

3817я 43
174

ISSN 1818-1015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова
Ярославское региональное отделение РАЕН

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 13 №1 2006

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

Главный редактор
В.А.Соколов

Редакционная коллегия
О.Л.Бандман, В.А.Бондаренко, М.Г.Дмитриев, А.В.Зафиевский,
Ю.Г.Карпов, С.А.Кащенко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Левин,
И.А.Ломазова, В.В.Майоров, В.Э.Малышкин, В.А.Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А.Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

НБ ЯргУ
фонд редкой книги

©Ярославский
государственный
университет, 2006

БИБЛИОТЕКА ЯргУ
УЧЕБНЫЙ ФОНД

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.13, №1. 2006

Формула для ляпуновской величины задачи о бифуркации автоволн <i>Колесов Ю.С., Харьков А.Е.</i>	3
Совместное использование методов бизнес-моделирования и объектно-ориентированной методологии при проектировании профилированного пользовательского интерфейса <i>Игнатова И.Г., Соколова Н.Ю.</i>	9
Формула для ляпуновской величины задачи о конкурентной борьбе <i>Пендюров А.Д., Пендюров Д.А.</i>	14
Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области <i>Куликов Д.А.</i>	20
Иерархическая модель автоматных программ <i>Кузьмин Е.В.</i>	27
Свойства бисимуляции разметок в ограниченных сетях Петри <i>Башкин В.А.</i>	35
Смещение статистической оценки энтропии для простейшей меры Бернулли <i>Тимофеев Е.А.</i>	41
Об одном подходе к различению элементов из больших совокупностей традиционных систем символов <i>Парфенов П.Г., Назарычев С.Л.</i>	46
Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов <i>Глызин С.Д.</i>	49

Редактор А.А.Аладьева

Подписано в печать 15.05. 2006. Формат 60x84¹/₈. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 6,97. Уч.-изд.л. 5,21. Тираж 100 экз. *Заказ 044/06*

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г. Де-
мидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

Формула для ляпуновской величины задачи о бифуркации автоволн

Колесов Ю.С., Харьков А.Е.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 15 марта 2006

Аннотация

Метод квазинормальных форм был создан первым автором еще в начале восьмидесятых годов прошлого века. Однако до сих пор он не стал общим местом. Связано это с тем, что его идеология не только сложна, но и многогранна. В данной статье объясняются два аспекта проблемы: вычисление ляпуновской величины теряющего устойчивость однородного цикла и недостижимость бифуркационной границы.

1. Постановка задачи. Как известно [1], в простейшем варианте квазинормальная форма системы реакция-диффузия с малой надкритичностью и диффузионными коэффициентами при условиях непроницаемости в концах единичного отрезка имеет вид:

$$\dot{\xi} = d \exp(-i\alpha) \xi'' + \xi - (1 + i\omega^2) |\xi|^2 \xi, \quad \xi' \Big|_{x=0} = \xi' \Big|_{x=1} = 0, \quad (1)$$

где d, ω – положительные параметры, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, точка – дифференцирование по времени, штрих – по пространственной переменной. Отметим, что краевая задача (1) дополняется комплексно сопряженной.

Достаточно очевидно, что краевая задача (1) имеет пространственно однородный автомодельный цикл $\xi_0 = \exp(-i\omega^2 t)$, который теряет устойчивость при $d < d_{кр}$, где

$$\pi^2 d_{кр} = 2(\omega^2 \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (2)$$

Естественно, при этом предполагается, что положительна правая часть в (2). Собственно, на этом заканчивается формулировка ограничений на три параметра краевой задачи (1).

Пространственно неоднородные колебания краевых задач типа (1) принято называть автоволнами. Возникает вопрос: могут ли они ответвляться от теряющего устойчивость однородного цикла. Формально ответ на него получить просто: следует найти формулу для ляпуновской величины однородного цикла краевой задачи (1) при $d = d_{кр}$. Именно данной проблеме и посвящена основная часть нашей работы.

2. Подготовительные сведения. При условиях непроницаемости введем в рассмотрение оператор

$$L_0 \eta = d_{кр} \exp(-i\alpha) \eta'' - (1 + i\omega^2)(\eta + \bar{\eta}). \quad (3)$$

Непосредственно проверяется, что

$$L_0 \exp(-i\varphi) \sqrt{2} \cos \pi x = 0, \quad (4)$$

если постоянная φ , где $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, подчинена равенству

$$\pi^2 d_{кр} \sin \varphi = 2(\sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha) \cos \varphi. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует, что

$$\sin \varphi = \frac{\sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega^2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}. \quad (6)$$

Содержательный смысл постоянной φ прояснится после доказательства следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. Неоднородное уравнение

$$L_0 \eta = \gamma \cos \pi x, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad (7)$$

разрешимо в том и только том случае, если

$$\operatorname{Re}(\gamma \exp(i\alpha)) = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Из метода Фурье следует, что искомое решение обязано иметь вид

$$\eta = a \cos \pi x, \quad a = a_1 + ia_2. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем комплексное равенство

$$-d_{\text{кр}} \exp(-i\alpha) \pi^2 a - 2(1 + i\omega^2) a_1 = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad (10)$$

эквивалентное двум вещественным

$$-\pi^2 d_{\text{кр}} (a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha) - 2a_1 = \gamma_1, \quad \pi^2 d_{\text{кр}} (a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha) - 2\omega^2 a_1 = \gamma_2.$$

Умножая первое из них на $\cos \alpha$; второе на $\sin \alpha$, а затем вычитая из первого равенства второе, после простых преобразований выводим, что в силу (2)

$$\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \sin \alpha = -\pi^2 d_{\text{кр}} a_1 + 2(\omega^2 \sin \alpha - \cos \alpha) a_1 = 0,$$

а значит, доказана необходимость условия (8).

Если же выполнено равенство (8), то тогда при подходящем μ

$$\gamma_1 = \mu \sin \alpha, \quad \gamma_2 = \mu \cos \alpha. \quad (11)$$

Из (11) вытекает, что справедлива формула $\gamma = i\mu \exp(-i\alpha)$, которая позволяет комплексное равенство (10) записать в виде следующих двух вещественных

$$\pi^2 d_{\text{кр}} a_1 - 2(\cos \alpha - \omega^2 \sin \alpha) a_1 = 0, \quad -\pi^2 d_{\text{кр}} a_2 - 2(\omega^2 \cos \alpha + \sin \alpha) a_1 = \mu.$$

Согласно (2) первое равенство справедливо. Второе равенство позволяет однозначно определить a_2 при произвольно заданном a_1 . Доказательство закончено.

Из равенств (6) следует, что

$$\sin \alpha = \frac{\sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos \alpha = \frac{\omega^2 \sin \varphi - \cos \varphi}{\sqrt{\omega^4 + 1}}. \quad (12)$$

Равенства (12) означают, что

$$\exp(i\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}} (-1 + i\omega^2) \exp(-i\varphi). \quad (13)$$

Из сопоставления (8) с (13) выводим ключевое утверждение.

Лемма 2. Неоднородное уравнение (7) разрешимо в том и только том случае, если

$$\operatorname{Re}(\gamma \exp(-i\varphi)) + \omega^2 \operatorname{Im}(\gamma \exp(-i\varphi)) = 0. \quad (14)$$

3. Алгоритм вычисления ляпуновской величины. При $d = d_{\text{кр}}$ в (1) выполним замену

$$\xi = (1 + \eta) \exp(-i\omega^2 t + i\psi),$$

в которой с достаточной для нас точностью

$$\eta = \rho \exp(-i\varphi) \sqrt{2} \cos \pi x + \rho^2 \eta_1 + \rho^3 \eta_2, \quad (15)$$

$$\psi = \beta \rho^2, \quad \dot{\rho} = b \rho^3, \quad (16)$$

где β и b – вещественные постоянные, η_1 и η_2 – комплексные функции определенной структуры. В итоге приходим к равенству

$$\begin{aligned} i\beta \rho^2 + i\beta \rho^3 \exp(-i\varphi) \sqrt{2} \cos \pi x + b \rho^3 \exp(-i\varphi) \sqrt{2} \cos \pi x = \\ = L_0 \eta - (1 + i\omega^2)(\eta^2 + 2|\eta|^2 + |\eta|^2 \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

Приравнивая последовательно в (17) коэффициенты при ρ^2 и ρ^3 , находим из получающихся уравнений сначала β и η_1 , а затем b . Последняя b и называется ляпуновской величиной.

Остановимся на геометрическом смысле уравнений (16): с их помощью описывается динамика в двумерном инвариантном подпространстве краевой задачи (1). Равенство же (15) используется для приближенного построения автомодельного цикла с пространственно неоднородной комплексной амплитудой.

4. Формула для ляпуновской величины. Приравнивая в (17) коэффициенты при ρ^2 , получаем

$$L_0 \eta_1 = i\beta + (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2)(1 + \cos 2\pi x). \quad (18)$$

Из структуры правой части формулы (18) вытекает, что имеет смысл равенство

$$\eta_1 = c + A \cos 2\pi x, \quad (19)$$

где c – вещественная постоянная, A – комплексная. Из (18) и (19) вытекает, в частности, равенство

$$-2(1 + i\omega^2)c = i\beta + (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2),$$

которое справедливо только в том случае, если

$$\beta = (\omega^4 + 1) \sin 2\varphi, \quad 2c = -(1 + 2 \cos^2 \varphi + \omega^2 \sin 2\varphi). \quad (20)$$

Второе равенство, также вытекающее из (18) и (19), имеет вид

$$-4\pi^2 d_{\text{кр}} \exp(-i\alpha) A - (1 + i\omega^2)(A + \bar{A}) = (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2),$$

которое согласно следующей из (4) формулы

$$-\pi^2 d_{\text{кр}} \exp(-i\alpha) = (1 + i\omega^2)(\exp(2i\varphi) + 1)$$

преобразуется к более наглядной форме

$$(3 + 4 \exp(2i\varphi))A - \bar{A} = 2 + \exp(-2i\varphi). \quad (21)$$

К уравнению (21) относительно A и $\bar{A}$ добавим комплексно сопряженное

$$(3 + 4 \exp(-2i\varphi))\bar{A} - A = 2 + \exp(2i\varphi). \quad (22)$$

Разрешая систему (21), (22), получаем

$$A = \frac{1}{48 \cos^2 \varphi} (8 + \exp(2i\varphi) + 11 \exp(-2i\varphi) + 4 \exp(-4i\varphi)). \quad (23)$$

Формула для $\bar{A}$ получается путем проведения операции перехода к комплексно-сопряженным величинам в (23).

Выделим в (17) слагаемое при ρ^3 и обозначим через γ сумму коэффициентов при $\sqrt{2} \cos \pi x$. С учетом равенства (19) получаем

$$\gamma = (b + i\beta) \exp(-i\varphi) + (1 + i\omega^2) \left[4c \cos \varphi + 2c \exp(-i\varphi) + 2A \cos \varphi + \bar{A} \exp(-i\varphi) + \frac{3}{2} \exp(-i\varphi) \right]. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\gamma \exp(-i\varphi)) &= b \cos 2\varphi + \beta \sin 2\varphi + 4c \cos^2 \varphi + 2c \cos 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{24 \cos \varphi} (9 \cos \varphi + 11 \cos 3\varphi + 4 \cos 5\varphi) + \frac{1}{48 \cos^2 \varphi} (11 + 12 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \\ &+ \frac{3}{2} \cos 2\varphi + 4\omega^2 c \sin \varphi \cos \varphi + 2\omega^2 c \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{\omega^2}{24 \cos \varphi} (7 \sin \varphi + 11 \sin 3\varphi + 4 \sin 5\varphi) + \frac{\omega^2}{48 \cos^2 \varphi} (4 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + \\ &+ \frac{3}{2} \omega^2 \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\gamma \exp(-i\varphi)) &= -b \sin 2\varphi + \beta \cos 2\varphi - 4c \sin 2\varphi - \\ &- \frac{1}{24 \cos \varphi} (7 \sin \varphi + 11 \sin 3\varphi + 4 \sin 5\varphi) - \frac{1}{48 \cos^2 \varphi} (4 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) - \\ &- \frac{3}{2} \sin 2\varphi + 4\omega^2 c \cos^2 \varphi + 2\omega^2 c \cos 2\varphi + \\ &+ \frac{\omega^2}{24 \cos \varphi} (9 \cos \varphi + 11 \cos 3\varphi + 4 \cos 5\varphi) + \frac{\omega^2}{48 \cos^2 \varphi} (11 + 12 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \\ &+ \frac{3}{2} \omega^2 \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что согласно (12)

$$\omega^2 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi = 1 + 2 \cos \varphi (\omega^2 \sin \varphi - \cos \varphi) = 1 + 2\sqrt{\omega^4 + 1} \cos \varphi \cos \alpha. \quad (27)$$

Формулы (25)-(27) в соответствии с равенством (14) и первым равенством (20) приводят к явной формуле для b :

$$\begin{aligned} \frac{48 \cos^2 \varphi (1 + 2\sqrt{\omega^4 + 1} \cos \varphi \cos \alpha)}{\omega^4 + 1} b = & 48 \cos^2 \varphi (\sin^2 2\varphi + \omega^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \\ & + 2c(\cos 2\varphi + 2 \cos^2 \varphi)) + 2 \cos \varphi (9 \cos \varphi + 11 \cos 3\varphi + 4 \cos 5\varphi) + \\ & + 11 + 12 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + 72 \cos^2 \varphi \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

Правая часть формулы (28), которую обозначим буквой l , нуждается в упрощении. На этом пути будут полезны ряд известных тригонометрических равенств:

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi, \quad (29)$$

$$\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1, \quad \cos 5\varphi = 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \quad (30)$$

Представим l в виде $l_1 + l_2 + l_3$, где l_1 – взятое в скобках первое слагаемое с множителем $48 \cos^2 \varphi$, l_2 – взятое в скобки второе слагаемое с множителем $2 \cos \varphi$, l_3 – сумма остальных слагаемых правой части (28).

В силу второго равенства (20)

$$l_1 = 48 \cos^2 \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi - 12 \cos^4 \varphi - 4 \omega^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi). \quad (31)$$

Учитывая формулы (29) и (30), имеем

$$l_2 = 8 \cos^2 \varphi (16 \cos^4 \varphi - 9 \cos^2 \varphi - 1). \quad (32)$$

С помощью тех же формул выводим, что

$$l_3 = 8 \cos^2 \varphi (19 \cos^2 \varphi - 7). \quad (33)$$

Из (31)-(33) получаем итоговое равенство

$$l = -16l_0 \cos^2 \varphi, \quad l_0 = 28 \cos^4 \varphi - 11 \cos^2 \varphi + 12 \omega^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi + 1. \quad (34)$$

Пришли к нашему основному утверждению.

Теорема. Для ляпуновской величины b справедлива формула:

$$b = -\frac{\omega^4 + 1}{3(1 + 2\sqrt{\omega^4 + 1} \cos \varphi \cos \alpha)} l_0. \quad (35)$$

Разберемся со знаком l_0 . Предварительно остановимся на следующем обстоятельстве. Положим

$$\sin \nu(\omega^2) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos \nu(\omega^2) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + 1}}.$$

Отсюда и из (6) выводим, что

$$\sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)\right), \quad \cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)\right),$$

а значит, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)$. Из последнего равенства следует, что $\omega^2 \operatorname{tg} \varphi > 1$.

Напомним, что

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Поэтому

$$l_0 = (\operatorname{tg}^4 \varphi - 9 \operatorname{tg}^2 \varphi + 12 \omega^2 \operatorname{tg} \varphi + 18) \cos^4 \varphi. \quad (36)$$

В (36) положим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{\omega^2}$, где $x > 1$. Заключаем, что знак l_0 совпадает со знаком квадратного многочлена

$$\omega^8 - \frac{3x^2}{2(2x+3)}\omega^4 + \frac{x^4}{6(2x+3)}$$

относительно переменной ω^4 . Его дискриминант отрицателен, а значит, $l_0 > 0$.

Сопоставим наш результат с приведенным в [3], где бифуркационная задача решена иным способом. Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 + \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha - 1} \quad (37)$$

Формулу (37) учтем в выражении, стоящем в круглых скобках в (36). В получившейся формуле выделим числитель $Q(\operatorname{tg} \alpha, \omega^2)$:

$$(\omega^2 + \operatorname{tg} \alpha)^4 - 9(\omega^2 + \operatorname{tg} \alpha)^2(\omega^2 \operatorname{tg} \alpha - 1)^2 + 12\omega^2(\omega^2 + \operatorname{tg} \alpha)(\omega^2 \operatorname{tg} \alpha - 1)^3 + 18(\omega^2 \operatorname{tg} \alpha - 1)^4,$$

который запишем в виде

$$a_1 \operatorname{tg}^4 \alpha + a_2 \operatorname{tg}^3 \alpha + a_3 \operatorname{tg}^2 \alpha + a_4 \operatorname{tg} \alpha + a_5. \quad (38)$$

Именно выражение (38) фигурирует в [3].

Прямая выкладка показывает, что

$$\begin{aligned} a_1 &= 30\omega^8 - 9\omega^4 + 1, & a_2 &= 12\omega^{10} - 126\omega^6 + 22\omega^2, \\ a_3 &= -45\omega^8 + 186\omega^4 - 9, & a_4 &= 58\omega^6 - 102\omega^2, & a_5 &= \omega^8 - 21\omega^4 + 18, \end{aligned}$$

т.е. имеем согласование с равенством из [3].

Дополнительно подчеркнем, что согласно (35) формулу для ляпуновской величины можно записать в виде:

$$b = -\frac{Q(\operatorname{tg} \alpha, \omega^2) \cos^4 \alpha}{3(\omega^4 + 1)(1 + 2\sqrt{\omega^4 + 1} \cos \varphi \cos \alpha)}.$$

Итак, предложен простой и наглядный способ построения ляпуновской величины квазинормальной формы, пригодный также для исследования бифуркационных проблем волновых уравнений, связанных с (1) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Отметим, что именно этот случай не рассмотрен в [1]-[3].

Второе замечание связано с теоремой, сформулированной в [4], в которой утверждается, что в рамках исходной краевой задачи достижима бифуркационная граница. Однако уже более двадцати лет известно, что это не так. И все же уместно еще раз отметить особенность вопроса.

Пусть процесс возникновения автоволновых процессов некоторой сингулярно возмущенной краевой задачи исследуется при помощи метода квазинормальных форм. Пусть отрицательна соответствующая ляпуновская величина. Тогда у возникающих двух неоднородных циклов пространственная неоднородность сначала связана с произвольно высокими модами. По мере увеличения надкритичности становятся пространственно неоднородными моды со все меньшими номерами. При этом при переходе неоднородности с моды на моду пространственно неоднородные циклы обмениваются устойчивостью с однородным. Процесс прекращается, когда пространственные возмущения достигают младшей ненулевой моды.

В заключение подчеркнем, что для систем реакция-диффузия метод квазинормальных форм приобрел законченный вид в относительно недавней статье [5].

Список литературы

1. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.:Физматлит, 1995.
2. Колесов А.Ю. О принципе области в задаче о колебаниях численности млекопитающих //Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль, 1985. С. 11-22.
3. Колесов А.Ю. Миграционные эффекты в одновидовом биоценозе //Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 34-61.
4. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических краевых задачах гиперболического типа //Математика в Ярославском университете. Ярославль, 2001. С. 183-194.

5. Колесов Ю.С. Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65, №4. С. 111-132.

Совместное использование методов бизнес-моделирования и объектно-ориентированной методологии при проектировании профилированного пользовательского интерфейса

Игнатова И.Г., Соколова Н.Ю.

*Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д.5, МИЭТ, МОЦНИТ*

получена 10 03 2006

Аннотация

В статье рассматривается механизм совместного использования методов бизнес-моделирования и объектно-ориентированной методологии при конструировании профилированного пользовательского интерфейса. Обоснована возможность такого использования. Даны краткие характеристики основных компонентов DFD и UML диаграмм, а также их соответствие при переходе от одной диаграммы к другой. Приведен пример использования.

1. Введение

Конструирование пользовательского интерфейса, полностью удовлетворяющего функциональным требованиям, является важной задачей при разработке программных систем различного назначения. Особенно актуальна данная задача при разработке систем, в которых поддерживается работа различных категорий пользователей, чьи функциональные потребности могут быть как схожи, так и различны. Процессу разработки интерфейса, ориентированного на пользователя, посвящена книга [1], в которой подробно описывается процесс конструирования пользовательского интерфейса с использованием диаграммы прецедентов языка моделирования UML (Unified Modeling Language) объектно-ориентированной (ОО) методологии.

2. Объектно-ориентированная методология

Общепризнано, что ОО методология [1, 2, 3, 4, 5, 6] является наиболее перспективной при разработке программного обеспечения. Это обусловлено наличием свойства наследования классов, что упрощает внесение изменений путем добавления новых классов в библиотеки классов, разработанных в других проектах. Наиболее часто при проектировании систем используется язык UML, который позволяет в едином инструментарии представить и статическую составляющую модели программной системы, и динамическую составляющую этой модели, которая описывает поведение системы и данных [3, 4, 5]. Достоинством языка является то, что он позволяет описывать структуру базы данных (БД), в том числе и реляционной [4].

До применения ОО методологии в разработке программного обеспечения необходимо решить следующие задачи подготовительного этапа:

- 1) определить требования, предъявляемые к системе;
- 2) выделить пользователей системы, их роли, которые могут быть реализованы, решаемые ими задачи, а также процессы предметной области (ПрО), описав их в прецедентах;
- 3) идентифицировать понятия, атрибуты, ассоциации для построения диаграммы классов.

Как правило, эти задачи решаются путем взаимодействия с заказчиками, знающими о бизнес-процессах предприятия, протекающих потоках информации и документов. Таким образом, встает задача выбора способа представления бизнес-процессов и потоков информации в форме, которая, с одной стороны, понятна как специалистам ПрО (заказчикам), так и разработчикам ПО, а с другой стороны, может быть определенным способом трансформирована в диаграммы языка UML, соответствующие подготовительному этапу создания ОО модели.

Как известно из технологии разработки программного обеспечения (ПО) [7], первым этапом создания программных систем является анализ требований к системе, который позволяет выявить роли пользователей в системе, решаемые ими задачи и описать интерфейс пользователя набором функций и их содержанием. В понятиях ОО анализа и проектирования это означает идентификацию процессов, протекающих в предметной области, и описание их с помощью прецедентов (вариантов использования). Хотя прецеденты, являющиеся частью языка UML, и не относятся к ОО модели, но их выделение важно для построения

ОО модели с точки зрения определения требований, выдвигаемых к системе. Описание прецедента обязательно включает определение его инициатора, т.е. пользователя системы, с которым данный прецедент связан.

Следующим этапом создания ОО модели является декомпозиция ПрО на понятия, атрибуты, ассоциации в терминах данной ПрО. Необходимо отобразить практически для каждого прецедента - процесса, какие объекты (понятия) ПрО взаимодействуют между собой с помощью сообщений. Данное взаимодействие отображается с помощью диаграмм взаимодействий языка UML. Итогом ОО анализа является построение диаграммы классов, для чего выполняется анализ диаграмм взаимодействий с точки зрения идентификации классов объектов, их связей и определения методов.

3. Методология бизнес-моделирования

Другая методология, применяемая при анализе деятельности предприятий или организаций в современных методологиях бизнес-моделирования, каким является семейство стандартов IDEF, позволяет определить роли пользователей для реализации их в автоматизированной системе и выделить решаемые задачи, что является важным при разработке ОО модели программной системы. Поэтому для формирования требований к системе, определения бизнес-процессов, понятий предметной области, ролей пользователей в системе и решаемых ими задач предлагается использовать методологию бизнес-моделирования с использованием диаграмм DFD(Data Flow Diagrams). DFD диаграммы входят в состав стандарта IDEF0 и описывают процесс декомпозиции бизнес-процессов до уровня, когда выделенному процессу можно будет поставить в соответствие подпрограмму разрабатываемого ПО [2, 8, 9]. Диаграммы DFD наглядны и понятны специалистам ПрО. Особенностью DFD диаграмм является возможность представления процессов реальной ПрО, которые будут или должны будут происходить при использовании разрабатываемой информационной системы. В отличие от диаграмм UML, диаграммы DFD позволяют отобразить движение потоков информации и документов от одного процесса к другому.

4. Переход от DFD к UML

Основу DFD диаграмм составляют: процессы, внешние сущности, хранилища данных и связи [8, 9]. В состав диаграммы прецедентов языка UML [2-6] входят: варианты использования (прецеденты), спецификации прецедентов, актеры, связи.

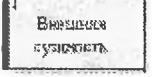
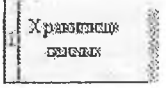
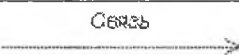
DFD	UML
	
	
	
	

Рис. 1. Соответствие элементов DFD UML

При переходе от DFD диаграмм к диаграммам UML в качестве актеров ОО модели могут быть задействованы внешние сущности, а в качестве претендентов на класс - хранилища данных. В результате анализа и проектирования с помощью DFD диаграмм получаются иерархически связанные процессы и подпроцессы, в состав которых входит набор функций. Иными словами, в результате построения DFD

диаграмм все функции, подлежащие автоматизации в программном комплексе, уже систематизированы в логически связанные группы - подпроцессы, а следовательно, можно в качестве названия прецедента брать название подпроцесса, с учетом того, что данный подпроцесс взаимодействует с внешней сущностью системы. На рис. 1 представлено соответствие компонент DFD диаграмм компонентам диаграмм UML.

В качестве примера рассмотрим этап анализа при разработке программной системы поддержки учебного процесса, осуществляемого по дистанционной технологии. На данном этапе были построены DFD диаграммы, описывающие функционально-структурную модель предметной области. Пример DFD диаграммы первого уровня изображен на рис. 2. Полученные с помощью DFD диаграмм подпроцессы имеют иерархическую структуру, фрагмент которой представлен на рис. 3.

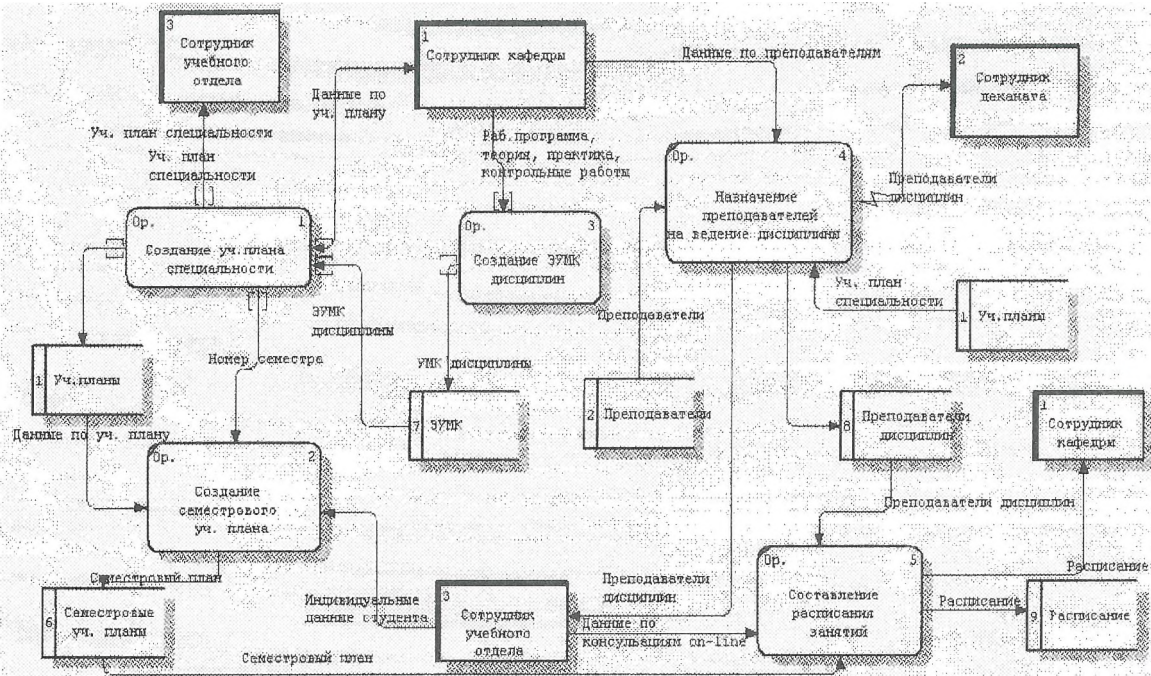


Рис. 2. DFD диаграмма процесса "Обучение с применением дистанционных технологий"

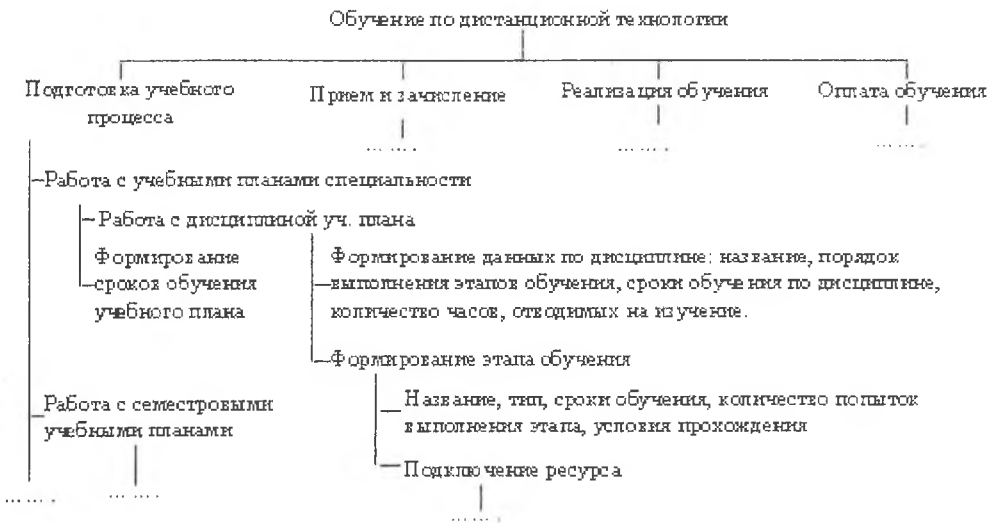


Рис. 3. DFD диаграмма подпроцесса "Обучение с применением дистанционных технологий"

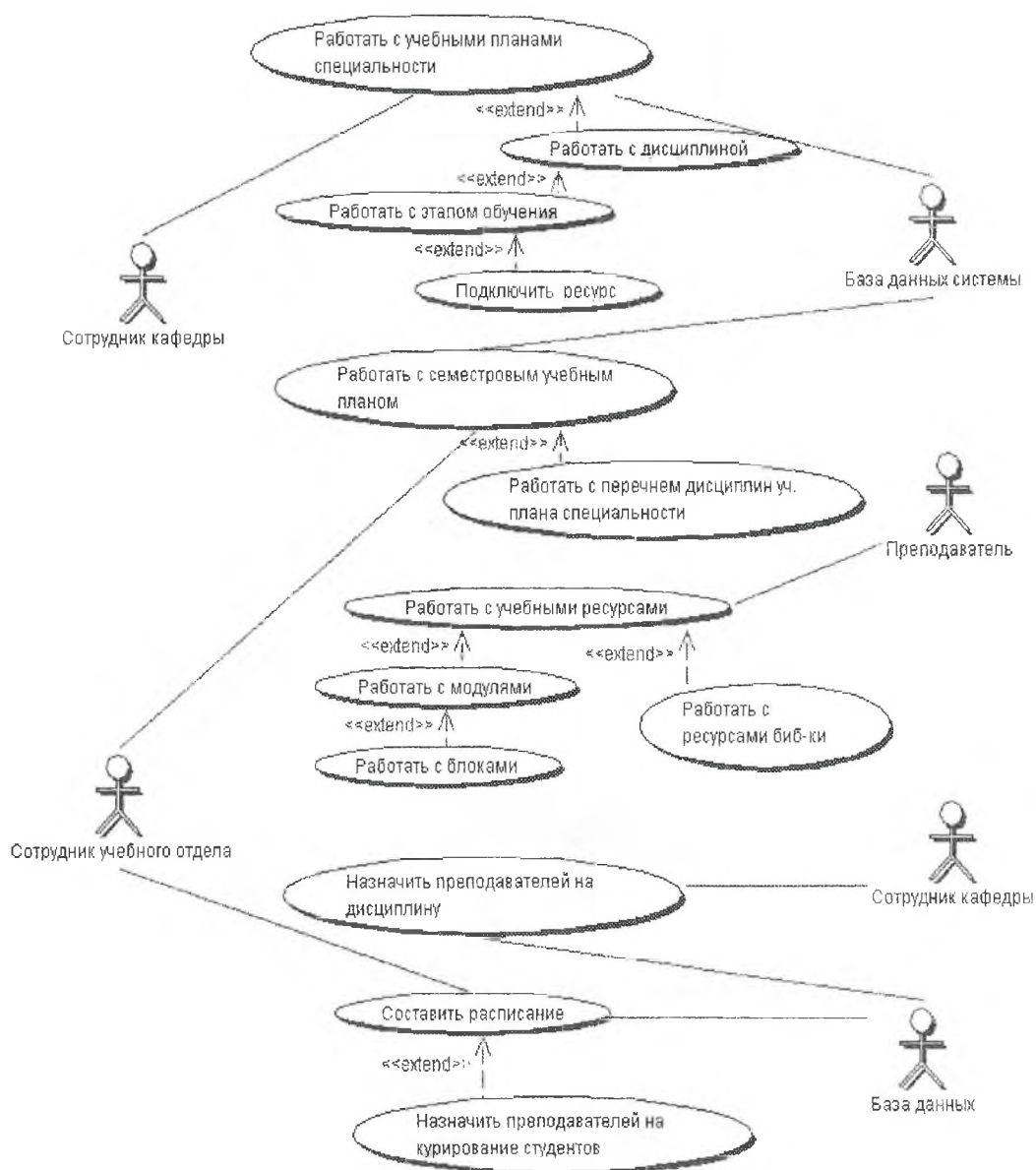


Рис. 4. Диаграмма прецедентов пакета "Подготовка учебного процесса"

DFD диаграммы позволили идентифицировать актеров диаграммы прецедентов, а именно: сотрудник деканата, сотрудник учебного отдела, сотрудник кафедры, преподаватель, студент, сотрудник финансового отдела. А также определить претендентов на классы, например, преподаватель, студент, учебный план, дисциплина и т.д. Анализ диаграмм с точки зрения выявления прецедентов позволил идентифицировать подпроцессы, которые могут быть выбраны в качестве прецедентов. В данном случае были выбраны подпроцессы диаграмм второго уровня. Кроме этого, была использована возможность языка UML организации прецедентов по пакетам. Было создано четыре пакета, каждый из которых соответствует подпроцессу DFD диаграммы первого уровня: подготовка учебного процесса, прием и зачисление, реализация обучения и оплата обучения. В данные пакеты включены прецеденты, соответствующие подпроцессам диаграмм второго уровня.

Анализ диаграммы прецедентов пакета "Подготовка учебного процесса", представленной на рис. 4, позволяет определить основные составляющие пользовательского интерфейса для каждой категории пользователей системы. Например, интерфейс сотрудника кафедры обязательно должен включать операции по

поддержке работы с электронными учебными планами специальности, дисциплинами, этапами обучения по дисциплине и подключению обучающего или контролирующего ресурса.

5. Заключение

Таким образом, при конструировании профилированного пользовательского интерфейса, являющегося одной из составляющих всего процесса анализа и проектирования сложного программного обеспечения, совместно могут быть использованы два разных подхода - бизнес-моделирования и объектно-ориентированного анализа и проектирования. Методы бизнес-моделирования позволяют сформировать требования к системе, определить бизнес-процессы, понятия предметной области, роли пользователей в системе, решаемые ими задачи, которые в дальнейшем, путем соотнесения элементов DFD и UML диаграмм (рисунок 1), могут быть использованы при разработке программной системы методами объектно-ориентированного программирования.

Список литературы

1. *Лари Константайн*. Разработка программного обеспечения. СПб.: Питер, 2004.
2. *Вендеров А.М.* Проектирование программного обеспечения экономических информационных систем. М.: Финансы и статистика, 2000.
3. *Буч Г., Рамбо Д., Джекобсон А.* Язык UML. Руководство пользователя. М.: ДМК, 2000.
4. *Леоненков А.В.* Самоучитель UML. СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
5. *Фаулер М., Скотт К.* UML в кратком изложении. Применение стандартного языка объектного моделирования. М.: Мир, 1999.
6. *Ларман К.* Применение UML и шаблоны проектирования. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.
7. *Эрик Дж.Брауде*. Технология разработки программного обеспечения. СПб. Питер, 2004.
8. *Маклаков С.В.* Моделирование бизнес-процессов с BPwin 4.0. М.: ДИАЛОГМИФИ, 2002.
9. *Черемных С.В. и др.* Структурный анализ систем: IDEF - технологии. М.: Финансы и статистика, 2001.

УДК 517.9

Формула для ляпуновской величины задачи о конкурентной борьбе

Пендюк А.Д., Пендюк Д.А.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 14 марта 2006

Аннотация

Продолжается начатое ранее рассмотрение данной задачи; приводится вывод упомянутой в названии формулы; приведено одно следствие.

1. Начнём с общих положений из [1]. Рассмотрим уравнение с запаздыванием в R^n

$$\dot{u} = r l(u(t+s)) + r u l(u(t+s)), \quad (1)$$

где $l(*)$ – линейный оператор, действующий из $C([-h, 0], R^n)$ в R^n , $r \in R^n$, а произведение векторов означает вектор, у которого координаты – произведения координат сомножителей. Введём в рассмотрение матрицу

$$A(i\omega) = l(I \exp(i\omega s)), \quad (2)$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$.

Будем считать, что при некоторых r и $\omega > 0$

$$r A(i\omega) a = i\omega a, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

Последнее равенство означает, что характеристический квазиполином уравнения

$$\dot{u} = r l(u(t+s)) \quad (4)$$

имеет корни $\pm i\omega$. Считаем их простыми. Относительно остальных его корней предполагаем, что они имеют отрицательные действительные части. Из (3) следует, что

$$A^*(-i\omega) r b = -i\omega b, \quad b \neq 0, \quad (5)$$

где звёздочка обозначает транспонирование.

Лемма. Вектор b можно выбрать так, что

$$(a, b) - (r l(a s \exp(i\omega s)), b) = 1, \quad (6)$$

где скалярное произведение берётся в смысле унитарного пространства.

Доказательство. Так как вектор b определяется с точностью до комплексного множителя, то достаточно показать, что отлична от нуля левая часть в (6). Будем рассуждать от противного, считая, что она равна нулю. Введём в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\dot{u} = (r + \varepsilon \gamma) l(u(t+s)),$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а γ – пока произвольный вектор из R^n . Из наших предположений следует, что уравнение

$$(r + \varepsilon \gamma) l(a(\varepsilon) \exp(\lambda(\varepsilon) s)) = \lambda(\varepsilon) a(\varepsilon) \quad (7)$$

имеет гладко зависящие от ε решения

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad a(\varepsilon) = a + \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает, что

$$(rA(i\omega) - i\omega I) \mathbf{a}_1 = \lambda_1 (\mathbf{a} - rl(\mathbf{a} s \exp(i\omega s))) - i\omega \frac{\gamma \mathbf{a}}{r}.$$

По построению $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Поэтому, скажем, при $\gamma = r$ правая часть в последнем равенстве отлична от нуля при её скалярном умножении на $\mathbf{b}$, что невозможно. Доказательство закончено.

При выбранном r уравнение (1) имеет двумерное инвариантное интегральное многообразие, на котором динамика связана с уравнением

$$\dot{z} = dz |z|^2 \quad (9)$$

и комплексно сопряжённом к нему. В (9) комплексная постоянная d называется ляпуновской величиной, значение которой существенно при решении бифуркационных задач. Опишем способ её вычисления. Положим

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad (10)$$

где $u_1 = z\mathbf{a} \exp(i\omega t) + K.C.$ (К.С. - обычное сокращение комплексно сопряжённой добавки); u_2 - квадратичным образом зависит от z , а по t является второй гармоникой; u_3 - кубична по z , а по t является суммой первых и третьих гармоник.

Подставляя (10) в (1) и приравнявая квадратичные по z слагаемые, получаем

$$i\dot{u}_2 = rl(u_2(t+s)) + ru_1(t) l(u_1(t+s)). \quad (11)$$

Так как $\dot{u}_1 = rl(u_1(t+s))$, то неоднородность в (11) можно представить в виде:

$$i\omega (\mathbf{a}^2 z^2 \exp(2i\omega t) - \bar{\mathbf{a}}^2 \bar{z}^2 \exp(-2i\omega t)). \quad (12)$$

Поэтому достаточно рассмотреть уравнение

$$i\dot{u} = rl(u(t+s)) + c \exp(2i\omega t), \quad (13)$$

решение которого будем искать в виде

$$u = \gamma \exp(2i\omega t). \quad (14)$$

Из (13) и (14) вытекает, что

$$c = (2i\omega I - rA(2i\omega))^{-1} \gamma. \quad (15)$$

Сопоставляя (15) с (12) и (13), замечаем, что

$$u_2 = \beta \mathbf{a}^2 \exp(2i\omega t) + K.C., \quad (16)$$

где

$$\beta = i\omega (2i\omega I - rA(2i\omega))^{-1} \mathbf{a}^2. \quad (17)$$

Условия, при которых гармоническая по t функция u_3 существует, нуждаются в пояснениях. После приравнивания в (1) кубических по z слагаемых, приходим к некоторому неоднородному уравнению, в котором неоднородность содержит только первые и третьи гармоники по t . Кроме того, следует учесть, что u_1 теперь дифференцируется и по z , и что в силу (9)

$$z(t+s) = z(t) + s\dot{z}(t) + \dots,$$

где опущены слагаемые пятого порядка по z .

Реализация указанной процедуры приводит к заключению, что слева перед $\exp(i\omega t)$ стоит множитель

$$ds |z|^2 (\mathbf{a} + rl(\mathbf{a} s \exp(i\omega s))), \quad (18)$$

а справа

$$z |z|^2 i\omega (\bar{a}\beta - a^2\bar{a}). \quad (19)$$

Из (18), (19) и леммы вытекает содержащееся в [1] утверждение.

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$d = i\omega ((\beta, ab) - (a^2, ab)). \quad (20)$$

2. В [2] рассматривается вопрос об устойчивости единичного состояния равновесия системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{n}_1 = \frac{r}{1+a}(1+a(1-n_2)-n_1(t-1))n_1, \quad (21)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{r}{1+a}(1+a(1-n_1)-n_2(t-1))n_2, \quad (22)$$

которые служат простейшей моделью задачи о конкуренции двух видов. В (21), (22) все параметры положительны. С помощью замены $n_k = 1 + u_k$, $k = 1, 2$, выпишем уравнения в вариациях

$$\dot{u}_1 = -\frac{r}{1+a}(au_2 + u_1(t-1)), \quad \dot{u}_2 = -\frac{r}{1+a}(au_1 + u_2(t-1)) \quad (23)$$

системы (21), (22). В [2] показано, что характеристический квазиполином уравнений (23)

$$P(\mu) = \left(\mu + \frac{r}{1+a} \exp(-\mu) - \frac{ra}{1+a} \right) \left(\mu + \frac{r}{1+a} \exp(-\mu) + \frac{ra}{1+a} \right) \quad (24)$$

имеет корни $\pm i\omega$, только если

$$a = \cos \omega, \quad r = \frac{\omega(1 + \cos \omega)}{\sin \omega}, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

Матрица (2) для системы (23) соответственно есть

$$A(i\omega) = -\frac{r}{1+a} \begin{pmatrix} \exp(-i\omega) & a \\ a & \exp(-i\omega) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а для матрицы A^* справедлива формула:

$$A^*(-i\omega) = A(-i\omega).$$

Найдём векторы a и b , удовлетворяющие условиям (3), (5), (6).

Пусть $a = (a_1, a_2)^T$. Согласно (3) имеем

$$-\frac{r}{1+a}(a_1 \exp(-i\omega) + aa_2) = i\omega a_1, \quad -\frac{r}{1+a}(aa_1 + a_2 \exp(-i\omega)) = i\omega a_2.$$

Отсюда следует, что $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Пусть $b = (b_1, b_2)^T$. В соответствии с (5) получаем

$$\frac{r}{1+a}(b_1 \exp(i\omega) + ab_2) = i\omega b_1, \quad \frac{r}{1+a}(ab_1 + b_2 \exp(-i\omega)) = i\omega b_2,$$

а значит, $b = b_0(1, -1)^T$, где о выборе комплексной постоянной b_0 скажем позднее.

Рассмотрим равенство (6). В рассматриваемом случае оно имеет вид:

$$2\bar{b}_0 - \frac{2r}{1+a} \exp(-i\omega) \bar{b}_0 = 1,$$

т.е.

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right)}.$$

Вычислим

$$\beta = i\omega \begin{pmatrix} 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) & \frac{ra}{1+a} \\ \frac{ra}{1+a} & 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$. Из (27) получаем

$$i\omega = \beta_1 \left(2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \right) + \beta_2 \frac{ar}{1+a}, \quad i\omega = \beta_1 \frac{ar}{1+a} + \beta_2 \left(2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \right).$$

Отсюда следует, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$, где

$$\beta_0 = \frac{i\omega}{2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a}}, \quad (28)$$

т.е. $\beta = \beta_0(1, 1)$.

Для того, чтобы воспользоваться формулой (20) посчитаем все входящие в неё величины.

$$ab = b_0(1, 1)^T, \quad a^2 = (1, 1)^T, \quad (a^2, ab) = 2\bar{b}_0, \quad (\beta, ab) = 2\beta_0\bar{b}_0, \quad (\beta, ab) - (a^2, ab) = 2\bar{b}_0(\beta_0 - 1).$$

Теорема 2. Для ляпуновской величины справедлива формула

$$d = 2i\omega\bar{b}_0(\beta_0 - 1). \quad (29)$$

Доказательство следует из приведённых выше рассуждений и теоремы 1.

Рассмотрим теперь вопрос о знаке Red .

Теорема 3. Справедливы неравенства $\text{Red} > 0$, $\omega_0 < \omega < \pi/3$, где $\omega_0 = 1,0007\dots$, и $\text{Red} < 0$ при остальных ω .

Доказательство. Имеем

$$2i\omega\bar{b}_0 = \frac{i\omega}{1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega)}. \quad (30)$$

Учитывая, что $P(i\omega) = 0$, получаем

$$2i\omega_0\bar{b}_0\beta_0 = - \frac{\omega^2 \left(1 - \frac{ra}{1+a} - i\omega \right) \left(\frac{ar}{1+a} + \frac{r}{1+a} \exp(2i\omega) - 2i\omega \right)}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2 \left| 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a} \right|^2}. \quad (31)$$

Из (29)-(31) следует, что

$$\text{Red} = - \frac{\omega^3 V}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2 \left| 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a} \right|^2},$$

где

$$\omega V = \left| \frac{ar}{1+a} + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + 2i\omega \right|^2 + \left(1 - \frac{ra}{1+a} \right) \left(\frac{ar}{1+a} + \frac{r \cos 2\omega}{1+a} \right) + \frac{\omega r}{1+a} \sin 2\omega - 2\omega^2.$$

Учитывая (25), получим:

$$V = f(\omega) \frac{\omega}{\sin \omega} (\cos \omega + 1), \quad f(\omega) = 8 \cos^2 \omega - 10 \cos \omega + 3 + (2 \cos \omega - 1) \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (32)$$

График функции $f(\omega)$ приведён на рисунке 1.

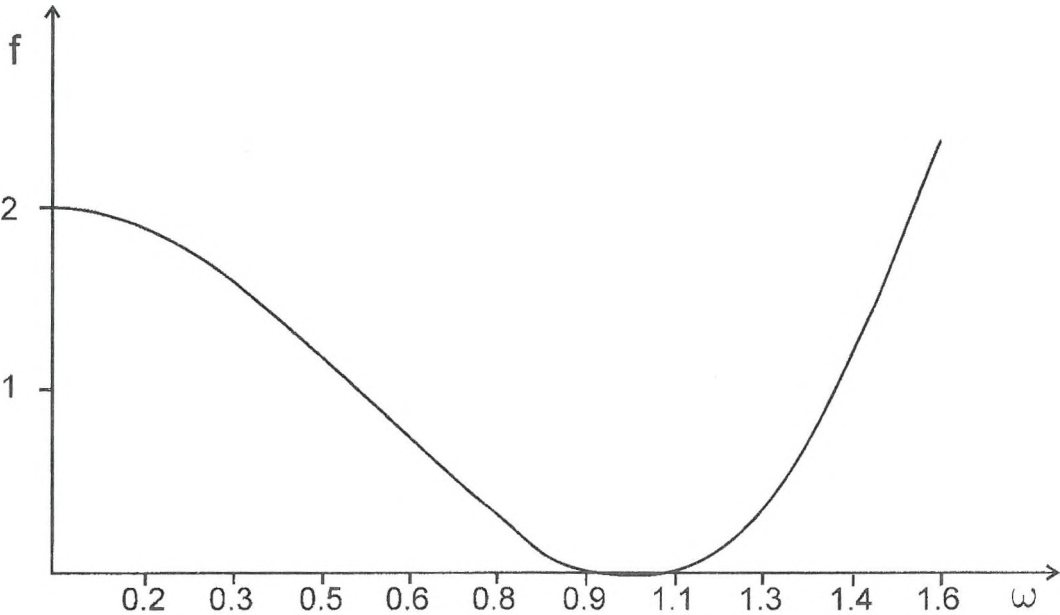


Рис. 1

На рис.2 в увеличенном масштабе показана окрестность, где $f(\omega) < 0$.

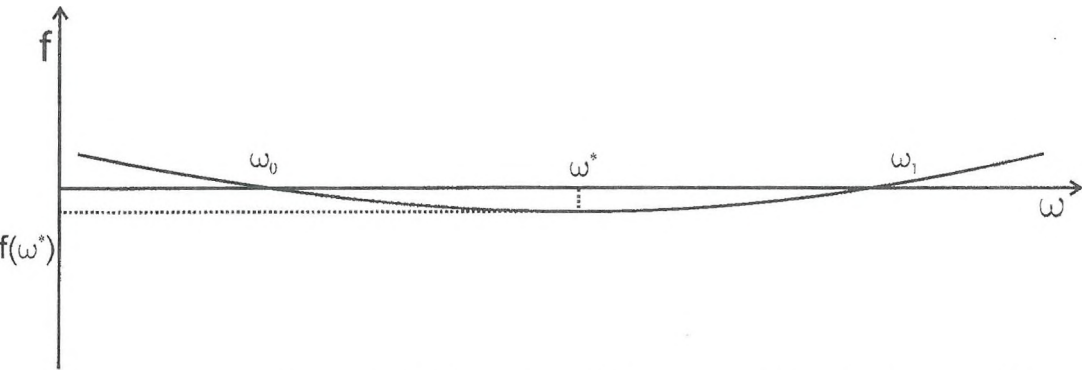


Рис. 2, $\omega_0 = 1,0007\dots$, $\omega^* = 1,024\dots$, $\omega_1 = \pi/3$, $f(\omega^*) = -0,0016\dots$

Заметим, что $\text{Re}d = 0,0057\dots$ при $\omega = \omega^*$.

3. Пусть в (21) - (22) $r = r(\omega)$ заменено на $(1 + \epsilon)r$, где $\epsilon > 0$ - малый параметр. Из (24) вытекает, что гладкая функция $\mu(\epsilon)$, $\mu(0) = i\omega$, удовлетворяет уравнению

$$\mu(\epsilon) + \frac{r(1 + \epsilon)}{1 + a} \exp(-\mu(\epsilon)) = \frac{ra(1 + \epsilon)}{1 + a}. \tag{33}$$

Из (33) следует что

$$\mu' = \frac{d}{d\epsilon} \mu(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{i\omega}{1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega)};$$

в частности,

$$\text{Re}\mu' = \frac{\omega^2}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2}. \tag{34}$$

Из формул (32) и (34) вытекает, что при $0 < \omega < \omega_0$ и $\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{2}$ аттрактором системы (21)-(22) является устойчивый цикл, причём колебания происходят около единичного состояния равновесия с амплитудой

$$2\sqrt{\varepsilon \frac{W(\omega)}{\omega V(\omega)}}, \quad (35)$$

где

$$W = \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega} (1 + \cos^2 \omega + 2 \cos \omega \cos 2\omega) + 4\omega^2 (1 - 2 \cos \omega).$$

Формула (35) и свойства функции $f(\omega)$ позволяют сделать следующий вывод.

При прохождении участка $\omega_0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{3}$ колебания теряют локальность, т.е. становятся значительными. Кроме того, формула (35) теряет смысл при $\omega \rightarrow 0$.

Авторы благодарят Ю.С. Колесова за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Колесов Ю.С. Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределённых систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1709-1713.
2. Пендюров А.Д., Пендюров Д.А. Феномен конкуренции в простейшем варианте // Современ. проблемы мат. и инф. 2005. Вып. 7. С. 101-103.

УДК 517.9

Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области

Куликов Д.А.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о существовании и устойчивости автомодельных волн обобщенного кубического уравнения Шредингера. Рассмотрен вопрос о бифуркации от этих решений автоволн более сложной структуры. При исследовании бифуркационной проблемы был использован метод нормальных форм.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается обобщенное уравнение Шредингера

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u, \tag{1}$$

где $u = u(t, x, z)$ – комплекснозначная функция, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным, d, c – действительные постоянные, причем $d > 0$, знак c произволен. Уравнение (1) является естественным обобщением нелинейного уравнения Шредингера и, в свою очередь, является частным случаем известного уравнения Гинзбурга – Ландау (см. [1 – 4]). Уравнение (1) рассмотрим в случае, когда $u(t, x, z)$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$u(t, x + 2\pi, z) \equiv u(t, x, z), u_z \Big|_{z=0} = u_z \Big|_{z=l} = 0, \tag{2}$$

где $x \in R, z \in [0; l]$. В рамках этой работы ограничимся случаем, когда $l = \pi + \delta_1$, а $|\delta_1| \ll 1$. После замены $z = \frac{\pi + \delta_1}{\pi} z_1$ краевая задача (1), (2) переписется уже так

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id(u_{xx} + (1 + \delta)u_{z_1 z_1}), \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi, z_1) = u(t, x, z_1), u_{z_1} \Big|_{z_1=0} = u_{z_1} \Big|_{z_1=\pi} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\delta = \delta(\delta_1)$ – малый параметр. Далее индекс "1" у переменной z будем опускать.

Простая проверка показывает, что краевая задача (3), (4) имеет решения в виде периодических по t бегущих волн:

$$u(t, x, z) = \exp(i\sigma_n t + inx),$$

где $n \in Z, \sigma_n = dn^2 - c$. В работе продолжают исследования свойств этих решений [5], но несколько в ином плане. Далее будет рассмотрен вопрос о структуре окрестности указанных решений в достаточно малой окрестности в смысле нормы фазового пространства решений краевой задачи (3), (4). В качестве фазового пространства естественно выбрать $W^2_2(D, C)$ – замыкание в метрике $W^2_2(D, C)$ линейала гладких комплекснозначных функций, удовлетворяющих граничным условиям (4). Переменные x, z при этом принадлежат области $D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \pi\}$.

На первом этапе рассмотрения краевой задачи (3), (4) ограничимся базисным случаем $\delta = 0$ ($\delta_1 = 0$).

2. Об устойчивости бегущих волн в линейном приближении. Замена

$$u(t, x, z) = \exp(i\sigma_n t + inx)v(t, x, z) \tag{5}$$

после введения новых независимых переменных

$$t = t, y = x + 2dnt, z = z,$$

сводит задачу (3), (4) к рассмотрению краевой задачи

$$v_t = (1 + ic)(1 - |v|^2)v - id\Delta v, \tag{6}$$

$$v(t, y + 2\pi, z) = v(t, y, z), \quad v_z \Big|_{z=0} = v_z \Big|_{z=\pi} = 0 \quad (7)$$

Нетрудно найти, что краевая задача (6), (7) имеет решение $v = \exp(i\varphi)$, где $\varphi \in R$. Линеаризация на состоянии равновесия $v = 1$ приводит к исследованию устойчивости нулевого решения следующей краевой задачи

$$w_t = Lw, \quad (8)$$

$$w(s, y + 2\pi, z) = w(s, y, z), \quad w_z \Big|_{z=0} = w_z \Big|_{z=\pi} = 0, \quad (9)$$

где $Lw \equiv -id\Delta w - (1 + ic)(w + \bar{w})$. Стандартный анализ спектра линейного оператора L показывает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Спектру линейного оператора L при всех d и c принадлежит собственное число $\lambda_0 = 0$, которому отвечает собственная функция $e_0(y, z) = i$. При $d > 2c$ остальные собственные числа этого оператора лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при $d < 2c$ имеются собственные числа, находящиеся в правой полуплоскости комплексной плоскости. Наконец, при $d = d_{\text{кр}} = 2c$ все собственные числа лежат в левой полуплоскости, кроме одного – нулевого собственного значения кратности 4. Ему соответствуют четыре линейно независимые собственные функции*

$$e_0 = i, \quad e_1 = (-c + i) \cos y, \quad e_2 = (-c + i) \sin y, \quad e_3 = (-c + i) \cos z.$$

Отметим, что величина $d_{\text{кр}}$ находится, если $c > 0$. Далее ограничимся именно этим случаем. Рассмотрим теперь оператор

$$L_0 w = -2ci\Delta w - (1 + ic)(w + \bar{w}),$$

т.е. оператор L при критическом значении d . При таком выборе d уравнение

$$L_0 w = g \quad (10)$$

разрешимо не при любом выборе правой части этого уравнения. При построении нормальной формы могут встречаться следующие случаи выбора g .

$$1) g(y, z) = g_0; \quad 2) g(y, z) = g_1 \cos y; \quad 3) g(y, z) = g_2 \sin y;$$

$$4) g(y, z) = g_3 \cos z; \quad 5) g(y, z) = g_{m,k} \cos my \cos kz; \quad 6) g(y, z) = g_{m,k} \sin my \cos kz.$$

Здесь $g_0, g_1, g_2, g_3, g_{m,k} \in C$, $m, k \in Z$ и таковы, что $m^2 + k^2 \geq 2$.

Отметим достаточно легко проверяемое утверждение.

Лемма 2. *При первом варианте выбора g необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (10) является выполнение равенства*

$$\operatorname{Im} g_0 = c \operatorname{Re} g_0. \quad (11)$$

При выборе g в вариантах 2), 3), 4) необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (10) является выполнение уже следующих равенств

$$\operatorname{Im} g_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (12)$$

В случаях 5) и 6) рассматриваемое уравнение разрешимо при любом выборе постоянных $g_{m,k}$.

Равенства (11), (12) будут использованы далее при построении нормальной формы – системы дифференциальных уравнений, отвечающей за динамику решений краевой задачи (6), (7) в окрестности состояния равновесия $v = 1$.

3. Построение нормальной формы. Положим теперь $d = 2c - \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll 1$. Вместе с краевой задачей (6), (7) рассмотрим вспомогательную задачу при таком же выборе d :

$$v_t = (1 + ic)(1 - |v|^2)v - i(2c - \varepsilon)\Delta v, \quad (13)$$

$$v_y \Big|_{y=0} = v_y \Big|_{y=\pi} = 0, \quad v_z \Big|_{z=0} = v_z \Big|_{z=\pi} = 0. \quad (14)$$

При анализе краевой задачи, естественно, считаем, что $y \in [0; \pi]$. Построим нормальную форму краевой задачи (13), (14) в окрестности единичного состояния равновесия. Понятно, что, как и в случае краевой задачи (6), (7), вспомогательная задача (13), (14) также имеет семейство состояний равновесия

$v = \exp(i\varphi)$ ($\varphi \in R$). Но спектр устойчивости состояния равновесия $v = 1$ теперь устроен проще, чем при изучении аналогичного вопроса для краевой задачи (8), (9). При $\varepsilon = 0$ ($d = 2c$) спектру оператора $L_0 v$, рассматриваемого уже вместе с краевыми условиями (14), принадлежит нулевое трехкратное значение. Ему отвечают три линейно независимые собственные функции $e_0 = i$, $e_1 = (-c+i) \cos y$, $e_3 = (-c+i) \cos z$. Поэтому в случае краевой задачи (13), (14) центральное многообразие трехмерно и, следовательно, нормальная форма состоит из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения на этом трехмерном многообразии представляется возможным искать в следующем виде:

$$v(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varphi(t))(1 + w(t, y, z, \varepsilon)). \quad (15)$$

Здесь

$$w(t, y, z, \varepsilon) = w_1(\eta_1, \eta_2, y, z) + w_2(\eta_1, \eta_2, y, z) + w_3(\eta_1, \eta_2, y, z) + \varepsilon w_0(\eta_1, \eta_2, y, z) + \dots, \quad (16)$$

где w_1, w_0 – линейные формы относительно η_1, η_2 , причем

$$w_1 = (-c + i)(\eta_1 \cos y + \eta_2 \cos z), \quad (17)$$

w_2, w_3 – соответственно квадратичная и кубическая форма по переменным η_1, η_2 . Все слагаемые ряда (16), естественно, удовлетворяют краевым условиям (14). Точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по отношению к $\eta_1, \eta_2, \varepsilon$. Наконец, $\eta_1(t), \eta_2(t), \varphi(t)$ – действительные функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений, которую принято называть нормальной формой краевой задачи (13), (14)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2 + \dots, \\ \dot{\eta}_1 &= \varepsilon \alpha_1 \eta_1 + \eta_1(g_{11} \eta_1^2 + g_{12} \eta_2^2) + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= \varepsilon \alpha_2 \eta_2 + \eta_2(g_{21} \eta_1^2 + g_{22} \eta_2^2) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где точками, как обычно, обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с выписанными.

Для того, чтобы определить коэффициенты нормальной формы, следует выписать уравнение для комплекснозначной функции $w(t, y, z, \varepsilon)$:

$$w_t + i\dot{\varphi}(1 + w) = L_0 w - i\varepsilon \Delta w - (1 + ic)(2w\bar{w} + w^2 + w^2\bar{w}).$$

Отметим сразу, что слагаемое w_1 , определяемое формулой (17), принадлежит ядру оператора L_0 при любом выборе η_1, η_2 . Остальные члены суммы (16) находятся как решения линейных неоднородных уравнений, дополненных граничными условиями (14). Выпишем основные из них, необходимые для определения коэффициентов нормальной формы. Для $w_2 = w_2(\eta_1, \eta_2, y, z)$ получаем

$$L_0 w_2 = i(\beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2) + (1 + ic)(2w_1\bar{w}_1 + w_1^2). \quad (19)$$

Приравнявая кубические слагаемые по η_1, η_2 , формируем неоднородное уравнение уже для комплекснозначной функции $w_3 = w_3(\eta_1, \eta_2, y, z)$

$$\begin{aligned} L_0 w_3 &= i(\beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2)w_1 + (1 + ic)(2w_1\bar{w}_2 + 2w_2\bar{w}_1 + 2w_1w_2 + w_1^2\bar{w}_1) + \\ &+ \eta_1(g_{11}\eta_1^2 + g_{12}\eta_2^2)(-c + i) \cos y + \eta_2(g_{21}\eta_1^2 + g_{22}\eta_2^2)(-c + i) \cos z. \end{aligned} \quad (20)$$

Наконец, для $w_0 = w_0(\eta_1, \eta_2, y, z)$ получаем

$$L_0 w_0 = i\Delta w_1 + \alpha_1 \eta_1(-c + i) \cos y + \alpha_2 \eta_2(-c + i) \cos z. \quad (21)$$

Из соображений симметрии сразу вытекает, что $g_{11} = g_{22} = a$, $g_{21} = g_{12} = b$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Из условий разрешимости неоднородного уравнения (19) находим, что $\beta = c(c^2 + 1)$, а соответствующее решение имеет вид

$$\begin{aligned} w_2 &= -\frac{(1+i)(5c^2+1)}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \left(\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c}\right)\eta_1^2 \cos 2y + \\ &+ \left(\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c}\right)\eta_2^2 \cos 2z + (3c^2-1-4ci)\eta_1\eta_2 \cos z \cos y. \end{aligned}$$

Для определения остальных коэффициентов нормальной формы следует применить условия разрешимости для неоднородного уравнения (20). Используя их, получаем, что

$$a = -\frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6}, \quad b = 4c^2(c^2 - 1).$$

Наконец, также из рассмотрения уравнения (21) находим, что $\alpha = c$.

4. Анализ нормальной формы. В системе уравнений (18) положим

$$\eta_1 = \sqrt{\varepsilon c} \sqrt{\rho_1}, \quad \eta_2 = \sqrt{\varepsilon c} \sqrt{\rho_2},$$

считая, что $\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0, \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$. После замены времени $\tau = 2\varepsilon c t$ получаем следующую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\beta}{2}(\rho_1 + \rho_2), \end{aligned} \tag{22}$$

где точкой обозначена уже производная по τ , а правые части выписаны с точностью до $o(\sqrt{\varepsilon})$. Наконец, $a_0 = -a, b_0 = -b$.

Прежде чем приступить к анализу системы (22) отметим, что $a_0 = \frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6} > 0$ при любых c . Понятно, что главную роль играет анализ уравнений для амплитудных переменных ρ_1, ρ_2

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 3. Система дифференциальных уравнений (23) имеет следующие нетривиальные состояния равновесия

$$\begin{aligned} E_1 : \rho_1 &= \frac{1}{a_0}, \rho_2 = 0; \quad E_2 : \rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{a_0}; \\ E_3 : \rho_1 &= \rho_2 = \frac{1}{a_0 + b_0}. \end{aligned}$$

Третье состояние равновесия E_3 является изолированным, если $a_0 \neq b_0$ ($c^2 \neq \frac{33 \pm \sqrt{873}}{108}$). При этих исключительных значениях c существует континуум состояний равновесия

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{a_0}.$$

Этот случай дальше не будет рассматриваться. Отметим также, что $a_0 + b_0 > 0$ при всех c .

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояний равновесия E_1, E_2, E_3 .

Лемма 4. Состояния равновесия E_1, E_2 асимптотически устойчивы, если

$$a_0 < b_0, \tag{24}$$

и неустойчивы, если

$$a_0 > b_0. \tag{25}$$

Состояние равновесия E_3 асимптотически устойчиво, если имеет место неравенство (25) и неустойчиво, если выполнено неравенство (24).

Для доказательства следует линеаризовать систему (23) на исследуемом состоянии равновесия. При этом при анализе спектра их устойчивости следует учесть то обстоятельство, что $a_0 + b_0 > 0$. Нетрудно проверить, что неравенство (25) выполнено, если $c^2 \in (0, c_1^2) \cup (c_2^2, \infty)$ и неравенство (24) при $c^2 \in (c_1^2, c_2^2)$, где $c_1^2 = \frac{33 - \sqrt{873}}{108} \approx 0.032, c_2^2 = \frac{33 + \sqrt{873}}{108} \approx 0.579$ ($c_1 \approx 0.179, c_2 \approx 0.761$).

В заключении этого пункта отметим, что вспомогательная система дифференциальных уравнений (23) диссипативна. Это вытекает из неравенства $a_0\rho_1^2 + 2b_0\rho_1\rho_2 + a_0\rho_2^2 > 0$ ($\rho_1, \rho_2 > 0$).

5. Основные результаты. Напомним, что здесь речь идет пока о случае $\delta = 0$. Используя методику, изложенную в монографии [6], можно показать, что существует такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $d = 2c - \varepsilon$ справедливы следующие три утверждения.

Теорема 1. *Состоянию равновесия E_1 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует два цикла краевой задачи (13), (14)*

$$v_1(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_1 t) \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_1}(-c + i) \cos y + \varepsilon\gamma_1(\gamma_{10} + \gamma_{11} \cos 2y) + \dots \right], \quad (26)$$

где точками в квадратных скобках обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с предшествующими слагаемыми в этих скобках,

$$\gamma_1 = \frac{c}{a_0}, \beta_1 = \gamma_1 c(c^2 + 1), \gamma_{10} = -\frac{(1+i)(5c^2 + 1)}{4}, \gamma_{11} = \frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c}.$$

Этот цикл орбитально асимптотически устойчив, если выполнено неравенство (24), и неустойчив, если выполнено неравенство (25).

Теорема 2. *Состоянию равновесия E_2 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует два цикла краевой задачи (13), (14)*

$$v_2(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_2 t) \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_2}(-c + i) \cos z + \varepsilon\gamma_2(\gamma_{20} + \gamma_{21} \cos 2z) + \dots \right], \quad (27)$$

где точки означают то же самое, что в формуле (26) теоремы (1), $\gamma_2 = \gamma_1, \beta_2 = \beta_1, \gamma_{20} = \gamma_{10}, \gamma_{21} = \gamma_{11}$.

Условия устойчивости этих циклов совпадают с условиями устойчивости для циклов, рассмотренных в теореме 1.

Теорема 3. *Состоянию равновесия E_3 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует уже четыре цикла вспомогательной краевой задачи (13), (14)*

$$v_3(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_3 t) \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_1(-c + i) \cos y \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_2(-c + i) \cos z + \right. \\ \left. + \varepsilon c (\Theta_0 + \Theta_3 \cos 2y + \Theta_4 \cos 2z \pm \Theta_5 \cos y \cos z) + \dots \right], \quad (28)$$

где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с предшествующими в квадратных скобках

$$\beta_3 = \frac{2c^2(c^2 + 1)}{a_0 + b_0}, \quad \Theta_0 = \frac{-(1+i)(5c^2 + 1)}{2(a_0 + b_0)}, \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \sqrt{\frac{1}{a_0 + b_0}}, \\ \Theta_5 = \frac{(3c^2 - 1 - 4ci)}{(a_0 + b_0)}, \quad \Theta_3 = \Theta_4 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left(\frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c} \right).$$

Каждый из этих циклов орбитально асимптотически устойчив, если выполнено неравенство (25), и неустойчив при выполнении неравенства (24).

Сразу отметим, что решения $v_1(t, y, \varepsilon), v_2(t, z, \varepsilon), v_3(t, y, z, \varepsilon)$ вспомогательной краевой задачи (13), (14) удовлетворяют уже и краевой задаче (6), (7) при $d = 2c - \varepsilon$. В этом легко убедиться, продолжив по переменной y эти функции с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ четным образом, а затем на всю числовую ось по периодичности с периодом 2π . Более того, в силу трансляционной инвариантности по переменной $y \in \mathbb{R}$ решениями краевой задачи (6), (7) будут и функции $v_1(t, y + \psi, \varepsilon), v_3(t, y + \psi, z, \varepsilon)$, где ψ – произвольная действительная постоянная. Возвращаясь теперь к старым переменным и используя замену (5), можно получить некоторые следствия, касающиеся исходной задачи (3), (4).

Следствие 1 (из теоремы 1). *Состоянию равновесия E_1 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число двумерных инвариантных торов. Решения на каждом из них допускают асимптотическое представление*

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_1 t) \left[1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_1}(-c + i) \cos(x + 4cnt + \psi_n) + \right. \\ \left. + \varepsilon\gamma_1(\gamma_{10} + \gamma_{11} \cos(2x + 8cnt + 2\psi_n)) + o(\varepsilon) \right], \quad (29)$$

которое получено из формулы (26). Условия устойчивости этих торов повторяют условия устойчивости из теоремы 1.

Следствие 2 (из теоремы 2). Состоянию равновесия E_2 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число циклов краевой задачи (3), (4)

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_2 t) \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_2}(-c + i) \cos z + \varepsilon\gamma_2(\gamma_{20} + \gamma_{21} \cos 2z) + o(\varepsilon) \right]. \quad (30)$$

Условия их устойчивости те же, что и для решения (27) из теоремы 2.

Следствие 3 (из теоремы 3). Состоянию равновесия E_3 системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число двумерных инвариантных торов, для решений на которых имеем асимптотическую формулу

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_3 t) \left[1 + \sqrt{\varepsilon c} \Theta_1(-c + i) \cos(x + 4cnt + \psi_n) \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_2(-c + i) \cos z + \right. \\ \left. + \varepsilon c \left(\Theta_0 + \Theta_3 \cos(2x + 8cnt + 2\psi_n) + \Theta_4 \cos 2z \pm \Theta_5 \cos(x + 4cnt + \psi_n) \cos z \right) + o(\varepsilon) \right], \quad (31)$$

где $\psi_n \in R$. Ясно, что условия их устойчивости те же, что и для решения (28) из теоремы 3.

6. "Несимметричный" случай. Речь идет о той ситуации, когда $l \neq \pi$ ($\delta \neq 0$). Предположим, что $\delta = -r\varepsilon$, где $r = \text{const}$, которая может быть постоянной произвольного знака. В этом случае практически дословно повторяются построения предшествующих пунктов и, как ранее, центральным местом является сведение задачи к исследованию двух обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитудных переменных, т.е. уравнений, подобных уравнениям (23). В этом случае они приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= g\rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2), \end{aligned} \quad (32)$$

где $g = g(r) = 1 + 2cr$. Отметим, что при $l = \pi$ получаем $g = 1$, т.е. ранее изученную систему дифференциальных уравнений (23).

Система дифференциальных уравнений (32) имеет следующие состояния равновесия:

$$E_{1g} : \rho_1 = \frac{1}{a_0}, \rho_2 = 0; \quad E_{2g} : \rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{g}{a_0}.$$

Состояние равновесия E_{2g} существует, если r таково, что $g > 0$. Наконец,

$$E_{3g} : \rho_1 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left(\frac{a_0 - b_0 g}{a_0 - b_0} \right), \rho_2 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left(\frac{a_0 g - b_0}{a_0 - b_0} \right).$$

Состояние равновесия E_{3g} существует, если выполнены неравенства

$$\frac{a_0 - b_0 g}{a_0 - b_0} > 0, \quad \frac{a_0 g - b_0}{a_0 - b_0} > 0. \quad (33)$$

Нетрудно проверить, что состояние равновесия E_{1g} системы дифференциальных уравнений (32) асимптотически устойчиво, если

$$a_0 g - b_0 < 0,$$

и неустойчиво, если

$$a_0 g - b_0 > 0.$$

Состояние равновесия E_{2g} асимптотически устойчиво, если выполнено следующее неравенство:

$$a_0 - b_0 g < 0,$$

и неустойчиво, если

$$a_0 - b_0 g > 0.$$

Наконец, состояние равновесия E_{3g} асимптотически устойчиво, если

$$a_0 - b_0 > 0,$$

и неустойчиво, если выполнено противоположное неравенство.

При проверке последнего утверждения существенно используются неравенства (33).

Состояние равновесия E_{1g} системы дифференциальных уравнений (32) порождает счетное число двумерных инвариантных торов краевой задачи (3), (4). Соответствующие решения восстанавливаются по формуле (29). Условия их устойчивости совпадают с условиями устойчивости состояния равновесия E_{1g} системы (32).

Состоянию равновесия E_{2g} соответствует счетное число циклов краевой задачи (3), (4), для решений на которых справедлива асимптотическая формула (30), где, впрочем, необходимо незначительно откорректировать коэффициенты, заменив

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 g.$$

Устойчивость(неустойчивость) этих циклов наследует аналогичные свойства E_{2g} .

Наконец, состоянию равновесия E_{3g} соответствует счетное семейство двумерных инвариантных торов, решения на которых задаются асимптотической формулой, схожей с формулой (31), в которой следует откорректировать коэффициенты, заменив

$$\begin{aligned} \beta_3 &\rightarrow \frac{c^2(1+g)(c^2+1)}{a_0+b_0}, \quad \Theta_1 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2}}, \quad \Theta_2 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2}}, \\ \Theta_3 &\rightarrow \frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2} \left(\frac{3c^2-1}{12} - i \frac{9c^2+1}{24c} \right), \quad \Theta_0 \rightarrow -\frac{(1+g)}{(a_0+b_0)} \frac{(1+ic)(5c^2+1)}{4}, \\ \Theta_4 &\rightarrow \frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2} \left(\frac{3c^2-1}{12} - i \frac{9c^2+1}{24c} \right), \quad \Theta_5 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2}} \sqrt{\frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2}} (3c^2-1-4ci). \end{aligned}$$

Торы, соответствующие состояниям равновесия E_{3g} , наследуют свойства устойчивости этого состояния равновесия.

7. Заключение. Как уже ранее отмечалось, данная работа является естественным продолжением [5]. Следует добавить, что она имеет точки соприкосновения с работой [7], где была рассмотрена задача о бифуркациях от однородного цикла для уравнения Гинзбурга – Ландау в плоской области. В одномерном случае вопрос о бифуркации бегущих волн был рассмотрен в работе [8], но следует отметить, что динамика решений данной краевой задачи намного богаче.

Автор выражает благодарность профессору А.Ю. Колесову за постановку задачи и ценные советы при работе над статьей.

Список литературы

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электродинамике. М.: Советское радио, 1977
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
4. Scheuer J., Malomed B.A. //Physika D. 2002. V. 161. P. 102 – 115.
5. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Доклады РАН. 2006. Вып. 73. №1. С. 125-129.
6. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Установившиеся режимы уравнения Хатчинсона с малой диффузией в случае квадрата // Качественные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1988. С. 44 – 54.
8. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических краевых задачах // Математика в ЯрГУ: Сборник статей к 25 - летию математического факультета. Ярославль, 2001. С. 183 – 193.

Иерархическая модель автоматных программ

Кузьмин Е.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 22 03 2006

Аннотация

В работе описывается иерархическая модель программ, построенных на основе автоматного подхода к программированию. Приводится пример автоматной модели системы управления кофеваркой.

1. Введение

Статья посвящена описанию иерархической модели программ, построенных на основе автоматного подхода к программированию [2, 3, 4, 5]. Технология автоматного программирования является достаточно эффективной при построении программного обеспечения «реактивных» систем и систем логического управления. Эта технология, не исключая других методов построения программного обеспечения «без ошибок», существенно более конструктивна, так как позволяет начинать «борьбу с ошибками» еще на стадии алгоритмизации. Более того, автоматный подход к программированию с точки зрения моделирования и анализа программных систем имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом. При построении модели для программы, написанной традиционным способом, возникает серьезная проблема адекватности этой программной модели для исходной программы. Модель может не учитывать ряд программных свойств или порождать несуществующие свойства. При автоматном программировании такая проблема исключена, поскольку набор взаимодействующих автоматов, описывающий логику программы, уже является адекватной моделью, по которой формально и изоморфно строится программный модуль. И это является бесспорным плюсом автоматной технологии. К тому же свойства программной системы в виде автоматов формулируются и специфицируются естественным и понятным образом. Проверка свойств осуществляется в терминах, которые естественно вытекают из автоматной модели программы.

При автоматном подходе к проектированию и построению программ для задач логического управления выделяются две части: системно независимая и системно зависимая. Первая часть реализует логику программы и задаётся системой взаимодействующих автоматов Мура–Мили. Проектирование каждого автомата состоит в создании по словесному описанию (декларации о намерениях) схемы связей, описывающей его интерфейс, и графа переходов, определяющего его поведение. По этим двум документам формально и изоморфно может быть построен модуль программы (системно зависимая часть), соответствующий автомату.

2. Иерархическая модель автоматных программ «реактивных» систем и систем логического управления

Рассмотрим иерархическую систему взаимодействующих детерминированных конечных автоматов

$$\mathcal{A} = (A_0, A_{11}, \dots, A_{1k_1}, \dots, A_{n1}, \dots, A_{nk_n}),$$

где n и k_i ($1 \leq i \leq n$) — натуральные числа. Автомат A_0 назовём основным, остальные автоматы — вложенными. Между всеми автоматами установлена иерархия по вызываемости (вложенности). Автомат A_{ij} может вызывать (передавать управление) стоящему ниже по иерархии автомату A_{i+1k} . В таком случае автомат A_{ij} называется главным, а A_{i+1k} — вложенным (или вызываемым). У каждого вложенного автомата существует только один главный автомат, из которого он вызывается.

Система автоматов $\mathcal{A}$ рассматривается как система управления некоторым объектом. Система $\mathcal{A}$ получает от объекта управления события, характеризующие, например, изменение его состояния, а также сама запрашивает текущие параметры объекта, что также считается входным воздействием на систему $\mathcal{A}$. В то же время система управления, реагируя на поступающую информацию, сама оказывает воздействия на объект управления.

Кроме описанного взаимодействия с «внешней средой», происходит аналогичное взаимодействие автоматов между собой внутри системы, посредством передачи (со стороны главного автомата) управления с некоторым событием вложенным автоматам и отслеживанием их текущих состояний.

В рассматриваемой модели события от объекта управления принимает и реагирует на них только основной автомат A_0 , вложенные же автоматы обращаются к объекту управления только с запросами состояния его параметров (причём вложенный автомат может сделать запрос лишь в том случае, если главный автомат передал ему управление).

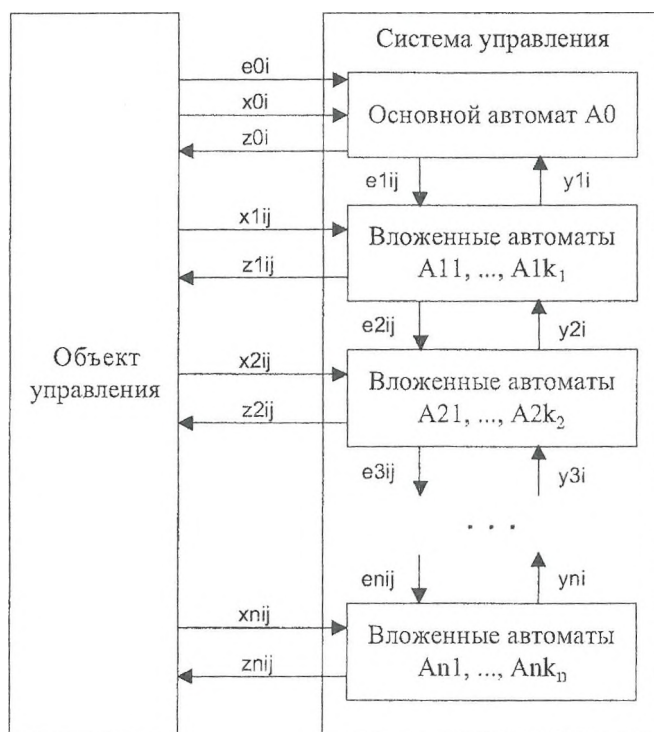


Рис. 1. Модель взаимодействия системы A с объектом управления

Описываемая модель взаимодействия системы управления A с объектом управления показана на рис. 1. На рисунке события обозначаются символом e , запросы к объекту управления (входные воздействия) — x , текущее состояние некоторого автомата A_{ij} хранится в переменной y_{ij} , а выходные воздействия обозначаются z .

Поведение любого автомата A системы A аналогично поведению всей системы в том смысле, что автомат A реагирует на произошедшие события и в зависимости от своего состояния, состояния вложенных автоматов и состояния объекта управления оказывает воздействие на объект управления или же на вложенные автоматы, передавая им управление с некоторым событием.

Обозначим $E_A = \{e_1, \dots, e_k\}$ множество всех имён событий, на которые реагирует автомат A . Определим на множестве E_A переменную событий e , в которую будет помещаться имя произошедшего события для автомата A . Текущее значение переменной e будем обозначать $E_A(e)$.

Также введём множество $X_A = \{x_1, \dots, x_n\}$ запросов автомата A к объекту управления. Каждый запрос расценивается как некоторый предикат, истинность которого зависит от состояния параметров объекта управления.

Наконец, введём $Z_A = \{z_1, \dots, z_r\}$ множество выходных воздействий автомата A . Причём воздействия z_i рассматриваются двух видов. Первая группа воздействий — это воздействия непосредственно на объект управления. Воздействия второго типа — передача управления вложенному автомату с некоторым событием (генерация события для вложенного автомата). В этом случае выходное воздействие z_i имеет вид $A'(e'_j)$, где A' — вложенный автомат, а e'_j — сгенерированное событие автоматом A для вложенного автомата A' , которому передаётся управление для обработки этого события.

Тогда автомат A управляющей системы автоматов $\mathcal{A}$ представляет собой набор $(\Sigma, Q, q_0, E, X, Z, \delta)$, где

- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ — конечное множество состояний автомата A ;
- q_0 — начальное состояние;
- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — конечный алфавит пометок дуг переходов;
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ — функция переходов из одного состояния в другое.

Каждый переход срабатывает по определённом правилу. Прежде чем описывать правила переходов, введём ещё ряд обозначений.

Для метки перехода $a \in \Sigma$ обозначим $E(a)$ событие, на которое автомат A реагирует при срабатывании перехода с меткой a .

Будем обозначать $X(a)$ множество запросов к объекту управления, истинность которых требуется для срабатывания перехода с пометкой a .

Пусть Z^* — множество конечных последовательностей выходных воздействий, тогда для $a \in \Sigma$ обозначим $Z^*(a) \in Z^*$ последовательность выходных воздействий, которая происходит при срабатывании перехода с пометкой a .

Также для произвольного состояния q автомата A обозначим $Z^*(q) \in Z^*$ последовательность выходных воздействий, которая должна выполняться при попадании (переходе) автоматом в состояние q .

И, наконец, пусть $Y(a)$ — предикат, зависящий от состояний вложенных автоматов, истинность которого необходима для срабатывания перехода с пометкой a .

Правило перехода из состояния q в состояние q' по метке a имеет следующий вид.

q, a : if $e = E(a)$ and $(x = \text{true}, \forall x \in X(a))$ and $Y(a) = \text{true}$
then $Z^*(a)$; $Z^*(q')$; goto q' .

Таким образом, правило перехода в новое состояние можно описать так. В общем случае, после получения события автомат в зависимости от своего текущего состояния реагирует (или никак не реагирует) на событие, опрашивает параметры объекта управления, учитывает состояния вложенных автоматов, затем производит последовательность выходных воздействий, включая и те выходные воздействия, которые необходимо совершить при попадании в новое состояние, и только после этого переводится в новое состояние (которое может быть тем же самым в случае петли).

Выходное воздействие первого типа, направленное на объект управления, считается сразу же осуществлённым после его применения. Выходное воздействие второго типа, представляющее собой передачу управления с событием вложенному автомату, считается выполненным только лишь после реакции вложенного автомата на это событие, которая заключается в том, что либо автомат переходит в новое состояние (срабатывает один из переходов вложенного автомата), либо событие игнорируется вложенным автоматом (ни один из переходов сработать не может). До тех пор пока выходное воздействие второго типа не осуществится, работа (процесс перехода в новое состояние) главного автомата приостанавливается.

Важно отметить, что правила переходов, а точнее условия срабатывания переходов, должны удовлетворять условию детерминированности (или ортогональности), т.е. при наступлении некоторого события может быть готов к срабатыванию не более чем один переход. Если ни один переход в текущем состоянии при наступлении некоторого события сработать не может (условия переходов не выполняются), то событие игнорируется (переменная событий e для этого автомата обнуляется).

Далее рассмотрим иерархическую модель автоматных программ на примере системы управления кофеваркой.

3. Автоматная модель системы управления кофеваркой

Рассмотрим системно независимую часть автоматной программы, которая отвечает за *логику* управления кофеваркой.

Модель кофеварки представлена на рис. 2. Кофеварка позволяет выбирать количество порций кофе для варки с помощью кнопок «+» (увеличить количество порций на единицу) и «-» (уменьшить количество порций на единицу).

В кофеварке предусмотрена возможность индикации отсутствия воды и основных неисправностей (например, не работает нагреватель или не исправен один из клапанов). Количество порций изменяется от 1 до 5. При попытке увеличить максимальное значение порций нажатием кнопки «+» ничего не происходит

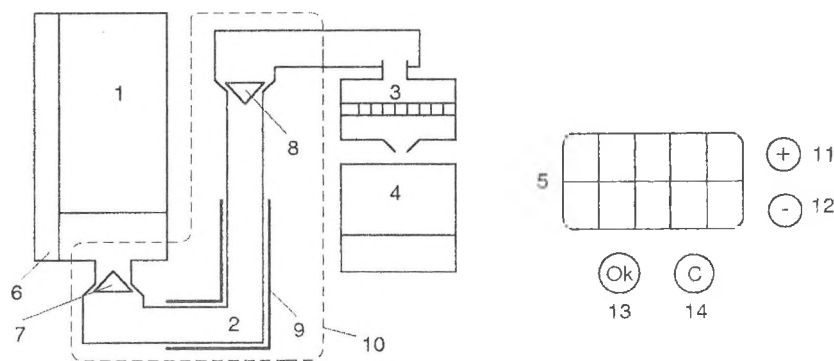


Рис. 2. Кофеварка: 1 — емкость для воды, 2 — емкость для кипячения, 3 — фильтр с кофе, 4 — колба для готового напитка, 5 — дисплей, 6 — датчик воды, 7 — входной клапан (клапан 1), 8 — выходной клапан (клапан 2), 9 — нагреватель кипячения воды, 10 — бойлер, 11 — кнопка увеличения «+», 12 — кнопка уменьшения «-», 13 — кнопка «Ok», 14 — кнопка «C» (отмена).

(аналогично для значения порций 1 нажатие «-» игнорируется). Отдельно выделяется объект «бойлер», который состоит из клапанов 1 и 2, нагревателя и емкости для кипячения. Дисплей кофеварки разбит на части, использующиеся для индикации состояний клапанов, нагревателя и собственно кофеварки.

В кофеварке выделяются чётко выраженные подобъекты управления (бойлер, клапаны и нагреватель), которые имеют свои собственные подсистемы управления. Каждая подсистема управления представлена в виде конечных автоматов Мура-Мили, выстроенных в иерархию. В результате логическая часть системы управления кофеваркой имеет вид системы взаимодействующих автоматов. Автомат, находящийся выше по иерархии, управляет своими вложенными автоматами путем генерации события и передачи им управления с этим событием. Кроме того, автомат следит за состояниями вложенных автоматов, так как от них могут зависеть его собственные переходы по состояниям.

Диаграмма взаимодействия автоматов представлена на рис. 3. Автомат A0, называемый основным, получает от панели управления (панели кнопок) события $e0i$, на которые он реагирует. Специальное событие $e0$, генерируемое постоянно системным таймером, используется для проверки условий переходов (условий на дугах автоматов), которые не предусматривают реакцию ни на одно из событий $e0i$. Автомат A0 взаимодействует с автоматом A1, передавая ему управление с событиями $e1i$ и $e0$. Также автомат A0 отслеживает состояния A1 через переменную $y1$. При таком взаимодействии автомат A0 считается главным, а A1 — вложенным. Аналогичным образом происходит взаимодействие автомата A1 с вложенными автоматами A2, A31 и A32.

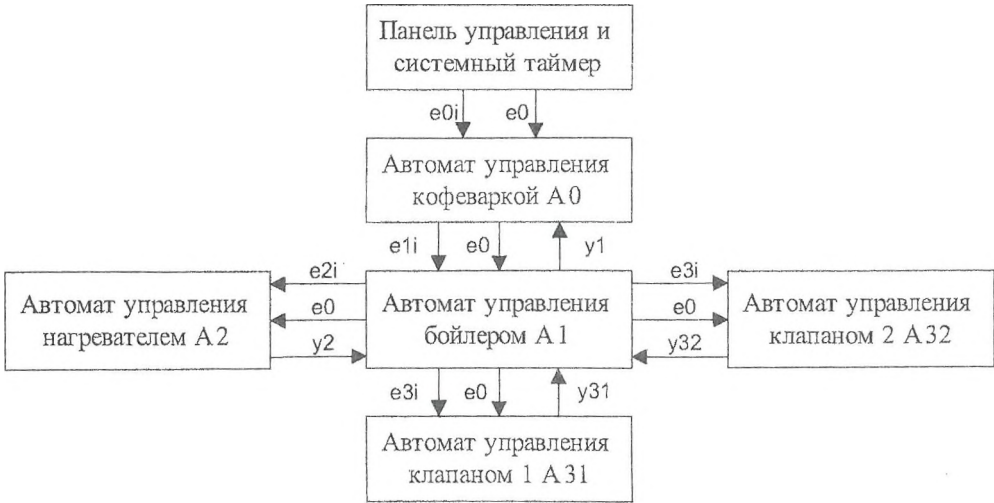


Рис. 3. Диаграмма взаимодействия автоматов управления

Автомат А0 реализует логику управления кофеваркой. Он реагирует на нажатие кнопок на панели управления (при задании количества порций, запуске процесса варки, отмене варки, сбросе ошибки и т.д.), передавая управление на время варки кофе взаимодействующему с ним автомату управления бойлером А1. Информация о текущих состояниях кофеварки отображается на дисплее.

Схема связей и граф переходов автомата управления кофеваркой А0 представлены на рис. 4.

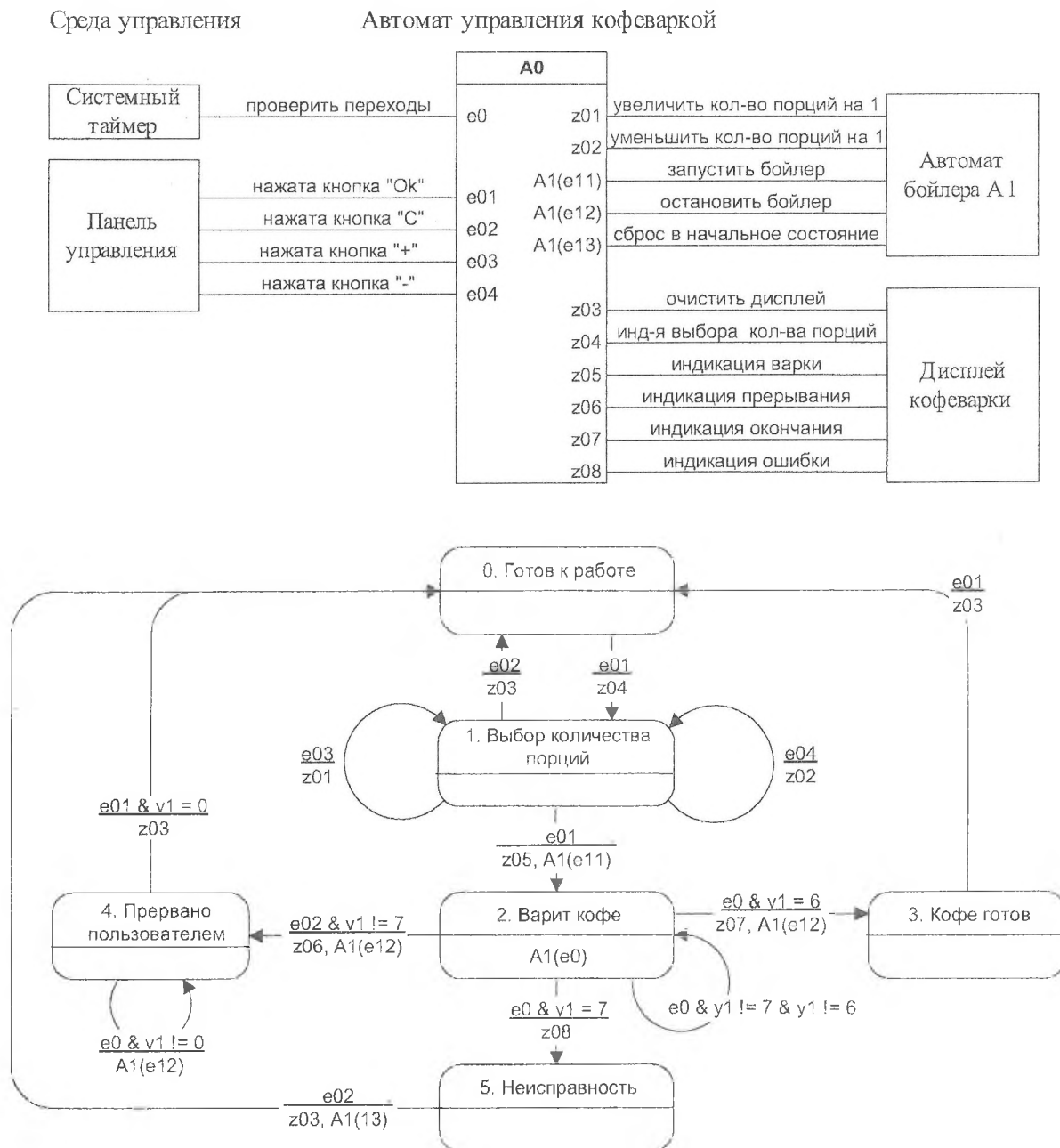


Рис. 4. Схема связей и граф переходов автомата управления кофеваркой А0

Автомат A1 реализует логику управления бойлером, который непосредственно отвечает за процесс варки кофе.

В процессе варки контролируются работоспособность клапанов, нагревателя, а также проверяется наличие воды. В случае неисправности одного из клапанов или нагревателя варка прерывается и высвечивается на дисплее соответствующее предупреждение. В случае отсутствия воды в емкости варка приостанавливается, пока вода не будет долита либо пользователь не прервет варку.

Автомат управления бойлером

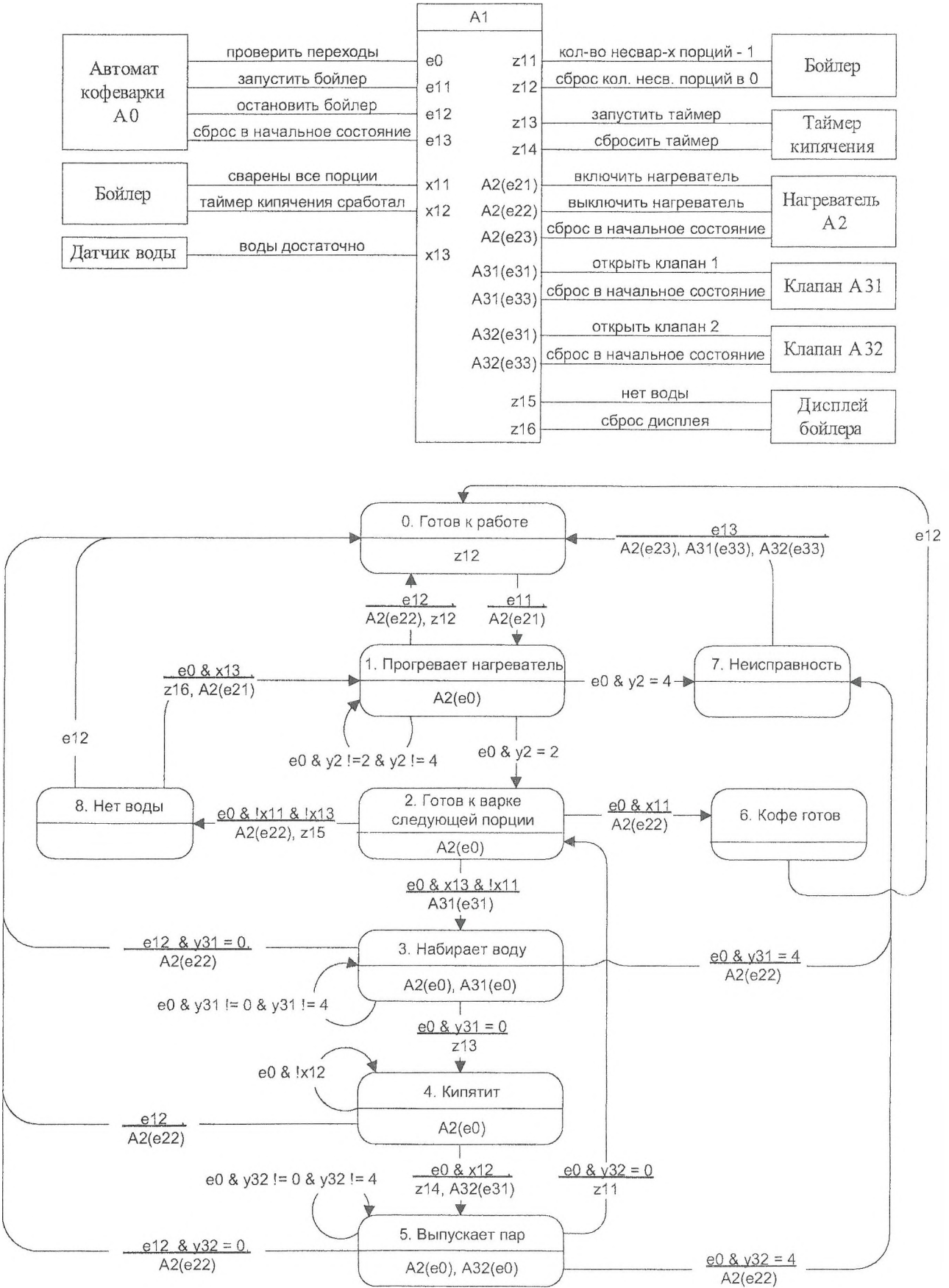
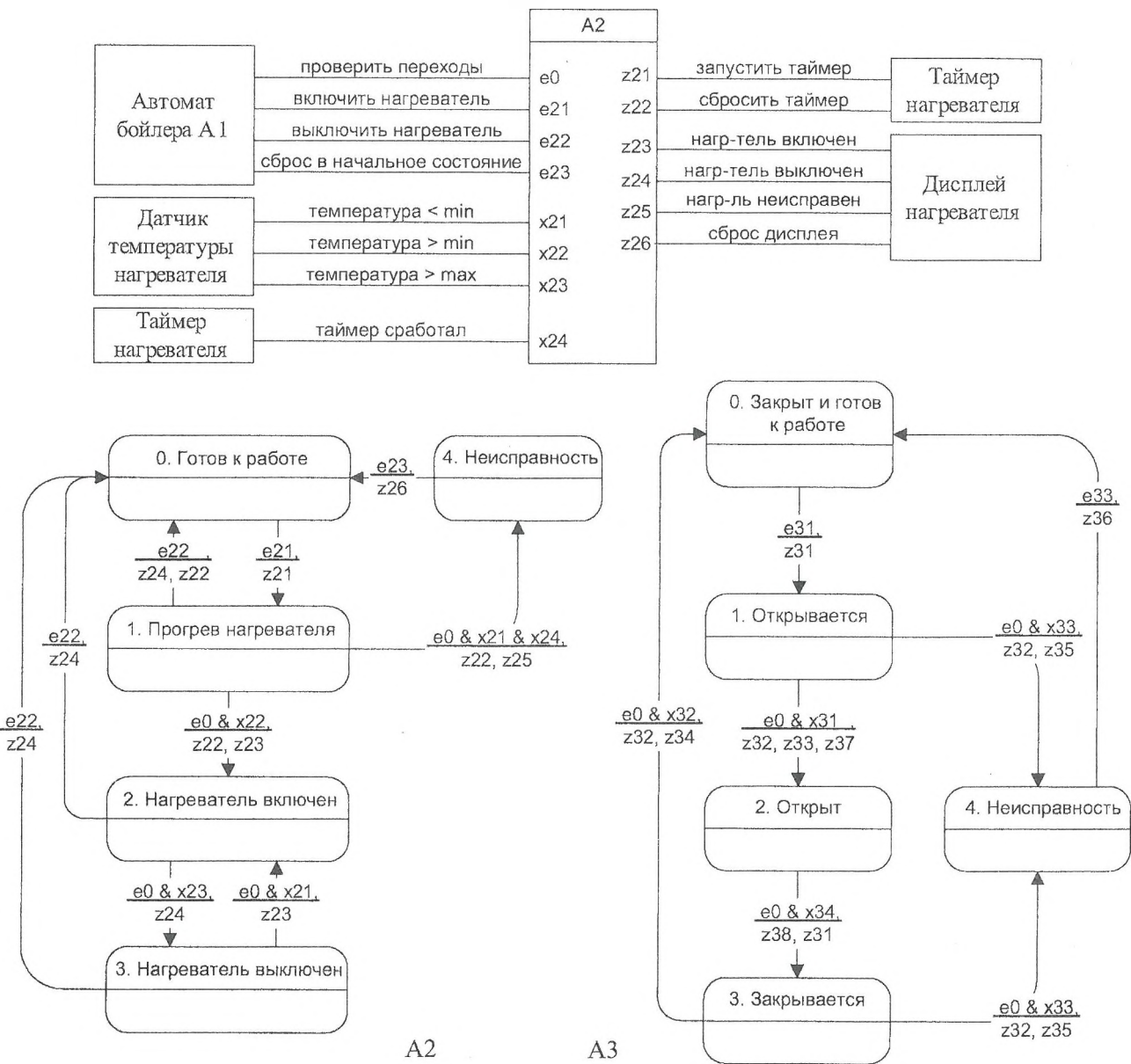


Рис. 5. Схема связей и граф переходов автомата управления бойлером A1

Автомат управления нагревателем



Автомат управления клапаном



Рис. 6. Схемы связей и графы переходов автоматов управления нагревателем А2 и клапаном А3

Если не произошло поломок, процесс варки повторяется до тех пор, пока не будет сварено установленное количество порций кофе. Один цикл варки соответствует одной порции.

Автомат *A1* взаимодействует с автоматом управления *A0*, передавая последнему текущее состояние и получая от него события. Автомат *A1* также взаимодействует с автоматами *A31*, *A32* (отвечающими за управление клапанами 1 и 2) и *A2* (управляющим нагревателем), получая их состояния и посылая им события.

Схема связей и граф переходов автомата управления бойлером *A1* представлена на рис. 5.

Автомат *A2* реализует логику управления нагревательным элементом. Он поддерживает температуру нагревателя в заранее заданном диапазоне (для температуры устанавливаются допустимые минимум и максимум). Предусмотрена возможность установления неисправности вида «нагреватель не работает».

После включения нагревателя происходит его прогрев до нижней границы рабочего диапазона. Если он не прогрелся до необходимой температуры за заданное время, то нагреватель считается неисправным. Нагреватель включается при достижении температурой нижней границы рабочего интервала и выключается при достижении верхней границы.

Автомат *A2* взаимодействует только лишь с автоматом управления бойлером *A1* и не имеет вложенных автоматов.

Автоматы *A31* и *A32* полностью идентичны. Под автоматом *A3* понимается как автомат *A31*, так и автомат *A32*. Автомат *A3* служит для реализации логики управления работой клапана в режиме «открыть-пауза-закрыть». Автомат имеет четыре состояния и, не имея вложенных автоматов, взаимодействует только с автоматом управления бойлером *A1*, передавая последнему свое состояние и получая от него события. Автомат *A3* начинает цикл своей работы по событию ϵ_{31} («открыть клапан»). Сначала клапан открывается, затем делается пауза для набора воды или выпуска пара, а после этого клапан закрывается. В случае если за определенное время клапан не откроется (либо не закроется), он считается неисправным.

Схемы связей и графы переходов автомата управления нагревателем *A2* и автомата управления клапаном *A3* представлены на рис. 6.

4. Заключение

При построении автоматной программы в рамках иерархической модели логика программы концентрируется на основном автомате, который распределяет управление вложенным автоматам в зависимости от поведения управляемого объекта. Каждый автомат программы взаимодействует только со своими главным и вложенными автоматами, что облегчает понимание программы. Во время проектирования или верификации такой автоматной программы возможно рассмотрение части или некоторого поддерева системы автоматов в зависимости от той функции, которая реализуется выделенной подсистемой автоматов. Любая подсистема взаимодействующих автоматов в иерархической модели представляет собой дерево автоматов, которое можно рассматривать как отдельную систему (как отдельную автоматную программу). Это позволяет менять масштаб всей системы, относя не интересующие проектировщика в данный момент времени автоматы к внешней среде, т. е. к внешнему объекту управления, и удерживать во внимании только анализируемую подсистему. И, наконец, при верификации спецификация и анализ свойств автоматной программы проводятся проще при понятной и не сложной по структуре верифицируемой модели.

Список литературы

1. Кесель С. В. Разработка системы управления кофеваркой на основе автоматного подхода. — <http://is.ifmo.ru/projects/>, 2003.
2. Шальто А. А. Switch-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. СПб.: Наука, 1998. 628 с.
3. Шальто А. А. Автоматное проектирование программ. Алгоритмизация и программирование задач логического управления // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2000. №6. С. 63–81. (<http://is.ifmo.ru>, раздел «Статьи»).
4. Шальто А. А. Алгоритмизация и программирование для задач логического управления и «реактивных» систем // Автоматика и телемеханика. Обзоры. 2001. №1. С. 3–39. (<http://is.ifmo.ru>, «Статьи»).
5. Шальто А. А., Тужель Н. И. Программирование с явным выделением состояний // Мир ПК. 2001. №8. С. 116–121. №9. С. 132–138. (<http://is.ifmo.ru>, раздел «Статьи»).

Свойства бисимуляции разметок в ограниченных сетях Петри

Башкин В.А.

*Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, Советская, 14*

получена 22 марта 2006

Аннотация

Рассматривается проблема поиска бисимулярных разметок в ограниченных сетях Петри. Вводятся и исследуются специальные виды бисимуляции для случая ограниченных сетей, в том числе расширение бисимуляции достижимых разметок — отношение, учитывающее кроме достижимых разметок еще и все разметки, бисимулярные достижимым (среди которых могут быть и неограниченные). Доказана разрешимость расширения бисимуляции разметок. Вводится понятие элементарного расширения бисимуляции — конечного подмножества полного расширения, в которое входят только минимальные (относительно вложения) пары разметок. Доказана вычислимость элементарного расширения бисимуляции (предложен алгоритм его построения).

1. Введение

Сети Петри являются одним из наиболее распространенных формализмов, используемых при моделировании сложных систем. Они применяются в разных областях — от разработки параллельных и распределенных информационных систем до моделирования бизнес-процессов. Обыкновенные сети Петри могут содержать бесконечно много состояний и по выразительной мощности находятся строго между конечными автоматами и машинами Тьюринга (и при этом не сравнимы с магазинными автоматами). В частности, для них разрешимы проблемы достижимости, останова, живости и ограниченности и неразрешима проблема эквивалентности языков.

Понятие эквивалентности поведений — одно из центральных понятий теории формальных систем. Для сравнения поведения параллельных и распределенных систем Д.Парком и Р.Милнером в начале 80-х гг. было введено понятие бисимуляционной эквивалентности. Бисимуляция обладает четкой математической трактовкой и более тонко отслеживает ветвления в дереве срабатываний системы по сравнению с языковой эквивалентностью. Два состояния системы бисимулярны, если внешний наблюдатель, который видит только метки срабатываний переходов, по наблюдаемому поведению системы не может определить, с какого из этих двух состояний она начала работу. Для сетей Петри проблема определения бисимулярности двух состояний (разметок) неразрешима [2].

В данной работе рассматривается сужение класса обыкновенных сетей Петри — ограниченные сети Петри. Ограниченные сети — это сети с заданной начальной разметкой, причем такой, что множество достижимых от нее разметок конечно. Очевидно, что бисимуляция достижимых разметок в ограниченных сетях разрешима (благодаря конечности самого множества достижимых разметок). Однако при этом следует отметить, что ограниченность сети — это свойство начальной разметки, а не самой структуры сети. Наряду с достижимыми разметками мы можем рассматривать и разметки, недостижимые от заданной начальной разметки. Этих разметок бесконечно много, причем некоторые из них, в свою очередь, могут порождать бесконечные множества достижимости. При этом, несмотря на неограниченность, такие разметки могут быть бисимулярны заданной начальной (ограниченной) разметке.

В данной работе исследуются свойства нескольких специальных видов бисимуляции в ограниченных сетях Петри — бисимуляции ограниченных разметок, бисимуляции достижимых разметок и расширения бисимуляции достижимых разметок. В частности, доказано, что все эти отношения разрешимы.

Вводится понятие элементарного расширения бисимуляции — сокращенный вариант (полного) расширения бисимуляции, в котором рассматриваются не все бисимулярные разметки, а только минимальные (относительно вложения). Элементарное расширение можно рассматривать как конечный базис (полного) расширения. В работе доказана вычислимость элементарного расширения бисимуляции. Предложен алгоритм, вычисляющий все минимальные (по вложению) разметки, бисимулярные данной достижимой разметке ограниченной сети Петри.

2. Основные определения

Через Nat обозначим множество неотрицательных целых чисел.

Пусть X — непустое множество.

Мультимножеством M над множеством X называется функция $M : X \rightarrow Nat$. Мощность мультимножества $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Числа $\{M(x) \mid x \in X\}$ называются коэффициентами мультимножества, коэффициент $M(x)$ определяет число экземпляров элемента x в M . Мультимножество M конечно, если конечно множество $\{x \in X \mid M(x) > 0\}$. Множество всех конечных мультимножеств над данным множеством X обозначается как $\mathcal{M}(X)$.

Операции и отношения теории множеств естественно расширяются на конечные мультимножества.

Пусть $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}(X)$. Полагаем: $M_1 = M_2 + M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = M_2(x) + M_3(x)$ — операция сложения двух мультимножеств; $M_1 = M_2 - M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = M_2(x) \ominus M_3(x)$ — разность мультимножеств (где $\ominus$ — вычитание до нуля).

Сетью Петри называется набор $N = (P, T, F)$, где P — конечное множество позиций; T — конечное множество переходов, $P \cap T = \emptyset$; $F : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow Nat$ — функция инцидентности.

Разметкой (состоянием) сети N называется функция вида $M : P \rightarrow Nat$, сопоставляющая каждой позиции сети некоторое натуральное число (или ноль). Разметка может рассматриваться как мультимножество над множеством позиций сети.

Графически сеть Петри изображается как двудольный ориентированный граф. Вершины-позиции изображаются кружками и характеризуют локальные состояния сети, вершины-переходы изображаются прямоугольниками и соответствуют действиям. Дуги соответствуют элементам F . Позиции могут содержать маркеры (фишки), изображаемые черными точками. При разметке M в каждую позицию p помещается $M(p)$ фишек.

Для перехода $t \in T$ через $\bullet t$ и $t^\bullet$ обозначим мультимножества его входных и выходных позиций, такие, что $\forall p \in P \ \bullet t(p) =_{def} F(p, t)$, $t^\bullet(p) =_{def} F(t, p)$. Переход $t \in T$ готов к срабатыванию при разметке M , если $\bullet t \subseteq M$ (все входные позиции содержат достаточное количество фишек). Готовый к срабатыванию переход t может сработать, порождая новую разметку $M' =_{def} M - \bullet t + t^\bullet$ (используется обозначение $M \xrightarrow{t} M'$).

Понятие срабатывания переходов может быть обобщено на случай последовательностей: пусть $\sigma = t_1, t_2 \dots t_n$, тогда $M \xrightarrow{\sigma} M'$ обозначает последовательность срабатываний $M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \dots \xrightarrow{t_n} M'$.

$M \rightarrow M'$ обозначает возможность какого-либо срабатывания, переводящего разметку M в разметку M' . При этом говорят, что M' достижима от M . Множество всех разметок сети N , достижимых от начальной разметки M , обозначается как $\mathcal{R}(M)$.

Разметка M сети N называется ограниченной, если множество $\mathcal{R}(M)$ — конечно.

Срабатывания переходов в сети Петри соответствуют различным наблюдаемым событиям в моделируемой системе. Чтобы идентифицировать их, переходы помечаются специальными метками. Пусть Act — множество таких меток.

Помеченной сетью Петри называется набор $N = (P, T, F, l)$, где (P, T, F) — сеть Петри, $l : T \rightarrow Act$ — помечающая функция.

Запись $M \xrightarrow{a} M'$, где $a \in Act$, означает, что существует переход $t \in T$, такой что $l(t) = a$ и $M \xrightarrow{t} M'$.

Скажем, что отношение $R \subseteq \mathcal{M}(P) \times \mathcal{M}(P)$ называется бисимуляцией разметок, если для любой пары $(M_1, M_2) \in R$ и для любого $a \in Act$:

- если $M_1 \xrightarrow{a} M'_1$, то $M_2 \xrightarrow{a} M'_2$, причем $(M'_1, M'_2) \in R$; и
- если $M_2 \xrightarrow{a} M'_2$, то $M_1 \xrightarrow{a} M'_1$, причем $(M'_1, M'_2) \in R$.

Объединение всех бисимуляций разметок обозначается как $\sim$. Известно, что для любой сети отношение $\sim$ является бисимуляцией разметок.

Также существует понятие i -бисимуляции (обозначается $\sim_i$). Оно определяется индуктивно:

Во-первых, полагаем $M_1 \sim_0 M_2$ для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(P)$. Далее, для любого $n \in Nat$ полагаем $M_1 \sim_{n+1} M_2$, если для любого $a \in Act$:

- если $M_1 \xrightarrow{a} M'_1$, то $M_2 \xrightarrow{a} M'_2$, причем $M'_1 \sim_n M'_2$; и
- если $M_2 \xrightarrow{a} M'_2$, то $M_1 \xrightarrow{a} M'_1$, причем $M'_1 \sim_n M'_2$.

Для любого i отношение $\sim_i$ является отношением эквивалентности, кроме того, $\sim_{i+1} \subseteq \sim_i$. Также выполняется $M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow M_1 \sim_i M_2$ для любого $i \in Nat$.

Известно [3], что проблема бисимулярности разметок неразрешима, то есть не существует алгоритма, определяющего за конечное число шагов, являются ли данные две разметки бисимулярными. Проблема i -бисимулярности разметок разрешима для любого i . Известно следующее свойство:

Лемма 1. [4] Пусть $M, M' \in \mathcal{M}(P)$, где $|\mathcal{R}(M)| = n < \infty$. Тогда

$$M \sim M' \iff M \sim_n M' \wedge \mathcal{R}(M') \cap \text{Inc}(N, M) \neq \emptyset.$$

Здесь $\text{Inc}(N, M)$ обозначает множество несовместимых с M разметок сети N . Это линейное множество, которое может быть эффективно построено. Выполнение условия $\mathcal{R}(M') \cap \text{Inc}(N, M) \neq \emptyset$ может быть установлено при помощи алгоритма определения достижимости подразметки. Отсюда следует разрешимость проблемы бисимулярности ограниченной и неограниченной разметок сети Петри [4].

3. Специальные виды бисимуляции ограниченных сетей Петри

Введем три сужения отношения бисимуляции разметок, которые тем или иным образом учитывают свойства ограниченности и достижимости разметок ограниченной сети Петри.

Пусть $N = (P, T, F, l)$ — помеченная сеть Петри, M_0 — ограниченная разметка сети N .

Определение 1. Бисимуляцией достижимых разметок называется множество

$$R(N, M_0) = \{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}(P) \times \mathcal{M}(P) \mid M_1 \sim M_2 \wedge M_1 \in \mathcal{R}(M_0) \wedge M_2 \in \mathcal{R}(M_0)\}.$$

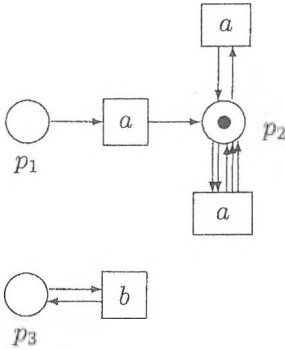
Определение 2. Бисимуляцией ограниченных разметок называется множество

$$B(N) = \{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}(P) \times \mathcal{M}(P) \mid M_1 \sim M_2 \wedge |\mathcal{R}(M_1)| < \infty \wedge |\mathcal{R}(M_2)| < \infty\}.$$

Определение 3. Расширением бисимуляции (достижимых разметок) называется множество

$$E(N, M_0) = \{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}(P) \times \mathcal{M}(P) \mid \exists M_3 \in \mathcal{R}(M_0) : M_1 \sim M_2 \sim M_3\}.$$

Пример ограниченной сети Петри и отношений $R(N, M_0)$, $B(N)$, $E(N, M_0)$ и $(\sim)$ представлен на рис. 1.



$$R(N, M_0) = \{(p_2, p_2)\}$$

$$B(N) = \{(\emptyset, \emptyset), (p_1, p_1), (p_2, p_2), (p_1, p_2), (p_2, p_1)\} \cup \{(np_3, mp_3), (p_1 + np_3, p_2 + mp_3), (p_2 + np_3, p_1 + mp_3) \mid n, m > 0\}$$

$$E(N, M_0) = \{(np_1 + mp_2, kp_1 + lp_2) \mid n + m, k + l > 0\}$$

$$(\sim) = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(np_1 + mp_2, kp_1 + lp_2), (sp_3, tp_3), (np_1 + mp_2 + sp_3, kp_1 + lp_2 + tp_3) \mid n + m, k + l, s, t > 0\}$$

Рис. 1. Пример отношений $R(N, M_0)$, $B(N)$, $E(N, M_0)$ и $(\sim)$

Утверждение 1. Для любых сети N и ограниченной разметки M_0 :

1. $|\mathcal{R}(N, M_0)| < \infty$;
2. $R(N, M_0) \subseteq B(N) \subseteq (\sim)$;
3. $R(N, M_0) \subseteq E(N, M_0) \subseteq (\sim)$;
4. $B(N)$, $R(N, M_0)$ и $E(N, M_0)$ — отношения бисимуляции.

Доказательство. (1) Следует из конечности множества $\mathcal{R}(M_0)$.

(2-3) $R(N, M_0) \subseteq B(N)$ следует из того, что для любой разметки $M \in \mathcal{R}(M_0)$ выполняется $|\mathcal{R}(M)| < \infty$.

$R(N, M_0) \subseteq E(N, M_0)$ следует из определений $R(N, M_0)$ и $E(N, M_0)$.

$B(N) \subseteq (\sim)$ и $E(N, M_0) \subseteq (\sim)$ следуют из того, что $(\sim)$ — наибольшая бисимуляция разметок.

(4) Легко убедиться, что все эти отношения замкнуты относительно срабатывания переходов сети. $\square$

Утверждение 2. Найдутся сеть N и ограниченная разметка M_0 , такие, что:

1. $|B(N)| = |E(N, M_0)| = \infty$;

2. $R(N, M_0) \subset B(N) \subset (\sim)$;
3. $R(N, M_0) \subset E(N, M_0) \subset (\sim)$;
4. $B(N) \not\subset E(N, M_0) \wedge E(N, M_0) \not\subset B(N)$.

Доказательство. См. пример сети на рисунке 1. □

Теорема 1. Отношения $B(N)$, $R(N, M_0)$ и $E(N, M_0)$ разрешимы.

(Существуют алгоритмы, отвечающие на вопросы " $(M_1, M_2) \in B(N)$?", " $(M_1, M_2) \in R(N, M_0)$?" и " $(M_1, M_2) \in E(N, M_0)$?" для произвольной сети N , произвольной ограниченной разметки M_0 и произвольных разметок M_1 и M_2 .)

Доказательство. Поскольку отношениями $B(N)$ и $R(N, M_0)$ могут быть связаны только ограниченные разметки, в случае неограниченности одной из разметок M_1 и M_2 ответ на вопрос отрицательный. Установить ограниченность разметок можно при помощи алгоритма построения полного покрывающего дерева сети Петри [1]. Таким образом, для доказательства разрешимости $B(N)$ и $R(N, M_0)$ достаточно доказать разрешимость бисимулярности ограниченных разметок. Заметим, что две ограниченные разметки порождают две системы с конечным числом состояний, а их бисимулярность можно установить простым перебором всех состояний.

Отношением $E(N, M_0)$ могут быть связаны неограниченные разметки. Однако из $(M_1, M_2) \in E(N, M_0)$ следует существование достижимой разметки $M_3 \in \mathcal{R}(M_0)$, такой что $M_1 \sim M_2 \sim M_3$. Поскольку множество $\mathcal{R}(M_0)$ конечно и мы можем его эффективно перебрать, разрешимость $E(N, M_0)$ сводится к разрешимости бисимулярности ограниченной и неограниченной разметок. Разрешимость этой проблемы следует из леммы 1. □

Свойства отношений $B(N)$, $R(N, M_0)$ и $E(N, M_0)$ можно представить в виде диаграммы:

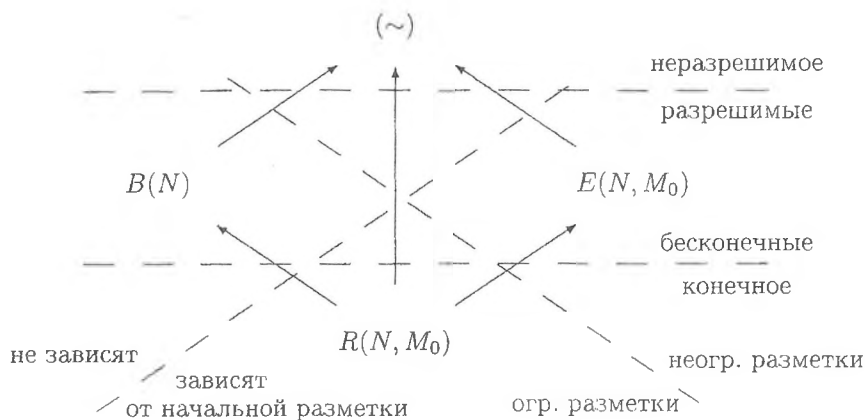


Рис. 2. Свойства отношений бисимуляции

4. Элементарное расширение бисимуляции

Из диаграммы видно, что наибольший практический интерес представляет отношение $E(N, M_0)$. Во-первых, в нем учитываются неограниченные разметки. Во-вторых, не рассматриваются неактуальные разметки, то есть те состояния, которые в принципе не могут быть получены в моделируемой системе (например, состояния с фишками в позиции p_3 для сети на рисунке 1).

Однако множество $E(N, M_0)$ может содержать бесконечно много пар разметок. Следовательно, для его практического использования необходимо уметь строить какие-то конечные представления или подмножества.

Определение 4. Элементарным расширением бисимуляции называется множество

$$EL(N, M_0) = \{(M_1, M_2) \in E(N, M_0) \mid \exists M_3 \in \mathcal{M}(P) : (M_1 \sim M_2 \sim M_3 \wedge (M_3 \subset M_1 \vee M_3 \subset M_2))\}.$$

Другими словами, элементарное расширение — это подмножество (полного) расширения, где в каждом классе эквивалентности оставлены только попарно несравнимые разметки.

Утверждение 3. Для любых сети N и ограниченной разметки M_0 :

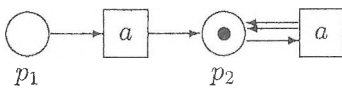
1. $|EL(N, M_0)| < \infty$;
2. $EL(N, M_0)$ — отношение эквивалентности.

Доказательство. (1) Следует из конечности $\mathcal{R}(M_0)$, а также из конечности любого множества попарно несравнимых векторов с целыми неотрицательными коэффициентами.

(2) Следует из определений. $\square$

Утверждение 4. Найдутся сеть N и ограниченная разметка M_0 , такие, что $EL(N, M_0)$ не является бисимуляцией разметок.

Доказательство. См. рисунок 3. $\square$



$$E(N, M_0) = \{ (np_1 + mp_2, kp_1 + lp_2) \mid n + m, k + l > 0 \}$$

$$EL(N, M_0) = \{ (p_1, p_1), (p_2, p_2), (p_1, p_2), (p_2, p_1) \}$$

Рис. 3. Пример отношений $E(N, M_0)$ и $EL(N, M_0)$

Теорема 2. Множество $EL(N, M_0)$ вычислимо.

В качестве доказательства приведем алгоритм построения $EL(N, M_0)$ (см. далее).

Пусть $M \in \mathcal{M}(P)$. Через $Act(M)$ обозначим множество меток переходов, готовых к срабатыванию:

$$Act(M) =_{def} \{ a \in Act \mid \exists t \in T : (M \xrightarrow{t} M' \wedge l(t) = a) \}.$$

Аналогично для множества переходов $U \subseteq T$ через $Act(U)$ обозначим множество всех его меток:

$$Act(U) =_{def} \{ a \in Act \mid \exists t \in U : l(t) = a \}.$$

Пусть $U \subseteq T$ — некоторое множество переходов. Через $\bullet U$ обозначим его (минимальное) предусловие:

$$\bullet U =_{def} \bigcup_{t \in U} \bullet t.$$

Лемма 2. Пусть $M, M' \in \mathcal{M}(P)$. Тогда $Act(M) = Act(M') \iff M \sim_1 M'$.

Доказательство. Следует из того, что $M \sim_0 M'$ для любых M и M' . $\square$

Алгоритм. (построения элементарного расширения бисимуляции)

ввод : Сеть Петри $N = (P, T, F, l)$, ограниченная разметка $M_0 \in \mathcal{M}(P)$.

вывод : Множество $EL(N, M_0)$.

шаг I : Пусть $EL(N, M_0) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

шаг II : Для каждой разметки $M \in \mathcal{R}(M_0)$ (далее $n = |\mathcal{R}(M)|$):

1. Положим $B = \emptyset$, $C = \{M' \in \mathcal{M}(P) \mid \exists U \subseteq T : (Act(U) = Act(M) \wedge M' = \bullet U)\}$.

2. Пока в C есть элементы, будем выполнять следующие действия:

2.1. Удалим из C каждую разметку M' , для которой найдется $M'' \in B$, такая что $M'' \subseteq M'$.

2.2. Удалим из C каждую разметку M' , для которой выполняется $\mathcal{R}(M') \cap Inc(N, M) \neq \emptyset$.

2.3. Рассмотрим произвольную разметку $M' \in C$. Определим наибольшее $m \leq n$, такое что $M \sim_m M'$. (Из леммы 2 следует, что $m > 0$.)

Если $m = n$, то добавим (M, M') и (M', M) в $EL(N, M_0)$, добавим M' в B , удалим M' из C и вернемся на шаг 2.

Если $m < n$, то возможны две ситуации:

(а) для некоторого срабатывания $M \xrightarrow{\sigma} L$, такого что $|\sigma| = m$, не найдется имитирующего срабатывания $M' \xrightarrow{\sigma'} L'$, такого что $l(\sigma) = l(\sigma')$ и $L \sim_1 L'$;

(б) для некоторого срабатывания $M' \xrightarrow{\sigma'} L'$, такого что $|\sigma'| = m$, не найдется имитирующего срабатывания $M \xrightarrow{\sigma} L$, такого что $l(\sigma) = l(\sigma')$ и $L \sim_1 L'$.

Также возможна комбинация (а) и (б).

Заметим, что поскольку $M \sim_m M'$, сами последовательности σ и σ' всегда существуют. Не выполниться может только требование $L \sim_1 L'$. Согласно лемме 2, условия (а) и (б) можно переписать:

$$(a') \text{Act}(L) \setminus \text{Act}(L') \neq \emptyset; \quad (b') \text{Act}(L') \setminus \text{Act}(L) \neq \emptyset.$$

Выполнение условия (б') означает, что от M недостижима ни одна разметка, которая правильно 1-симулирует разметку L' , достижимую от M' . В таком случае удаляем M' из C и возвращаемся на шаг 2.

Рассмотрим ситуацию, когда выполнено только условие (а'):

Пусть $L'(\sigma) = \{L' \in \mathcal{M}(P) \mid \exists \sigma' : (M' \xrightarrow{\sigma'} L' \wedge l(\sigma) = l(\sigma'))\}$ — множество “потенциально имитирующих разметок”. Для каждой разметки $L' \in L'(\sigma)$ и для каждого $U \subseteq T : \text{Act}(U) = \text{Act}(L) \setminus \text{Act}(L')$ добавим в C разметку $M' + (*U - L')$, а затем вернемся на шаг 2.

Алгоритм заканчивает свою работу за конечное число шагов, так как на шаге II рассматривается конечное множество $\mathcal{R}(M_0)$, а на шаге 1 в множество C помещается конечное число разметок. Кроме того, в ходе шага 2 при увеличении разметки (элемента множества C) строго увеличивается количество готовых к срабатыванию переходов. Очевидно, что это может привести либо к возникновению ситуации (б') (и прерыванию данной ветви алгоритма), либо к увеличению значения m . Поскольку m ограничено сверху n , этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

Из вычислимости множества $EL(N, M_0)$ следует более слабое утверждение о разрешимости:

Следствие 1. *Отношение $EL(N, M_0)$ разрешимо.*

5. Заключение

Найденные при помощи предложенного алгоритма разметки наряду с достижимыми бисимулярными разметками могут быть использованы, например, в качестве альтернатив текущему состоянию системы. В частности, смена состояния на бисимулярное может применяться при адаптивном управлении потоками работ (workflow) [2], когда контролирующая программа “на лету” модифицирует состояние процесса в ответ на изменение внешних условий или возникновение каких-либо внутренних событий (системных сбоев и т.п.). Модели потоков работ (WF-сети) являются частным случаем ограниченных сетей Петри.

Список литературы

1. Котов В.Е. Сети Петри. М.: Наука. 1984.
2. Bashkin V.A. Applications of Marking Bisimulation for Adaptive Workflow Management // Proc. of CS&P'2005. Warsaw. 2005. P.41–49.
3. Jancar P. Decidability questions for bisimilarity of Petri nets and some related problems // Proc. of STACS'94. LNCS 775. 1994. P.581–592.
4. Jancar P., Moller F. Checking regular properties of Petri nets // Proc. of CONCUR'95. LNCS 962. 1995. P.348–362.
5. Milner R. A Calculus of Communicating Systems // LNCS 92. 1980.

Смещение статистической оценки энтропии для простейшей меры Бернулли

Тимофеев Е.А.

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

E-mail : tim@uniyar.ac.ru

получена 15 января 2006

Аннотация

В работе найдены асимптотические и приближенные формулы для смещения оценки энтропии, предложенной в работе [2], в случае простейшей бернуллиевской меры с $p = q = 1/2$.

В работе [2] предложена статистическая оценка энтропии h случайного процесса, принимающего значения в конечном множестве $\mathcal{A}$, если заданы n его независимых реализаций. В настоящей работе найдено смещение этой оценки для бернуллиевской меры с $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ и $p = q = 1/2$.

Полученные значения смещения показывают, что результаты оценивания смещения и дисперсии в [2] являются асимптотически точными для бернуллиевской меры.

Интересно, что смещение содержит небольшое (порядка 10^{-6}) слагаемое, которое является функцией с изменяющимся периодом, равным $\frac{2\pi \ln(n-1)}{h}$.

1. Приведем результаты работы [2] и введем обозначения. Пусть $\xi = (X_1, X_2, \dots)$ – стационарный процесс, принимающий значения в конечном алфавите $\mathcal{A}$. Через μ обозначим индуцированную борелевскую меру на пространстве односторонних последовательностей $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Энтропия h (средняя энтропия на символ) определяется как

$$h = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \ln p(X_1, \dots, X_n), \quad (1)$$

где

$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}.$$

Отметим, что выбор натурального логарифма ($\ln$) позволяет избежать дополнительных множителей при построении оценок.

Введем на Ω метрику

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\max\{k : x_k \neq y_k\}}. \quad (2)$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в Ω и имеющие общее распределение – меру μ .

Статистическая оценка $\eta_n(\rho)$ энтропии строится следующими простыми вычислениями:

- находим вспомогательную случайную величину

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\min_{i: i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right)^{-1}, \quad (3)$$

где $\min^{(k)}\{x_1, \dots, x_N\} = x_k$, если $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$;

- полагаем оценкой энтропии случайную величину

$$\eta_n^{(k)}(\rho) = \frac{\ln n}{r_n^{(k)}}. \quad (4)$$

Через

$$C_n(x) = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : y_i = x_i, i = 1, \dots, n\}, \quad C_0(x) = \Omega$$

будем обозначать цилиндры в пространстве последовательностей $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, а через $B(x, r) = \{y \in \Omega : \rho_0(x, y) < r\}$ будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке x . Подчеркнем, что для метрики (2) цилиндры совпадают с шарами

$$C_n(x) = B(x, r), \quad \frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Для рассматриваемой бернуллиевской меры

$$\mu(C_n(x)) = 2^{-n}, \tag{6}$$

а энтропия

$$h = \ln 2. \tag{7}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - [1 - e^{-kh}]^s\right). \tag{8}$$

В [2] при доказательстве теоремы 1 показано, что

$$Er_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} \Delta^{(m)} \phi(n-1), \tag{9}$$

а в теореме 2 из [2] показано, что $\forall c < 1$

$$Dr_n^{(k)} = \mathcal{O}(n^{-c}), \tag{10}$$

где через

$$\Delta \phi(s) = \phi(s) - \phi(s-1)$$

обозначается конечная разность первого порядка функции $\phi(s)$.

2. Асимптотические и приближенные формулы. Для функции $\phi(s)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\phi(s) = \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{h} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2\pi ki}{h}\right) s^{-2\pi ki/h} + \mathcal{O}(s^{-1}), \tag{11}$$

где через H_s обозначаются гармонические числа

$$H_s = \sum_{i=1}^s \frac{1}{i}. \tag{12}$$

Первое приближение получается из (11) отбрасыванием суммы

$$\phi(s) \approx \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2}.$$

Точность этого приближения равна $1.8 \cdot 10^{-6}$.

Второе приближение получается из (11) отбрасыванием слагаемых с $|k| > 1$

$$\phi(s) \approx \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} + \frac{10^{-6}}{\pi} \left[3.7861079986 \cos\left(\frac{2\pi \ln s}{h}\right) + 3.1766226452 \sin\left(\frac{2\pi \ln s}{h}\right) \right]. \tag{13}$$

Точность этого приближения примерно 10^{-8} .

При $m > 0$ для m -ой разности функции $\phi(s)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\frac{(-1)^{m-1} s! \Delta^{(m)} \phi(s)}{(s-m)!} = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma\left(m + \frac{2\pi ki}{h}\right) s^{-2\pi ki/h} + \mathcal{O}(s^{-1}). \tag{14}$$

Приближенное значение для математического ожидания случайной величины $r_n^{(k)}$ имеет следующий вид

$$Er_{n+1}^{(k)} \approx \frac{H_n - H_{k-1}}{h} + \frac{1}{2} + \frac{1}{h} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \left(\Gamma\left(m + \frac{2\pi i}{h}\right) n^{-2\pi i/h} + \Gamma\left(m - \frac{2\pi i}{h}\right) n^{2\pi i/h} \right). \quad (15)$$

3. Обоснование формул (11) – (15).

3.1. Вычисление $\phi(s)$. Для нахождения суммы (8) применим формулу суммирования Пуассона [1, (13.8.4)]

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \int_0^{\infty} f(t) dt + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} f''(t) \cos 2\pi kt dt$$

для функции $f(x) = 1 - (1 - e^{-xh})^s$.

Отметим, что формула Пуассона получается при подстановке в формулу Эйлера-Маклорена [1, (13.6.3)] разложения в ряд Фурье многочлена Бернулли $B_2(\{t\})$.

Отметим также, что дальнейшее разложение (по следующим производным) не имеет смысла, поскольку максимальные значения всех производных функции $f(x)$ примерно постоянны при всех s , а $f^{(m)}(0) = 0$, при $1 \leq m < s$. Поэтому при замене второй производной на m -ую получим такое же значение остаточного члена.

Подставляя в полученную формулу значения $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, вычисляя первый интеграл и интегрируя по частям второй, получим

$$\phi(s) = \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} f'(t) \sin 2\pi kt dt.$$

Подставляя производную, получим

$$\phi(s) = \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{hs}{\pi k} \int_0^{\infty} e^{-ht} (1 - e^{-ht})^{s-1} \sin 2\pi kt dt.$$

Применяя формулу [4, (8.60)] для вычисления оставшегося интеграла, получим

$$\phi(s) = \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{is}{2\pi k} \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\pi ki}{h}\right) \Gamma(s)}{\Gamma\left(s + 1 + \frac{2\pi ki}{h}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2\pi ki}{h}\right) \Gamma(s)}{\Gamma\left(s + 1 - \frac{2\pi ki}{h}\right)} \right].$$

Применяя формулу $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, перепишем полученное выражение как

$$\phi(s) = \frac{H_s}{h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{h} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2\pi ki}{h}\right) \Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+1 + \frac{2\pi ki}{h}\right)}. \quad (16)$$

Применяя формулу Стирлинга, нетрудно вывести

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1+\alpha)} = s^{-\alpha} + \mathcal{O}(s^{-1}). \quad (17)$$

Отметим, что оценка является равномерной по α .

Подставляя эту оценку для $\alpha = \frac{2\pi ki}{h}$ в (16), получим (11).

3.2. Вывод формулы (13). Гамма-функция убывает по мнимой оси довольно быстро, поэтому для получения приближенной формулы достаточно оставить только первый член ряда ($k = 1$). Вычисление гамма-функции с применением пакета *Mathematica* дает

$$\Gamma\left(1 + \frac{2\pi i}{h}\right) = (3.1766226452 - 3.7861079986i)10^{-6}.$$

Подставляя эти числа в (11), получим (13).

3.3. Вывод формулы (14). Нетрудно проверить, что

$$\Delta^{(m)}\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1+\alpha)}\right)=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(s-m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1+\alpha)}.$$
(18)

Подставляя это равенство для $\alpha = \frac{2\pi ki}{h}$ в (16) и применяя оценку (17), получим (14).
Отметим, что при $m > 0$ гамма-функция в (14) определена и для $k = 0$, поэтому слагаемое $\frac{1}{h}$ внесено под знак суммы.

3.4. Вывод формулы (15). Подставляя асимптотические оценки (14), (11) в (9) и оставляя только первые члены рядов ($k = 0, \pm 1$), получим формулу (15).

4. Численные вычисления. На рис. 1 для меры Бернулли при $p = q = 1/2$ приведены график функции $\phi(s)$ и график функции $H_s/h + 0.5$, который сливается с предыдущим.

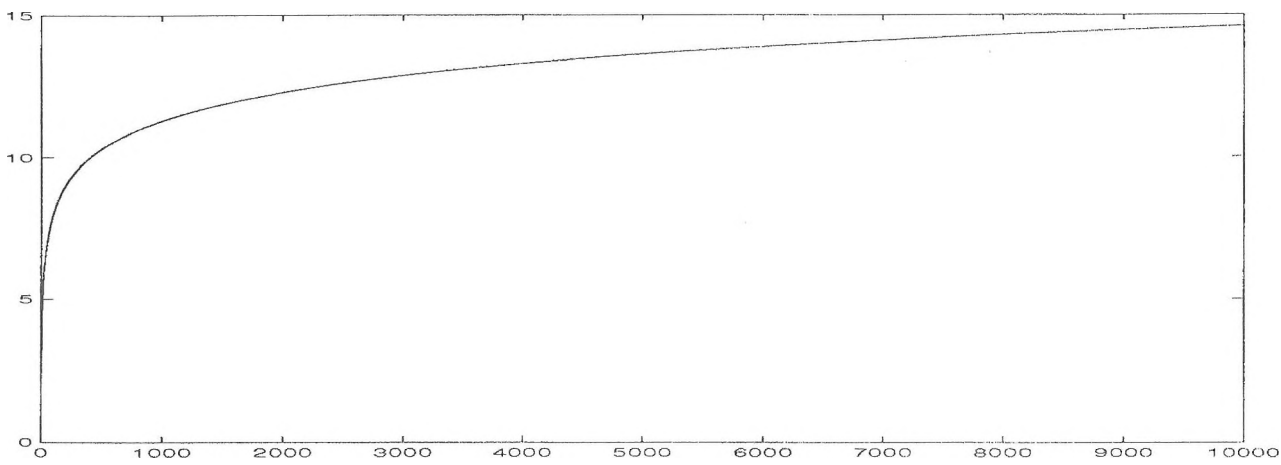


Рис. 1. Графики функций $\phi(s)$ и $H_s/h + 0.5$ в зависимости от s

На рис. 2 для меры Бернулли при $p = q = 1/2$ приведены графики функций $\phi(s) - H_s/h - 0.5$ и ее приближения по формуле (13) (пунктир)

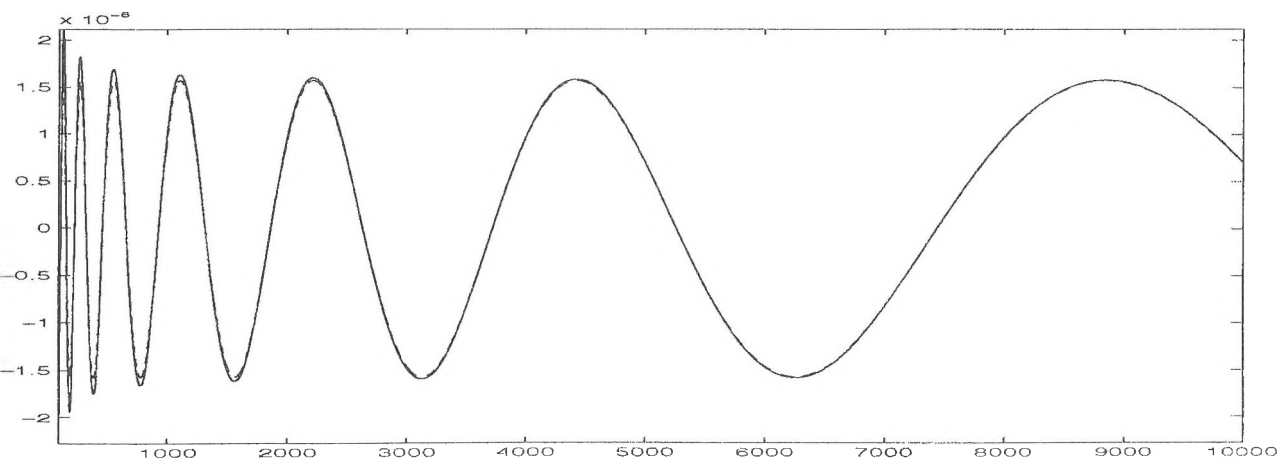


Рис. 2. Графики функций $\phi(s) - H_s/h - 0.5$ и ее приближения по формуле (13) (пунктир) в зависимости от s

На рис. 3 для меры Бернулли при $p = q = 1/2$ приведен график разности функций $\phi(s)$ и ее приближения по формуле (13)

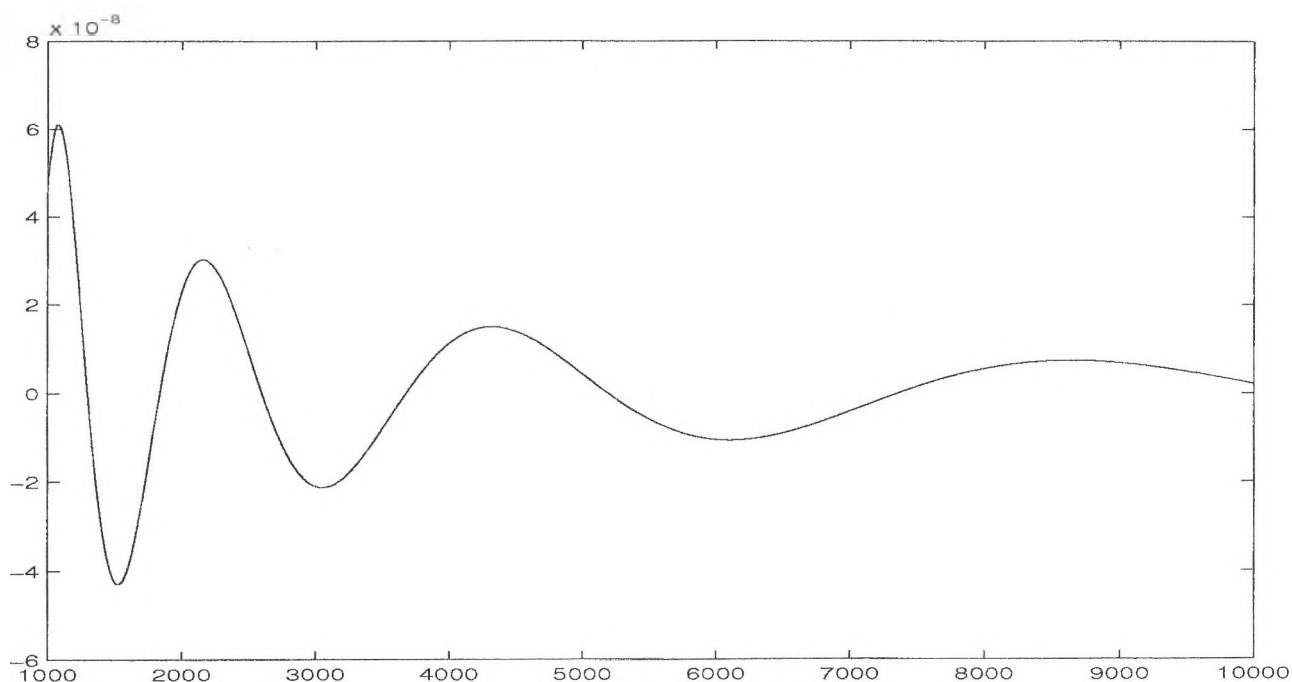


Рис. 3. График разности функций $\phi(s)$ и ее приближения по формуле (13) в зависимости от s

Список литературы

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
2. Тимофеев Е.А. Состоятельная оценка энтропии мер и динамических систем //Мат. заметки. 2005. Т. 77, №6. С. 903 – 916.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.:Наука, 1971.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. : Наука. 1974.

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Об одном подходе к различению элементов из больших совокупностей традиционных систем символов

Парфенов П. Г., Назарычев С. Л.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 30 марта 2006

Аннотация

В работе приведены результаты экспериментального характера, подтверждающие устойчивое различение элементов из больших совокупностей изолированных алфавитно-цифровых символов с помощью построения характеристического набора коэффициентов черно-белого изображения. В качестве такого рода совокупностей рассмотрены объединения как исторически сложившихся алфавитов, так и искусственно созданных алфавитно-подобных систем символов. Основным результатом работы представляется демонстрация мощности различения с помощью предложенного подхода.

Характеристический набор коэффициентов черно-белого цифрового изображения в том виде, в котором он будет использоваться в настоящей заметке, был введен в работе [1]. Этот набор дает существенную информацию о геометрических и топологических свойствах изображения. Следует отметить, что, по существу, хоть и в неявном виде, такого рода набор использовался в работе Дуды, на которого ссылается Прэтт [2]. Грэй [3] также, исходя фактически из этого набора, приводит формулы для вычисления эйлеровой характеристики и для оценки числа связанных компонент изображения. В работе [4] частично были использованы свойства этого характеристического набора в виде линейных комбинаций его коэффициентов для различения элементов внутри отдельных алфавитов.

Под изображением A будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами, принимающими значения либо 0, либо 1. Фрагментом s размера 2×2 изображения A называется любая подматрица матрицы A , состоящая из элементов $a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}$. Символика $s \subseteq A$ обозначает, что s является фрагментом A . Построим следующую таблицу:

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}
0 0 0 0	1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 1	0 0 1 0	1 1 0 0	0 1 0 1	0 0 1 1	1 0 1 0	1 0 0 1	0 1 1 0	0 1 1 1	1 0 1 1	1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 1 1
K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}

Рис. 1.

Очевидно, что всего существует 16 различных типов фрагментов, обозначенных символами $s_l, l = \overline{0, 15}$, и расположенных в первой строке таблицы. Во второй строке представлен геометрический аналог соответствующего типа, в третьей строке указан вид подматриц, представляющих данный тип. Четвертая строка указывает число фрагментов типа $s_l, l = \overline{0, 15}$, таких, что $s_l \subseteq A$. Этот набор неотрицательных целых чисел $k_l, l = \overline{0, 15}$, будем называть характеристическим набором коэффициентов изображения A , построенных по системе фрагментов размера 2×2 .

Для совокупности из одиннадцати экземпляров алфавитов, а именно русского, английского, греческого, угаритского [5], финикийского [6], иврита, алфавита друидов [7], футурама [8], валлийского коэлбрена [9], рунического письма [10] и символов египетской письменности [7], а также экземпляров знаков зодиака были построены соответствующие характеристические наборы. Для каждого элемента алфавитов выбрано достаточно случайное его представление в окне размером 30×40 пикселей и полученная совокупность соответствующих векторов была подвергнута анализу на совпадение.

Результаты анализа позволяют говорить о высокой эффективности различения символов с помощью указанного подхода, при этом, естественно, символы из разных алфавитов, имеющие одинаковые представления в окне 30×40 пикселей, имеют равные характеристические наборы коэффициентов.

В качестве иллюстрирующего примера на рис. 2, 3 и 4 приведены соответствующие экземпляры знаков греческого алфавита, алфавита друидов и финикийского алфавита и их соответствующие характеристические наборы коэффициентов, построенные по системе фрагментов размера 2×2.

α	856	14	11	13	12	20	22	20	20	0	0	13	12	14	11	233	ν	972	15	3	15	4	10	22	9	21	0	0	14	3	14	2	167
β	988	12	4	12	6	17	27	15	25	0	0	13	7	13	5	127	ξ	1031	6	5	7	5	27	20	26	21	0	0	6	4	5	4	104
γ	945	19	10	18	9	5	18	7	18	0	0	17	8	18	9	170	ο	945	16	8	16	6	10	18	10	18	0	0	16	8	16	8	174
δ	804	15	15	15	18	16	27	13	24	0	0	15	18	15	18	261	π	889	15	7	13	4	18	29	23	30	0	0	12	3	14	6	208
ε	926	13	11	11	14	26	12	25	7	0	0	10	13	12	10	181	ρ	985	12	4	11	5	11	22	11	20	0	0	11	5	12	4	158
ζ	874	9	10	9	12	12	18	10	16	0	0	8	11	8	9	165	σ	931	14	5	12	5	18	21	20	19	0	0	12	5	14	5	190
η	860	17	9	16	6	9	33	13	35	0	0	15	5	16	8	229	τ	966	14	4	12	4	15	14	17	12	0	0	11	3	13	3	183
θ	798	18	5	17	6	18	38	18	34	0	0	18	7	19	6	271	υ	992	11	8	11	6	6	23	8	25	0	0	10	5	10	7	149
ι	1071	7	7	8	7	8	13	7	14	0	0	7	6	6	6	104	φ	775	24	7	23	7	13	33	14	32	2	0	25	7	26	7	276
κ	974	17	10	13	12	4	18	6	12	1	0	13	11	17	9	154	χ	878	19	14	19	15	11	19	10	18	0	0	18	14	18	13	205
λ	1009	10	14	10	16	6	12	4	10	0	0	9	15	9	13	134	ψ	887	15	7	13	9	3	40	3	36	0	0	12	8	14	6	218
μ	968	13	4	16	6	10	26	5	27	0	0	15	5	12	3	161	ω	895	12	13	14	13	9	29	7	31	0	0	13	12	11	12	200

Рис. 2. Греческий алфавит

Α	914	11	11	13	8	13	25	14	30	0	0	12	7	10	10	193	Ξ	855	2	6	6	3	49	21	48	28	0	0	5	2	1	5	248
Β	1031	2	2	4	4	19	18	15	18	0	0	3	3	1	1	150	Ι	1026	2	2	5	3	18	22	14	24	0	0	4	2	1	1	147
Χ	1004	11	12	11	13	3	15	2	14	0	0	10	12	10	11	143	Ζ	989	8	3	8	5	24	19	22	17	0	0	7	4	7	2	156
Υ	1100	2	9	2	10	7	14	6	13	0	0	1	9	1	8	89	Σ	1005	13	7	14	7	11	14	10	5	0	0	13	6	12	6	138
Η	944	11	5	11	3	6	32	8	34	0	0	10	2	10	4	191	Ψ	1098	6	9	5	8	14	1	16	1	0	0	4	7	5	8	89
Θ	1007	7	6	8	8	16	21	13	20	0	0	7	7	6	5	140	Ω	1009	9	14	9	16	11	9	10	8	0	0	8	15	8	13	132
Τ	1022	15	15	14	6	10	19	10	17	0	0	13	5	14	4	117	Κ	1066	7	8	10	6	3	15	2	20	0	0	9	5	6	7	107
Υ	1046	3	14	6	11	5	13	5	19	0	0	5	10	2	13	119	Ε	993	5	5	4	6	37	18	37	6	0	0	3	5	4	4	154
Σ	992	8	13	11	16	25	12	19	12	0	0	10	15	7	12	200	Ϟ	989	4	10	4	10	29	10	29	10	0	0	3	9	3	9	152
Κ	1069	4	13	5	13	11	6	10	7	0	0	4	12	3	12	102	Γ	1091	2	4	2	2	10	20	12	22	0	0	1	1	1	3	100
Ο	905	11	14	11	13	21	18	22	19	0	0	10	12	10	13	192	Υ	859	14	14	15	12	7	33	8	36	0	0	14	11	13	13	222
Φ	854	19	8	19	8	3	34	3	34	0	0	19	8	19	8	235	Ι	1070	8	3	10	2	3	22	2	25	0	0	9	1	7	2	107
Χ	974	14	15	15	15	3	14	2	15	0	0	14	14	13	14	149	Λ	1042	10	12	8	13	1	17	2	14	0	0	7	12	9	11	113
Υ	1008	17	6	15	8	7	12	9	10	0	0	14	7	16	7	133	Ρ	1041	11	2	8	5	2	26	2	20	0	0	7	4	10	1	132

Рис. 3. Алфавит друидов

Ⲁ	964	12	8	16	9	20	16	15	19	0	0	16	9	12	8	147	Ⲉ	1056	9	2	9	4	7	28	5	26	0	0	8	3	8	1	106
ⲁ	1014	9	6	13	10	18	15	10	15	0	0	13	10	9	6	123	ⲉ	1039	17	7	15	8	7	19	8	16	0	0	14	7	16	6	92
Ⲃ	1070	8	12	10	13	7	7	4	8	0	0	9	12	7	11	93	Ⲋ	1061	16	3	15	3	8	16	9	15	0	0	14	2	15	2	92
ⲃ	955	9	10	11	15	19	16	12	13	0	0	11	15	9	10	166	ⲋ	968	16	8	18	11	13	21	8	20	0	0	17	10	15	7	139
Ⲅ	978	13	10	22	8	18	10	11	21	0	0	21	7	12	9	131	Ⲍ	1098	7	6	7	6	6	15	6	15	0	0	6	5	6	5	83
ⲅ	1068	2	10	5	10	8	20	5	23	0	0	4	9	1	9	97	ⲍ	1065	12	6	11	5	4	21	6	21	0	0	10	4	11	5	90
Ⲇ	1024	16	2	14	4	16	16	16	12	0	0	18	3	15	1	119	Ⲏ	939	19	6	16	8	17	25	18	20	1	0	16	7	19	5	155
ⲇ	909	9	18	9	16	17	17	19	19	0	0	10	17	10	19	182	ⲏ	925	10	10	13	8	15	29	14	34	0	0	4	9	11	11	168
Ⲉ	916	10	11	10	9	20	21	22	23	0	0	13	12	13	14	177	Ⲑ	1072	5	9	8	11	8	15	3	16	1	0	9	11	6	9	88
ⲉ	1022	18	5	18	5	10	11	10	11	0	0	17	4	17	4	119	ⲑ	994	14	11	13	9	7	18	10	19	0	0	12	8	13	10	133
Ⲋ	979	15	6	16	7	10	22	8	22	0	0	16	7	15	6	142	Ⲓ	1103	6	3	8	3	12	13	12	13	0	0	5	2	5	2	86

Рис. 4. Финикийский алфавит

Список литературы

1. Парфенов П.Г. О некоторых свойствах характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения // Модел. и анализ информ. систем. Ярославль. 2005. Т. 12, №1. С. 52-54.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн.2. М.:Мир, 1982.
3. Gray S.B. Local properties of binary images in two dimensions // IEEE Trans.Computers. 1971. May, C-20, 5. P. 551-561.
4. Парфенов П.Г. Некоторые числовые характеристики изображений, инвариантные относительно сдвигов и поворотов // Модел. и анализ информ. систем. Ярославль. 1998. Вып.5. С. 58-61.
5. Угаритский алфавит <http://navosvet.narod.ru/d40/chmg12.HTML>
6. Википедия. Свободная энциклопедия. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
7. Алфавиты <http://general-1.narod.ru/files/alph.htm>
8. Инопланетный язык Futuramer.ru <http://www.futuramer.ru/info/alien/>
9. Валлийский коэлбрен <http://florell-page.narod.ru/Druids/Ogam/ogambukva.htm>
10. Руническое письмо. Терра-Лексикон: Иллюстрированный энциклопедический словарь. М.: ТЕРРА, 1998.

УДК 517.928; 517.954

Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов

Глызин С.Д.¹

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

Изучается вопрос об аттракторах системы трех связанных двумерных отображений. Каждое парциальное отображение служит математической моделью автогенератора с релейным усилителем и с отрезком длинной линии без искажений в цепи обратной связи. Для модельного отображения построена нормализованная система обыкновенных дифференциальных уравнений, динамические свойства которой подробно изучены. Показано, что изучаемая система связанных осцилляторов имеет колебательные режимы разных масштабов.

1. Алгоритм нормализации отображений в окрестности неподвижной точки

Локальный анализ отображений в окрестности неподвижной точки обычно осуществляется путем построения некоторых нормализованных систем разностных уравнений. Общий алгоритм перехода изложен, например, в [1]. В ряде случаев, однако, такой анализ удобнее производить путем сведения исследуемого объекта к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые из этих случаев представлены в работе [2]. Опишем основную конструкцию общего вида, позволяющую получить нормальную форму отображения в виде системы дифференциальных уравнений, и приведем содержательный пример ее использования. Как и в [1], рассмотрим в вещественном банаховом пространстве E отображение

$$u \rightarrow A_0 u + \varepsilon A_1 u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u), \quad (1)$$

определяющее функцию $u(t+1)$, $t \in [-1, 0]$ через функцию $u(t)$. Здесь $u(t)$ при каждом t лежит в R^n , $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, A_0 — $n \times n$ вещественная матрица, имеющая m пар собственных чисел на единичной окружности комплексной плоскости так, что $A_0 a_k = e^{i\omega_k} a_k$, $k = 1, \dots, m$. Остальные собственные числа A_0 лежат внутри единичного круга. Будем считать, что $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$ — линейные по каждому своему аргументу функции, определяющие квадратичную и кубическую нелинейности правой части.

Отображение (1) при каждом t определяет обычное разностное уравнение вида

$$u(t+1) = (A_0 + \varepsilon A_1)u(t) + F_2(u(t), u(t)) + F_3(u(t), u(t), u(t)). \quad (2)$$

Выполним в (2) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, s) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \varepsilon^2 u_3(t, s) + \varepsilon^{5/2} u_4(t, s) + \dots, \quad (3)$$

где $u_0(t, s) = \sum_{k=1}^m (\xi_k(s) \exp(i\omega_k t) a_k + \bar{\xi}_k(s) \exp(-i\omega_k t) \bar{a}_k)$, $s = \varepsilon t$. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ приводит на третьем шаге к уравнению

$$u_2(t+1, s) - A_0 u_2(t, s) = - \sum_{k=1}^m \left(\dot{\xi}_k(s) \exp(i\omega_k(t+1)) a_k + \dot{\bar{\xi}}_k(s) \exp(-i\omega_k(t+1)) \bar{a}_k \right) + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + A_1 u_0. \quad (4)$$

В зависимости от того, какие резонансные соотношения связывают ω_k , могут быть получены различные условия разрешимости задачи (4), ясно, однако, что эти соотношения будут включать следующие слагаемые:

$$\dot{\xi}_k = \gamma_k \xi_k + \xi_k \sum_{j=1}^m d_{kj} |\xi_j|^2 + \dots, \quad (5)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы „Университеты России“ (грант 04.01.452) и „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект РНП.2.1.1.630).

где γ_k, d_{kj} – числа, определяемые правыми частями (2). Грубым режимам системы (5) будут соответствовать решения (2) той же устойчивости с асимптотикой (3).

2. Построение отображения, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов

Рассмотрим применение этого алгоритма на примере отображения, порождаемого системой трех связанных *RCLG*-генераторов. Исходная модель имеет вид (см., например, [3])

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu^2 u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad u_j|_{x=0} + \varphi(K(u_j|_{x=1} + \alpha u_{j-1}|_{x=0})) = 0, \quad u_0 = u_3. \quad (7)$$

Здесь $u_j(t, x)$ – нормированные напряжения в линиях соответствующих генераторов, 2μ – потери в линии, которые ниже предполагаются малыми, $K > 0$ – коэффициент усиления, а $|\alpha| \ll 1$ – параметр, характеризующий связь между генераторами. Функция $\varphi(z)$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки в начало координат. Обычно предполагается, что (см. [3]) $\varphi'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ и, кроме того, выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\rightarrow q_1 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad \varphi(z) \rightarrow -q_2 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \\ z \varphi'(z) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

где $q_1, q_2 > 0$. Учитывая, что ниже будут изучаться локальные свойства системы (6),(7), считаем, что в окрестности точки ноль $\varphi(z)$ допускает следующее разложение:

$$\varphi(z) = z - az^3 + bz^5 + \dots \quad (8)$$

Простейший пример удовлетворяющей указанным условиям функции дает выражение $\varphi(z) = z(1+z^2)^{-1/2}$, для которого $a = 1/2$, $b = 3/8$.

При некоторых дополнительных ограничениях замена

$$u_j = e^{-\mu t} (h_j(t + (x-1)) + h_j(t - (x-1))) \quad (9)$$

приводит краевую задачу (6)-(7) к системе разностных уравнений

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\varepsilon)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \quad (10)$$

где $w_j(t) = h_j(t) \exp(1 - \mu t)$, $v_j(t) = w_j(t-1)$, $j = 1, 2, 3$, $v_0 = v_3$, $w_0 = w_3$, $\varepsilon = 1 - \exp(-2\mu)$, $\nu = \alpha K$, а величина $2K \exp(-\mu)$ снова обозначена K .

Разностная система (10) имеет самостоятельное значение, не связанное с краевой задачей (6),(7) (см. [3]). Рассмотрим возможность применения изложенного в предыдущем пункте алгоритма к данной задаче.

Матрица линейной части системы (10) имеет при $0 < K < 2$ и $\varepsilon = 0$ пару собственных чисел $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$, где $\omega_0 = \arccos(-K/2)$, кратности три, которая лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Учитывая, что этим собственным числам соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова их кратность, можно утверждать, что при достаточно малых ε в окрестности нулевой неподвижной точки системы (10) имеется 6-мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие (см. [1, 3]). Используя алгоритм пункта 1, построим нормальную форму отображения (10) и изучим ее динамические свойства.

3. Нормальная форма отображения

Обозначим $u(t)$ шестимерный вектор вида $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3)^T$ и будем считать, что $\nu = \varepsilon\nu_0$, тогда для нормализации системы разностных уравнений (10) можно выполнить замену (3). На третьем шаге применения алгоритма из условий разрешимости соответствующей алгебраической задачи на $u_2(t, s)$ получаем

$$\dot{\xi}_j = -id(e^{-i\omega_0}\xi_j + 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}), \quad \xi_0 = \xi_3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где $d = \frac{1}{2 \sin \omega_0}$. Нормальная форма (11) может быть уточнена на пятом шаге слагаемыми порядка ε , на седьмом – порядка ε^2 и т.д. Предполагая, что

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= -id(e^{-i\omega_0}\xi_j - 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}) + \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}), \\ \xi_0 &= \xi_3, \quad \xi_{-1} = \xi_2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (12)$$

из условий разрешимости системы, возникающей при $\varepsilon^{5/2}$ для $u_3(t, s)$ получаем функцию добавки

$$\begin{aligned} \varepsilon \Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}) = & \frac{\varepsilon}{2} d^2 \left[e^{-2i\omega_0} \xi_j + 3aK^3 (3e^{-i\omega_0} - e^{i\omega_0}) \xi_j |\xi_j|^2 + \right. \\ & + \nu_0 K \xi_{j-1} (2e^{-i\omega_0} + 3aK^2 (K + 4i \sin \omega_0) (2|\xi_j|^2 + |\xi_{j-1}|^2)) - \\ & - 3\nu_0 a K^3 (K - 4i \sin \omega_0) \xi_j^2 \xi_{j-1} + K \nu_0^2 \xi_{j-2} (K + 4i \sin \omega_0) + \\ & \left. + K^5 \left(9a^2 K + 4i \frac{(3a^2 K + 5b(K + 2 \cos 3\omega_0)) \sin \omega_0}{K + 2 \cos 3\omega_0} \right) \xi_j |\xi_j|^4 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание развитую в [1] общую теорию, можно показать, что грубым режимам систем (11) или (12) соответствуют решения системы (10) с асимптотикой (3) той же устойчивости. Тем самым, возникает задача качественного анализа этих систем. Рассмотрим сначала систему (11) и в целях ее

упрощения выполним замену $\xi_j = \sqrt{\frac{4 \sin \omega_0}{3K^3}} \exp(-t \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \omega_0) \eta_j$. Преобразованная система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_1/2 - i(\gamma \eta_3 + |\eta_1|^2 \eta_1), \\ \dot{\eta}_2 &= -\eta_2/2 - i(\gamma \eta_1 + |\eta_2|^2 \eta_2), \\ \dot{\eta}_3 &= -\eta_3/2 - i(\gamma \eta_2 + |\eta_3|^2 \eta_3), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\gamma = \frac{K \nu_0}{2 \sin \omega_0}$.

Сразу отметим, что при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (14) асимптотически устойчиво, а при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ — неустойчиво. Если же $|\gamma| = 1/\sqrt{3}$, то система (14) имеет в фазовом пространстве прямую, заполненную неподвижными точками.

4. Динамические свойства нормальной формы отображения

Качественный анализ системы (14) удобнее производить после перехода в ней к полярным координатам $\eta_j = p_j e^{i\varphi_j}$. Обозначая $\alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_1$ и $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1/2 + \gamma p_3 \sin \alpha_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2/2 + \gamma p_1 \sin \alpha_2, \\ \dot{p}_3 &= -p_3/2 - \gamma p_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_1 &= \gamma \left[\frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 - \frac{p_2}{p_3} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + p_1^2 - p_3^2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \gamma \left[\frac{p_1}{p_2} \cos \alpha_2 - \frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 \right] + p_2^2 - p_1^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Остановимся сначала на простейших свойствах системы (15) аналитического характера. Прежде всего отметим свойство циклической симметрии, которое следует из того, что осцилляторы исходной системы разностных уравнений (10) идентичны друг другу. Как легко видеть, система (15) инвариантна относительно замен

$$p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow -\alpha_1 - \alpha_2 \quad (16)$$

и периодична по α_1, α_2 с периодом 2π . Тем самым, любая траектория системы (15) либо является самосимметричной, либо одновременно с ней в фазовом пространстве (15) сосуществуют еще две траектории, получающиеся из данной однократной или двукратной заменой (16).

Второе свойство системы (15) состоит в существовании в ее фазовом пространстве двух инвариантных прямых

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3, \\ p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = -2\pi/3. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (15) сводится к уравнению $\dot{p} = (\gamma\sqrt{3} - 1)p/2$, на первой из прямых (17) и $\dot{p} = -(\gamma\sqrt{3} + 1)p/2$ — на второй. Как уже отмечалось выше, при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (14) асимптотически устойчиво. Система (15) в силу выполненных замен уже не имеет нулевого решения, однако при указанных ограничениях ее траектории стремятся к нулю вдоль одного из инвариантных направлений. При $\gamma = 1/\sqrt{3}$ первая из инвариантных прямых (17) заполнена состояниями равновесия, а при $\gamma = -1/\sqrt{3}$ — вторая. Увеличение $|\gamma|$ приводит в обоих случаях к мягкому ответвлению периодических колебаний. Учитывая, что данные фазовые перестройки происходят в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых собственных чисел, при $\gamma = \pm(1/\sqrt{3} + \mu)$, где $0 < \mu \ll 1$, можно построить асимптотику устойчивого

периодического режима системы (15). Данный критический случай подробно изучен, например, в книге [4]. При $\gamma = 1/\sqrt{3} + \mu$ имеем

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^+, p^+, p^+, \alpha^+, \alpha^+)^T + r^+ \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^+ \exp(\omega^+ t)] + O(\mu). \quad (18)$$

Здесь $p^+ = \sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$, $\alpha^+ = 2\pi/3$, $\omega^+ = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $r^+ \simeq 2.745$, а вектор w^+ имеет вид $w^+ \simeq (-0.1997 - 0.2029i, -0.0758 + 0.2744i, 0.2756 - 0.0715i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$. Если же $\gamma = -1/\sqrt{3} - \mu$, то асимптотика устойчивого цикла становится следующей:

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^-, p^-, p^-, \alpha^-, \alpha^-)^T + r^- \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^- \exp(\omega^- t)] + O(\mu), \quad (19)$$

где $p^- = \sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$, $\alpha^- = -2\pi/3$, $\omega^- = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $r^- \simeq 2.33$, а $w^- \simeq (-0.21 + 0.2619i, 0.3318 + 0.051i, -0.1218 - 0.3129i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$.

Численный анализ, выполненный с помощью программы Tracer 3.51 (см. [5]), показал, что при увеличении параметра $\gamma > 1/\sqrt{3}$ в системе (12) наблюдается следующая динамика (точнее говоря, речь пойдет о фрагментах динамики, которые удалось выявить с той или иной степенью достоверности).

1. При $\gamma_1^+ < \gamma < \gamma_2^+$ ($\gamma_1^+ = 1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$, $\gamma_2^+ \simeq 0.716$) устойчив цикл C_1 , ответившийся при $\gamma = \gamma_1^+$ от состояния равновесия на инвариантной прямой (17) и допускающий при $0 < \gamma - \gamma_1^+ \ll 1$ асимптотику (18).

2. При $\gamma = \gamma_2^+$ с циклом C_1 происходит бифуркация удвоения и при $\gamma_2^+ < \gamma < \gamma_3^+$ ($\gamma_3^+ \simeq 0.7173$) устойчив условно двухобходный цикл C_2 .

3. При $\gamma = \gamma_3^+$ от периодического решения двойного периода бифурцируют двухчастотные колебания (двумерный тор), которые устойчивы на промежутке $\gamma_3^+ < \gamma < \gamma_4^+$.

4. При $\gamma > \gamma_4^+$ в системе наблюдаются неупорядоченные колебания, старший ляпуновский показатель которых растет (см. рис. 1).

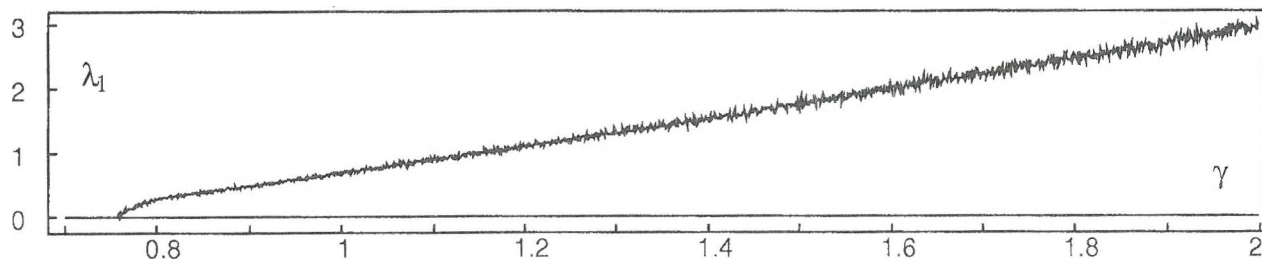


Рис. 1.

Величину γ_4^+ можно оценить лишь весьма приближенно, как точку, в которой старший ляпуновский показатель становится положительным, в соответствии с этим $0.75 \lesssim \gamma_4^+ \lesssim 0.758$. Способ перехода от двухчастотных колебаний к хаотическим также остается в данном случае неизвестным.

Рассмотрим теперь фазовые перестройки системы (12) при отрицательных γ . В этом случае реализуется сложная схема всевозможных бифуркаций циклов и хаотических режимов. Выделим область значений γ , примыкающую к $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_1^- = -1/\sqrt{3} \simeq -0.57735$. При этих значениях параметра возникают и претерпевают фазовые перестройки большое число различных режимов, которые удается классифицировать по амплитуде колебаний. Выделим режимы условно малой, средней и большой амплитуды и будем обозначать буквами C и A соответственно циклы и хаотические аттракторы системы (15), добавляя индексы s , m и l (малый, средний, большой) для обозначения их амплитуды. Рассмотрим сначала бифуркации, происходящие в этой ситуации с циклом малой амплитуды.

1. Цикл малой амплитуды C_s мягко ответвляется при $\gamma = \gamma_1^-$ от состояния равновесия на второй инвариантной прямой (17) и имеет вблизи критического значения параметра γ асимптотику (19) (на рис. 2-5 этот цикл изображен жирной кривой).

2. При $\gamma_2^- < \gamma < \gamma_1^-$ ($\gamma_2^- \simeq -0.716$) цикл C_s устойчив, а при $\gamma = \gamma_2^-$ он претерпевает бифуркацию удвоения периода.

3. Цикл условно двойного периода C_s^2 остается устойчивым при $\gamma_3^- < \gamma < \gamma_2^-$ ($\gamma_3^- \simeq -1.272$).

4. При $\gamma < \gamma_3^-$ цикл C_s^2 теряет устойчивость и наблюдаются хаотические колебания с многочисленными окнами периодичности.

Отметим, что циклы C_s и C_s^2 самосимметричны, т.е. инвариантны относительно замены (16).

Ниже на рис. 2 – 5 приведены проекции траекторий системы (15) на плоскость $p_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ для некоторых характерных значений параметра γ . Для того чтобы получить устойчивые режимы изучаемой

системы с относительно узкими областями притяжения, из 40000 случайно выбранных точек области $(0, 2] \times (0, 2] \times (0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ фазового пространства выпускались траектории, по местам сгущения которых можно судить о наличии в данной части фазового пространства какого-либо устойчивого режима.

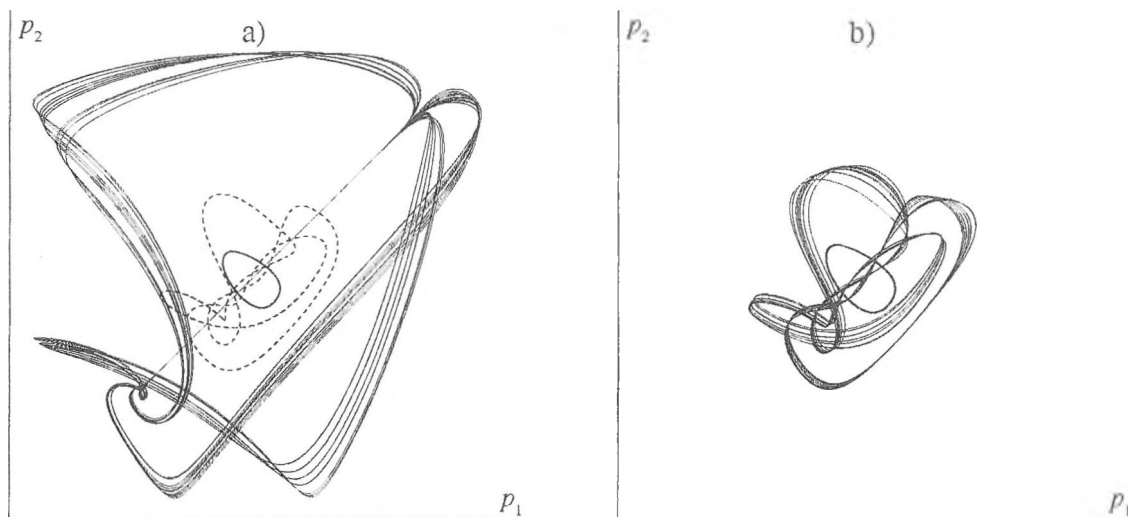


Рис. 2. а) $\gamma = -0.595$; б) $\gamma = -0.6022$.

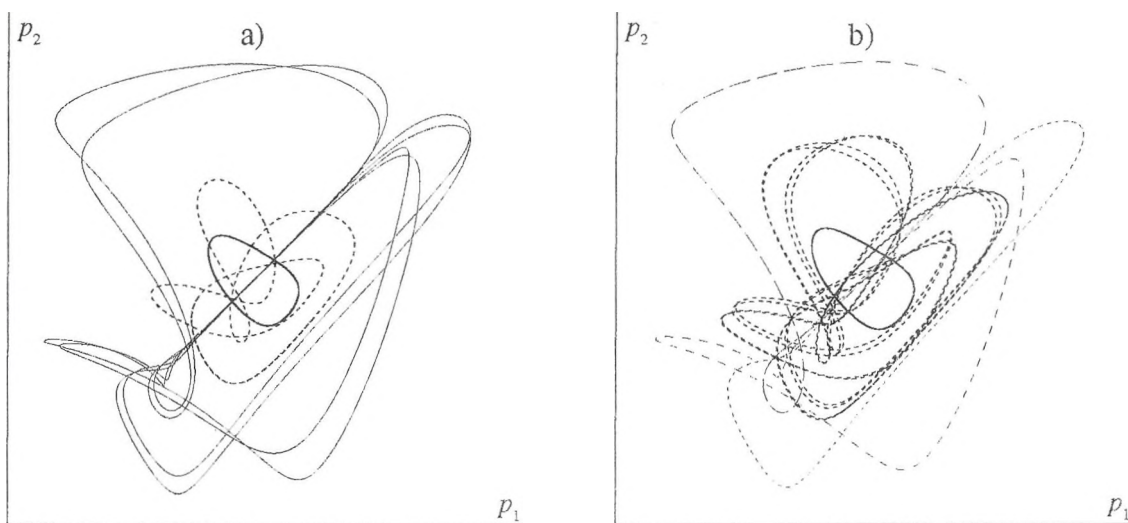


Рис. 3. а) $\gamma = -0.62$; б) $\gamma = -0.63$.

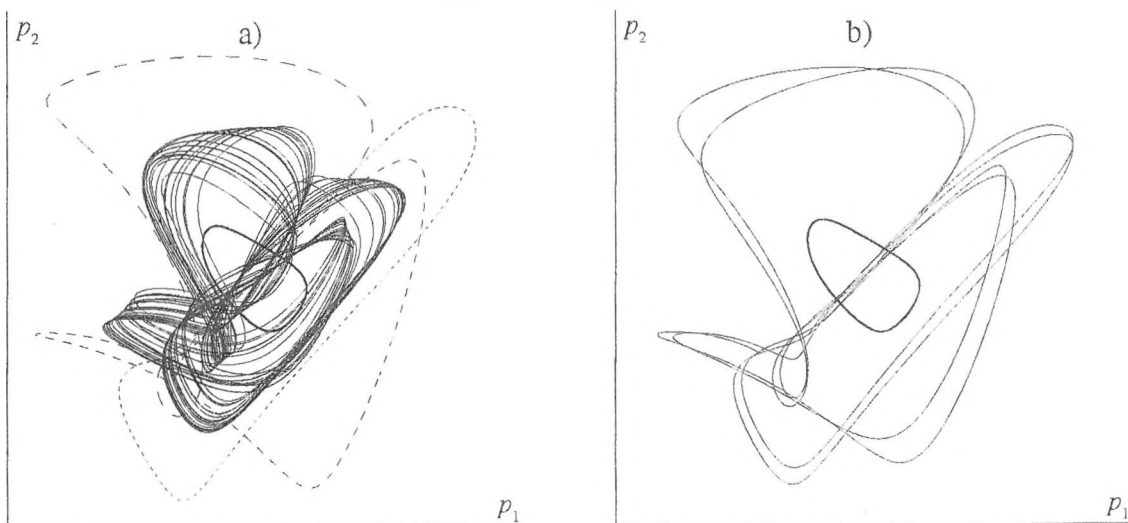
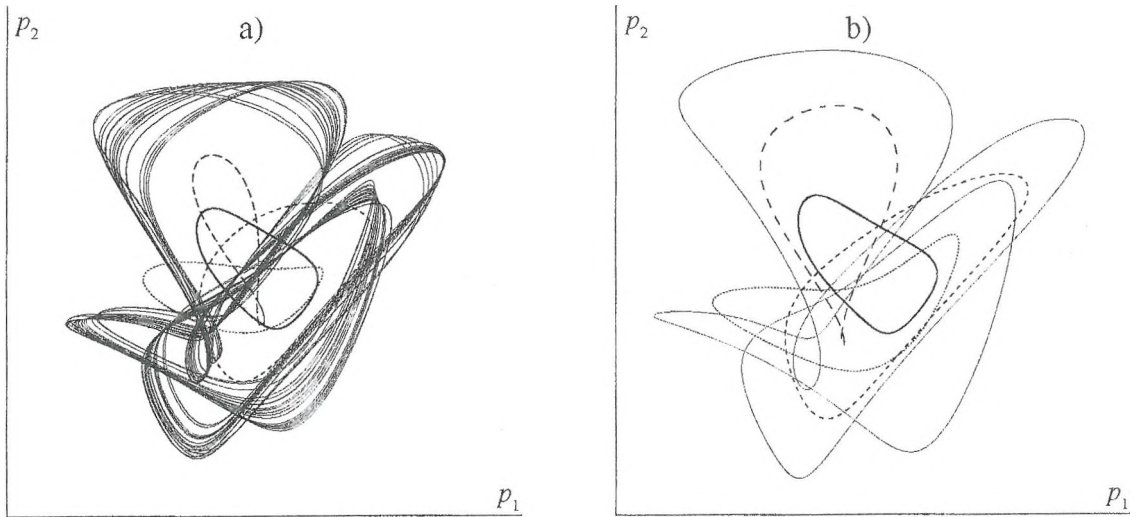


Рис. 4. а) $\gamma = -0.633$; б) $\gamma = -0.6395$.

Рис. 5. а) $\gamma = -0.65$; б) $\gamma = -0.67$.

Перейдем теперь к описанию фазовых перестроек, происходящих с циклами средней амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_m^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_m^- \simeq -0.765$. При этом на начальном промежутке $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_{m1}^-$, где $\gamma_{m1}^- \simeq -0.6483$ каскада бифуркаций нет. При $\gamma = \gamma_m^-$ у системы (15) появляются три симметричных устойчивых цикла $C_m^0, C_m^{0*}, C_m^{0**}$, переходящих друг в друга в результате замены (16), а при $\gamma = \gamma_{m1}^-$ они теряют устойчивость. На рис. 5а, 5б эти циклы изображены пунктиром различной длины.

Будем следить за каскадами бифуркаций, происходящими с режимами средней амплитуды, увеличивая параметр $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_1^-$. Важно отметить, что области, в которых происходят каскады бифуркаций, мы будем рассматривать при увеличении γ , а за бифуркациями внутри этих областей — при уменьшении этого параметра. Ниже приведены четыре промежутка, на которых происходят стандартные каскады бифуркаций удвоения и возникновения хаотических колебаний.

1. Первый каскад происходит на промежутке $\gamma_{m2}^- < \gamma < \gamma_{m3}^-$, где $\gamma_{m2}^- \simeq -0.6335$, $\gamma_{m3}^- \simeq -0.61913$ при уменьшении γ :

- при $\gamma = \gamma_{m3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^{1*} (на рис. 3а этот цикл изображен пунктиром);
- при $\gamma \simeq -0.6268$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_m^{12} удвоенного периода;
- при $\gamma \simeq -0.6296$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_m^{13} условно периода четыре (на рис. 3б пунктиром изображен цикл C_m^{13} при $\gamma = -0.63$);
- при $\gamma_{m2}^- < \gamma \lesssim -0.631$ система (15) имеет хаотические колебания средней амплитуды. (На рис. 4а изображен хаотический аттрактор A_m^1 при $\gamma = -0.633$).

2. Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{m4}^- < \gamma < \gamma_{m5}^-$, где $\gamma_{m4}^- \simeq -0.61172$, $\gamma_{m5}^- \simeq -0.60605$ также при уменьшении γ . Отметим значения параметра γ , при которых происходят бифуркации в этом случае:

- при $\gamma = \gamma_{m5}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^{2*} ;
- при $\gamma \simeq -0.61$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.611$ — вторая.
- при $\gamma_{m4}^- < \gamma \lesssim -0.6112$ система (15) имеет хаотические колебания средней амплитуды.

3. Третий каскад происходит на промежутке $\gamma_{m6}^- < \gamma < \gamma_{m7}^-$, где $\gamma_{m6}^- \simeq -0.60226$, $\gamma_{m7}^- \simeq -0.59902$. Отметим бифуркационные значения γ

- при $\gamma = \gamma_{m7}^-$ возникает 3 симметричных цикла $C_m^3, C_m^{3*}, C_m^{3**}$;
- при $\gamma \simeq -0.60143$ с каждым из них происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.60196$ — вторая.
- при $\gamma_{m6}^- < \gamma \lesssim -0.602$ система (15) имеет три симметричных хаоса средней амплитуды. (На рис. 2б изображены симметричные хаотические аттракторы A_m^3, A_m^{3*} и A_m^{3**} при $\gamma = -0.6022$).

4. Последний замеченный каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов средних размеров происходит на промежутке $\gamma_{m8}^- < \gamma < \gamma_{m9}^-$, где $\gamma_{m8}^- \simeq -0.59677$, $\gamma_{m9}^- \simeq -0.59475$. В этом случае самосимметричный цикл C_m^4 возникает при $\gamma = \gamma_{m9}^-$, при $\gamma \simeq -0.59627$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.5966$ — вторая.

В каждом из четырех описанных случаев вычислялись ляпуновские показатели соответствующего хаотического аттрактора. В таблице 1 приведены величины ляпуновских показателей и ляпуновской размерности для последних значений γ в каждом каскаде, при которых наблюдаются хаотические колебания ($\gamma = \gamma_{m2}^-, \gamma_{m4}^-, \gamma_{m6}^-, \gamma_{m8}^-$).

Таблица 1.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.6335	0.0224	$8 \cdot 10^{-5}$	-0.1635	-1.420	-1.439	2.137
-0.61172	0.0145	0.0005	-0.072	-1.460	-1.483	2.209
-0.60226	0.0108	$6 \cdot 10^{-6}$	-0.045	-1.483	-1.483	2.241
-0.59677	0.009	$-5 \cdot 10^{-5}$	-0.0335	-1.4818	-1.4935	2.267

Опишем теперь каскады бифуркаций, полученные для режимов большой амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_l^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_l^- \simeq -0.67812$. Как и ранее, будем следить за фазовыми перестройками при увеличении параметра γ . Отметим, однако, что в отличие от предыдущего случая перестройки внутри каскадов происходят при увеличении γ .

1. Первый каскад бифуркаций режимов большой амплитуды наблюдается на промежутке $\gamma_{l1}^- < \gamma < \gamma_{l2}^-$, где $\gamma_{l1}^- \simeq -0.67812$, $\gamma_{l2}^- \simeq -0.64795$ при увеличении γ :

- при $\gamma = \gamma_{l1}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^1 (на рис. 5b этот цикл изображен тонкой сплошной линией при $\gamma = -0.67$);
- при $\gamma \simeq -0.6575$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_l^{12} удвоенного периода;
- при $\gamma \simeq -0.6531$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_l^{13} условно периода четыре;
- при $-0.652 \lesssim \gamma < \gamma_{l2}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды (на рис. 5а изображен хаотический аттрактор A_l^1 при $\gamma = -0.65$).

2. Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{l3}^- < \gamma < \gamma_{l4}^-$, где $\gamma_{l3}^- \simeq -0.64875$, $\gamma_{l4}^- \simeq -0.6367$. Отметим бифуркационные значения γ :

- при $\gamma = \gamma_{l3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^2 ;
- при $\gamma \simeq -0.64016$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.6382$ — вторая (на рис. 4b изображен цикл большой амплитуды C_l^{21} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.6395$);
- при $-0.6379 \lesssim \gamma < \gamma_{l4}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

3. Третий каскад происходит при $\gamma_{l5}^- < \gamma < \gamma_{l6}^-$, где $\gamma_{l5}^- \simeq -0.63306$, $\gamma_{l6}^- \simeq -0.62664$, с тремя сосуществующими режимами большой амплитуды, которые переходят друг в друга в результате замены (16). Отметим бифуркационные значения γ :

- при $\gamma = \gamma_{l5}^-$ возникает три симметричных друг другу цикла C_l^3 , C_l^{3*} , C_l^{3**} (на рис. 3b и 4а эти циклы изображены тонким пунктиром различной длины);
- при $\gamma \simeq -0.62866$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.62752$ — вторая;
- при $-0.6272 \lesssim \gamma < \gamma_{l6}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

4. Четвертый каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов большой амплитуды происходит на промежутке $\gamma_{l7}^- < \gamma < \gamma_{l8}^-$, где $\gamma_{l7}^- \simeq -0.62315$, $\gamma_{l8}^- \simeq -0.6193$. В этом случае самосимметричный цикл C_l^4 возникает при $\gamma = \gamma_{l7}^-$, при $\gamma \simeq -0.62066$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.6199$ — вторая (на рис. 3а изображен цикл большой амплитуды C_l^{41} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.62$). Хаотические колебания наблюдаются на промежутке $-0.6197 \lesssim \gamma < \gamma_{l8}^-$.

При дальнейшем увеличении параметра γ встречаются и другие каскады бифуркаций, разворачивающиеся на все более узких промежутках, с точкой сгущения, по-видимому, в $\gamma = \gamma_1^-$. Например, на рис. 2а представлен хаотический режим большой амплитуды, возникший в результате аналогичного описанным выше каскада бифуркаций.

Для хаотических режимов внутри полученных промежутков также вычислялись ляпуновские показатели и ляпуновская размерность соответствующего хаотического аттрактора большой амплитуды. В таблице 2 приведены эти величины для $\gamma = \gamma_{l2}^-, \gamma_{l4}^-, \gamma_{l6}^-, \gamma_{l8}^-$ и для $\gamma = -0.595$ (см. колебания большой амплитуды на рис. 2а).

Отметим, что области устойчивости хаотического режима первого каскада A_l^1 и цикла C_l^2 второго каскада пересекаются, что позволяет предположить, что режимы большой амплитуды могут быть классифицированы более тонко. В целом система (15) демонстрирует при данных значениях параметров большое число сосуществующих устойчивых режимов. На рисунках 1-5 можно наблюдать до пяти сосуществующих устойчивых циклов и хаотических режимов.

Фазовые перестройки, происходящие с аттракторами системы (15) при $\gamma < \gamma_3^-$, идентифицировать достаточно сложно, впрочем, характер хаотических колебаний, которые возникают в этом случае у системы (15), может быть оценен по старшему ляпуновскому показателю, графики которого приведены на

Таблица 2.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.64795	0.0268	-0.0001	-0.1686	-1.381	-1.478	2.158
-0.6367	0.0186	0.0001	-0.1176	-1.3993	-1.5016	2.158
-0.62664	0.0153	$-2 \cdot 10^{-5}$	-0.094	-1.436	-1.485	2.163
-0.6193	0.0129	$9 \cdot 10^{-5}$	-0.077	-1.45	-1.486	2.168
-0.595	0.0059	-0.0005	-0.031	-1.473	-1.502	2.158

рис. 6 - 9. Нетрудно видеть, что области хаотических колебаний перемежаются в этом случае многочисленными окнами периодичности или квазипериодичности (старший показатель нулевой). На рис. 6 дана общая картина зависимости $\lambda_1(\gamma)$ на промежутке изменения γ от -10 до -1 . На рис. 7 - 9 более подробно рассмотрены сложные участки графика $\lambda_1(\gamma)$.

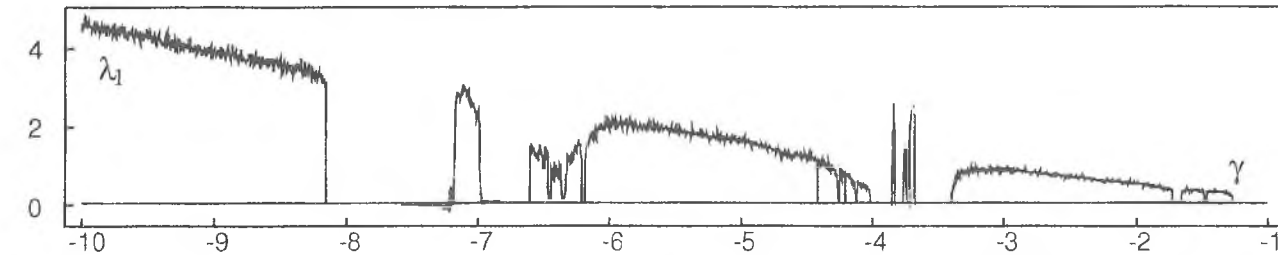


Рис. 6.

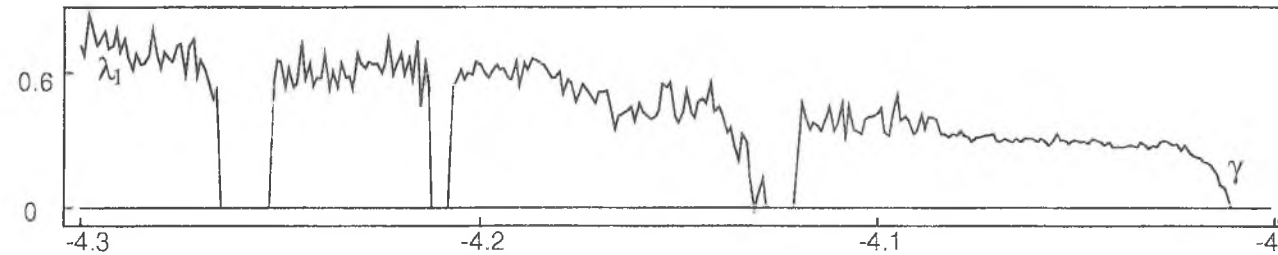


Рис. 7.

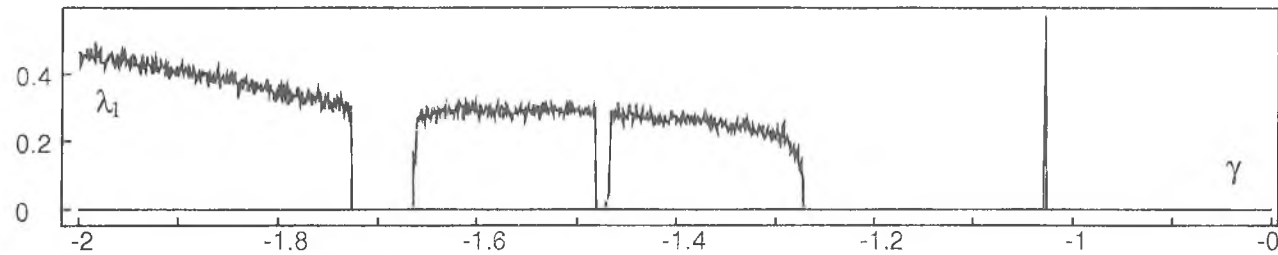


Рис. 8.

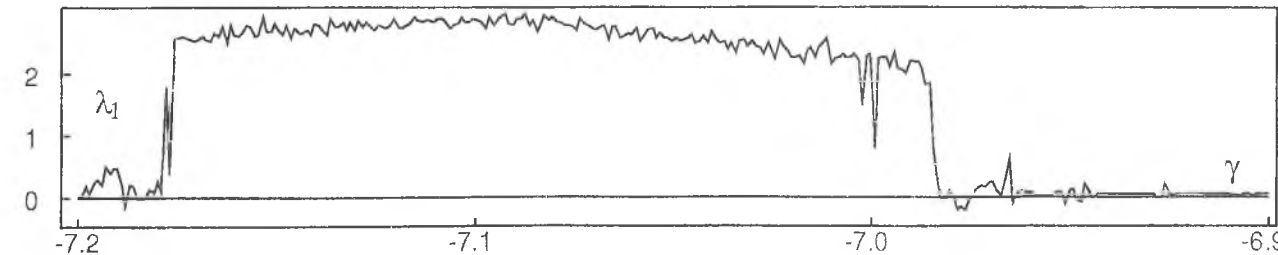


Рис. 9.

Таким образом, изучение динамических свойств решений системы (15) показало, что у нее может существовать большое число устойчивых циклов или торов, которым соответствуют устойчивые торы

исходной разностной системы (10) с асимптотикой (3). Следует, однако, заметить, что вдоль одного из инвариантных направлений (17) решения системы (15) стремятся при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ к бесконечности. И, хотя при изучаемых значениях параметров инвариантные лучи (17) являются отталкивающими, наличие направления, по которому решение может уходить из области применимости асимптотических методов, требует вычисления следующего по порядку малости коэффициента в разложении (5) и дополнительного анализа соответствующей нормальной формы. При достаточно больших $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$ слагаемым, определяющим поведение решений системы (12) с добавкой (13), является вещественная часть слагаемого при $|\xi_j|^4 \xi_j$. Эта величина согласно представлению (13) равна $\frac{9a^2 K^6}{8 \sin^3 \omega_0}$ и положительна, исходя из этого, масштаб применимости полученных в работе результатов имеет порядок $\sqrt{\epsilon}$. Для начальных условий внутри шара радиуса порядка $\sqrt{\epsilon}$ траектории системы (10) будут притягиваться к одному из режимов, определяемых нормальной формой (15), а вне некоторого шара радиуса порядка $\sqrt[4]{\epsilon}$ траектории будут удаляться от нуля и, учитывая диссипативность исходной системы, попадут в область притяжения какого-либо нелокального режима. Это, в частности, означает, что у динамической системы (10) может сосуществовать большое число сложных колебательных режимов различных масштабов.

Литература

1. Мищенко Е.Ф., Колесов А.Ю. Асимптотическая теория релаксационных колебаний // Труды математического ин-та АН СССР. 1991. Т. 197. С. 3 – 89.
2. Шноль Э.Э. Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1156 – 1167.
3. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153 – 207.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 560 с.
5. <http://tracer3.narod.ru>.