

On the author:

Vladimir E. Balabaev, orcid.org/0000-0001-5349-6917, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: balabaev49@mail.ru