

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
имени П.Г.Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 10 №1 2003

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

Главный редактор
В.А.Соколов

Редакционная коллегия
О.Л.Бандман, В.А.Бондаренко, В.Ш.Бурд, М.Г.Дмитриев,
А.В.Зафиевский, Ю.Г.Карпов, С.А.Кащенко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Левин,
И.А.Ломазова, В.В.Майоров, В.Э.Малышкин, В.А.Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А.Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

©Ярославский
государственный
университет, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.10, №1. 2003

Потоковый нейрон с однобитовым представлением информации <i>Жбанов И.Ю.</i>	3
Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n -мерного куба <i>Неский М.В.</i>	9
Расширенная задача о равномерном назначении минимальной стоимости <i>Чаплыгина Н.Б.</i>	20
Модификация IFS алгоритма кодирования изображений <i>Ходаковский В.А.</i>	31
О назначении точек гиперграням многогранника <i>Карасёв Р.И.</i>	35
О разрешимости задачи проверки модели для модального μ -исчисления и некоторых классов вполне структурированных систем переходов <i>Кузьмин Е.В.</i>	50
Конечное представление отношений на мультимножествах <i>Башкин В.А.</i>	56

Корректор А.А.Аладьева

Подписано в печать 01.04.2003. Формат 60x84. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 9,62. Уч.-изд.л. 5,45. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г. Де-
мидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

УДК 621.382

Потоковый нейрон с одноканальным представлением информации

Жбанов И.Ю.

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 30 сентября 2002

В работе построена математическая модель нейрона, передающего информацию плотностью потока импульсов. Связи между разработанными нейронами состоят всего из одной физической линии, по которой передается один бит за единицу времени (что является минимальным количеством физических линий). Также было уменьшено число элементов нейрона. Выходное значение сигнала приближено к значению на выходе цифрового нейрона. В результате, облегчилось обучение и увеличилась скорость работы нейрона.

Проведенные вычислительные эксперименты по решению задачи распознавания (ассоциативной памяти) черно-белых изображений показали работоспособность предлагаемой модели.

1. Введение

В данной работе предложена модель нейрона, который работает со случайными последовательностями двоичных сигналов (потоками), передавая информацию плотностью потока бинарных импульсов. Такие нейроны будем называть потоковыми. Предлагаемая в данной работе модель содержит меньшее число соединений между нейронами по сравнению с ранее предлагаемыми работами (см. [1, 2, 3, 6]). Выход одного нейрона состоит всего из одной физической линии, по которой передается один бит за единицу времени (что является минимальным количеством физических линий). Это достигается за счет использования кодирования информации в виде значения плотности бинарного потока. За счет дополнительного преобразования выходного сигнала упрощена зависимость значения выходного сигнала от входных. Выходное значение сигнала приближено к значению на выходе цифрового нейрона.

В результате упрощена модель нейрона, облегчилось обучение и увеличилась скорость работы нейрона по сравнению с ранее предлагаемыми моделями [1, 2, 3, 6]. Проведенные вычислительные эксперименты по решению задачи распознавания (ассоциативной памяти) черно-белых изображений показали работоспособность предлагаемой модели.

2. Обзор предыдущих работ

В работах [1, 3] предложены схематические и математические модели нейронов, работающих со случайными последовательностями битовых сигналов (потоками).

Информация в таких нейронах передается плотностью потока бинарных импульсов. Схемы таких нейронов разрабатываются потому, что по сравнению с цифровыми нейронами они состоят из более простых (дешевых) элементов, содержат меньшее число соединений и у них довольно легко увеличивать число синапсов.

В статьях [3, 4, 5] предложена модель цифрового вероятностного нейрона, работающего со значениями, представленными в виде стохастических потоков. Данный нейрон принимает на входах потоки, среднее значение которых лежит на отрезке $[-1; 1]$. Значения весовых коэффициентов хранятся в регистрах и преобразуются в поток с помощью нескольких независимых генераторов случайных чисел 0,1. Приближенное суммирование производится на двух одноканальных шинах. Состояние нейрона накапливается в суммирующем регистре и его среднее значение зависит от средних значений входных значений и весовых коэффициентов нелинейно. Общее количество генераторов случайных чисел имеет порядок $O(N)$.

В работе [3] было показано, что среднее значение выхода такого нейрона после нескольких тактов его работы определяется формулой:

$$y = \prod_{l \in M} (1 - |W_l| \cdot |I_l|) - \prod_{l \in M} (1 - |W_l| \cdot |I_l|),$$

где I_l — входы нейрона, $|I_l| \leq 1$; W_l — синаптические коэффициенты (веса) нейрона, $|W_l| \leq 1$; $M = \{l = 1, \dots, N : W_l \cdot I_l \geq 0\}$.

В работе [1] рассматривалась модель потокового нейрона со стохастическим коммутатором. Выход такого нейрона есть случайная величина с математическим ожиданием, являющимся линейной функцией от входных значений и весов нейрона, что соответствует состоянию формального нейрона Мак-Каллока-Питтса. Количество генераторов случайных чисел 0,1 сокращено в данной модели до $O(\log N)$.

В работе [2] была предложена модель потокового нейрона, состоящая из небольшого количества простых логических элементов, нескольких сумматоров и нескольких генераторов случайных чисел. Количество генераторов в данной модели не зависит от числа входов.

В работе [6] описывается схемотехническая модель потокового нейрона с управляющим регистром, которая является обобщением рассмотренных в [1, 3] моделей, и приводится математическое обоснование ее функционирования. При сравнении с моделью, описанной в [1], видно, что наличие управляющего регистра в схеме позволяет усиливать амплитуду выходного сигнала нейрона, что может оказаться существенным для надежности функционирования нейросети, состоящей из потоковых нейронов. Общее количество генераторов случайных чисел имеет порядок $O(N)$.

Модель нейрона, предлагаемая в данной работе, содержит в два раза меньше соединений между нейронами по сравнению с рассмотренными выше моделями. Общее количество генераторов случайных чисел в предлагаемой модели — N .

3. Представление значений из $[-1; 1]$

Предлагаемый в данной работе нейрон работает с числами из отрезка $[-1; 1]$, представленными плотностью бинарного потока. Плотность бинарного потока — величина неотрицательная и находится в пределах $[0; 1]$. Таким образом, можно однозначно сопоставить число из отрезка $[-1; 1]$ и плотность потока. Функция соответствия: $y = \frac{x+1}{2}$, где x — исходное число, y — плотность потока.



Рис. 1. Представление информации

В дальнейшем будем считать, что бинарный поток состоит из элементов -1 и 1 . (В электрической схеме нейрона число -1 кодируется нулем.)

4. Схема умножения потоков

Умножение входного сигнала в потоковой форме на весовой коэффициент происходит с помощью схемы, приведенной на рис. 2. Эта операция является точной, т.е. число, соответствующее плотности результирующего потока равно произведению чисел, соответствующих плотностям входных потоков, при условии, что входные потоки являются независимыми.

Пусть $x, y \in [-1; 1]$, тогда плотности бинарных потоков, соответствующие данным числам, будут равны: $p_x = \frac{x+1}{2}$, $p_y = \frac{y+1}{2}$. Рассмотрим поток $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, где $z_i = (x_i \wedge y_i) \vee (\bar{x}_i \wedge \bar{y}_i)$; $x_i, y_i, z_i \in \{-1; 1\}$. $P\{z_i = 1\} = P\{x_i = 1\}P\{y_i = 1\} + P\{x_i = -1\}P\{y_i = -1\} = \frac{x+1}{2} \frac{y+1}{2} + (1 - \frac{x+1}{2})(1 - \frac{y+1}{2}) = \dots = \frac{xy+1}{2}$. Следовательно, плотность потока $p_z = \frac{xy+1}{2}$. Потoku с данной плотностью соответствует число $z = xy$. Отсюда следует, что операция умножения является точной.

Очевидно, что на выходах логических элементов "И" не могут быть единичные значения одновременно, поэтому выходной элемент "ИЛИ" можно заменить общей шиной.

Таким образом, схема умножения потоков состоит из 5 элементов: 2 инверторов, 2 элементов "И" и одного элемента "ИЛИ" (который можно заменить общей шиной).

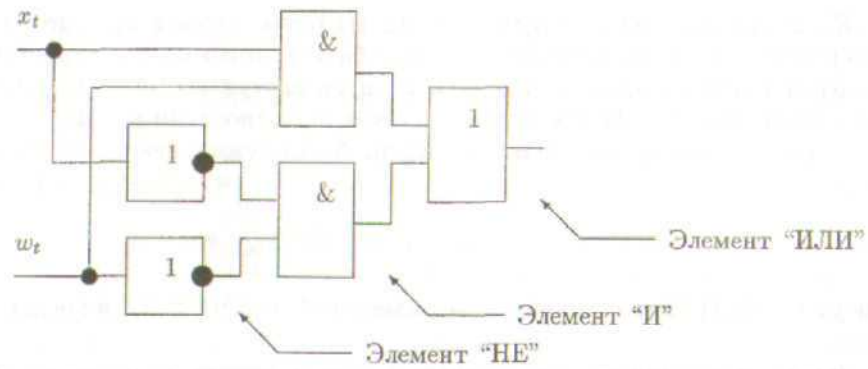


Рис. 2. Схема умножения бинарных потоков

5. Основные элементы потокового нейрона

Рассматриваемый нейрон имеет N однобитовых входов (см. рис. 3), на которые поступают входные сигналы в виде бинарных последовательностей $(x_{i1}, \dots, x_{iN})$, где $x_{it} = \{-1; 1\}$; N генераторов G_{w_i} , случайных бинарных потоков с плотностями, соответствующими синаптическим коэффициентам $w_1, \dots, w_N$; N блоков умножения $(x_i w_i)$ значения входных потоков на синаптические коэффициенты (см. рис. 2); блок суммирования S и регистр Z , в котором накапливается некоторое суммарное значение (состояние нейрона). На выход нейрона подается последовательность y_t , формируемая в соответствии со знаком значения регистра Z .

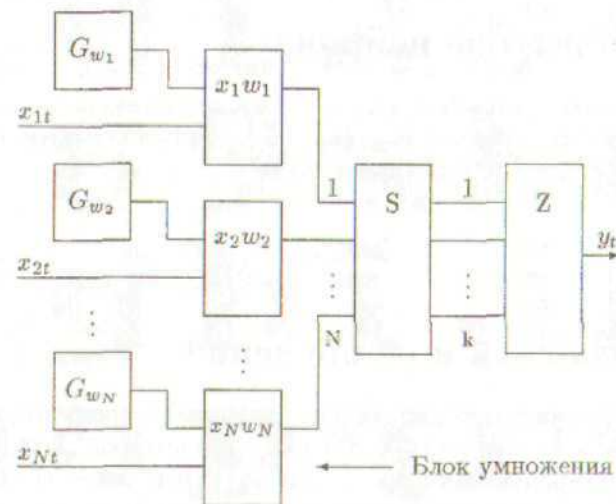


Рис. 3. Схема потокового нейрона

На выходе блока суммирования S получается число, кодируемое $k = \lceil \log_2(N) \rceil + 2$ битами, и представленное в форме дополнительного кода. Регистр Z кодируется $z + 1$ битами и представлен в форме дополнительного кода.

Будем считать, что величины принимают следующие значения:

$$Z \in \{-2^{z+1}, \dots, 2^{z+1} - 1\},$$

$$S \in \{-N, \dots, N\}.$$

6. Описание работы нейрона

Опишем работу нейрона в момент времени t .

На входы нейрона поступают очередные биты потоков x_{it} , где $i \in \{1, \dots, N\}$. Затем с помощью генераторов G_{w_i} генерируются случайные биты потоков w_{it} с плотностями, соответствующими весовым коэффициентам w_i . После этого биты x_{it} и w_{it} поступают на блоки умножения (см. рис. 2), на выходах которых происходит формирование потоков, с плотностями $y_i = x_i w_i$.

Биты потоков y_{it} поступают на входы блока суммирования S . На выходе этого блока получается число:

$$S_t = \sum_{i=1}^N y_{it},$$

где $y_{it} \in \{-1, 1\}$. Это число имеет разрядность $\lceil \log_2(N) \rceil + 2$ бит, и представлено в форме дополнительного кода.

Заметим, что при четных N , число S_t всегда четное, а при нечетных N — всегда нечетное. Таким образом, младший разряд на выходе блока суммирования остается без изменения и зависит только от четности N . Следовательно, его можно не учитывать (в данной реализации он учитывается).

Далее, полученное число S_t прибавляется к значению регистра Z , в котором накапливается некоторое суммарное значение (состояние нейрона).

Если $S_t + Z_{t-1} > Z_{Max}$, то $Z_t = Z_{Max}$, и если $S_t + Z_{t-1} < Z_{Min}$, то $Z_t = Z_{Min}$, где $Z_{Max} = 2^{z+1} - 1$, а $Z_{Min} = -2^{z+1}$; $z + 1$ — разрядность Z .

6.1. Функция активации нейрона

На выход нейрона подается бит y_t , формируемый в соответствии со знаком Z_t :

$$y_t = \begin{cases} 1, & Z_t \geq 0 \\ -1, & Z_t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

7. Значение на выходе нейрона

На вход нейрона поступают числа $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$, представленные в потоковой форме. Весовые (синаптические) коэффициенты нейрона: $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}$. Вся схема умножения подбиралась так, чтобы суммарное значение в регистре Z было приближено к:

$$\bar{Z}(\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i w_i. \quad (2)$$

8. Полносвязная сеть и ее обучение

Для решения задачи распознавания (ассоциативной памяти) черно-белых изображений была использована полносвязная сеть из N нейронов (сеть Хопфилда [7]), в которой выход каждого нейрона поступает на входы всех остальных нейронов, связь на себя отсутствует. Входной образ загружается в регистры Z нейронов (Z_{0b} — если соответствующий пиксель тестируемого изображения черный, Z_{0w} — если белый). Подпитка от тестируемого изображения отсутствует.

Будем обучать данную сеть для распознавания изображений из заданного множества $\{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^P\}$, $\mathbf{X}^m = (X_1^m, \dots, X_N^m)$, где $X_i^m \in \{-1, 1\}$.

При обучении полносвязной сети будем обучать каждый нейрон независимо. Обозначим обучаемый нейрон индексом j . Будем считать, что на вход нейрона поступают вещественные величины x_i .

Функция активации нейрона (1) не дифференцируема (имеет разрыв в точке 0), поэтому заменим ее на сигмоид $S(z)$:

$$S(z) = \frac{2}{1 + e^{-z}} - 1.$$

Суммарное значение в регистре Z вычисляется согласно (2).

Задача обучения одного нейрона состоит в нахождении весовых коэффициентов нейронов $w_{1j}, \dots, w_{Nj}$, при которых функция E принимает наименьшее значение:

$$E(w_{1j}, \dots, w_{Nj}) = \sum_{m=1}^P (S(\bar{Z}(\mathbf{X}^m, \mathbf{w})) - X_j^m)^2,$$

где $S(x)$ — сигмоидальная функция активации, j — номер обучаемого нейрона. Параметры w_{jj} принимаются равными нулю.

Для решения этой оптимизационной задачи использовался алгоритм RPROP [8].

9. Результаты тестирования

Работоспособность предложенной модели нейрона была проверена в задаче распознавания (ассоциативной памяти) черно-белых изображений. Полносвязную сеть Хопфилда из 64 нейронов (8×8) удалось обучить с помощью алгоритма RPROP [8] (оптимизационным методом) 62 символам из стандартного шрифта 8x8. Матрицы эталонных изображений показаны на рис. 4.

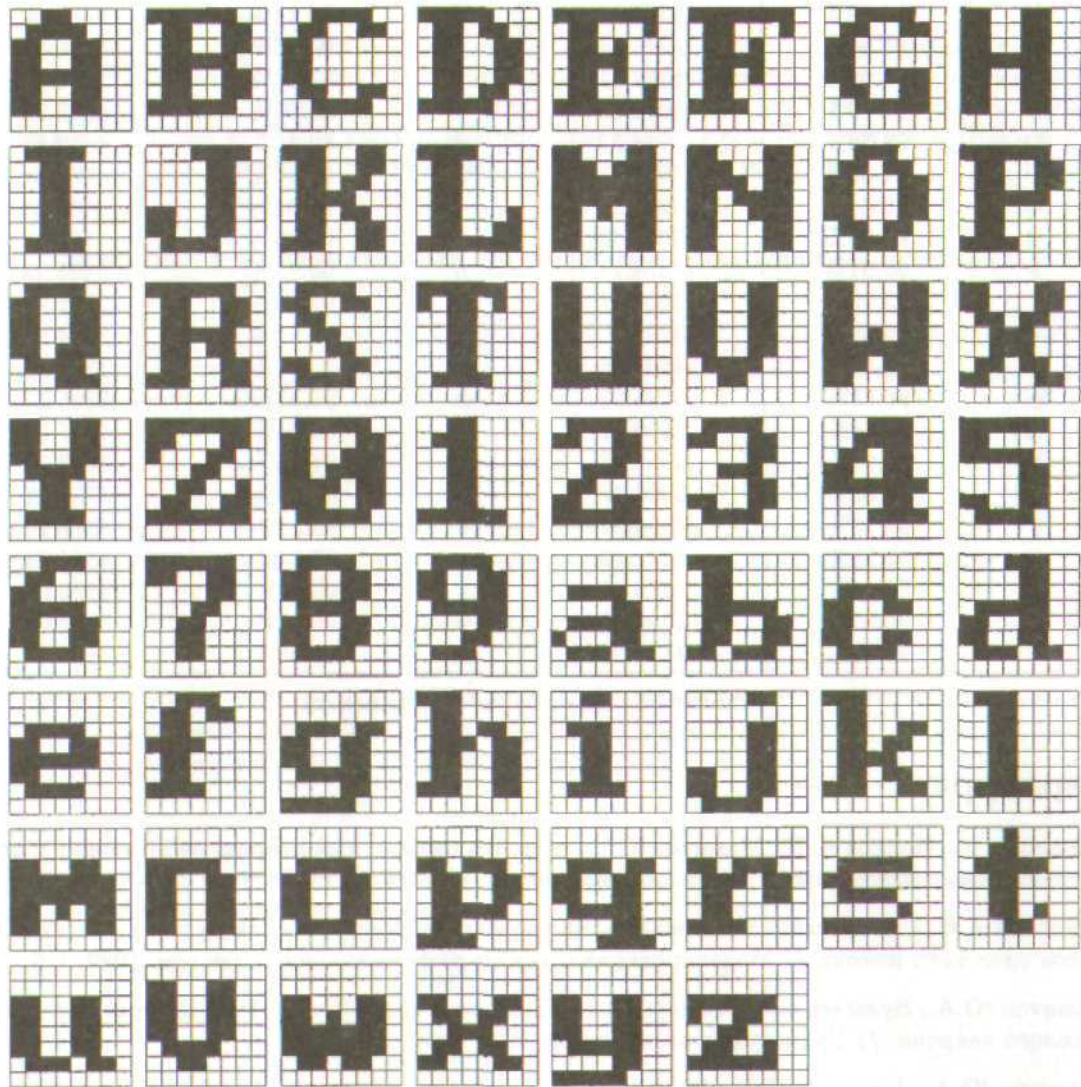


Рис. 4. Эталонные изображения

К каждому эталонному изображению добавлялась помеха (изменение состояния ячейки на противоположное). Положение помехи определялось по номеру эксперимента. Сеть работала максимум 33000 тактов. При совпадении состояния сети с оригинальным изображением моделирование прекращалось после 2000 тактов. Если состояние сети за это время не изменилось, изображение считалось распознанным. Для каждого изображения и для каждого расположения помехи моделирование повторялось 5 раз.

Эксперимент проводился с различными значениями параметров нейрона. Достаточно хорошие результаты дают значения: $Z_{ob} = -1024$, $Z_{ow} = 1024$, $z = 14$.

Сравнение с нейроном, описанным в [2], показывает более высокий процент распознавания образов.

Символ	Распознавание	Ср. число тактов	Символ	Распознавание	Ср. число тактов
A	88.13%	3743.68	5	94.38%	3970.54
B	95.00%	3209.88	6	91.88%	4070.30
C	90.94%	3943.07	7	95.94%	4425.59
D	96.25%	4163.06	8	98.75%	3466.94
E	92.81%	5522.23	9	96.25%	3928.61
F	95.31%	4840.55	a	92.19%	5243.53
G	90.00%	4717.06	b	88.13%	3731.60
H	94.06%	3921.29	c	90.94%	3974.62
I	97.81%	3075.38	d	94.69%	4102.38
J	96.56%	4265.99	e	92.81%	4565.77
K	93.75%	4137.04	f	93.44%	4330.40
L	96.88%	3745.35	g	94.06%	3164.23
M	94.69%	5357.11	h	87.50%	3495.50
N	93.75%	4078.80	i	94.69%	4643.33
O	98.75%	3774.32	j	89.69%	4012.56
P	94.38%	3637.48	k	96.56%	4563.64
Q	93.44%	4230.10	l	97.81%	3635.68
R	91.88%	3615.43	m	96.88%	4777.42
S	95.31%	4374.24	n	93.75%	3403.23
T	93.13%	3506.37	o	97.50%	3741.42
U	96.56%	3298.12	p	95.94%	3957.51
V	96.56%	4605.16	q	95.31%	3285.49
W	96.88%	4308.03	r	96.88%	3895.17
X	94.38%	3730.97	s	90.31%	4477.25
Y	95.94%	4952.53	t	91.25%	3742.70
Z	95.63%	3906.07	u	88.12%	3991.32
0	98.13%	4098.54	v	93.12%	4373.10
1	96.25%	4232.43	w	97.81%	4324.24
2	93.44%	3615.95	x	93.12%	4132.01
3	95.94%	4092.03	y	99.06%	3169.06
4	95.94%	4125.06	z	95.00%	4181.39

Таблица 1. Результаты эксперимента.

Литература

- [1] Карлин А. К., Малков А. Н., Маматов Ю. А. и др. Вероятностный нейрон, работающий с плотностью потока бинарных импульсов // Микроэлектроника. 1998. Т. 27. N 3.
- [2] Лукьянов А.В. Схемотехническая модель цифрового нейрона, работающего со средним значением стохастического потока // Моделирование и анализ информационных систем. 1999. Т.6.
- [3] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К., Тимофеев Е.А., Штерн Г.П. Цифровая реализация потокового нейрона. // Радиотех. и электроника.1995. N 10
- [4] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Цифровая реализация потокового нейрона // Радиотехника и электроника. 1995. N 11. С. 1652-1660.
- [5] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Схемотехнические модели построения вероятностных нейронов на базе цифровой техники. // Микроэлектроника. 1996. Т 25, N 1. С. 3-8.
- [6] Толпыгин А.Ю., Штерн Г.П. Потоковый нейрон с управляющим регистром // Радиотехника и электроника. 2002. Т.47, №11. С.36-42.
- [7] Hopfield J.J., Tank D.W. Computing with Neural Circuits: a Model. // Science. 1986. V. 233. P. 625.
- [8] Riedmiller M., Braun H. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm // Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN). San Francisco, 1993. P. 586-591.

Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n -мерного куба

Невский М.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 10 февраля 2003

Рассматривается задача об оптимальном выборе узлов интерполяции функций n переменных с помощью многочленов первой степени (линейных функций). Предполагается, что эти узлы принадлежат множеству вершин куба $Q_n = [0, 1]^n$. Для величины c_n минимальной нормы соответствующего проектора как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ получены оценки: $c_n > n^{(n+3)/(2n)}/(2e) > \sqrt{n}/(2e)$, $n \in \mathbb{N}$; $c_n \leq (n+1)/2$, $n \neq 2$. Если существует матрица Адамара порядка $n = 4k$, то $c_{n-1} \leq \sqrt{n}$.

1. Линейная интерполяция на $[0, 1]^n$ и последовательность $\{c_n\}$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0, 1]^n$ — единичный n -мерный куб в $\mathbb{R}^n$. Через Π_1 обозначим совокупность многочленов от n переменных $x_1, \dots, x_n$ степени не выше первой (или, коротко, линейных функций). Запись $p \in \Pi_1$ означает, что при $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$p(x) = p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j + b; \quad a_j, b \in \mathbb{R}.$$

Далее $C(Q_n)$ обозначает, как обычно, пространство непрерывных на Q_n функций с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|.$$

Рассмотрим задачу интерполяции функций из $C(Q_n)$ с помощью элементов Π_1 . Зафиксируем узлы $A_1, \dots, A_{n+1} \in Q_n$ (их число равно $\dim \Pi_1 = n+1$). Считаем $A_i := (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, \dots, n+1$. Для данной $f \in C(Q_n)$ требуется найти $p \in \Pi_1$ такой, что

$$p(A_i) = f_i := f(A_i), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (1)$$

Равенства (1) сводятся к системе $n+1$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_1, \dots, a_n, b$ многочлена p . В матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Квадратную матрицу порядка $n+1$, стоящую в левой части (2), обозначим через A , а её определитель — через Δ . Если $\Delta \neq 0$, то (2) имеет единственное решение для любой f . Заметим, что $\Delta = n!V$, V — ориентированный объём n -мерного симплекса $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Условие $\Delta \neq 0$ означает, что точки A_j не лежат в одном $(n-1)$ -мерном линейном многообразии. В дальнейшем это условие предполагается выполненным.

Из (2) получаем, что

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Равенство (3) по стандартной схеме дополняется аналогом классической формулы Лагранжа. Именно, очевидно, что

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i(x),$$

$L_i \in \Pi_1$, $L_i(A_j) = \delta_{ij}$. Коэффициенты многочлена L_i составляют i -й столбец матрицы A^{-1} . Кроме того, $L_i(x) = \Delta_i(x)/\Delta$, $i = 1, \dots, n+1$. Здесь и далее $\Delta_i(x)$ обозначает определитель, получающийся из Δ заменой i -й строки на строку $(x_1 \dots x_n 1)$.

Определим интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1$, положив

$$Pf(x) := p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(A_i) L_i(x).$$

С помощью обычных рассуждений получается равенство

$$\|P\| := \|P\|_{C(Q_n) \rightarrow C(Q_n)} = \max_{x \in Q_n} \sum_{i=1}^{n+1} |L_i(x)|. \quad (4)$$

Отметим ряд других полезных формул для вычисления $\|P\|$.

Зафиксируем $x \in R^n$. Равенства $\lambda_i = L_i(x) = \Delta_i(x)/\Delta$ эквивалентны матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{n+1} A_{n+1} = x, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \quad (5)$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ из (5) являются так называемыми *барицентрическими координатами* x относительно базисного симплекса $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Поэтому

$$\|P\| = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i \in Q_n \right\}. \quad (6)$$

В частности, если $A_{n+1} = 0$, то

$$\|P\| = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| + |1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i| \right\}. \quad (7)$$

Максимум в (7) взят по совокупности всех наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ таких, что $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \in Q_n$.

Норма P зависит от $A_1, \dots, A_{n+1}$. В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о минимизации $\|P\|$ за счёт выбора узлов. Мы ограничимся ситуацией, когда *точки* A_j принадлежат совокупности вершин куба Q_n . Именно, пусть

$$\text{Ver} := \{v = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : \sigma_i = 0 \text{ или } 1\}.$$

Положим

$$c_n := \min_{A_1, \dots, A_{n+1} \in \text{Ver}} \|P\|. \quad (8)$$

Нашей целью является исследование поведения последовательности $\{c_n\}$.

Как известно, для любого проектора P выполнено $\|P\| \geq 1$. Эта оценка легко следует и из (4) или (6). Таким образом, числа (8) удовлетворяют неравенству $c_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно понять также, что $c_n = 1$ лишь при $n = 1$. Последний факт следует, например, из (6) с учётом того, что симплекс $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ совпадает с Q_n только для $n = 1$. Если же $n > 1$, то в Q_n найдутся точки, для которых сумма модулей барицентрических координат больше 1.

В заключение этого пункта заметим, что справедливы равенства:

$$\|P\| = \frac{1}{|\Delta|} \max_{v \in \text{Ver}} \sum_{i=1}^{n+1} |\Delta_i(v)|, \quad (9)$$

$$c_n = \min_{A_j \in \text{Ver}} \frac{1}{|\Delta|} \max_{v \in \text{Ver}} \sum_{i=1}^{n+1} |\Delta_i(v)|. \quad (10)$$

Действительно, функция $p(x) = \sum f_i L_i(x)$ является билинейной по $\hat{f} := (f_1, \dots, f_{n+1})$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$, поэтому

$$\|P\| = \sup_{-1 \leq f_i \leq 1} \max_{x \in Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i(x) \right| = \max_{f_i = \pm 1} \max_{v \in \text{Ver}} \left| \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i(v) \right| = \max_{v \in \text{Ver}} \max_{f_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{n+1} f_i L_i(v) \right|.$$

Взяв во внутреннем максимуме $f_i = \text{sign} L_i(v)$, получим (9), а значит и (10).

Задача о поведении последовательности $\{c_n\}$ была поставлена автором в [2].

2. Примеры. Неравенства $c_n \leq 2n - 1, c_n \leq n + 1$

2.1. Очевидно, $c_1 = 1, c_2 = 3$. Все возможные расположения узлов исчерпываются одним вариантом (для $n = 2$ — единственным с точностью до поворотов).

2.2. Первая неожиданность связана со значением $c_3 = 2$ — таким образом, последовательность $\{c_n\}$ не является монотонной. Оптимальное расположение узлов для $n = 3$ (единственное с точностью до поворотов) характеризуется тем, что каждой грани куба $Q_3 = [0, 1]^3$ принадлежат по две из четырёх точек. Пусть $A_1 = (0, 1, 1)$, $A_2 = (1, 0, 1)$, $A_3 = (1, 1, 0)$, $A_4 = (0, 0, 0)$. Тогда

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(f_1(-x_1 + x_2 + x_3) + f_2(x_1 - x_2 + x_3) + f_3(x_1 + x_2 - x_3) + f_4(-x_1 - x_2 - x_3 + 2) \right),$$

что даёт $\|P\| = 2$. Два различных обобщения этого примера рассматриваются в пунктах 3 и 4.

Автору неизвестно, является ли $c_3 = 2$ минимальной нормой линейного интерполяционного проектора в трёхмерной ситуации без ограничения $A_j \in \text{Ver}$. Положительный ответ означал бы, что, как и в случае $n = 1$, при $n = 3$ минимальный проектор можно построить по вершинам куба. По поводу значения $n = 2$ см. ниже замечание 1.

Интересно, что в трёхмерной ситуации проектор с узлами $A_1 = (0, 1/2, 1)$, $A_2 = (1, 1/2, 1)$, $A_3 = (1/2, 1, 0)$, $A_4 = (1/2, 0, 0)$, ни один из которых не является вершиной Q_3 , также имеет норму 2. Норма $g(t)$ проектора по узлам $(0, 1 - t, 1)$, $(1, t, 1)$, $(1 - t, 1, 0)$, $(t, 0, 0)$ при $0 < t < 1/2$ строго больше 2. Точнее, можно показать, что

$$g(t) = 1 + \frac{1 - t}{2t^2 - 2t + 1}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

поэтому $g(t) = 2$ лишь при $t = 0$ и $t = 1/2$; эти значения соответствуют отмеченным выше проекторам. Для промежуточных значений t выполнено $g(t) > 2$.

2.3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ в явном виде может быть указан проектор с нормой $2n - 1$. Это гарантирует, что $c_n \leq 2n - 1$, то есть $c_n = O(n)$. Возьмём $A_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $A_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $A_n = (0, 0, \dots, 1)$, ..., $A_{n+1} = (0, 0, \dots, 0)$. Для этого набора узлов $p(x) = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n + f_{n+1}(-x_1 - \dots - x_n + 1)$. Норма соответствующего проектора

$$\|P\| = \max_{f_i = \pm 1, x_j = 0, 1} |p(x)| = \max_{x_j = 0, 1} \left(\sum_{j=1}^n x_j + \left| 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right| \right) = \max_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) = 2n - 1$$

(k обозначает число единиц в наборе x).

Замечание 1. Без ограничения $A_j \in \text{Ver}$ норма проектора может быть уменьшена уже для $n = 2$. Так, проектор по узлам $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 0)$, $A_3 = (1/2, 1)$ имеет норму 2; проектор по узлам $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (\tau, 1)$, $A_3 = (1, \tau)$ — норму $1 + \sqrt{0.8} = 1.8944271 \dots$. Здесь $\tau = (3 - \sqrt{5})/2 = 0.38196 \dots$ — "магическое" число золотого сечения: $\tau/(1 - \tau) = (1 - \tau)/1$. См. [1].

2.4. С помощью известного подхода (см., например, [6, 1]) легко показать, что имеет место неравенство $c_n \leq n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть A_j выбраны таким образом, что $|\Delta|$ имеет максимальное значение из всех определителей, строки которых вплоть до последней компоненты (единицы) совпадают с вершинами Q_n , то есть элементами Ver . Тогда $|\Delta_i(v)| \leq |\Delta|$, $v \in \text{Ver}$. В связи с (10) это гарантирует оценку $\|P^*\| \leq n+1$ для соответствующего проектора P^* . Тем более, $c_n \leq n+1$.

Замечание 2. Приведём здесь известные оценки для максимумов определителей порядка n , составленных из 0 и 1 (обозначение h_n) или из 1 и -1 (обозначение g_n). Самое левое неравенство следует из рассмотрения матрицы B с элементами $b_{ij} = 1$, $i \neq j$; $b_{ii} = 0$. Определитель B равен $(-1)^{n-1}(n-1)$.

$$n-2 \leq h_{n-1} \leq h_n \leq g_{n-1} \leq \frac{1}{2}g_n \leq 2^{n-2}h_{n-1},$$

$$h_3 = 2, g_3 = 4, g_4 = 16, g_5 = 48; \quad g_n = m2^{n-1}, m \in \mathbb{N}.$$

Числа h_n и g_n часто возникают в рассматриваемых вопросах. Например, определитель Δ из пункта 2.4 равен $\pm h_n$. Достаточно считать $A_{n+1} = 0$ и разложить Δ по последней строке.

3. Неравенство $c_n \leq (n+1)/2$, $n \neq 2$

В этом пункте для c_n устанавливается лучшая из общих оценок сверху.

Теорема 1. При всех $n \neq 2$ справедливо неравенство

$$c_n \leq \frac{n+1}{2}. \quad (11)$$

Более того, если $n > 3$ — чётное, то

$$c_n \leq \frac{n^2-2}{2n-2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}. \quad (12)$$

Доказательство. Введём в рассмотрение проектор $\hat{P}: C(Q_n) \rightarrow \Pi_1$, построенный по системе узлов $A_1 = (0, 1, 1, \dots, 1)$, $A_2 = (1, 0, 1, \dots, 1)$, $A_3 = (1, 1, 0, \dots, 1)$, ..., $A_n = (1, 1, 1, \dots, 0)$, $A_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, 0)$. Для него

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Многочлен $p = \hat{P}f$ имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{n-1} \left(f_1(-(n-2)x_1 + x_2 + \dots + x_n) + f_2(x_1 - (n-2)x_2 + x_3 + \dots + x_n) + \dots + \right. \\ \left. + f_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - (n-2)x_n) + f_{n+1}(-x_1 - x_2 - \dots - x_n + (n-1)) \right).$$

В связи с предыдущим

$$\|\hat{P}\| = \max_{f, x_i = 0,1} |p(x)|.$$

Так как выражение для $p(x)$ симметрично по x_i , рассмотрим точки $x_1 = \dots = x_k = 1$, $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, так что k есть число единиц в наборе x . Нетрудно понять, что

$$\|\hat{P}\| = \frac{1}{n-1} \max\{S, T\},$$

$$\begin{aligned}
S &:= \max_{1 \leq k \leq n-1, f_i = \pm 1} \left(f_1(-(n-2) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1}) + f_2(-(n-2) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1}) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + f_k(-(n-2) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1}) + f_{k+1}k + \dots + f_n k + f_{n+1}(n-1-k) \right) = \\
&= 2 \max_{1 \leq k \leq n-1} (nk - k^2 - k) + n - 1, \quad T := n + 1.
\end{aligned}$$

Величина T соответствует $k = n$. Положим $\varphi(k) := nk - k^2 - k$. Тогда

$$\varphi(1) = n - 2, \quad \varphi(n-1) = n^2 - n - n^2 + 2n - 1 - n + 1 = 0.$$

Внутренняя точка максимума k_0 находится из условия $\varphi'(k_0) = n - 2k_0 - 1 = 0$. При чётном n число $k_0 = (n-1)/2$ не является целым. Простой анализ показывает, что целая точка максимума всегда имеет вид $k^* := [n/2]$. Здесь и ниже $[\delta]$ — целая часть δ . Действительно, если $n = 2m$, то

$$\varphi(k_0) = \varphi(m - \frac{1}{2}) = m^2 - m + \frac{1}{4}, \quad \varphi(m) = \varphi(m-1) = m^2 - m.$$

Так как последние значения одинаковы, то можно взять $k^* := m = [n/2]$. Если же $n = 2m + 1$, то $k_0 = k^*$ — целое число. Значение S , таким образом, равно

$$S = 2\varphi(k^*) + n - 1 = 2[n/2](n - [n/2] - 1) + n - 1.$$

Остаётся заметить, что в случае $n = 2$ выполнено $T > S$, в случае $n = 3$ — равенство $T = S$, а при $n > 3$ всегда $T < S$. Таким образом,

$$\|\hat{P}\| = \begin{cases} 3 & , \quad n = 2 \\ \frac{2[n/2](n - [n/2] - 1)}{n-1} + 1 & , \quad n \geq 3 \end{cases} \quad (13)$$

При нечётном $n \geq 3$ имеет место $2[n/2] = n - 1$, поэтому

$$W := \frac{2[n/2](n - [n/2] - 1)}{n-1} + 1 = n - \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n+1}{2}.$$

Если же $n > 3$ является чётным, то

$$W = \frac{n(n/2 - 1)}{n-1} + 1 = \frac{n^2 - 2}{2n - 2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}.$$

Поэтому (13) эквивалентно

$$\|\hat{P}\| = \begin{cases} 3 & , \quad n = 2 \\ \frac{n+1}{2} & , \quad n \geq 3 \text{ нечётное} \\ \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} & , \quad n > 3 \text{ чётное} \end{cases} \quad (14)$$

Так как $s_n \leq \|\hat{P}\|$ при всех n , а $s_1 = 1$, то имеют место соотношения (11) и (12). Теорема доказана.

Замечание 3. Проектор $\hat{P}$ является обобщением на $\hat{P} \in N$ двумерного и трёхмерного экстремальных проекторов, см. пункт 2. Из (14) следует, что $n/2 < \|\hat{P}\| \leq (n+1)/2$.

Замечание 4. Матрица $\mathbf{B} \in M_n$, составленная из координат узлов $A_1, \dots, A_n$ проектора $\hat{P}$, возникает в ряде задач комбинаторики и теории графов. Так, например, её *перманент*

$$\text{per } \mathbf{B} := \sum_{\alpha} b_{1\alpha_1} \dots b_{n\alpha_n} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!}$$

равен числу r_n перестановок α^* порядка n таких, что $\alpha_i^* \neq i$ для всех $i = 1, \dots, n$ (числу *беспорядков*), см. [4]. Первые значения $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 9$, $r_5 = 44$, $r_6 = 265$. При большом n приближённо $r_n \approx n!e^{-1}$. В то же время, как отмечалось, $\det \mathbf{B} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

4. Конструкции с помощью матриц Адамара

Матрицей Адамара порядка n называется невырожденная $(n \times n)$ -матрица $\mathbf{H}_n$, каждый элемент которой равен 1 или -1 и такая, что $\mathbf{H}_n^{-1} = n^{-1}\mathbf{H}_n^T$. Если $\mathbf{H}_n$ существует и $n > 2$, то n кратно 4 (см. [5]). Для серии этих значений $n = 4k$ оценки сверху величин c_{n-1} могут быть существенно улучшены. Заметим, что наименьшее n , для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка n , в 1985 г. равнялось 428.

С помощью $\mathbf{H}_n$ на $(n-1)$ -мерном кубе могут быть построены системы из n попарно равноудалённых вершин, принимаемых за узлы интерполяции, то есть *эквилидистантные системы*. Свойства $\mathbf{H}_n$ позволяют сразу решить эту задачу для куба $[-1, 1]^{n-1}$; затем результат переносится на куб $[0, 1]^{n-1}$ с помощью подобия. Например, матрица Адамара

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует проектору $P : C([-1, 1]^7) \rightarrow \Pi_1$ по восьми узлам, координаты которых содержатся построчно в первых семи столбцах. Структура матрицы $\mathbf{H}_8$ такова, что любые две её строки (узла) не совпадают ровно в четырёх позициях (для $\mathbf{H}_n$ это число попарных несовпадений равно $n/2$). Норма P оказывается равной 2.5, поэтому $c_7 \leq 2.5$; из теоремы 1 следует лишь $c_7 \leq 4$. Соответствующая эквидистантная система вершин куба $[0, 1]^7$ получается с помощью замены 1 на 0, а -1 на 1. Отмеченное выше число несовпадений — так называемое *расстояние Хэмминга* между узлами — также равно 4.

Оптимальный проектор на $[0, 1]^3$ с нормой $c_3 = 2$ может быть реализован с помощью матрицы Адамара четвёртого порядка, то есть порождается эквидистантной системой узлов с попарными расстояниями Хэмминга, равными 2.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $n = 4k$ таково, что существует матрица Адамара порядка n . Тогда $c_{n-1} \leq \sqrt{n}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{H}_n$ — матрица Адамара, n -й столбец которой состоит из 1. Пусть $Q := ([-1, 1]^{n-1})$, $P : C(Q) \rightarrow \Pi_1$ — проектор по узлам, соответствующим строкам $\mathbf{H}_n$ (координаты узлов содержатся в первых $n-1$ столбцах). Для $f \in C(Q)$ обозначим через p интерполяционный многочлен, соответствующий значениям в узлах $f_1, \dots, f_n$. Учитывая, что $\mathbf{H}_n^{-1} = n^{-1}\mathbf{H}_n^T$, для нормы P получаем равенство:

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{\|f\|_{C(Q)}=1} \|p\|_{C(Q)} = \max_{x_j, f_k=\pm 1} \left| \left[(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \frac{1}{n} \mathbf{H}_n^T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right]^T \right| = \\ &= \max_{f_k=\pm 1} \max_{x_j=\pm 1} (f_1, \dots, f_n) \frac{1}{n} \mathbf{H}_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \max_{x_1, \dots, x_{n-1}=\pm 1} \sum_{i=1}^n |(\bar{x}, h^{(i)})|. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, $h^{(i)}$ — строки $\mathbf{H}_n$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Так как $\{h^{(i)}/\sqrt{n}\}$ — ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$, то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{x}, h^{(i)})}{\sqrt{n}} \frac{h^{(i)}}{\sqrt{n}}, \quad (\bar{x}, \bar{x}) = n = \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{x}, h^{(i)})^2}{n},$$

значит, $\sum_{i=1}^n (\bar{x}, h^{(i)})^2 = n^2$. Применяя неравенство Коши, получим

$$\sum_{i=1}^n |(\bar{x}, h^{(i)})| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n (\bar{x}, h^{(i)})^2 \right)^{1/2} = n\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$\|P\| = \frac{1}{n} \max_{x_1, \dots, x_{n-1} = \pm 1} \sum_{i=1}^n |(\bar{x}, h^{(i)})| \leq \frac{n\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}.$$

Отсюда следует, что $c_{n-1} \leq \sqrt{n}$. Теорема доказана.

5. Вспомогательное предложение

Получим используемую в дальнейшем формулу для меры области $\{x : |1 - \sum x_i| + \sum |x_i| \leq \gamma\}$.

Лемма. Пусть $\gamma \geq 1$,

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n : |1 - \sum_{i=1}^n x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \gamma\}.$$

Имеют место соотношения:

$$\text{mes}_n(G) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma - 1)^{n-i} (\gamma + 1)^i = \frac{\Psi_n(\gamma)}{n!}. \quad (15)$$

Здесь $\Psi_n(t) := 1/(2^n n!) \{(t^2 - 1)^n\}^{(n)}$ — так называемый стандартизованный многочлен Лежандра степени n .

Доказательство. Установим сначала левое равенство из (15). Положим $G_1 := \{x \in G : \sum x_i > 1\}$, $G_2 := \{x \in G : \sum x_i \leq 1\}$. Пойдём последовательно $V_1 = \text{mes}_n(G_1)$ и $V_2 = \text{mes}_n(G_2)$.

Временно зафиксируем k и рассмотрим непустое подмножество $H \subset G_1$, соответствующее неравенствам $x_1, \dots, x_k \geq 0; x_{k+1}, \dots, x_n < 0$. Ясно, что $1 \leq k \leq n$. Пусть $y_1 = x_1, \dots, x_k; y_{k+1} = -x_{k+1}, \dots, y_n = -x_n$. Тогда

$$H = \{y : 1 + y_{k+1} + \dots + y_n \leq y_1 + \dots + y_k \leq \frac{\gamma + 1}{2}, y_i \geq 0\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(H) &= \int_1^\alpha dy_1 \int_1^{\alpha - y_1} dy_2 \dots \int_1^{\alpha - y_1 - \dots - y_{k-1}} dy_k \\ &\quad \int_0^{y_1 + \dots + y_k - 1} dy_{k+1} \int_0^{y_1 + \dots + y_k - 1 - y_{k+1}} dy_{k+2} \dots \int_0^{y_1 + \dots + y_k - 1 - y_{k+1} - \dots - y_{n-1}} dy_n. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\alpha := (\gamma + 1)/2$. Так как при $b > 0$

$$\int_0^b dz_1 \int_0^{b - z_1} dz_2 \dots \int_0^{b - z_1 - \dots - z_{m-1}} dz_m = \frac{b^m}{m!},$$

то

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(H) &= \int_1^\alpha dy_1 \int_1^{\alpha - y_1} dy_2 \dots \int_1^{\alpha - y_1 - \dots - y_{k-1}} \frac{1}{(n - k)!} (y_1 + \dots + y_k - 1)^{n - k} dy_k = \\ &= \left(\int_{y_1 + \dots + y_k \leq \alpha} - \int_{y_1 + \dots + y_k \leq 1} \right) \frac{1}{(n - k)!} (y_1 + \dots + y_k - 1)^{n - k} dy_1 \dots dy_k = \\ &= J_1 - J_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен

$$J_1 = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \frac{(\alpha - 1)^{n - k + j}}{(n - k + j)!} \frac{\alpha^{k - j}}{(k - j)!} + \frac{(-1)^{n + k}}{n!}.$$

Значение J_2 получается из последнего выражения, если вместо α взять 1. Поэтому

$$\text{mes}_n(H) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i.$$

Множество G_1 есть объединение всех подобных множеств H с различными $k = 1, \dots, n$, поэтому мера G_1 равна

$$V_1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i.$$

Преобразуем последнее выражение, меняя порядок суммирования и используя тождество

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^i \binom{n-1}{i} \quad (16)$$

(см., например, [3]).

$$V_1 = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n}{k} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i. \quad (17)$$

Перейдём теперь к G_2 . Прежде всего заметим, что G_2 содержит область $S := \{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$, мера которой равна $1/n!$. Далее, фиксируя k в пределах от 1 до n , рассмотрим подмножество $H' \subset G_2$, соответствующее неравенствам $x_1, \dots, x_k < 0$; $x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0$. Положим $y_1 = -x_1, \dots, y_k = -x_k$; $y_{k+1} = x_{k+1}, \dots, y_n = x_n$, тогда

$$H' = \{y : y_{k+1} + \dots + y_n \leq 1 + y_1 + \dots + y_k \leq \frac{\gamma-1}{2}, y_i \geq 0\}.$$

Обозначим $\beta := (\gamma-1)/2$. Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(H') &= \int_0^\beta dy_1 \int_0^{\beta-y_1} dy_2 \dots \int_0^{\beta-y_1-\dots-y_{k-1}} dy_k \\ &\quad \int_0^{1+y_1+\dots+y_k} dy_{k+1} \int_0^{1+y_1+\dots+y_k-y_{k+1}} dy_{k+2} \dots \int_0^{1+y_1+\dots+y_k-y_{k+1}-\dots-y_{n-1}} dy_n = \\ &= \int_0^\beta dy_1 \int_0^{\beta-y_1} dy_2 \dots \int_0^{\beta-y_1-\dots-y_{k-1}} \frac{(1+y_1+\dots+y_k)^{n-k}}{(n-k)!} dy_k = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \frac{(1+\beta)^{n-j} \beta^j}{(n-j)! j!} + \frac{(-1)^k}{n!} = \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j - 1 \right). \end{aligned}$$

Область G_2 есть объединение всех подобных множеств H' , отвечающим различным $k = 1, \dots, n$, а также множества S . Поэтому

$$V_2 = \text{mes}_n(G_2) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j - 1 \right) + 1 \right).$$

Заметим, что $1+\beta = (\gamma+1)/2 = \alpha$, $\beta = (\gamma-1)/2 = \alpha-1$. С помощью замены $i = n-j$ во внутренней сумме получаем, что

$$V_2 = \frac{1}{n!} \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left((-1)^n \sum_{i=n-k+1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i - 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \sum_{i=n-k+1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i.$$

Мы учли, что $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} + 1 = 0$. Меняя порядок суммирования, приходим к равенству

$$V_2 = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i \sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}.$$

В соответствии с (16)

$$\sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{n-k} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j} = (-1)^{n+i} \binom{n-1}{j-1},$$

поэтому

$$V_2 = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n-1}{i-1} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i. \quad (18)$$

Равенства (17) и (18) означают, что

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G) &= V_1 + V_2 = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n-1}{i-1} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i + \frac{1}{n!} \left((\alpha-1)^n + \alpha^n \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i} (\gamma+1)^i. \end{aligned}$$

Мы приняли во внимание, что $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$. Левое равенство из (15) установлено.

Правое равенство следует из тождества

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 t^i = (1-t)^n \Psi_n\left(\frac{1+t}{1-t}\right),$$

см. [3]. Положим $t = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, тогда $(1-t)^n = 2^n (\gamma+1)^{-n}$, $(1+t)/(1-t) = \gamma$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i} (\gamma+1)^i = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma+1)^{n-i} (\gamma-1)^i = \\ &= \frac{1}{2^n n!} (\gamma+1)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^i = \frac{\Psi_n(\gamma)}{n!}. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

6. Оценки для c_n снизу. Неравенство $c_n \geq \max\left(1, n^{(n+3)/(2n)}/(2e)\right)$

Для формулировки основного утверждения этого пункта обозначим через Ψ_n^{-1} функцию, обратную к Ψ_n на полуоси $[1, \infty)$. Здесь, как и ранее, $\Psi_n(t)$ — стандартизованный многочлен Лежандра степени n . Известно, что $\Psi_n(1) = 1$, $\Psi_n(t)$ монотонно возрастает при $t > 1$. Эти факты, в частности, следуют из формулы (15). По поводу определения h_n и g_n см. замечание 2.

Теорема 3. Справедливо неравенство

$$c_n \geq \max\left(1, \Psi_n^{-1}\left(\frac{n!}{h_n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть $P: C(Q_n) \rightarrow \Pi_1$ — произвольный интерполяционный проектор по системе узлов $A_{n+1} = 0$, $A_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in \text{Ver}$, $i = 1, \dots, n$. В соответствии с равенством (7) имеет место оценка

$$\|P\| \geq |1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i| + \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

если $x = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \in Q_n$. Покажем, что найдётся вектор $x^* \in Q_n$ указанного вида, для которого $|1 - \sum \lambda_i^*| + \sum |\lambda_i^*| \geq \Psi_n^{-1}(n!/h_n)$.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопоставляющий $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ вектор $x = F(\lambda)$ по правилу $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j A_j$. Справедливо матричное равенство $F(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)M$, где M — матрица порядка n с элементами $m_{ij} = x_j^{(i)}$. Положим для $\gamma \geq 1$

$$G_\gamma := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : |1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i| + \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \gamma\}.$$

Убедимся, что $Q_n \not\subset F(G_\gamma)$, если $\gamma < \gamma_n := \Psi_n^{-1}(n!/h_n)$. Для этого достаточно проверить, что $\text{mes}_n(F(G_\gamma)) < \text{mes}_n(Q_n) = 1$. Это следует из леммы предыдущего пункта:

$$\text{mes}_n(F(G_\gamma)) < \text{mes}_n(F(G_{\gamma_n})) = |\det M| \cdot \text{mes}_n(G_{\gamma_n}) = |\det M| \cdot \frac{\Psi_n(\gamma_n)}{n!} = \frac{|\det M|}{h_n} \leq 1.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon = \sum \lambda_i^\varepsilon A_i \in Q_n$ такой, что $|1 - \sum \lambda_i^\varepsilon| + |\sum \lambda_i^\varepsilon| \geq \gamma_n - \varepsilon$. Из соображений непрерывности и компактности получаем, что для некоторого $x^* = \sum \lambda_i^* A_i \in Q_n$ имеет место $|1 - \sum \lambda_i^*| + |\sum \lambda_i^*| \geq \gamma_n$.

Таким образом, норма P удовлетворяет неравенству

$$\|P\| \geq \gamma_n = \Psi_n^{-1}\left(\frac{n!}{h_n}\right),$$

откуда и следует оценка (19). Теорема доказана.

Следствие 1. $c_n \geq \max(1, \Psi_n^{-1}(n!/(n-1)^{(n-1)/2}))$.

Для доказательства достаточно учесть, что в соответствии с неравенством Адамара

$$h_n \leq g_{n-1} \leq (n-1)^{(n-1)/2}, \quad (20)$$

Следствие 2. $c_n \geq \max(1, n^{(n+3)/(2n)}/(2e)) \geq \max(1, \sqrt{n}/(2e))$.

Доказательство. При любом $t \geq 1$ и $n > 1$

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (t-1)^{n-i} (t+1)^i < \binom{n}{[n/2]} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (t-1)^{n-i} (t+1)^i = \\ &= \binom{n}{[n/2]} \cdot (2t)^n \cdot 2^{-n} = \binom{n}{[n/2]} t^n. \end{aligned}$$

Поэтому число $\gamma_n = \Psi_n^{-1}(n!/h_n)$ удовлетворяет неравенствам

$$\binom{n}{[n/2]} \gamma_n^n > \Psi_n(\gamma_n) = \frac{n!}{h_n} > \frac{n!}{n^{(n-1)/2}},$$

мы использовали (20). Итак,

$$\gamma_n^n > \frac{n!}{n^{(n-1)/2} \binom{n}{[n/2]}}.$$

Если n — чётное, то $\binom{n}{[n/2]} = \binom{n}{n/2} = (n!)/((n/2)!)^2$, значит,

$$\gamma_n^n > \frac{((n/2)!)^2}{n^{(n-1)/2}} > \frac{2\pi(n/2)(n/2e)^n}{n^{(n-1)/2}} = \pi \frac{n^{n+1}}{(2e)^n n^{(n-1)/2}},$$

и

$$\gamma_n > \frac{1}{2e} n^{(n+3)/(2n)}. \quad (21)$$

Пусть n — нечётное. Тогда

$$\binom{n}{[n/2]} = \frac{n!}{\frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!},$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_n^n &> \frac{\frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{n^{(n-1)/2}} > \frac{\pi \sqrt{(n+1)(n-1)}}{n^{(n-1)/2}} \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{(n+1)/2} \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{(n-1)/2} = \\ &= \frac{\pi(n^2-1)^{\frac{n}{2}}(n+1)}{(2e)^n n^{(n-1)/2}} > \frac{\pi}{(2e)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{n^{(n-1)/2}} = \frac{\pi}{(2e)^n} n^{(n+3)/2}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь неравенство $(1-t)^p > 1-pt$ ($0 < t < 1$, $p > 1$), в связи с которым

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n/2} > 1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{2n} > \frac{n}{n+1}.$$

Таким образом, при всех n выполнено (21). Теперь оценки следствия 2 получаются из теоремы 3.

Результаты следствий 1 и 2 означают, что при $n \rightarrow \infty$ $c_n \rightarrow \infty$. Более того, при любом $\varepsilon \in [0, 1)$ выполняется

$$\frac{(2e)^{2n} c_n}{n^{n+2+\varepsilon}} \rightarrow \infty.$$

Следствие 3. Пусть $n = 4k - 1$. Если существует матрица Адамара порядка $n + 1$, то

$$\max\left(1, \frac{\sqrt{n}}{2e}\right) \leq c_n \leq \sqrt{n+1}.$$

Достаточно применить теорему 2 и следствие 2.

Замечание 5. Неравенство $\|P\| > \sqrt{n}/(2e)$ для любого P может быть установлено иначе. Вместо множества G из условия леммы достаточно рассмотреть область $\{\lambda : \sum |\lambda_i| < \gamma\}$, мера которой равна $2^n \gamma^n / n!$. Опуская детали, отметим ключевую роль следующего утверждения, имеющего и самостоятельный интерес. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — произвольный набор n вершин Q_n , радиус-векторы которых составляют базис R^n . Тогда для некоторой точки $x^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* A_j \in Q_n$ справедливо $\sum_{j=1}^n |\lambda_j^*| > \sqrt{n}/(2e)$.

Замечание 6. Фактически изложенная схема позволяет получить оценки снизу для нормы конкретного проектора через величину $|\det M|$. Как и выше, M — матрица, составленная из координат узлов $A_1, \dots, A_n$; считаем, что $A_{n+1} = 0$. Так, для любого проектора P выполняется неравенство

$$\|P\| > \frac{1}{2e} \cdot \left\{ \frac{n^{n+1}}{|\det M|} \right\}^{1/n}. \quad (22)$$

Действительно, если взять γ равным правой части (22), то для соответствующего множества G из условия леммы будет иметь место неравенство $|\det M| \cdot \text{mes}_n(G) < 1$. Это означает, что справедливо (22). Например, если $|\det M| \leq n$, то $\|P\| > n/(2e)$.

Литература

- [1] Невский М. В., Иродова И. П. Некоторые вопросы теории приближения функций. Ярославль, 1999. 92 с.
- [2] Невский М. В. Оптимальная линейная интерполяция на n -мерном кубе // Ярославль, 2001. 13 с. Деп. в ВИНТИ 22.01.2001, №163-В2001. (РЖ "Математика", 2001, №01.07-13Б.538ДЕП.)
- [3] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [4] Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. М.: Наука, 1985. 192 с.
- [5] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
- [6] Jonsson A. Markov's inequality and local polynomial approximation // Funct. Spaces Appl. Lund, 1986. P. 303 – 316.

УДК 519.854.2

Расширенная задача о равномерном назначении минимальной стоимости

Чаплыгина Н.Б.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Рассматривается расширенная постановка задачи о назначениях ([3]–[5]) с дополнительными оптимизационными условиями. Решение оптимизируется по двум критериям: стоимости и равномерности. Предлагается алгоритм нахождения оптимального решения.

1. Постановка задачи

В течение периода из m дней n работников: $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполняют s работ. В k -й день должны быть выполнены s_k работ ($\sum_{k=1}^m s_k = s$), обозначенных $t_1^k, \dots, t_{s_k}^k$, где $k \in \overline{1, m}$. Возможности выполнения работ заданы матрицей $R = (R^1, \dots, R^m)$, где R^k – двумерная булева матрица размерности $n \times s_k$ с элементами

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый работник может в } k\text{-й день выполнять работу } t_j^k, \\ 0, & \text{если } i\text{-ый работник не имеет такой возможности.} \end{cases}$$

Матрица C той же размерности, что и R , задает стоимости выполнения работ каждым из рабочих. Допустимое назначение представим также булевой матрицей X , тогда его стоимость равна

$$\psi(X) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_k} c_{ij}^k x_{ij}^k.$$

Допустимому решению X сопоставим итоговый вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$ (обозначим его тем же символом; из контекста обращения к X будет понятно, какой объект имеется в виду), где

$$x_i = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{s_k} x_{ij}^k.$$

Необходимо среди всех назначений минимальной стоимости найти наиболее *равномерное*, т.е. минимизирующее функционал

$$L(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{s})^2,$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m s_i.$$

Графически условие задачи можно представить в виде сети NA , которая имеет следующий вид:

Сеть NA

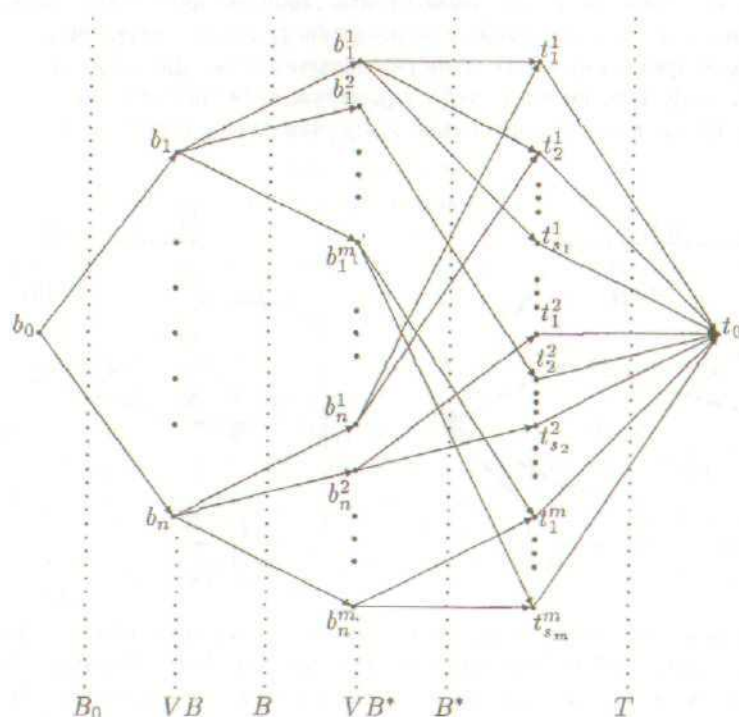


Рис. 1

В построенной по условиям задачи сети NA пропускными способностями дуг разреза B^* являются элементы матрицы R , наличие дуги (b_i^k, t_j^k) означает, что соответствующий элемент матрицы R равен единице, в противном случае дугу изображать не будем. Пропускная способность дуг вида (b_0, b_i) не ограничивается, а на остальных дугах она равна 1. Стоимости дуг вида (b_i^k, t_j^k) представлены в матрице C , остальные дуги имеют нулевую стоимость, так как на стоимость решения (значение функционала ψ) они не влияют. Требуется найти поток X ,

- 1) соответствующий неравенству $X \leq R$, что означает поэлементное его выполнение;
- 2) равный по величине s (т.е. максимальный);
- 3) минимизирующий функционал стоимости ψ ;
- 4) и наиболее равномерно распределенный согласно критерию L .

2. Улучшающие контуры

Пусть X - максимальный поток минимальной стоимости в сети NA . Построим для него дополняющую сеть $\overline{NA}(X)$ на тех же вершинах с модифицированными дуговыми стоимостями. Новые стоимости зависят от значений старых стоимостей и величины потока X , для которого строится дополняющая сеть ([2], стр. 213). Новые стоимости равны

$$c^*(a, b) = \begin{cases} c(a, b), & \text{если дуга не насыщена;} \\ \infty, & \text{если дуга насыщена;} \\ -c(b, a), & \text{если поток на дуге } (b, a) \text{ ненулевой, т.е. } x(b, a) > 0. \end{cases}$$

Если дуга получает бесконечное значение стоимости, то это равносильно ее отсутствию в дополняющей сети. Для любой дуги (b, a) , по которой пройдет ненулевой поток, в дополняющей сети появляются обратные дуги (a, b) , с пропускной способностью, равной величине потока $x(b, a)$. На дугах разреза B^* это выглядит так:

$$c^*(a, b) = \begin{cases} c(a, b), & \text{если } 0 \leq x(a, b) < r(a, b), \text{ — дуга не насыщена, т.е. } x(a, b) = 0, r(a, b) = 1; \\ \infty, & \text{если } x(a, b) = r(a, b), \text{ — насыщенная дуга удаляется;} \\ -c(b, a), & \text{если } x(b, a) > 0 \text{ — ненулевой поток порождает обратную дугу.} \end{cases}$$

В последнем случае при $x(b, a) > 0$, т.е. $x(b, a) = 1$, возникает обратная дуга (a, b) со стоимостью $c^*(a, b) = -c(b, a)$, и поскольку $x(b, a) = 1$, то $x(b, a) = r(b, a)$, т.е. прямая дуга, став насыщенной, получает стоимость неограниченную, что логически приводит к ее удалению. Таким образом, двойных дуг

в разрезах B или B^* в дополняющей сети не может быть. Двойные дуги в дополняющей сети могут быть лишь в разрезе B_0 : только здесь в исходной сети могут быть дуги с ненулевым потоком и одновременно ненасыщенные, так как пропускные способности неограничены. Любая дуга разрезом B или B^* либо остается, если поток по этой дуге не идет, либо удаляется, если по ней пущен поток. Если пропускная способность дуги равна нулю, то это равносильно тому, что дуга отсутствует.

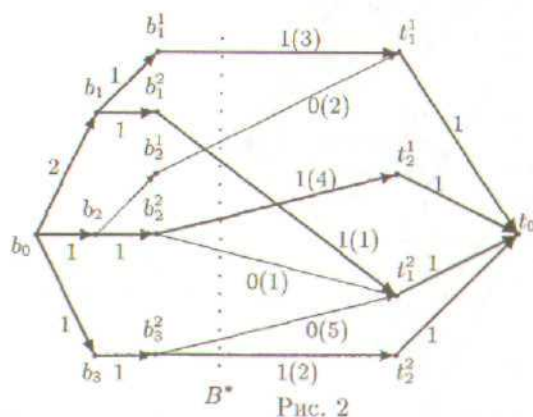


Рис. 2

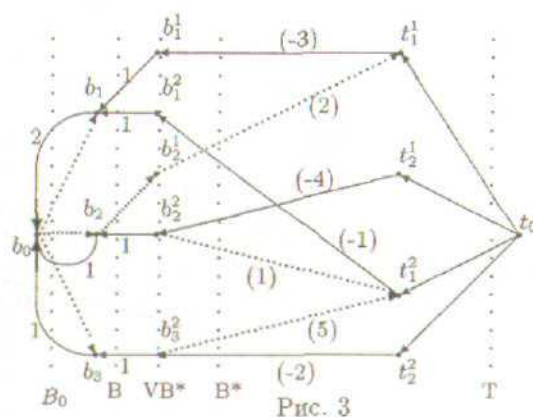


Рис. 3

На рис. 2 представлен пример сети с определенным потоком, величина которого обозначена около каждой дуги. На дугах разреза B^* кроме величины потока в скобках обозначена стоимость потока на данной дуге. Дополняющая сеть для приведенного потока изображена на рис. 3. На обратных дугах разрезов B_0 и B обозначены их пропускные способности, а на дугах разреза B^* в скобках - стоимости потока на этих дугах.

Сплошные дуги обратного направления от t_0 к b_0 разреза B^* , например, дуга (t_2^2, b_3^2) на рис. 3, появились в дополняющей сети в результате единичного потока по соответствующей дуге прямого направления (от b_0 к t_0), что означает назначение рабочему работы, такие дуги будем называть *назначениями*. Дуга прямого направления разреза B^* , обозначенная пунктирной линией, например, дуга (b_3^2, t_1^1) , означает неосуществленную возможность назначения, такие дуги для краткости назовем просто *возможностями*. В дополняющей сети из вершины b_0 исходят дуги во все вершины-работы множества B , так как эти дуги не могут быть насыщенными. И, кроме того, появились заходящие в b_0 дуги. Например, дуга (b_2, b_0) на рис. 3 - результат ненулевого потока по дуге (b_0, b_2) в потоке X (рис. 2). В приведенном примере все вершины-работы имеют назначение, т.е. по каждой дуге, заходящей в вершину t_0 , проходит единичный поток (рис. 2), поэтому в дополняющей сети эти дуги исчезли, но появились обратные к ним (рис. 3).

Поток минимальной стоимости из всех потоков заданной величины характеризуется тем, что в дополняющей сети нет контуров отрицательной стоимости ([1], Теорема 7.8). В противном случае можно построить поток той же величины, но меньшей стоимости. Будем рассматривать контуры в дополняющей сети.

Пусть X - максимальный поток (поток, величины s) минимальной стоимости. Так как поток величины s насыщает дуги разреза T , то в дополняющей сети эти дуги заменены обратными и, следовательно, вершина t_0 не может входить ни в один контур дополняющей сети. Рассмотрим контуры, проходящие через вершину b_0 , например, контур $(b_0, b_2, b_2^1, t_1^1, b_1^1, b_1, b_0)$ на рис. 3. Будем считать в этом случае началом контура вершину b_0 . Тогда контур состоит из дуги, исходящей из b_0 , четного числа звеньев, чередующих направление (от источника и к источнику) и дуги, заходящей в b_0 . Первые две вершины чередующего пути соответствуют рабочему, не имеющему назначений в данный день (в примере это вершины b_2, b_2^1), только в этом случае существует дуга из вершины множества VB в вершину множества VB^* . Последние две вершины соответствуют рабочему, имеющему назначение в данный день (в примере это вершины b_1^1, b_1), только в этом случае существует обратная дуга из вершины множества VB^* в вершину множества VB . Такой контур однозначно определяется своим чередующим направлением дуг путем между вершинами множества VB , полученным удалением первой и последней его дуги, если считать началом вершину b_0 .

Стоимость контура определяется дугами разреза B^* , так как остальные дуги имеют нулевую стоимость. Наличие такого контура означает возможность переназначения работ, для чего по данному контуру пропускается дополнительно 1 единица потока. Тогда возможности превращаются в назначения, а бывшие назначения становятся возможностями. В результате переназначения по контуру, который содержит незамкнутый путь между вершинами множества VB , количество работ рабочего, с которого начинается контур, увеличится на 1 (в примере это касается рабочего b_2) и уменьшится на 1 у рабочего,

которым заканчивается контур (у рабочего b_1). Если стоимость контура, т.е. стоимость чередующего пути (в примере из b_2 в b_1) положительная, то переназначение приведет к увеличению стоимости потока. Если же стоимость контура равна нулю (отрицательных контуров нет по свойству потока минимальной стоимости, которым является поток X), то переназначение работ по контуру не изменит стоимости потока, но приведет к изменению итогового вектора назначений, влияющему на равномерность распределения работ. Поэтому будем рассматривать только такие контуры.

Итак, имеем X – максимальный поток минимальной стоимости. Если путь контура начинается с прямой дуги (b_i, b_i^p) , а заканчивается обратной дугой (b_j^k, b_j) , и к тому же $x_i < x_j - 1$, то переназначение по контуру увеличит x_i и уменьшит x_j , что улучшит равномерность распределения (доказательство этого в следующей теореме). Назовем такие контуры или пути *улучшающими*, вершины b_i, b_i^p – *начальными*, вершины b_j^k, b_j – *конечными*.

Теорема 1. Если в дополняющей согласно потоку X сети существует улучшающий контур, то поток X' , полученный из потока X переназначением работ по этому контуру, является более равномерным.

Доказательство. Пусть итоговый вектор назначений решения, соответствующего потоку X , равен $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где n – число рабочих. Пусть чередующий путь улучшающего контура начинается с прямой дуги (b_i, b_i^p) , а заканчивается обратной дугой (b_j^k, b_j) и $x_i < x_j - 1$. Тогда переназначение по данному контуру приводит к новому потоку с итоговым вектором $X' = (x_1, x_2, \dots, x_i + 1, \dots, x_j - 1, \dots, x_n)$. Сравним значения функционала равномерности на этих векторах

$$L(X) - L(X') = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{s})^2 - \sum_{k=1}^n (x'_k - \bar{s})^2 = (x_i - \bar{s})^2 + (x_j - \bar{s})^2 - (x_i + 1 - \bar{s})^2 - (x_j - 1 - \bar{s})^2 = 2x_j - 2x_i - 2 > 0,$$

так как $x_i < x_j - 1$. Следовательно, $L(X) > L(X')$. $\triangleleft$

3. Частичная сеть, порожденная потоками, и дополняющая их сеть

Пусть сеть NA состоит из множества вершин V и множества дуг E , и X – допустимый поток в сети NA . По введенным ранее обозначениям $E = B_0 \cup B \cup B^* \cup T$, все дуги разбиты на разрезы (рис. 1). Обозначим NA_X – частичную сеть сети NA такую, что $NA_X = (V, E_X)$, где $E_X = \{e \in E : x(e) > 0\}$, т.е. множество дуг, по которым идет поток X в сети NA .

Пусть имеются два различных максимальных потока X и Y в сети NA . Обозначим

$$NA_{XY} = NA_X \cup NA_Y = (V, E_{XY} = E_X \cup E_Y).$$

Сеть NA_{XY} является частичной сетью сети NA . Дуги частичной сети NA_{XY} имеют те же числовые характеристики: стоимость и пропускную способность, которые им были присущи в сети NA . Вершины b_i в частичной сети NA_{XY} имеют те же числовые характеристики x_i и y_i – итоговые числа назначений для каждого рабочего такие же, какими они были в сети NA для потоков X и Y соответственно, поскольку те же потоки X и Y являются допустимыми и для этой сети NA_{XY} . Назовем частичную сеть NA_{XY} сетью, порожденной потоками X и Y .

Будем рассматривать сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ или $\overline{NA}_{XY}(Y)$, дополняющие потоки X или Y соответственно, в частичной сети NA_{XY} . Разобьем множество всех дуг сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ на множества $B_0 \cup B \cup B^* \cup T$, так же, как в сети NA (будем считать дугами разреза дуги обоих направлений). Наличие любой дуги между вершинами a и b дополняющей сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ и ее параметры: пропускная способность и стоимость – полностью определяются лишь дугой между вершинами a и b (или b и a) сети NA_{XY} и ее параметрами (пропускной способностью, стоимостью и величиной потока X на этой дуге); если в сети NA_{XY} нет дуги между вершинами a и b , то дуга (a, b) или (b, a) между ними не появится и в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$. И поскольку сеть NA_{XY} является частичной сетью в сети NA , то сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ и $\overline{NA}_{XY}(Y)$ являются частичными сетями в сетях $\overline{NA}(X)$ и $\overline{NA}(Y)$ соответственно. И если найдется улучшающий контур в рассматриваемых дополняющих сетях $\overline{NA}_{XY}(X)$ или $\overline{NA}_{XY}(Y)$, то этот же контур будет улучшающим контуром в дополняющей соответствующий поток сети для исходной сети NA .

На рис. 4 представлен пример сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ для двух потоков X и Y с итоговыми векторами назначений $X = (1, 1, 4, 4)$ и $Y = (3, 3, 3, 1)$.

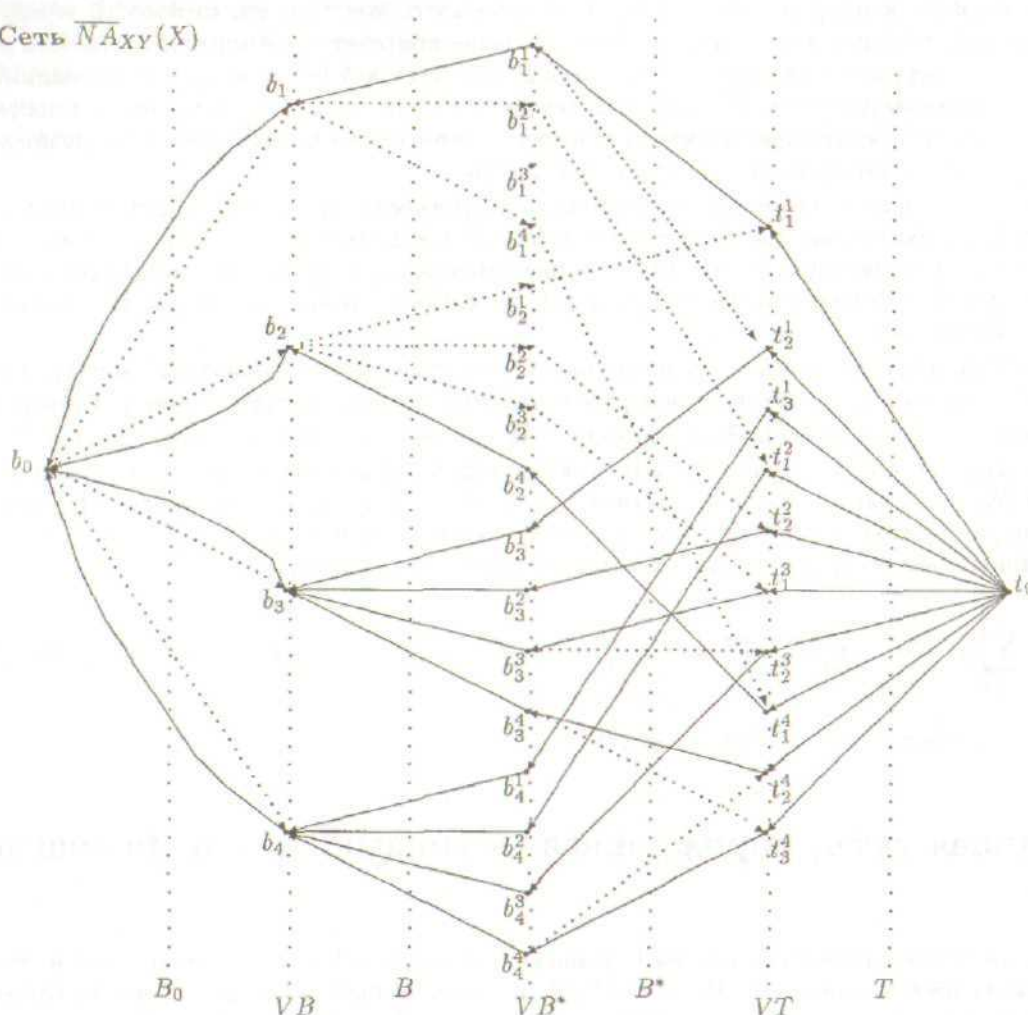
Сеть $\overline{NA}_{XY}(X)$ 

Рис. 4

В сети $\overline{NA}_{XY}(X)$

• каждая вершина t_j^k множества VT инцидентна

а) либо одной дуге множества B^* (множество дуг T не рассматриваем), являясь начальной, как вершина t_3^1 на рис. 4, если оба потока X, Y имеют одинаковые назначения для этой работы (одному и тому же рабочему);

б) либо двум дугам множества B^* , являясь начальной для одной дуги множества B^* (назначения в X) и конечной для другой дуги того же множества (назначения в Y), как вершина t_3^4 ;

• каждая вершина b_i^k множества VB^* инцидентна

а) никакой дуге множества B^* , если ни в том, ни в другом потоке рабочий b_i не занят в k -ый день (например, b_1^3), такая вершина изолирована.

б) лишь одной дуге множества B^* , являясь конечной, если рабочий b_i занят в k -ый день в потоке X , а в потоке Y этот рабочий в k -ый день имеет такое же назначение (например, b_4^1), что и в X , или вообще не имеет назначения (например, b_3^2) в потоке Y ;

в) лишь одной дуге множества B^* , являясь начальной, если рабочий b_i занят в k -ый день лишь в потоке Y (например, b_2^3);

г) ровно двум дугам множества B^* , являясь начальной в одной дуге и конечной в другой дуге, если рабочий b_i занят в k -ый день в обоих потоках X и Y и назначения не совпадают (например, b_3^3);

• каждая вершина b_i множества VB

а) имеет x_i заходящих дуг-назначений из вершин множества VB^* и исходящих дуг-возможностей не меньше $y_i - x_i$ и не больше y_i в вершины множества VB^* . Например, вершина b_1 в приведенном примере имеет 1 заходящую дугу, что соответствует $x_1 = 1$; и две исходящие дуги, что соответствует неравенству

$$3 - 1 = y_1 - x_1 \leq 2 \leq y_1 = 3;$$

б) изолирована, если рабочий b_i не занят ни в один из дней ни в одном из потоков (в примере такой вершины нет).

4. Построение равномерного потока минимальной стоимости

Среди потоков минимальной стоимости в сети NA требуется найти наиболее равномерный. Докажем вспомогательную лемму.

Пусть имеется сеть $N(V, E)$, для которой выполнены следующие условия:

- 1) Множество вершин V сети разбито на два подмножества VB и $\overline{VB}$.
- 2) Вершины множества VB не могут быть смежными между собой.
- 3) Каждая вершина множества $\overline{VB}$ инцидентна ровно двум дугам: одной заходящей и одной исходящей.

Для каждой вершины b_i множества VB введем метку k_i , равную разности между полустепенями исхода и захода данной вершины: $k_i = \deg^+(b_i) - \deg^-(b_i)$. Например, на рис. 5

$$k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = -1, k_4 = -3.$$

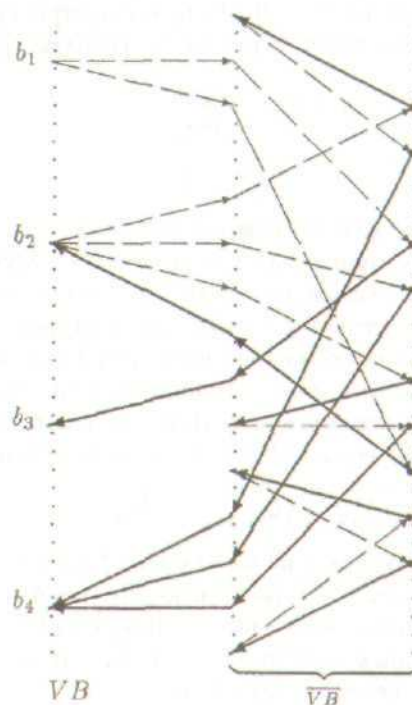


Рис. 5

Обозначим $P(b_i, b_j)$ - ориентированный путь с начальной вершиной b_i и конечной вершиной b_j .

Лемма. Пусть V' - некоторое подмножество множества VB . Тогда в сети $N(V, E)$ существует

$$K = 0 + \sum_{\substack{k_i > 0 \\ b_i \in V'}} k_i$$

простых путей $P(b_i, b_j)$, попарно непересекающихся по дугам, таких, что $b_i \in V'$, $k_i > 0$ и $b_j \in VB$, $k_j < 0$, причем любая начальная вершина b_i является начальной для k_i путей и любая конечная вершина b_j является конечной не более, чем в $(-k_j)$ путях.

Доказательство. ▸ Интересует лишь случай $K > 0$. Тогда найдется $b_{i_1} \in V'$ с меткой $k_{i_1} > 0$, т.е. исходящих дуг у этой вершины больше, чем заходящих. Будем строить путь, начинающийся в этой вершине одной из исходящих дуг. Следующая в пути вершина после начальной должна быть из множества $\overline{VB}$, так как вершины множества VB не смежны между собой. Поскольку все вершины множества $\overline{VB}$ инцидентны ровно двум дугам: одной заходящей и одной исходящей, то путь не может оборваться в вершинах этого множества. Если, строя его, попадем в вершину b_{i_2} из множества VB с меткой $k_{i_2} \geq 0$,

то имеем возможность выхода из нее, т.е. продолжения пути, причем продолжим его по еще не пройденной исходящей дуге. Так как дуг конечное множество, то процесс построения закончится, причем на некоторой вершине $b_{j_2} \in VB$ с меткой $k_{j_2} < 0$. Таким образом, построенный путь $P(b_{i_1}, b_{j_2})$ не содержит повторяющихся дуг.

Преобразуем исходную сеть, удалив из нее дуги построенного пути и ставшие изолированными вершины множества $\overline{VB}$. Преобразованная сеть по-прежнему будет удовлетворять условиям 1)-3). Рассмотрим метки вершин множества VB в этой сети. Если вершина не была вершиной удаленного пути, то ее метка не изменилась. Если вершина была промежуточной в пути, то полустепени захода и исхода уменьшились на одно и то же число, т.е. и в этом случае метка k_i не изменилась. У начальной вершины число удаленных исходящих дуг на одну больше числа удаленных заходящих дуг, поэтому ее метка уменьшилась ровно на 1. И, наконец, метка конечной в пути вершины увеличилась на 1, оставаясь неположительной. Таким образом, число K в преобразованной сети для множества V' стало на единицу меньше. И если характеристика K преобразованной сети по-прежнему удовлетворяет неравенству $K > 0$, то находимся вновь в исходных условиях леммы, позволяющих построить новый путь $P(b_{i_2}, b_{j_2})$, не пересекающийся по дугам с уже построенным и приводящим к уменьшению характеристики K . Причем начальной вершиной пути выбираем ту, у которой метка еще положительна, поэтому любую вершину b_i не сможем выбрать в качестве начальной более, чем в k_i путях. То же касается и конечных вершин путей. Повторяя процесс, будем строить пути до тех пор, пока $K > 0$. Их будет построено столько, каково было значение K у исходной сети, причем построенные пути будут удовлетворять требуемым условиям. И поскольку вначале

$$K = 0 + \sum_{\substack{k_i > 0 \\ b_i \in V'}} k_i$$

то ровно k_i различных путей будет исходить из каждой вершины $b_i \in V'$ с меткой $k_i > 0$. $\triangleleft$

Сравним два максимальных потока минимальной стоимости без улучшающих контуров.

Теорема 2. Пусть имеются два максимальных потока X и Y минимальной стоимости в сети NA . Если в сетях $\overline{NA}_{XY}(X)$ и $\overline{NA}_{XY}(Y)$ не существует улучшающих контуров, то итоговый вектор назначений потока X является перестановкой итогового вектора назначений потока Y , т.е. оба вектора состоят из одних и тех же элементов, различаясь, быть может, лишь порядком элементов.

Доказательство. $\triangleright$ Будем считать исходные потоки различными, в противном случае утверждение теоремы очевидно. Разобьем множество вершин VB сети NA следующим образом:

$$VB = \{L_0, L_1, \dots, L_s\},$$

где L_i - множество вершин из VB , являющихся началом ровно i дуг с единичным потоком X в сети NA , что означает назначение i работ рабочему, соответствующему этой вершине ($0 \leq i \leq s$, где s - общее число работ). Если итоговый вектор назначений потока имеет вид $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то множество L_i содержит те вершины b_k , для которых значение элемента вектора X равно i , т.е. $x_k = i$. Такое же разбиение множества VB можно произвести и согласно потоку Y :

$$VB = \{K_0, K_1, \dots, K_s\},$$

где K_i - множество вершин, являющихся началом ровно i дуг с единичным потоком Y в сети NA . Для доказательства теоремы достаточно для любого целого $i \in [0, s]$ доказать равенство мощностей соответствующих множеств K_i и L_i :

$$|K_i| = |L_i|.$$

Построим частичную сеть $\overline{NA}_{XY}$, порожденную данными потоками. Докажем равенство $|K_s| = |L_s|$. Возможны три случая:

- а) в обоих потоках есть вершины-рабочие множества VB с s назначениями;
- б) в обоих потоках нет вершин-рабочих множества VB с s назначениями;
- в) в одном потоке есть вершины с s назначениями, а в другом - нет.

Вершина с s назначениями может быть только одна, тогда все остальные вершины-рабочие вообще не имеют назначений. Поэтому в случае а) равенство $|K_s| = |L_s|$ выполняется. В случае б) $|K_s| = |L_s| = 0$. В случае в) пусть $|K_0| = |K_1| = \dots = |K_{s-1}| = 0$, $|K_s| = 1$, и $|L_s| = 0$. В потоке Y все работы назначены одному рабочему, например, b_p . Возьмем работу, которая в потоке X назначена другому рабочему b_q , например t_1^1 . Поскольку рабочий b_q в данный день (в первый) не имеет назначений в Y , то в $\overline{NA}_{XY}(Y)$ имеется дуга (b_q, b_p^1) :

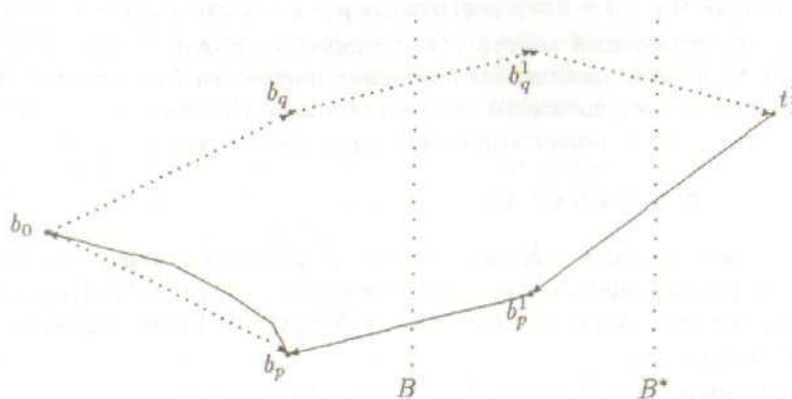


Рис. 6

Рассмотрим контур $C(b_q, b_p) = (b_0, b_q, b_q^1, t_1^1, b_p^1, b_p, b_0)$. Этот контур является контуром с противоположным направлением дуг в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$. Стоимость этого контура в сети $\overline{NA}_{XY}(Y)$ равна нулю, так как отрицательных контуров быть не может, поскольку поток Y имеет минимальную стоимость. А положительная стоимость контура исключается, поскольку тот же контур, но с противоположным направлением дуг, станет обладать противоположной по знаку стоимостью в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$, что также недопустимо, так как поток X - тоже поток минимальной стоимости. В таком случае контур $C(b_q, b_p)$ будет улучшающим в сети $\overline{NA}_{XY}(Y)$, если $s > 1$, так как $x_p = s$, а $x_q = 0$. Полученное противоречие в данном случае доказывает равенство $|K_s| = |L_s|$. Если же $s = 1$, то утверждение теоремы очевидно, так как любой итоговый вектор назначений является перестановкой вектора $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Предположим, что выполняются равенства

$$|K_s| = |L_s|, |K_s - 1| = |L_s - 1|, \dots, |K_{t+1}| = |L_{t+1}|, \text{ но } |K_t| > |L_t|, \quad (1)$$

где $0 \leq t < s$. Рассмотрим множество

$$K = K_s \cup K_{s-1} \cup \dots \cup K_t.$$

Нас интересуют контуры сети $\overline{NA}_{XY}(X)$. Преобразуем данную сеть, удалив вершины b_0 и t_0 со всеми инцидентными дугами, поскольку вершина t_0 не может войти ни в один контур, так как не является инцидентной ни одной заходящей дуге, а вершина b_0 однозначно дополняет чередующий путь до контура, поэтому для построения контура достаточно построить чередующий путь между вершинами множества VB . Кроме того, удалим дуги, соответствующие одинаковым назначениям в потоках X и Y , например, на рис. 4 дуги (t_2^1, b_4^1) и (b_4^1, b_4) , поскольку они также не могут быть звеньями контура; удалим дуги множества B , исходящие из вершины множества VB^* , инцидентной двум дугам множества B^* , например, дугу (b_3^1, b_3) , и, наконец, удалим ставшие изолированными вершины множеств VB^* и VT . Полученная сеть $\overline{NA}_{XY}^\Delta(X)$ удовлетворяет условиям 1)-3), описанным перед леммой. Каждая из вершин множества $VB^* \cup VT$ инцидентна ровно двум дугам: исходящей и заходящей. Метка k_i любой вершины b_i , представляющая разность между полустепенями исхода и захода в преобразованной сети, равна $k_i = y_i - x_i$. Рассмотрим чередующий путь, удовлетворяющий условиям леммы, в преобразованной сети $\overline{NA}_{XY}^\Delta(X)$. Такой путь существует, так как потоки X и Y различаются по итоговым векторам и поэтому найдется вершина с $k_i > 0$, ($x_i < y_i$). Для такого пути (и соответствующего контура) выполняются свойства:

- 1) путь имеет нулевую стоимость,
- 2) если путь начинается вершиной множества L_i , то заканчивается вершиной множества L_{i+1} ; начальная вершина его, кроме того, является вершиной множества K_{i+1} , а конечная - вершиной множества K_i .

Если первое мы рассматривали выше, то второе докажем. Пусть путь начинается в вершине множества L_i и заканчивается в вершине множества L_j . Так как путь не должен быть улучшающим, то не может выполняться неравенство $i < j - 1$, т.е. справедливо неравенство $i \geq j - 1$ или $i + 1 \geq j$. Поскольку началом пути должна быть вершина с преобладанием возможностей над назначениями (а всего у начальной вершины i назначений), то эта начальная вершина должна принадлежать множеству K_p , где $p > i$. А конечной вершиной контура должна быть вершина с преобладанием назначений над возможностями (у конечной вершины всего j назначений), то эта начальная вершина должна принадлежать множеству K_q ,

где $q < j$. Тогда в случае $i + 1 > j$ получаем $p \geq i + 1 > j > q$, откуда $p > q + 1$ или $q < p - 1$. Последнее означает, что указанный путь (и соответствующий контур) в дополняющей поток Y сети $\overline{NA}_{XY}^{\Delta}(Y)$, начинающийся в вершине множества K_q и заканчивающийся в вершине множества K_p (в симметричной сети контур изменил направление), является улучшающим, что невозможно. Поэтому верно равенство $i + 1 = j$. Таким образом, $p \geq i + 1 = j > q$, но не может выполняться $p > q + 1$, откуда следует

$$p = i + 1 \text{ и } q = j - 1. \quad (2)$$

И, как следствие этого, если пересечение множеств $L_i K_j \neq \emptyset$, то $|j - i| \leq 1$. В противном случае, если $j = i + p$, где $p > 1$, можем построить улучшающий контур с началом в $L_i K_j$ в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$; если же $i = j + p$, где $p > 1$, то - улучшающий контур с началом в $L_i K_j$ в сети $\overline{NA}_{XY}(Y)$. Таким образом, для $|j - i| > 1$ выполняется равенство $L_i K_j = \emptyset$.

Общее число возможностей вершин множества K в сети $\overline{NA}_{XY}^{\Delta}(X)$ равно

$$\sum_{i=t}^s |K_i| \cdot i.$$

Если вершины множества K максимально наделить назначениями, то согласно предположению (1) их общее число будет равно

$$\sum_{i=t}^s |L_i| \cdot i + (|K_i| - |L_i|) \cdot (t - 1) = \sum_{i=t+1}^s |K_i| \cdot i + |L_t| \cdot t + (|K_t| - |L_t|) \cdot (t - 1). \quad (3)$$

Тогда разность между числом возможностей и реальным числом назначений для вершин множества K не меньше, чем разность между числом возможностей и максимальным числом назначений (3):

$$\sum_{i=t}^s |K_i| \cdot i - \sum_{i=t+1}^s |K_i| \cdot i - |L_t| \cdot t - (|K_t| - |L_t|) \cdot (t - 1) = |K_t| - |L_t|.$$

И это есть разность между числом возможностей и числом назначений вершин множества K . Это означает, что по крайней мере $|K_t| - |L_t|$ контуров начинается в вершинах множества K , имея конечными вершинами вне K , это могут быть контуры лишь из K_t в K_{t-1} . Учитывая равенства (2), уточняем: это контуры из $K_t L_{t-1}$ в $K_{t-1} L_t$. Преобразуем следующие соотношения множеств

$$\begin{aligned} K &= K_t \cup K_{t+1} \cup \dots \cup K_s = (K_t \cup K_{t+1} \cup \dots \cup K_s)(L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_s) = \\ &= \bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t-1,s}}} K_i L_j = \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} K_i L_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=\overline{t,s}} K_i L_{t-1} \right) = \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} K_i L_j \right) \cup (K_t L_{t-1}), \\ &= (L_t \cup L_{t+1} \cup \dots \cup L_s)(K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_s) = \\ &= \bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t-1,s}}} L_i K_j = \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} L_i K_j \right) \cup \left(\bigcup_{i=\overline{t,s}} L_i K_{t-1} \right) = \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} K_i L_j \right) \cup (L_t K_{t-1}). \end{aligned}$$

Учитывая неравенство $|K_t \cup K_{t+1} \cup \dots \cup K_s| > |L_t \cup L_{t+1} \cup \dots \cup L_s|$, так как слагаемые не пересекаются и выполняется предположение (1), получаем

$$\left| \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} K_i L_j \right) \cup (K_t L_{t-1}) \right| > \left| \left(\bigcup_{\substack{i=\overline{t,s} \\ j=\overline{t,s}}} K_i L_j \right) \cup (L_t K_{t-1}) \right|$$

и поскольку в последнем неравенстве слагаемые также не пересекаются, то $|K_t L_{t-1}| > |L_t K_{t-1}|$. Обозначим $m = |K_t L_{t-1}|$. Вершины множества $K_t L_{t-1}$ имеют возможностей в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$ на m больше, чем назначений, тогда согласно лемме из вершин данного множества исходит m путей. Каждая вершина множества $K_t L_{t-1}$ является началом пути в сети $\overline{NA}_{XY}(X)$, который должен заканчиваться вершиной

множества $L_t K_{t-1}$ (точнее, одним из назначений вершины этого множества), но поскольку у каждой вершины данного множества назначений на одно больше, чем возможностей, то число различных путей, заканчивающихся в вершинах этого множества, не больше числа вершин в этом множестве. Полученное неравенство говорит о невозможности построения этого множества путей, что доказывает равенство $|K_t| = |L_t|$.

Теорема 3. Если сеть $\overline{NA}(X)$, где X - максимальный поток минимальной стоимости в сети NA , не имеет улучшающих контуров, то поток X дает наиболее равномерное решение задачи A из всех потоков минимальной стоимости величины s .

Доказательство. Пусть Y - поток минимальной стоимости, оптимальный по равномерности распределения работ. Тогда по теореме 1 поток Y не имеет улучшающих контуров. Так как поток X также не имеет улучшающих контуров, то оба итоговых вектора состоят из одних и тех же элементов, различаясь, быть может, лишь порядком элементов, что означает одинаковые значения функционала равномерности L на обоих итоговых векторах назначений. Следовательно, поток X так же, как и поток Y , является оптимальным по равномерности среди потоков минимальной стоимости. $\square$

С учетом этого можно предложить алгоритм нахождения наиболее равномерного назначения минимальной стоимости:

- 1) построить максимальный поток;
- 2) пока есть контуры отрицательной стоимости, производя переназначение работ по данному контуру, уменьшать стоимость потока; если отрицательных контуров нет, то получен поток минимальной стоимости;
- 3) пока есть улучшающие контуры (контуры нулевой стоимости, количество назначений начальной рабочей вершины которого, увеличенное на 1, меньше количества назначений конечной рабочей вершины контура), изменить назначения по данному контуру. При этом стоимость потока не изменяется, а значение функционала L уменьшается на положительное целое число. Поскольку $L(X) \geq 0$, то алгоритм закончит свою работу, полученный при этом поток будет соответствовать наиболее равномерному назначению минимальной стоимости.

5. Усложнение задачи обязательными назначениями

Задача, поставленная в 1 разделе, может быть усложнена тем, что при нахождении оптимального решения надо учесть некоторые обязательные, заранее определенные назначения. Обязательные назначения можно задать трехмерной булевой матрицей A той же размерности, что и матрицы R и X , причем должны соблюдаться условия: обязательное назначение может быть лишь в случае возможности выполнения работы, т.е. $a_{ij}^k \leq r_{ij}^k$ для всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s_k}$; каждая работа не может иметь более одного обязательного назначения, т.е. $\sum_{i=1}^n x_{ij}^k \leq 1$ для всех $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s_k}$ и любой рабочий в один день выполняет не более одной работы, т.е. $\sum_{j=1}^{s_k} x_{ij}^k \leq 1$ для всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$.

Тогда на решение X накладывается еще одно ограничение: $x_{ij}^k \geq a_{ij}^k$ для всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s_k}$.

И в этом случае удалим из плана работ все работы, которые имеют обязательные назначения и обнулим элементы матрицы R , соответствующие этим назначениям, т.е. преобразуем матрицу R , вычитая из ее элементов соответствующие элементы матрицы A . Оставшийся план работ не будет иметь обязательных назначений. Тогда можно построить соответствующую сеть NA' такую, что задача нахождения допустимого решения, т.е. решения с назначением всех работ, сводится к задаче отыскания максимального потока в этой сети. Подробнее эти преобразования рассматриваются в [5].

Получив допустимое решение, преобразуем его, уменьшая стоимость по отрицательным контурам дополняющих сетей, в поток минимальной стоимости. И это будет поток минимальной стоимости и для исходной задачи с обязательными назначениями, так как обязательные назначения изменять нельзя. Полученный поток минимальной стоимости можно так же, как и в случае задачи без обязательных назначений, последовательно изменять, улучшая его равномерность, т.е. уменьшая значения функционала L путем переназначения по улучшающим контурам в дополняющей сети. Но в этом случае рассмотрим подробнее определение улучшающего контура.

Если $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ - итоговый вектор решения минимальной стоимости для свободно распределяемых работ, а $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - итоговый вектор числа обязательных назначений для каждого рабочего, то вектор $X = X' + A = (x'_1 + a_1, x'_2 + a_2, \dots, x'_n + a_n)$ является итоговым для решения минимальной стоимости исходной задачи A , с учетом обязательных назначений. Улучшающим контуром в дополняющей поток X' сети, построенной для задачи без обязательных назначений, назовем контур с

начальной вершиной b_i и конечной вершиной b_j , для которого выполнены условия $x'_i + a_i < x'_j + a_j - 1$ и $x'_j > 0$. Последнее неравенство означает возможность уменьшения числа x'_j , к которому приводит переназначение работ по данному контуру. Но следует заметить, что в рассматриваемых контурах не может быть конечной вершины b_j такой, что $x_j = a_j$ или $x'_j = 0$, так как в этом случае в построенной для свободно распределяемых работ сети этот рабочий не имеет свободных (не обязательных) назначений, а может иметь лишь возможности выполнения таких, не обязательных для него, работ. В дополняющей этот поток сети вершине b_j будут соответствовать лишь исходящие дуги разрезов B и B^* и не будет заходящих дуг назначений, что не дает ей возможности быть конечной вершиной контура. Поэтому и в усложненной обязательными назначениями задаче определение улучшающего контура остается тем же, что и в случае, когда обязательных назначений нет, лишь сравнение элементов итогового вектора для начальной и конечной вершин контура нужно производить не для вектора X' , а для итогового вектора окончательного решения $X = X' + A$. Таким образом, улучшающим контуром в дополняющей поток X' сети, построенной для измененной путем вычитания обязательных назначений задачи, назовем контур с начальной вершиной b_i и конечной вершиной b_j , для которого выполнены условия $x_i < x_j - 1$. И здесь все приведенные в предшествующих разделах теоремы остаются верными, т.е. можно утверждать, что при отсутствии в максимальном потоке минимальной стоимости улучшающих контуров получено наиболее равномерное по числу назначений решение.

Автор выражает благодарность Рублеву В.С. за постановку задачи, помощь и постоянную поддержку.

Литература

- [1] Басакер Р., Т.Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.
- [2] Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
- [3] Кропанов В. А., Рублев В. С., Равномерное назначение работ минимальной стоимости // Дискретная математика. 2001. Т.13, 4. С.144-156.
- [4] Кропанов В. А., Рублев В. С., Задача о равномерном назначении работ и ее обобщения // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2000. Т.7, 2. С.3-12.
- [5] Рублев В. С., Чаплыгина Н.Б. Расширение задачи о назначениях // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2002. Т.9, 2. С.3-11.
- [6] Рублев В.С. Задача о равномерном распределении работ // Ярославский госуниверситет. Ярославль, 1986.-Деп. ВИНТИ 611-B87 26.01.87

УДК

Модификация IFS алгоритма кодирования изображений

Ходаковский В.А.

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 14 декабря 2002

В статье рассматривается один из методов сжатия графических изображений, основанный на системе итерируемых функций. Предлагается его модификация, позволяющая снизить потери в качестве при кодировании.

1. Изображения

В работе рассматриваются так называемые "gray-scale" изображения, т.е. допустимые цвета – это оттенки серого цвета, от белого до черного. Изображения будем задавать функцией $u : X \rightarrow R_g \subset R_+$, где $X = [0, 1]^2$, а R_g – определяет область уровня серого, в данной работе $R_g = [0, 1]$. Будем предполагать, что рассматриваемые функции u принадлежат пространству $\mathcal{L}^p(X)$ с метрикой (1).

$$d_p(u, v) = \left[\int_X |u(x) - v(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad (1)$$

2. Необходимые определения и обозначения

Напомним определения и обозначения из работы [1], необходимые для дальнейшего описания.

- $Cop_1(X)$ – множество невырожденных аффинных преобразований вида $y = Ax + b$, где A – это матрица 2×2 и $\det(A) \in (0, 1)$ и b – это вектор длины 2.
- Неподвижная точка $\xi \in X$ отображения $W : X \rightarrow X$ – это точка, удовлетворяющая равенству $W(\xi) = \xi$.
- Компонент уровня серого – это линейная функция $\phi_i : R_g \rightarrow R_g$,

$$\phi_i(t) = \alpha_i t + \beta_i \quad (2)$$

где $|\alpha_i|, \beta_i, \alpha_i + \beta_i \in R_g = [0, 1]$

- Фрактальный компонент f_i для функции u – это функция $f : X \rightarrow R_g$,

$$f_i(x) = \begin{cases} \phi_i(u(w_i^{-1}(x))), & x \in w_i(X), \\ 0, & x \notin w_i(X). \end{cases} \quad (3)$$

где $w_i \in Cop_1(X)$ и ϕ_i вида (2).

3. Система итерируемых функций (IFS) в пространстве $\mathcal{F}(X)$

Системой итерируемых функций, применяемых к функции $u \in \mathcal{F}(X)$, называется набор из N фрактальных компонент $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, где f_i имеет вид (3). Таким образом IFS задается системой аффинных преобразований $\{w_1, \dots, w_N\}$ и компонент уровня серого – функций $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$. Система итерируемых функций определяет оператор T , который действует в метрическом пространстве $\mathcal{F}(X)$ следующим образом:

$$(Tu)(x) = \sum_{k=1}^N f_k(x). \quad (4)$$

Для оператора T верно следующее соотношение:

$$d_p(Tu, Tv) \leq C_p d_p(u, v), \quad C_p = \sum_{k=1}^N |J_k|^{1/p} \alpha_k \quad (5)$$

где J_k - это якобиан преобразования ω_k , в данном случае $J_k = \det(A_k)$ (A_k - матрица преобразования ω_k). Если $C_p < 1$, то оператор T будет сжимающим в пространстве $\mathcal{F}(X)$ и будет иметь единственную неподвижную точку [1, 2].

4. IFS алгоритм кодирования изображений

Приведем описание основной идеи алгоритма кодирования изображений из работы [2].

Пусть изображение задано функцией $u(x) \in \mathcal{F}(X)$. Тогда для кодирования изображения требуется найти оператор T вида (4) (преобразования $\omega_i \in \text{Con}_1(X), \alpha_i, \beta_i$ из (2)). Задача решается приближенно. Приближением функции $u(x)$ будет $u^*(x)$ - неподвижная точка оператора T . Погрешность решения $\varepsilon = d_p(u^*, u)$.

Для нахождения T с данной точностью ε поступаем следующим образом.

Шаг 1. Выберем некоторое разбиение X на N областей $D_1, \dots, D_N$, которые будем называть доменными блоками. Подчеркнем, что для этих блоков должны выполняться следующие условия:

- $\bigcup_{i=1}^N D_i = X$
- $D_i \cap D_j = \emptyset$, при $i \neq j$

Шаг 2. Выберем некоторое покрытие X M областями $R_1, \dots, R_M$, которые назовем ранговыми блоками. Заметим, что $\bigcup_{i=1}^M R_i = X$, но R_i могут пересекаться.

Шаг 3. Для каждого D_i будем искать фрактальный компонент f_i , задаваемый преобразованием w_i и числами α_i и β_i , следующим образом. Для каждого j находим фрактальный компонент f_{ij}

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} \phi_{ij}(u(w_{ij}^{-1}(x))), & x \in D_i, \\ 0, & x \notin D_i. \end{cases} \quad (6)$$

в котором

- 1) преобразование w_{ij} , такое, что $w_{ij}(R_j) = D_i$
 - 2) функция ϕ_{ij} , находится минимизацией разности
- $$\varepsilon_{ij} = d_p(\phi_{ij}(u(w_{ij}^{-1}(x))), u(x)).$$

Выбираем в качестве фрактального компонента f_i тот фрактальный компонент f_{ij} , для которого значение ε_{ij} минимально. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon_{ij}$.

Шаг 4. Если все $\varepsilon_i \leq \varepsilon$, то преобразование считаем найденным. В противном случае необходимо рассмотреть другие разбиения X на R и D .

В результате работы алгоритма будут найдены фрактальные компоненты и, следовательно, искомый оператор T .

5. Модификация алгоритма - IFS метод с перекрытиями

5.1. Идея модификации

Основной задачей, как уже стало ясно, является нахождение соответствующих сжимающих преобразований. В самом общем случае мы можем переводить любые по размеру и форме области изображения, однако в этом случае получается астрономическое число перебираемых вариантов разных фрагментов, которое невозможно обработать на текущий момент даже на суперкомпьютере. Для упрощения алгоритма обычно накладываются какие-либо ограничения на множества R_i и D_i .

Однако при любых ограничениях может сложиться ситуация, что для некоторых доменных блоков не найдется преобразований w и ϕ , при которых будет выполняться условие 4-ого шага алгоритма.

В этой ситуации можно рассмотреть следующий подход. Пусть доменные блоки могут пересекаться. Рассмотрим простейший случай - парное перекрытие. Отличие от предыдущего метода заключается в

том, что вместо D_i рассматривается пара блоков D_{1i} и D_{2i} , таких что $D_{1i} = D_{2i} = D_i$. И для каждого блока нужно найти преобразования w и ϕ так, чтобы фрактальный оператор $f_i(x) = f_{1i}(x) + f_{2i}(x)$ удовлетворял условию 4-ого шага алгоритма.

Иными словами, теперь для каждого доменного блока нужно подобрать два ранговых блока и две соответствующих функции ϕ , в принципе можно рассмотреть варианты с тремя и более ранговыми блоками.

5.2. Описание модифицированного алгоритма

Пусть изображение задано функцией $u(x) \in \mathcal{F}(X)$. Тогда для кодирования изображения требуется найти оператор T вида (4) (преобразования $\omega_i \in \text{Con}_1(X)$, α_i, β_i из (2)). Задача решается приближенно. Приближением функции $u(x)$ будет $u^*(x)$ – неподвижная точка оператора T . Погрешность решения $\varepsilon = d_p(u^*, u)$.

Для нахождения T с данной точностью ε поступаем следующим образом.

Шаги 1. и 2., применяем шаги 1. и 2. из п.4.

Шаг 3. Для каждого D_i будем искать два фрактальных компонента f_{1i} и f_{2i} . Для каждой пары j_1 и j_2 находим фрактальные компоненты вида (6), в которых

- 1) $w_{ij_1}(R_{j_1}) = D_i$ и $w_{ij_2}(R_{j_2}) = D_i$
- 2) функции ϕ_{ij_1} и ϕ_{ij_2} , находятся минимизацией разности

$$\varepsilon_{ij_1j_2} = d_p(\phi_{ij_1}(u(w_{ij_1}^{-1}(x))) + \phi_{ij_2}(u(w_{ij_2}^{-1}(x))), u(x)).$$

Выбираем в качестве фрактальных компонент f_{1i} и f_{2i} ту пару фрактальных компонент f_{ij_1} и f_{ij_2} , для которых значение $\varepsilon_{ij_1j_2}$ минимально. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon_{ij_1j_2}$.

Шаг 4., применяем шаг 4. из п.4.

Подчеркнем, что раньше для каждого доменного блока перебиралось M вариантов ранговых блоков, а теперь нужно перебрать S_M^2 вариантов. С одной стороны, мы получаем огромное количество вариантов, и вероятность найти хорошее преобразование возрастает, с другой стороны, мы получаем колоссальный перебор и, следовательно, увеличение времени кодирования.

5.3. Выбор разбиения X

Как уже отмечалось выше, при выборе разбиения X на доменные и ранговые блоки обычно накладываются различные условия. Делается это для упрощения нахождения соответствующих преобразований. Рассмотрим один из простых способов разбиения, описанный в [4], который обеспечивает неплохие результаты.

- 1 Все области D и R являются квадратами со сторонами параллельными сторонам изображения. Это ограничение достаточно жесткое. Фактически мы собираемся приближать все многообразие геометрических фигур лишь квадратами.
- 2 При переводе ранговой области в доменную уменьшение размеров производится ровно в два раза. Это существенно упрощает как компрессор, так и декомпрессор, т.к. задача масштабирования небольших областей является нетривиальной.
- 3 Все доменные блоки – квадраты и имеют фиксированный размер. Изображение равномерной сеткой разбивается на набор доменных блоков.
- 4 При переводе ранговой области в доменную поворот куба возможен только на 0° , 90° , 180° или 270° . Также допускается зеркальное отражение. Общее число возможных преобразований (считая пустое) – 8.

Эти ограничения позволяют:

- 1 Построить алгоритм, для которого требуется сравнительно малое число операций даже на достаточно больших изображениях.
- 2 Очень компактно представить данные для записи в файл. Нам требуется на каждый фрактальный компонент:

– два числа для того, чтобы задать смещение рангового блока;

IFS Метод	Размер домена	Кол-во R-блоков	d_1	d_2	d_4	d_{∞}
Обычный	8*8	32^2	5.8	9.5	19.5	163
Парное перекрытие	8*8	32^2	3.7	5.6	10.6	77
Обычный	8*8	256^2	4.1	6.4	12	83
Обычный	16*16	16^2	8.9	15.1	28.8	153
Парное перекрытие	16*16	16^2	6.1	9.8	18.6	114
Обычный	16*16	256^2	6.8	11.1	19.9	128

- одно число, для того, чтобы задать преобразование симметрии при переводе рангового блока в доменный;
- два числа, для того, чтобы задать сжатие и сдвиг по яркости при переводе.

Отрицательные стороны предложенных ограничений:

- 1 Поскольку все области являются квадратами невозможно воспользоваться подобием объектов, по форме далеких от квадратов (которые встречаются в реальных изображениях достаточно часто.)
- 2 Аналогично мы не сможем воспользоваться подобием объектов в изображении, коэффициент подобия между которыми сильно отличается от 2.
- 3 Алгоритм не сможет воспользоваться подобием объектов в изображении, угол между которыми не кратен 90° .

5.4. Численный эксперимент

В описанных выше ограничениях был проведен численный эксперимент. Для кодирования использовалось изображение LENA 512×512 пикселей и 256 градаций серого. Рассматривались разбиения на доменные блоки двух размеров - 8×8 и 16×16 пикселей, ранговые блоки соответственно 16×16 и 32×32 . Для стандартного алгоритма также было рассмотрено два варианта покрытия ранговыми блоками: без наложений, при этом их количество составило 32^2 и 16^2 штук, и с наложениями - 256^2 штук соответственно. В таблице приведены отклонения закодированных изображений от исходных, измеренные по формуле (1) для $p = 1, 2, 4$ и ∞ .

Как видно из таблицы, модифицированный алгоритм показал лучшие результаты даже при существенно меньшем количестве ранговых блоков.

Литература

- [1] Bruno Forte and Edward R. Vrscay. Theory of Generalized Fractal Transforms. Department of Applied Mathematics Faculty of Mathematics University of Waterloo, 1996.
- [2] Bruno Forte and Edward R. Vrscay. Inverse Problem Methods for Generalized Fractal Transforms. Department of Applied Mathematics Faculty of Mathematics University of Waterloo, 1996.
- [3] Yoav Fisher. Fractal Image Compression. SIGGRAPH, 1992.
- [4] Ватолин Д.С. Алгоритмы сжатия изображений. М.: Изд-во МГУ, 1999.

О назначении точек гиперграням многогранника

Карасёв Р.Н.¹

Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

получена 02 ноября 2002

В данной работе доказываются две теоремы, обобщающие предыдущие результаты автора по задачам В.В. Произволова и А. Бездека о назначении точек гиперграням многогранника. Также приводятся следствия этих теорем для задач о назначении сдвигов множеств некоторого выпуклого разбиения $\mathbb{R}^n$, при котором сдвиги множеств разбиения должны покрывать $\mathbb{R}^n$ или не пересекаться по внутренним точкам.

1. Формулировка основных результатов

Результаты этой работы обобщают теоремы 2, 3 и 4 работы [1] (см. также [2]) на случай, когда количество точек превосходит количество граней многогранника. Из теорем 1 и 2 этой работы выводятся следствия, приведенные в конце работы.

Приведем некоторые обозначения. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

- i) $\text{conv } V$, $\text{lin } V$, $\text{aff } V$ — выпуклая, линейная, аффинная оболочка V .
- ii) $\text{int } V$, $\text{rint } V$, $\text{cl } V$, $\text{bd } V$ и $|V|$ — внутренность, относительная внутренность, замыкание, граница и число элементов V .
- iii) $\dim_l V$, $\dim_a V$, $\text{codim } V$ — линейная и аффинная размерность, коразмерность V .
- iv) $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество индексов и S^m — группа перестановок на I_m .
- v) $\text{dist}(x, y)$, $\text{dist}(X, Y)$ — расстояние между точками x и y или подмножествами X и Y некоторого метрического пространства.
- vi) Для $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad A \overset{*}{+} B = \{x : x + B \subseteq A\}$$

сумму Минковского и геометрическую разность множеств A и B .

Будем считать $n \geq 2$.

Пусть L_1^n — пространство линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Для $f \in L_1^n$ обозначим через:

- i) $H(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ — гиперплоскость;
- ii) $H^-(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$ — открытое полупространство;
- iii) $H^+(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$ — замкнутое полупространство.

Напомним, что многогранное множество $X = \bigcap_{i \in I_m} H^+(f_i)$ — это пересечение конечного семейства полупространств. Ограниченное многогранное множество называется многогранником. Для каждого многогранного множества X в дальнейшем будем считать, что $\text{int } X \neq \emptyset$ и множество функций $\{f_i\}_{i \in I_m}$ таково, что $\text{codim } H(f_i) \cap X = 1$ для всех $i \in I_m$. Тогда множества $F_i = H(f_i) \cap X$, $i \in I_m$ называются гипергранями X . Для многогранного множества X обозначим $H_i = H^-(f_i)$, $i \in I_m$.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №03-01-00801, 03-01-06207

Теорема 1. Пусть X — многогранник в $\mathbb{R}^n$ с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $|A| = l$ и $\{l_i\}_{i \in I_m}$ — такой набор натуральных чисел, что $\sum_{i \in I_m} l_i = l$. Тогда существует разбиение множества A на множества A_i ($i \in I_m$), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$;
- 2) множества $C_i = \cap_{\{a\} \in A_i} \text{conv}(a \cup F_i)$ ($i \in I_m$) покрывают X , то есть

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I_m} C_i;$$

Теорема 2. Пусть X — многогранное множество в $\mathbb{R}^n$ с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$, $A \subset X$, $|A| = l$ и $\{l_i\}_{i \in I_m}$ — такой набор натуральных чисел, что $\sum_{i \in I_m} l_i = l$. Тогда существует разбиение множества A на множества A_i ($i \in I_m$), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$;
- 2) множества $C_i = \text{conv}(A_i \cup F_i)$ ($i \in I_m$) попарно не пересекаются по внутренним точкам, то есть для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int } C_i \cap \text{int } C_j = \emptyset;$$

Теорема 3. Пусть X — многогранное множество в $\mathbb{R}^n$ с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$, $A \subset \mathbb{R}^n \setminus X$, $|A| = l$ и $\{l_i\}_{i \in I_m}$ — такой набор натуральных чисел, что $\sum_{i \in I_m} l_i = l$. Пусть также $|A \cap \bigcup_{i \in I} H_i| \geq \sum_{i \in I} l_i$ для всех $I \subseteq I_m$. Тогда существует разбиение множества A на множества A_i ($i \in I_m$), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$;
- 2) множества $C_i = \text{conv}(A_i \cup F_i)$ ($i \in I_m$) не перекрываются с X и попарно не пересекаются по внутренним точкам, то есть для любого $i \in I_m$

$$\text{int } C_i \cap \text{int } X = \emptyset$$

и для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int } C_i \cap \text{int } C_j = \emptyset;$$

Теоремы 2, 3 и 4 работы [1] являются частными случаями этих теорем при $|A| = m$ и $l_i = 1$ для всех $i \in I_m$.

2. Вспомогательные утверждения

Приведем несколько определений и лемм, которые нам понадобятся. Все они взяты из [1], поэтому их доказательства не приводятся.

Определение. Будем говорить, что множество V в линейном (аффинном) пространстве $L(A)$ находится в *общем положении* или $V \in LGP$ ($V \in AGP$), если

$$\dim_l U = \min\{|U|, \dim_l L\} \quad (\dim_a U = \min\{|U| - 1, \dim_a A\})$$

для всех конечных $U \subseteq V$.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство отображений λ конечного множества I в $L(A)$, тогда отображение $\lambda \in \mathcal{F}$ находится в *общем положении* или $\lambda \in LGP(\mathcal{F})$ ($\lambda \in AGP(\mathcal{F})$), если

$$\dim \lambda(U) = \max_{\lambda' \in \mathcal{F}} \dim \lambda'(U) \quad \text{для всех } U \subseteq I.$$

Если семейство отображений $\mathcal{F}$ — неприводимое алгебраическое подмногообразие в $L^I(A^I)$, то легко видеть, что $LGP(\mathcal{F})$ ($AGP(\mathcal{F})$) — открыто и всюду плотно в $\mathcal{F}$.

Определение. Многогранное множество $S \subset \mathbb{R}^n$ назовем *простым*, если или S — симплекс, или $S = \bigcap_{i \in I_m} H^+(f_i)$ и $\{f_i\}_{i \in I_m} \in LGP$, $m \leq n$.

Для двух точек $a \neq b \in \mathbb{R}^n$ обозначим:

- i) $[ab]$, (ab) — отрезок с концами в a и b и $\text{rint}[ab]$;
- ii) $\langle ab \rangle$, $[ab]$ — прямую, проходящую через a и b и луч на этой прямой с началом a , содержащий b ;
- iii) $\rangle ab = [ab] \setminus \{a\} \setminus (ab)$ — луч на прямой $\langle ab \rangle$ с началом в b , не содержащий a .

Определение. Множество $U \supseteq V$ называется V -звездным, если для всех $u \in U$ и $v \in V$ отрезок $[uv] \subseteq U$. Очевидно, что если:

- i) $V \neq \emptyset$, то V -звездное множество U — звездно;
- ii) множества U_i , $i \in I$, — V -звездны, то $\bigcup_{i \in I} U_i$ и $\bigcap_{i \in I} U_i$ — V -звездны;
- iii) U — V -звездно и $W \subseteq V$, то U — W -звездно.

Лемма 1. Пусть X — многогранное множество с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$ в пространстве L . Тогда пространство L можно вложить в пространство большей размерности L' и найти такое простое многогранное множество S в L' , что $X = S \cap L$, $\text{int } X = (\text{int } S) \cap L$ и для любого $i \in I_m$ $F_i = G_i \cap L$, где $\{G_i\}_{i \in I_m}$ — множество гиперграней S . При этом, если X — многогранник, то S — симплекс.

Лемма 2. Пусть G — конечный неориентированный граф на множестве вершин $V \subset L_1^n$, причем $V \in LGP$, с множеством ребер $E = \{e_i\}_{i \in I_l}$, $l \geq |V|$ и $\mathcal{F}$ — семейство всех отображений $g : I_l \rightarrow L_1^n$ таких, что если $f_1, f_2 \in V$ — концы $e \in E$, то $H(f_1) \cap H(f_2) \subseteq H(g(e))$. Тогда существует непустое $W \subseteq V$, такое, что

$$\bigcap_{i=1}^l H(g(e_i)) \subseteq \bigcap_{f \in W} H(f) \quad \text{для всех } g \in LGP(\mathcal{F}).$$

Лемма 3. Если $\{V_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство замкнутых подмножеств симплекса S в $\mathbb{R}^{d-1}$ с гипергранями $\{F_i\}_{i=1}^d$, что V_i — F_i -звездно и $S \subseteq \bigcup_{i=1}^d V_i$, то $\bigcap_{i=1}^d V_i \neq \emptyset$.

Лемма 4. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство открытых подмножеств симплекса S в $\mathbb{R}^{d-1}$ с гипергранями $\{F_i\}_{i=1}^d$, что: i) $U_i \cup \text{rint } F_i$ — $\text{rint } F_i$ -звездно; ii) $\text{int } S \subseteq \bigcup_{i=1}^d U_i$; iii) у всех $p \in \text{bd } S$ существует такая окрестность $N(p)$, что $N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i: p \in F_i} U_i$. Тогда $\bigcap_{i=1}^d U_i \neq \emptyset$.

3. Доказательства основных утверждений

Заметим, что теоремы 1, 2 и 3 достаточно доказать в случае, когда X — простое многогранное множество.

Действительно, по лемме 1, $X = S \cap L$, где S — простое многогранное множество, L — n -мерное подпространство $\mathbb{R}^N$ и $F_i = F_i^S \cap L$, где $\{F_i^S\}_{i \in I_m}$ — гипергрании S .

В самом деле, теоремы 1, 2 и 3 для X следуют из таких же утверждений для S , так как

$$\begin{aligned} \text{conv}(\{a\} \cup F_i) &= L \cap \text{conv}(\{a\} \cup F_i^S) \\ \text{int conv}(A_i \cup F_i) &= L \cap \text{int conv}(A_i \cup F_i^S) \\ \text{int } X &= L \cap \text{int } S. \end{aligned}$$

Далее S — простое многогранное множество, и $\{F_i\}_{i \in I_m}$ — его гипергрании.

Далее, можно считать, что $A \in AGP$ и $a \notin \text{aff } F_i$ для всех $a \in A$, $j \in I_m$. Очевидно, что множество наборов A таких, что $A \in AGP$ и $A \cap \text{aff } F_i = \emptyset$ для всех i , открыто и всюду плотно в множестве $A_l^N = \mathbb{R}^{Nl}$ всех наборов A .

Теоремы 1, 2 и 3 достаточно доказать для любого всюду плотного $B \subseteq A_l^N$. В самом деле, пусть $A \in A_l^N$, элементы $a \in A$ как-то пронумерованы от a_1 до a_l , и последовательность $\{A^k\} \subseteq B$ такова, что

$$A^k = \{a_i^k\}_{i \in I_l} \quad \forall i \quad \lim_k a_i^k = a_i,$$

и для A^k утверждение какой-либо из теорем верно. Для каждого k получим некоторое разбиение A^k на A_i^k . Очевидно, что существует бесконечное $N \subseteq \mathbb{N}$ такое, что соответствующие разбиения индексов I_l элементов множеств A^k совпадают. Тогда

$$\text{conv}(A_i \cup F_i) = \lim_k \text{conv}(A_i^k \cup F_i)$$

и

$$\bigcap_{a \in A_i} \text{conv}(a \cup F_i) = \lim_k \bigcap_{a \in A_i^k} \text{conv}(a \cup F_i).$$

Если

$$x \notin \bigcup_{i \in I_m} \cap_{a \in A_i} \text{conv}(a \cup F_i)$$

то, при достаточно больших k ,

$$x \notin \bigcup_{i \in I_m} \cap_{a \in A_i^k} \text{conv}(a \cup F_i)$$

так как множества $\text{conv}(a \cup F_i)$ — замкнуты. Этим случай теоремы 1 разобран.

В случае теорем 2 и 3, если

$$x \in \text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int conv}(A_j \cup F_j) \quad \text{при } i \neq j,$$

то, при достаточно больших k ,

$$x \in \text{int conv}(A_i^k \cup F_i) \cap \text{int conv}(A_j^k \cup F_j) \quad \text{при } i \neq j.$$

В случае теоремы 3, если для некоторого i

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int } S \neq \emptyset,$$

то, при достаточно больших k ,

$$\text{int conv}(A_i^k \cup F_i) \cap \text{int } S \neq \emptyset.$$

Кроме, того можно потребовать выполнение еще одного условия. Для того, чтобы его сформулировать, потребуется несколько обозначений.

Пусть S — простое многогранное множество, $\{F_i\}_{i \in I_m}$ — его гипергрani и множество A занумеровано: $A = \{a_i\}_{i \in I_l}$. Тогда положим

$$\mathcal{I} = \{(i, j, k) \in I_l \times I_m \times I_m : j > k\}$$

тогда обозначим через $\mathcal{F}(S, A)$ семейство отображений $g : \mathcal{I} \rightarrow L_1^N$ таких, что

$$H(g(i, j, k)) = H(g_{ijk}) \supseteq \text{aff}(a_i, F_j \cap F_k),$$

а через $\mathcal{G}(S)$ — семейство отображений $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow L_1^N$ таких, что

$$H(\gamma_{ijk}) \supseteq F_j \cap F_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{j > k} H(\gamma_{ijk}) \neq \emptyset.$$

Очевидно, $\mathcal{F}(S, A) \subseteq \mathcal{G}(S)$ и для любого $g \in \mathcal{G}(S)$ найдется такое A , что $g \in \mathcal{F}(S, A)$.

Значит, множество таких A , что $\mathcal{F}(S, A) \cap LGP(\mathcal{G}(S))$, плотно в множестве всех возможных A .

Теперь мы можем доказывать теоремы 1, 2 и 3 при выполнении следующих условий:

(1) S — простое многогранное множество с гипергранями $\{F_i\}_{i \in I_m}$;

(2) $A \in AGP$ и $a \notin \text{aff } F_i$ для всех $a \in A$, $i \in I_m$;

(3) $\mathcal{F}(S, A)$ содержит некоторое $g \in LGP(\mathcal{G}(S))$.

Для данного $g \in LGP(\mathcal{G}(S))$ будем для краткости писать g_{ajk} вместо g_{ijk} , если номер $a \in A$ равен i . Заметим, что при выполнении этих условий $H(g_{ajk}) = \text{aff}(a, F_j \cap F_k)$, так как

$$\text{aff}(a, F_j \cap F_k) \subseteq H(g_{ajk}) \quad \text{и} \quad \dim_a H(g_{ajk}) = \dim_a \text{aff}(a, F_j \cap F_k).$$

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что S — симплекс, так как X — многогранник. Доказательство будем проводить индукцией по $\dim_a S$. Если $\dim_a S = 1$ — все очевидно.

Обозначим для всех $I \subseteq I_m$

$$l_I = \sum_{i \in I_m} l_i.$$

Разобьем доказательство на два случая в зависимости от выполнения следующего условия:

$$|A \cap \bigcap_{i \in I} H_i| < l - l_I \quad \text{для всех } I \subseteq I_m \ (I \neq \emptyset). \quad (*)$$

Случай 1. Условие (*) не выполняется. Тогда существуют $I \subseteq I_m$ и $A' \subseteq A$ такие, что

$$|A'| \geq l - l_I \quad \text{и} \quad f_i(a) < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I, a \in A'.$$

Обозначим $I' = I_m \setminus I$. Уменьшая множество A' при необходимости, можно считать, что $|A'| = l - l_I = l_{I'}$. Пусть

$$M = \bigcap_{i \in I} F_i, \quad N = \bigcap_{i \in I'} F_i, \quad L = \text{aff } M.$$

Докажем, что

$$\text{conv}(\{a\} \cup N) \cap L \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad a \in A'.$$

Пусть p — ортогональная проекция на $L^\perp$ (всюду далее $L^\perp$ — подпространство $\mathbb{R}^n$ такое, что $L \perp L^\perp$ и $\text{codim } L^\perp = \dim_a L$), тогда $p(S)$ — симплекс с вершиной $p(L) = p(M)$ и противоположной ей гипергранью $p(N)$. Имеем,

$$[p(a)p(M)] \cap p(S) \neq \{p(M)\},$$

так как $f_i(a) < 0$, $f_i(M) = 0$, $i \in I, a \in A'$ и для некоторой окрестности U точки $p(M)$, имеем,

$$y \in U \cap p(S) \iff f_i(p^{-1}(y)) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Поэтому $[p(a)p(M)] \cap p(N) \neq \emptyset$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} p(L) = p(M) \in \text{conv}(\{p(a)\} \cup p(N)) &= p(\text{conv}(\{a\} \cup N)) \\ \text{conv}(\{a\} \cup N) \cap L &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Если $\dim_a M = 0$, то $I' = \{i'\}$ и для всех $a \in A'$

$$\text{conv}(\{a\} \cup N) \supseteq \text{conv}(M \cup N) = S.$$

Положим тогда $A_{i'} = A'$, тогда $C_{i'}$ уже покрывает S , а для остальных $i \in I$ определим A_i произвольно, чтобы их мощности были заданными числами. В этом случае разбиение $\{A_i\}$ построено и теорема доказана.

Если $\dim_a M > 0$, то для всех $a \in A'$ возьмем любую $a' \in L \cap \text{conv}(\{a\} \cup N)$, они образуют множество A'' . Так как $\dim_a M = m - |I| - 1 < m - 1$, то, по предположению индукции, для симплекса M , множества A'' и чисел l_i ($i \in I'$) существует разбиение $A'' = \bigcup_{i \in I'} A_i''$ такое, что

$$\bigcup_{i \in I'} \bigcap_{a' \in A_i''} \text{conv}(\{a'\} \cup F_i^M) \supseteq M$$

и $|A_i''| = l_i$, где F_i^M — гипергрань M . Соответствующие A_i'' подмножества A обозначим A_i ($i \in I'$).

Для $i \in I$ выберем множества A_i из $A \setminus \bigcup_{i \in I'} A_i$ произвольно, чтобы их мощности были заданными l_i . Тогда для всех $a' \in A_i''$ и соответствующих им $a \in A_i$

$$a' \in L \cap \text{conv}(\{a\} \cup N) \quad \text{и} \quad \text{conv}(\{a'\} \cup F_i) \supseteq \text{conv}(\{a\} \cup N),$$

поэтому

$$\text{conv}(\{a\} \cup F_i) \supseteq \text{conv}(\{a'\} \cup F_i).$$

Следовательно, для всех a из некоторого A_i , имеем

$$\text{conv}(\{a\} \cup F_i) \supseteq N$$

и

$$\bigcup_{i \in I'} \bigcap_{a \in A_i} \text{conv}(\{a\} \cup F_i^M) \supseteq M$$

Тогда

$$\bigcup_{i \in I_m} \bigcap_{a \in A_i} \text{conv}(\{a\} \cup F_i) \supseteq \bigcup_{i \in I'} \bigcap_{a \in A_i} \text{conv}(\{a\} \cup F_i^M) \supseteq \text{conv}(M \cup N) = S.$$

В этом случае теорема доказана.

Случай 2. Пусть условие (*) выполняется. Обозначим для всех $a \in A$ и $i \in I_m$

$$V_{ai} = \text{conv}(\{a\} \cup \text{rint } F_i) \setminus \{a\},$$

и для всех $i \in I_m$

$$U_i = \text{int } S \cap \bigcup_{A' \subseteq A, |A'| \geq l_i} \bigcap_{a \in A'} V_{ai}.$$

Очевидно, что U_i — открыты и $x \in \text{int } S \cap U_i$ тогда и только тогда, когда не менее чем для l_i элементов $a \in A$ $x \in V_{ai}$, иначе говоря, существуют такие $y \in \text{rint } F_i$, что $x \in (ay)$. Докажем, что $\{U_i\}_{i \in I_m}$ удовлетворяют условиям леммы 4.

Условие (i).

В самом деле, пусть $x \in U_i$ и для некоторого $y \in \text{rint } F_i$ $x' \in (xy)$. Пусть $x \in V_{ai}$, это значит, что найдется $z \in \text{rint } F_i$ такая, что $x \in (az)$. Тогда $(ax') \cap [zy] = z' \in \text{rint } F_i$ и $x' \in (az')$.

Значит x' вместе с x принадлежит V_{ai} . Рассматривая все такие a получаем, что $x' \in U_i$.

Условие (iii).

Пусть $p \in \text{bd } S$, $I = \{i : p \in F_i\}$ и $I' = I_m \setminus I$. Очевидно, что условие (iii) выполняется тогда и только тогда, когда для любой $x \in \text{int } S \cap N(p)$ найдется такое $i \in I$, что для не менее чем l_i точек $a \in A$ выполняется: $(ax) \cap \text{rint } F_i \neq \emptyset$.

Для некоторой окрестности $N(p)$ точки p , имеем,

$$S \cap N(p) = \{x \in N(p) : f_i(x) \geq 0 \text{ для всех } i \in I\}.$$

Пусть

$$A' = \{a \in A : \exists ap \cap S = \{p\}\},$$

тогда если $a \in A \setminus A'$, то найдется точка $x \in \exists ap \setminus \{p\}$ такая, что $f_i(x) \geq 0$ для всех $i \in I$. Имеем, $f_i(a) < 0$, $i \in I$, так как $f_i(p) = 0$, $i \in I$ и $f_i(a) \neq 0$ по условию (2). Тогда

$$A \cap \bigcap_{i \in I} H_i \supseteq A \setminus A'.$$

Значит, по условию (*),

$$|A \setminus A'| < l - l_I \implies |A'| \geq l_I + 1.$$

Для всех $a \in A$ точка $y_a(x) = \exists ax \cap \text{bd } S$ непрерывно зависит от $x \in S$, а так как $y_a(p) = p$, $a \in A'$, то найдется такая окрестность $N(p)$ точки p , что для всех $x \in N(p)$, $a \in A'$ и $i \notin I$, имеем: $y_a(x) \notin F_i$.

Покажем, что

$$N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Для этого нужно показать, что если $x \in N(p) \cap \text{int } S$, то для некоторого $i \in I$ найдется не менее l_i точек $a \in A'$ таких, что $y_a(x) \in \text{rint } F_i$, так как тогда для этих a $x \in (ay_a(x))$ и, следовательно, $x \in U_i$.

Предположим противное: для всех $i \in I$

$$|\{y_a(x)\}_{a \in A'} \cap \text{rint } F_i| < l_i,$$

то есть

$$|\{y_a(x)\}_{a \in A'} \cap \text{rint } F_i| \leq l_i - 1,$$

тогда не менее чем для $|I|$ точек $a \in A'$ (обозначим их множество A'') имеем:

$$y_a(x) \in F_{s(a)} \cap F_{t(a)}, \quad s(a), t(a) \in I.$$

Следовательно,

$$x \in \bigcap_{a \in A''} \text{aff}(a, F_{s(a)} \cap F_{t(a)}).$$

Поэтому,

$$\text{aff}(a, F_{s(a)} \cap F_{t(a)}) = H(g_{ast(a)t(a)}),$$

где g_{ast} определено выше, и

$$\{\text{aff } F_{s(a)}, \text{aff } F_{t(a)}\}_{a \in A''} \subseteq \{H(f_i)\}_{i \in I}.$$

Обозначим семейство отображений

$$\mathcal{G}' = \{\gamma : A'' \rightarrow L_1^N : H(\gamma(a)) \supseteq F_{s(a)} \cap F_{t(a)}\}.$$

Так как отображение сужения $\mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}'$ очевидно сюръективно, то для сужения $g' : a \mapsto g_{as(a)t(a)}$ отображения $g \in LGP(\mathcal{G}(S))$ получаем, что $g' \in LGP(\mathcal{G}')$. Поэтому, по лемме 2, для графа G с вершинами $\{f_i\}_{i \in I}$ с ребрами $(f_{s(a)}, f_{t(a)})$, $a \in A''$ и отображения g' , так как $|A''| \geq |I|$, для некоторого i имеем:

$$\bigcap_{a \in A''} H(g'_a) \subseteq H(f_i) = \text{aff } F_i.$$

Следовательно,

$$x \in \bigcap_{a \in A''} H(g'_a) \subseteq \text{aff } F_i \quad \text{и} \quad x \in \text{int } S$$

и получаем противоречие.

Условие (ii).

Аналогично предыдущему, если для некоторой точки

$$x \in \text{int } S, \quad y_a(x) \notin \text{rint } F_i \quad \text{при всех} \quad i \in I_m, a \in A,$$

то

$$x \in \bigcap_{a \in A} \text{aff}(a, \text{aff } F_{s(a)} \cap \text{aff } F_{t(a)}).$$

Применяя лемму 2 к графу G_m с вершинами $\{f_i\}_{i \in I_m}$ и ребрами

$$(f_{s(a)}, f_{t(a)}), \quad a \in A$$

получим, что $x \in \text{aff } F_i \cap \text{int } S$ для некоторого i , то есть противоречие.

Значит, по лемме 4, есть $x \in \bigcap_{i \in I_m} U_i$. Тогда для всех $i \in I_m$ найдется не менее l_i $a \in A$ таких, что $x \in V_{ai}$.

А так как для каждой $a \in A$ $x \in V_{ai}$ не более чем для одного i , то на самом деле для каждого $i \in I_m$ найдется множество $A_i \subseteq A$ из ровно l_i элементов, такое, что для всех $a \in A_i$ $x \in V_{ai}$. При этом множества A_i попарно не пересекаются.

Тогда имеем:

$$x \in \text{conv}(\{a\} \cup \text{rint } F_i) \quad \text{для всех} \quad i \in I_m, a \in A_i.$$

Так как для всех $i \in I_m$ и $a \in A_i$

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x\} \cup F_i) \quad \text{и} \quad \text{conv}(\{a\} \cup F_i) \supseteq \text{conv}(\{x\} \cup F_i),$$

то $S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \bigcap_{a \in A_i} \text{conv}(\{a\} \cup F_i)$ и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, когда S — симплекс. Обозначим

$$V_i = \{x \in S : |\text{int conv}(\{x\} \cup F_i) \cap A| < l_i\}.$$

Ясно, что V_i — замкнуты и V_i — F_i -звезды, так как если $x \in V_i$, $y \in F_i$ и $x' \in [xy]$, то $\text{int conv}(\{x'\} \cup F_i) \subseteq \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$.

Предположим, что $S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} V_i$, тогда по лемме 3 найдется некоторое $x \in \bigcap_{i \in I_m} V_i$. Отсюда следует, что найдется не менее m точек $a \in A$ таких, что $a \notin \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$ для всех i , обозначим множество таких a за A' . Тогда для всех $a \in A'$

$$a \in \text{conv}(\{x\} \cup (\text{aff } F_{s(a)} \cap \text{aff } F_{t(a)})).$$

Пусть $I = \{i : x \notin F_i\}$, тогда $s(a), t(a) \in I$ для всех $a \in A'$, так как иначе $a \in F_i$, что невозможно по условию (2). Иначе говоря,

$$x \in \bigcap_{a \in A'} \text{aff}(a, \text{aff } F_{s(a)} \cap \text{aff } F_{t(a)}).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 применим лемму 2 к графу с вершинами $\{f_i\}_{i \in I}$, ребрами

$$(f_{s(a)}, f_{t(a)}), a \in A'$$

и сужению $g'(a) = g_{as(a)t(a)}$ отображения g . Тогда получим $x \in \text{aff } F_i$, $i \in I$, что противоречит определению множества I .

Значит, существует $x \in S \setminus \bigcup_{i \in I_m} V_i$. Тогда для каждого $i \in I_m$ найдется не менее l_i точек $a \in A$ таких, что $a \in \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$. Так как множества $\text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$ ($i \in I_m$) не пересекаются, то в каждом из них лежит ровно l_i точек A , поэтому можно обозначить

$$A_i = A \cap \text{int conv}(\{x\} \cup F_i).$$

Тогда для любых $i \in I_m$

$$\text{conv}(A_i \cup F_i) \subseteq \text{conv}(\{x\} \cup F_i),$$

следовательно, для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int conv}(A_j \cup F_j) = \emptyset.$$

Значит, для симплекса теорема доказана.

Пусть теперь S — не симплекс, тогда $\bigcap_{i \in I_m} F_i \neq \emptyset$.

Рассмотрим случай, когда $\bigcap_{i \in I_m} F_i = \{v\}$. Легко видеть, что существует такая гиперплоскость H , что $S' = S \cap H$ — симплекс с гипергранями $F'_i = F_i \cap H$, $i \in I_m$.

Пусть для каждой точки $a \in A$ $p(a)$ — образ a при центральной проекции из точки v на H . По доказанному ранее, для $A' = p(A)$ и симплекса S' существует разбиение $A = \bigcup_{i \in I_m} A_i$ такое, что $|A_i| = l_i$ и при любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int conv}(p(A_i) \cup F'_i) \cap \text{int conv}(p(A_j) \cup F'_j) = \emptyset.$$

Возьмем конус $C_i = \text{int conv}(F_i \cup \bigcup_{a \in A_i} [va])$ с вершиной v , образованный лучами, которые пересекают $\text{int conv}(p(A_i) \cup F'_i)$ без точки v . Очевидно, что для всех $i \neq j \in I_m$ имеем:

$$C_i \cap C_j = \emptyset$$

и для всех $i \in I_m$

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \subseteq \text{int conv}(F_i \cup \bigcup_{a \in A_i} [va]) = C_i.$$

Поэтому для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int conv}(A_j \cup F_j) = \emptyset.$$

В этом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь последний случай: $\dim_a L > 0$, где $L = \bigcap_i F_i$. Пусть p — ортогональная проекция на $L^\perp$. Тогда $p(L)$ — точка. Из доказанного выше, найдется разбиение $A = \bigcup_{i \in I_m} A_i$ такое, что для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int conv}(p(A_i) \cup p(F_i)) \cap \text{int conv}(p(A_j) \cup p(F_j)) = \emptyset.$$

Тогда, очевидно, что

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int conv}(A_j \cup F_j) = \emptyset$$

и теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Для $i \in I_m$ положим

$$U_i = \{x \in \text{int } S : [xa] \cap \text{rint } F_i \neq \emptyset \text{ для не менее } l_i \text{ элементов } a \in A\}.$$

Ясно, что U_i — открыты. Покажем, что семейство $\{U_i\}_{i \in I_m}$ удовлетворяет условиям (i)-(iii) леммы 4.

Условие (i). Пусть для некоторой $a \in A$

$$x \in U_i, \quad y \in \text{rint } F_i, \quad x' \in [xy] \quad \text{и} \quad z = [xa] \cap \text{rint } F_i.$$

Точки x' и a находятся с разных сторон от гиперплоскости $\text{aff } F_i$, поэтому существует $z' = [x'a] \cap \text{aff } F_i$, $z' \in [zy]$ и $z' \in \text{rint } F_i$.

Условие (iii). Пусть

$$p \in \text{bd } S, \quad I = \{i : p \in F_i\}.$$

Докажем, что есть окрестность $N(p)$ точки p такая, что

$$N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

то есть для всех $x \in \text{int } S \cap N(p)$ при некотором $i \in I$ не менее l_i отрезков $[x_j x]$ пересекают $\text{rint } F_i$.

Пусть $A' = \{a \in A : a \in \bigcup_{i \in I} H_i\}$, тогда, по условию теоремы, $|A| \geq |I|$ и $[ap] \cap \text{bd } S = \{p\}$ для всех $a \in A'$. Для всех $a \in A'$ и $x \in S$ пусть $y_a(x)$ — самая дальняя от x точка пересечения $[ax] \cap \text{bd } S$. Очевидно, что $y_a(x)$ непрерывно зависят от $x \in S$, а так как $y_a(p) = p$ для всех $a \in A'$, то найдется такая окрестность $N(p)$ точки p , что для всех $x \in N(p)$, $a \in A'$ и $i \notin I$, имеем, $y_a(x) \notin F_i$.

Докажем, что для всех $x \in N(p) \cap \text{int } S$ найдется $i \in I$ такое, что $x \in U_i$. Переформулируем это утверждение: не менее l_i точек $y_a(x)$ ($a \in A'$) лежат в $\text{rint } F_i$ для некоторых $i \in I$. Предположим противное тогда по принципу Дирихле получим, что для не менее $|I|$ точек $a \in A'$, которые обозначим A'' , $y_a(x)$ лежит в $F_{s(a)} \cap F_{t(a)}$ для некоторого $x \in N(p) \cap \text{int } S$. Тогда

$$x \in \bigcap_{a \in A''} \text{aff}(a, \text{aff } F_{s(a)} \cap \text{aff } F_{t(a)}), \quad s(a), t(a) \in I.$$

Аналогично, как и в доказательстве теоремы 1, применяя лемму 2, получаем противоречие, так как $|A''| \geq |I|$.

Условие (ii). Покажем, что $\text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} U_i$. Если для некоторой точки x для каждого i менее l_i точек $y_a(x)$ (множество соответствующих точек a обозначим A'') лежат в $\text{rint } F_i$, то, как и выше, по принципу Дирихле получаем, что $x \in \bigcap_{a \in A''} \text{aff}(a, \text{aff } F_{s(a)} \cap \text{aff } F_{t(a)})$. Получили противоречие, так как $|A''| \geq m+1$.

Если S — симплекс, то $\bigcap_{i \in I_m} U_i \neq \emptyset$ по лемме 4. Если $\bigcap_{i \in I_m} F_i = \{v\}$, то, как и выше, пусть H — гиперплоскость такая, что $S' = S \cap H$ — симплекс с гипергранями $F'_i = F_i \cap H$, $i \in I_m$. Если применить лемму 4 к S' , и множествам $U'_i = U_i \cap H$, то получим, что

$$\bigcap_{i \in I_m} U'_i \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap_{i \in I_m} U_i \neq \emptyset.$$

Для любого $x \in \bigcap_{i \in I_m} U_i$ обозначим

$$A_i = \{a \in A : y_a(x) \in \text{rint } F_i\}.$$

Тогда по определению U_i имеем $|A_i| \geq l_i$, а так как $\sum_{i \in I_m} l_i = |A|$ и множества A_i не пересекаются, то на самом деле $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$ и множества A_i задают разбиение A .

Пусть R_i — конус с вершиной x , образованный лучами $[xy]$, где $y \in \text{rint } F_i$ без точки x . При $k \neq l \in I_m$ $R_k \cap R_l = \emptyset$ и $A_i \subset R_i$, так как для всех $a \in A_i$ имеем: $\text{rint } F_i \ni y_a(x) \in [ax]$. Поэтому

$$\text{int conv}(A_k \cup F_k) \cap \text{int conv}(A_l \cup F_l) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m,$$

так как $\text{int conv}(A_i \cup F_i) \subseteq R_i$, и при всех $i \in I_m$

$$\text{int conv}(A_i \cup F_i) \cap \text{int } S = \emptyset,$$

так как A_i и S лежат по разные стороны от гиперплоскости $\text{aff } F_i$.

Осталось рассмотреть один случай: $\dim_a \bigcap_{i \in I_m} F_i > 0$, $L = \bigcap_{i \in I_m} F_i$. Как при доказательстве предыдущей теоремы, возьмем проекцию p на $L^\perp$. Точно так же, как и в предыдущем доказательстве, теорема следует из аналогичного, уже доказанного, утверждения для проекции $p(S)$.

4. Некоторые следствия

Чтобы сформулировать одно следствие, для начала сформулируем два свойства системы замкнутых выпуклых множеств $\{V_i\}_{i \in I_m}$, $V_i \subseteq L$, где L — некоторое линейное пространство. Аналоги этих свойств уже обсуждались в работе [2].

Свойство 1. Для любого набора векторов $v_i \in L$, $i \in I_m$ найдется перестановка $\sigma \in S^m$ такая, что

$$\bigcup_{i \in I_m} (V_i + v_{\sigma(i)}) = L.$$

Свойство 2. Для любого набора векторов $v_i \in L$, $i \in I_m$ найдется такая перестановка $\sigma \in S^m$ такая, что множества

$$V'_i = V_i + v_{\sigma(i)}$$

попарно не пересекаются по внутренним точкам.

Введем также два определения.

Определение. Разбиение множества $V \subseteq \mathbb{R}^n$ на множества V_i ($i \in I_m$) называется *линейным разбиением*, если найдутся такие линейные функции $\lambda_i \in L_1^n$ ($i \in I_m$), что

$$V_i = \{x \in V : \forall j \in I_m \lambda_i(x) \geq \lambda_j(x)\}.$$

Следующее определение является определением по индукции:

Определение. Разбиение множества $V \subseteq \mathbb{R}^n$ на множества V_i ($i \in I_m$) называется *иерархическим линейным разбиением*, если это линейное разбиение, или множество I_m можно разбить на подмножества $J_1, J_2, \dots, J_k$ ($k \geq 2$) такие, что множества $V'_j = \bigcup_{i \in J_j} V_i$ ($j \in I_k$) дают линейное разбиение V , и для каждого $j \in I_k$ множества V_i ($i \in J_j$) дают иерархическое линейное разбиение V'_j .

Сформулируем также некоторое усиление свойств 1 и 2:

Свойство 3. Для любого набора векторов $A \subset L$, $|A| = l$, и набора натуральных чисел l_i ($i \in I_m$, $\sum_{i \in I_m} l_i = l$) найдется разбиение множества A на множества A_i ($i \in I_m$), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$;
- 2) Множества $W_i = \bigcap_{a \in A_i} (V_i + a) = V_i \dot{-} (-A_i)$ ($i \in I_m$) покрывают L , то есть

$$\bigcup_{i \in I_m} W_i = L.$$

Свойство 4. Для любого набора векторов $A \subset L$, $|A| = l$, и набора натуральных чисел l_i ($i \in I_m$, $\sum_{i \in I_m} l_i = l$) найдется разбиение множества A на множества A_i ($i \in I_m$), удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $|A_i| = l_i$ для всех $i \in I_m$;
- 2) Множества $W_i = \text{conv} \bigcup_{a \in A_i} (V_i + a) = V_i + \text{conv} A_i$ ($i \in I_m$) попарно не пересекаются по внутренним точкам, то есть для любых $i \neq j \in I_m$

$$\text{int } W_i \cap \text{int } W_j = \emptyset.$$

Заметим, что свойства 1 и 2 являются частными случаями свойств 3 и 4, если положить все $l_i = 1$.

Сформулируем следствие теорем 1 и 2:

Следствие 1. Иерархические линейные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ обладают свойствами 3 и 4 в $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства этого следствия нам потребуются несколько вспомогательных утверждений:

Лемма 5. Если система выпуклых замкнутых множеств $V_i \subseteq L$ допускает факторизацию по некоторому подпространству $M \subseteq L$, что равносильно тому, что $V_i = V_i + M$ ($i \in I_m$), то система множеств $\pi(V_i)$ обладает одним из свойств 1, 2, 3 или 4 в L/M , где $\pi : L \rightarrow L/M$ — естественная проекция, тогда и только тогда, когда им обладает система множеств $V_i \subseteq L$.

Лемма 6. Если система выпуклых замкнутых множеств $V_i \subseteq L$ обладает одним из свойств 1 или 3 в L , и для подпространства $M \subseteq L$ и любого $i \in I_m$ $V_i \cap M \neq \emptyset$, то система множеств $V_i \cap M$ обладает соответственно одним из свойств 1 или 3 в M .

Лемма 7. Если система выпуклых замкнутых множеств $V_i \subseteq L$ обладает одним из свойств 2 или 4 в L , и для подпространства $M \subseteq L$ и любого $i \in I_m$ $V_i \cap M \neq \emptyset$ и $\text{int}(V_i \cap M) = (\text{int } V_i) \cap M \neq \emptyset$, то система множеств $V_i \cap M$ обладает соответственно одним из свойств 2 или 4 в M .

Доказательство этих трех лемм очевидно.

Лемма 8. Если для системы выпуклых замкнутых множеств $V_i \subseteq L$ существует последовательность систем $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$ такая, что (смысл предела пояснен в замечании ниже) $\forall i \in I_m$

$$V_i = \lim_n V_i^n$$

и для каждой из систем $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$ выполняется свойство 1, 2, 3 или 4, то для $\{V_i\}_{i \in I_m}$ выполняется то же свойство 1, 2, 3 или 4.

Замечание. Предел в предыдущей лемме рассматривается в следующем семействе метрик на выпуклых множествах

$$\text{dist}_R(A, B) = \text{dist}_H(A \cap B_0(R), B \cap B_0(R)),$$

где dist_H — метрика Хаусдорфа, а $B_0(R)$ — шар радиуса R с центром в нуле.

Доказательство. Пусть мы имеем множество A и набор чисел $\{l_i\}_{i \in I_m}$. В случае свойств 1 и 2 просто положим $l_i = 1$ для всех $i \in I_m$, так что эти свойства далее отдельно рассматриваться не будут.

Покажем, что для $\{V_i\}_{i \in I_m}$ выполняется свойство 3 или 4.

Так как оно выполняется для каждого семейства $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$ с множеством A и набором чисел $\{l_i\}_{i \in I_m}$, то применим формулировку свойства.

Тогда для каждого n получим некоторое разбиение A , переходя к подпоследовательности, можно считать, что разбиение для всех n получилось одно и то же.

Теперь утверждение свойства 4 следует из того, что

$$V_i + \text{conv } A_i = \lim_n (V_i^n + \text{conv } A_i).$$

Для свойства же 3 докажем от противного: пусть найдется точка x такая, что для любого $i \in I_m$ $x \notin V_i \triangleq (-A_i)$. Тогда из замкнутости множеств V_i следует, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{dist}(x, V_i + a_i) > \varepsilon$ для всех $i \in I_m$ и некоторых $a_i \in A_i$. Значит, для достаточно больших n будет $\text{dist}(x, V_i + a_i) > \frac{\varepsilon}{2}$, что означает, что $x \notin V_i^n \triangleq (-A_i)$ для всех $i \in I_m$ и достаточно больших n . Это противоречит выбору разбиения $\{A_i\}_{i \in I_m}$ по свойству 3 для семейства $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$.

Доказательство следствия 1. Докажем это следствие сначала для такого частного случая: разбиение L на множества V_i ($i \in I_m$) линейно и таково, что $m = \dim L + 1$ и система уравнений

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \dots = \lambda_m(x)$$

имеет одно решение — 0. Тогда $\lambda_i \in L^*$.

Для каждого $i \in I_m$ система уравнений

$$\forall k, l \neq i \quad \lambda_k(x) = \lambda_l(x)$$

имеет в качестве решения прямую, причем один из лучей этой прямой, определяемый неравенством $\lambda_i(x) < \lambda_k(x)$ для некоторого $k \neq i$, не содержится во множестве V_i , выберем на нем вектор $s_i \neq 0$.

Тогда получится, что V_i — это симплицальный конус, натянутый на векторы $s_1, \dots, s_m$ без вектора s_i , а векторы s_i образуют симплекс S с гипергранями F_i противоположными вершинам s_i соответственно, содержащий внутри себя точку 0.

Рассмотрим последовательность положительных чисел $t_n \rightarrow \infty$ такую, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $t_n S \supseteq A$.

Применим к множеству A , заданным числам $\{l_i\}_{i \in I_m}$ и симплексу $t_n S$ теорему 1 или 2. Переходя к подпоследовательности $\{t_n\}$ можно считать, что разбиение для всех $t_n S$ получилось одно и то же.

Можно заметить, что для любого $a \in A$, $i \in I_m$

$$V_i + a = \lim_n \text{conv}(\{a\} \cup t_n F_i).$$

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 8, получим, что свойства 3 и 4 выполнены.

Докажем теперь следствие для линейного разбиения на множества V_i , у которого компоненты степени 1 функций $\lambda_k - \lambda_1$ ($k = 2, \dots, m$) линейно независимы.

В этом случае $m \leq \dim L + 1$ и система уравнений

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \dots = \lambda_m(x)$$

имеет решением аффинное подпространство M , сделав сдвиг, можно считать M линейным подпространством. Тогда V_i допускает факторизацию по M и после факторизации будет $m = \dim L + 1$, этот случай уже рассмотрен. По лемме 5 следствие в этом случае доказано.

Докажем теперь для линейного разбиения, для которого при всех $i \in I_m$ $\text{int } V_i \neq \emptyset$.

Если $\lambda_k - \lambda_1$ ($k = 2, \dots, m$) линейно зависимы, то вложим L в $L' = L \oplus \mathbb{R}^{m-1}$, обозначим координаты в $\mathbb{R}^{m-1}$ за $x'_2, \dots, x'_m$. Тогда положим $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\lambda'_2 = \lambda_2 + x'_2, \dots, \lambda'_m = \lambda_m + x'_m$. Компоненты степени 1 функций $\lambda'_k - \lambda'_1$ ($k > 1$) будут линейно независимы. Для задаваемого $\{\lambda'_i\}_{i \in I_m}$ линейного разбиения V'_i выполняется $V_i = L \cap V'_i$ и $\text{int } V_i = (\text{int } V'_i) \cap L \neq \emptyset$. Тогда по леммам 6 и 7 следствие доказано и в этом случае.

Рассмотрим теперь любое линейное разбиение, в котором $\text{int } V_i = \emptyset$ для некоторых $i \in I_m$. Пусть функции l_i ($i \in I_m$) задают это линейное разбиение. Покажем, как превратить его в разбиение с непустыми $\text{int } V_i$ малыми изменениями функций l_i .

Возьмем некоторое $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим те V_i , для которых $\dim V_i$ минимальна, обозначим соответствующее им множество индексов за I . Если эта размерность меньше $\dim L$, то к соответствующим им функциям $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ можно прибавить некоторое число $\varepsilon_1 < \frac{1}{n}$ так, что у множеств $\{V_i\}_{i \in I}$ появится непустая внутренность, размерность других V_i при этом не уменьшится, при этом отличие новых $\{V_i\}_{i \in I_m}$ от исходных в метрике Хаусдорфа будет не более $\frac{1}{n}$.

Это можно сделать, так как, выбрав по одной $v_j \in \text{rint } V_j$ для каждого $j \notin I$, мы получим, что выполняется строгое неравенство $\lambda_i(v_j) < \lambda_j(v_j)$ ($i \in I, j \notin I$), отсюда следует, что при изменении λ_i ($i \in I$) на достаточно малое ε_1 множества V_j все еще будут содержать выбранные точки v_j . Рассмотрев еще несколько наборов точек $v_j \in V_j$ получим, что при достаточно малом ε_1 множества V_j ($j \notin I$) не уменьшат своей размерности. То, что появится непустая внутренность и при достаточно малых ε_1 отличие новых $\{V_i\}_{i \in I_m}$ от исходных в метрике Хаусдорфа будет не более $\frac{1}{n}$, очевидно.

Повторяя этот процесс несколько раз при необходимости, прибавляя к некоторым из λ_i не более $\dim L$ раз числа $\varepsilon_k < \frac{1}{n}$ мы добьемся того, что у всех V_j размерность будет равна $\dim L$, а значит, они будут иметь непустую внутренность. Обозначим полученную таким образом систему $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$.

Для каждой системы в последовательности $\{V_i^n\}_{i \in I_m}$ выполняются свойства 3 и 4, значит, по лемме 8 они выполняются и для $\{V_i\}_{i \in I_m}$.

Таким образом, линейные разбиения обладают свойствами 3 и 4.

Докажем теперь для иерархического линейного разбиения индукцией по числу множеств разбиения.

Пусть задано множество A и набор $\{l_i\}_{i \in I_m}$. Пусть I_m разбито на J_j ($j \in I_k$) и $V_j' = \bigcup_{i \in J_j} V_i$.

Тогда применим уже доказанное утверждение о свойстве 3 или 4 к линейному разбиению $\{V_j'\}_{j \in I_k}$, множеству A и числам $l_j' = \sum_{i \in J_j} l_i$. Множество A будет разбито на подмножества A_j' ($j \in I_k$) так, что для свойства 3

$$\bigcup_{j \in I_k} \bigcap_{a \in A_j'} (V_j' + a) = L,$$

или для свойства 4

$$\text{int}(V_{j_1}' + \text{conv } A_{j_1}') \cap \text{int}(V_{j_2}' + \text{conv } A_{j_2}') = \emptyset \quad \forall j_1 \neq j_2 \in I_k.$$

Теперь мы знаем, что множества V_i ($i \in J_j$) дают иерархическое линейное разбиение V_j' . Можно взять такие V_i'' ($i \in J_j$), что $V_i = V_i'' \cap V_j'$ и множества V_i'' ($i \in J_j$) дают иерархическое линейное разбиение L .

Применим к каждому семейству V_i'' ($i \in J_j$), множеству A_j' и набору $\{l_i\}_{i \in J_j}$ предположение индукции. При этом получим разбиения каждого A_j' на множества A_i'' ($i \in J_j$) такие, что $|A_i''| = l_i$ и, в случае свойства 3

$$\bigcup_{i \in J_j} \bigcap_{a \in A_i''} (V_i'' + a) = L,$$

или для свойства 4

$$\text{int}(V_{i_1}'' + \text{conv } A_{i_1}'') \cap \text{int}(V_{i_2}'' + \text{conv } A_{i_2}'') = \emptyset \quad \forall i_1 \neq i_2 \in J_j.$$

Теперь, в случае свойства 3

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{a \in A_i''} (V_i + a) \right) \cap \left(\bigcap_{a \in A_j'} (V_j' + a) \right) &= \\ &= \left(\bigcap_{a \in A_i''} ((V_i + a) \cap (V_j' + a)) \right) \cap \left(\bigcap_{a \in A_j'} (V_j' + a) \right) = \\ &= \left(\bigcap_{a \in A_i''} (V_i'' + a) \right) \cap \left(\bigcap_{a \in A_j'} (V_j' + a) \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\bigcup_{i \in J_j} \bigcap_{a \in A_i''} (V_i + a) \supseteq V_j',$$

и

$$\bigcup_{i \in I_m} \bigcap_{a \in A_i''} (V_i + a) = L.$$

Значит, свойство 3 выполняется.

Для свойства 4 для индексов $i_1 \neq i_2$, лежащих в одном и том же J_j

$$\text{int}(V_{i_1} + \text{conv } A''_{i_1}) \cap \text{int}(V_{i_2} + \text{conv } A''_{i_2}) \subseteq \text{int}(V''_{i_1} + \text{conv } A''_{i_1}) \cap \text{int}(V''_{i_2} + \text{conv } A''_{i_2}) = \emptyset,$$

а для индексов $i_1 \neq i_2$, лежащих соответственно в J_{j_1} и J_{j_2}

$$\text{int}(V_{i_1} + \text{conv } A''_{i_1}) \cap \text{int}(V_{i_2} + \text{conv } A''_{i_2}) \subseteq \text{int}(V'_{j_1} + \text{conv } A'_{j_1}) \cap \text{int}(V'_{j_2} + \text{conv } A'_{j_2}) = \emptyset.$$

То есть для любых $i_1, i_2 \in I_m$

$$\text{int}(V_{i_1} + \text{conv } A''_{i_1}) \cap \text{int}(V_{i_2} + \text{conv } A''_{i_2}) = \emptyset.$$

Значит, свойство 4 тоже выполняется.

Свойствами 1 и 2 (тем более 3 и 4) обладают не все разбиения $\mathbb{R}^n$ на выпуклые замкнутые множества, что можно доказать построением контрпримера (см. [2]):

Пример. Возьмем $\mathbb{R}^3$ с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Обозначим

$$C_+ = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0\}$$

$$C_- = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 0\}$$

$$C_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 \geq 0, \xi_2 \leq 0\}$$

$$C_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_2 \geq 0, \xi_3 \leq 0\}$$

$$C_3 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 \geq 0, \xi_1 \leq 0\}$$

Эти пять конусов покрывают $\mathbb{R}^3$ и не пересекаются по внутренним точкам.

Рассмотрим любые пять разных точек $\{v_i\}_{i \in I_5}$, лежащих на прямой l , заданной уравнением $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$.

Эти пять точек и пять конусов не обладают свойствами 1 и 2. Это легко следует из того факта, что разные прямые, параллельные l , пересекают конусы по отрезкам, порядок расположения которых на прямой меняется в зависимости от выбора прямой. При замене же конусов C_i на $C_i + v_i$ эти отрезки заменятся на свои сдвиги вдоль l , и можно заметить, что если они покроют какую-то одну прямую $l' \parallel l$, то они не покроют какую-то другую $l'' \parallel l$ (аналогично, если они не пересекаются на одной, то они пересекутся на другой).

Введем одно определение:

Определение. Разбиение $\mathbb{R}^n$ на выпуклые замкнутые множества V_i ($i \in I_m$) называется *упорядоченным вдоль направленной прямой l* , если семейство $\{V_i\}$ можно так упорядочить, что для любой прямой l' , параллельной l , множества $V_i \cap l'$ расположены на ней в соответствии с порядком семейства $\{V_i\}$.

Приведенный выше пример наводит на мысль сформулировать следующие гипотезы, аналоги которых уже формулировались в работе [2].

Гипотеза 1. Разбиения $\mathbb{R}^n$, упорядоченные вдоль любой прямой, обладают свойствами 1 и 2 в $\mathbb{R}^n$.

Отдельно сформулируем частный случай гипотезы 1 на плоскости. На плоскости любое разбиение упорядочено, поэтому формулировка упрощается. Возможно, этот частный случай будет проще доказать:

Гипотеза 2. Разбиения $\mathbb{R}^2$ на выпуклые замкнутые множества обладают свойствами 1 и 2 в $\mathbb{R}^2$.

Даже если гипотеза 2 не верна, можно спросить, какие необходимые и достаточные условия нужно наложить на выпуклое и замкнутое разбиение $\mathbb{R}^2$, чтобы оно обладало свойствами 1, 2, 3 или 4.

Из следствия 1 можно вывести еще одно интересное утверждение (см. [2]):

Следствие 2. Пусть даны два множества в $\mathbb{R}^n$ из m точек каждое — $A = \{a_i\}_{i \in I_m}$ и $B = \{b_i\}_{i \in I_m}$. Тогда найдется такая перестановка $\sigma \in S^m$, что для любых $i, j \in I_m$

$$(b_i - b_j, a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)}) \geq 0.$$

Знак $\geq$ можно заменить на $\leq$, для этого достаточно рассмотреть $-B$ вместо B .

Доказательство. Для начала заметим, что можно считать, что $n = m - 1$. Если $n < m - 1$, то мы можем вложить $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{m-1}$, если же $n > m - 1$, то мы можем спроецировать B на $\text{aff } A$ и далее работать в $\text{aff } A$, значения скалярных произведений при этом не изменятся.

Теперь, так же, как при доказательстве всех теорем этой работы, можно считать, что точки множества B находятся в общем положении, иначе говоря, они представляют собой симплекс в $\mathbb{R}^{m-1}$. Также можно считать, что начало координат является его центром описанной сферы.

Рассмотрим теперь множества:

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^{m-1} : \forall j \neq i \quad (b_i, x) \geq (b_j, x)\} \quad i, j \in I_m.$$

Заметим, что множества V_i задают линейное разбиение $\mathbb{R}^n$ и их внутренности не пусты.

По следствию 1 семейство $\{V_i\}_{i \in I_m}$ обладает свойством 2.

Применим формулировку этого свойства для набора векторов $\{ta_j\}_{j \in I_m}$, где $t > 0$ — некоторое число, которое будет выбрано позднее.

Мы получим перестановку σ такую, что множества $V_i + ta_{\sigma(i)}$ покрывают $\mathbb{R}^{m-1}$.

Рассмотрим теперь пересечение некоторой пары V_i и V_j . Это пересечение $W_{ij} = V_i \cap V_j$ (стенка) — $(m-2)$ -мерное выпуклое многогранное множество, перпендикулярное отрезку $[b_i b_j]$.

Выберем некоторую точку $p \in \text{rint } W_{ij}$. У нее есть окрестность U , такая, что $U \subset V_i \cup V_j$.

Ясно, что при достаточно малых t для всех перестановок σ пересечения $U \cap \text{int}(V_i + a_{\sigma(i)})$ и $U \cap \text{int}(V_j + a_{\sigma(j)})$ не пусты и не пересекаются между собой только при условии, что

$$(a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)}, b_i - b_j) \geq 0.$$

Значит, при достаточно малом t и соответствующей σ это неравенство будет выполняться для всех $i, j \in I_m$.

Замечательно, что следствие 2 можно доказать более элементарно, не используя следствие 1:

Элементарное доказательство следствия 2. Для каждой перестановки σ рассмотрим сумму

$$S_\sigma = \sum_{l \in I_m} (b_l, a_{\sigma(l)}).$$

Пусть σ — одна из тех перестановок, для которых S_σ максимальна. Для любых $i, j \in I_m$ рассмотрим перестановку σ' такую, что

$$\sigma'(i) = \sigma(j), \quad \sigma'(j) = \sigma(i), \quad \sigma'(l) = \sigma(l) \quad (l \neq i, j).$$

По выбору σ $S_\sigma - S_{\sigma'} \geq 0$, но

$$\begin{aligned} S_\sigma - S_{\sigma'} &= \sum_{l \in I_m} (b_l, a_{\sigma(l)}) - \sum_{l \in I_m} (b_l, a_{\sigma'(l)}) = \\ &= (b_i, a_{\sigma(i)}) + (b_j, a_{\sigma(j)}) - (b_i, a_{\sigma'(i)}) + (b_j, a_{\sigma'(j)}) = \\ &= (b_i, a_{\sigma(i)}) + (b_j, a_{\sigma(j)}) - (b_i, a_{\sigma(j)}) + (b_j, a_{\sigma(i)}) = \\ &= (b_i - b_j, a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$(b_i - b_j, a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)}) \geq 0$$

для всех $i, j \in I_m$.

Вышеприведенный результат позволяет получить элементарное доказательство частного случая следствия 1:

Следствие 3. Линейные разбиения $L = \mathbb{R}^n$ обладают свойством 2.

Доказательство. Так же, как в доказательстве следствия 1, по леммам 5 и 7 достаточно рассмотреть такие разбиения, для которых 0 является решением системы

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \dots = \lambda_m(x).$$

Определим векторы b_i так:

$$\lambda_i(x) = (b_i, x).$$

Пусть в формулировке свойства 2 дано некоторое множество $V = \{v_i\}_{i \in I_m}$. Применим к множествам $B = \{b_i\}_{i \in I_m}$ и V следствие 2.

Тогда получим перестановку σ такую, что

$$(b_i - b_j, v_{\sigma(i)} - v_{\sigma(j)}) \geq 0$$

для всех $i, j \in I_m$.

Заметим, что для любых $i \neq j \in I_m$ множества $\text{int } V_i$ и $\text{int } V_j$ разделяются гиперплоскостью

$$(b_i - b_j, x) = 0,$$

так как для любых $x \in V_i, y \in V_j$ необходимо

$$(b_i, x) - (b_j, x) \geq 0 \quad (b_i, y) - (b_j, y) \leq 0.$$

Следовательно, для любых $x \in V_i, y \in V_j$

$$(b_i - b_j, x + v_{\sigma(i)}) \geq (b_i - b_j, y + v_{\sigma(j)}) \leq 0,$$

поэтому $\text{int}(V_i + v_{\sigma(i)})$ и $\text{int}(V_j + v_{\sigma(j)})$ не пересекутся.

5. Заключение

Автор благодарен В. Л. Дольникову за содержательное обсуждение и всестороннюю поддержку.

Литература

- [1] Карасев Р.Н. Об одной задаче А. Бездека // Моделирование и анализ информационных систем. 2000. 7. №1. С. 18–29.
- [2] Karasev R.N. On a conjecture of A. Bezdek // Discrete and Computational Geometry. 2002. 27. №3. P. 419–439.
- [3] Bezdek, A.: Covering a polygon by triangles with fixed vertices // Geometriae Dedicata. 2000. 80. №50. P. 73–79.
- [4] Богомольная А.В., Назаров Ф.Л., Рукшин С.Е. Покрытие выпуклого многоугольника треугольниками с фиксированными вершинами // Мат. Заметки. 1988. 43. №2. С. 191–195 и 286.
- [5] Произволов В.В. О некоторых нерешенных задачах комбинаторной геометрии // Тезисы I Всесоюзной конференции по комбинаторной геометрии. Батуми, 16–20 сентября 1985, С. 54.

УДК 681.3

О разрешимости задачи проверки модели для модального μ -исчисления и некоторых классов вполне структурированных систем переходов

Кузьмин Е.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 5 марта 2003

Работа посвящена рассмотрению задачи проверки модели для класса вполне структурированных систем переходов автоматного типа. Для этого класса и формулы модального μ -исчисления, построенной без отрицаний и оператора наибольшей неподвижной точки ν , задача проверки модели является разрешимой, если множества состояний, удовлетворяющих элементарным высказываниям, являются верхними конусами.

1. Введение

Одной из важных задач при проектировании программного обеспечения является проверка корректности параллельных систем. Под корректностью понимается полное соответствие системы задачам, для которых она создается. Корректность определяется в соответствии с формальной спецификацией, описывающей желаемое поведение системы. Процесс проверки соответствия системы требованиям, заданным в спецификации, называется верификацией.

Проверка модели (model checking) – один из подходов к решению проблемы верификации. В качестве языков спецификации для выражения свойств систем при этом подходе используются темпоральные логики. Существуют два основных класса темпоральных логик, различающихся их интерпретацией: логики ветвящегося и линейного времени. Задача проверки модели состоит в определении выполнимости для системы, заданной формальным образом, свойства, записанного в виде формулы темпоральной логики.

Проверка модели широко используется при верификации систем с конечным числом состояний, но эта автоматическая техника может быть применена для некоторых классов систем с бесконечным числом состояний и подмножеств темпоральных логик.

Существует большое количество формальных моделей, которые используются для описания параллельных систем. Многие из этих моделей могут быть рассмотрены как вполне структурированные системы переходов [2].

Вполне структурированные системы переходов – это весьма широкий класс систем переходов с бесконечным числом состояний, для которых разрешимость многих свойств следует из существования совместимого с отношением переходов вполне упорядочиваемого квазипорядка на множестве состояний.

В данной работе исследуется разрешимость задачи проверки модели для модального μ -исчисления, самого выразительного средства из стандартных темпоральных логик ветвящегося времени. Показывается, что задача проверки модели для модального μ -исчисления и в целом класса вполне структурированных систем переходов неразрешима. Отсюда представляется интересным подкласс вполне структурированных систем переходов, для которого проверка модели была бы разрешимой хотя бы для подмножества модального μ -исчисления.

В статье определяется класс вполне структурированных систем переходов автоматного вида. И доказывается, что для этого класса и формулы модального μ -исчисления, построенной без отрицаний и оператора наибольшей неподвижной точки ν , задача проверки модели является разрешимой, если множества состояний, удовлетворяющих элементарным высказываниям, являются верхними конусами.

Статья организована следующим образом. Разделы 2 и 3 содержат основные сведения о вполне структурированных системах переходов и модальном μ -исчислении соответственно. В разделе 4 демонстрируется неразрешимость μ -исчисления для класса вполне структурированных систем переходов в целом. В разделах 5 и 6 представлены основные результаты.

2. Основные определения

Бинарное отношение $\leq$ называется отношением *частичного порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Антисимметричность означает, что $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow (x = y)$. Если отношение только рефлексивно и транзитивно, то оно называется отношением *квазипорядка*. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$ и говорят, что x строго меньше y . Очевидно, что строгий порядок есть транзитивное и иррефлексивное отношение.

Квазипорядок $\leq$ на множестве X называется *вполне упорядочиваемым* (well-quasi-ordering), если для любой бесконечной последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots$ элементов из X существуют индексы $i < j$ такие, что $x_i \leq x_j$.

Пусть $\leq$ – вполне упорядочиваемый квазипорядок на множестве X . *Идеалом или верхним конусом* (в X) называется подмножество $I \subseteq X$, такое что для $x_1 \in I$, $y \in X$ и $x_1 \leq y$, следует $y \in I$. Идеал может быть получен замыканием кверху некоторого множества. Каждый элемент $x \in X$ порождает верхний конус $\uparrow x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid y \geq x\}$. *Базисом* верхнего конуса I называется множество $\min(I)$ такое, что $I = \bigcup_{x \in \min(I)} \uparrow x$.

Утверждение 1. Если $\leq$ – вполне упорядочиваемый квазипорядок на множестве X , то всякий верхний конус I имеет конечный базис.

Утверждение 2. Если $\leq$ – вполне упорядочиваемый квазипорядок на множестве X , то всякая бесконечно возрастающая (по отношению вложения множеств) последовательность $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ верхних конусов стабилизируется, т.е. найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \dots$.

Доказательства этих утверждений см., например, в [2].

Система помеченных переходов есть четвёрка $LTS = (S, T, \rightarrow, s_0)$, где S есть множество состояний с элементами $s_0, s_1, s_2, \dots$, T – некоторый алфавит пометок (множество имён действий), $\rightarrow \subseteq (S \times T \times S)$ – отношение перехода между состояниями, $s_0 \in S$ – начальное состояние системы.

Переход (s, t, s') обычно обозначается как $s \xrightarrow{t} s'$, что означает, что действие с именем t переводит состояние s в состояние s' . Через $Succ(s)$ обозначается множество последующих состояний для s , через $Pred(s)$ – множество его предыдущих состояний. Система LTS будет конечно ветвящейся, если для любого s множество $Succ(s)$ конечно. В данной работе рассматриваются системы с конечным ветвлением.

Последовательное исполнение для LTS есть конечная или бесконечная цепочка переходов $s_0 \xrightarrow{t_1} s_1 \xrightarrow{t_2} s_2 \rightarrow \dots$, где s_0 – начальное состояние системы.

Системы помеченных переходов – одна из наиболее распространённых моделей для описания поведения систем. Для решения задач анализа семантических свойств систем переходов полезной оказывается теория вполне структурированных систем переходов.

Определение 1. *Вполне структурированной системой переходов WTS называется система переходов $LTS = (S, T, \rightarrow, s_0)$, дополненная отношением квазипорядка $\leq \subseteq S \times S$, удовлетворяющим следующим условиям:*

- 1) отношение $\leq$ является вполне упорядочиваемым квазипорядком;
- 2) квазипорядок $\leq$ совместим с отношением переходов $\rightarrow$, а именно, для любых состояний $s \leq q$ и перехода $s \xrightarrow{t} s'$ существует переход $q \xrightarrow{t} q'$, такой что $s' \leq q'$;
- 3) для каждого состояния $s \in S$ и пометки $t \in T$ можно вычислить предбазис, т.е. вычислимо множество $\min(Pred_t(\uparrow s))$.

Система переходов является эффективной по пересечению, если для любых состояний s, s' вычислимо множество $\min(\uparrow s \cap \uparrow s')$.

3. Модальное μ -исчисление

Впервые (в конце семидесятых годов) темпоральная логика была предложена в качестве языка для спецификации реактивных и распределённых систем. Позднее возник метод проверки модели (model checking) как техника автоматической верификации различных темпоральных свойств систем.

Задача проверки модели заключается в том, чтобы проверить, соответствует ли поведение некоторой помеченной системы переходов свойству, заданному формулой темпоральной логики.

В данной работе рассматривается стандартная темпоральная логика – модальное μ -исчисление [3]. Модальное μ -исчисление – мощный язык для выражения свойств систем переходов, использующий операторы наименьшей и наибольшей неподвижных точек. μ -исчисление вызывает большой интерес среди исследователей в области автоматической верификации. Этот интерес следует из того факта, что многие темпоральные и программные логики могут быть выражены в μ -исчислении.

Построение формул μ -исчисления производится из элементарных высказываний $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, пропозициональных переменных $V = \{R_1, R_2, \dots\}$, логических связок $\neg, \wedge, \vee$, модальных операторов $\langle a \rangle$ и $[a]$, где a – действие из множества $T = \{a_1, a_2, \dots\}$, операторов неподвижных наибольшей и наименьшей неподвижных точек $\mu R_i.(\dots)$ и $\nu R_i.(\dots)$, где пропозициональная переменная R_i в выражения, ограниченные операторами неподвижных точек, должна входить только позитивно. Вхождение переменной R в формулу φ называется *позитивным*, если R находится в области действия чётного числа отрицаний. Операторы $\mu R_i.\varphi$ и $\nu R_i.\varphi$ связывают вхождение переменной R в φ . Таким образом, все вхождения R в $\mu R.\varphi$ называются связанными. Те переменные, которые не связаны никакими из операторов μ и ν , называются свободными. Далее будут рассматриваться формулы, не содержащие свободных переменных.

Формально формула φ интерпретируется как множество состояний некоторой помеченной системы переходов, в которых φ является истинной. Обозначим это множество состояний как $\llbracket \varphi \rrbracket_{Me}$, где $M = (S, T, \rightarrow, s_0)$ – это система переходов, а $e : V \rightarrow 2^S$ – функция, сопоставляющая пропозициональной переменной некоторое подмножество состояний. Обозначим за $e[R := S']$ новую функцию, которая будет такой же, что и e за исключением того, что $e[R := S'](R) = S'$. Множество $\llbracket \varphi \rrbracket_{Me}$ определяется рекурсивно следующим образом.

- $\llbracket R \rrbracket_{Me} = e(R)$;
- $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_{Me} = \llbracket \varphi \rrbracket_{Me} \cup \llbracket \psi \rrbracket_{Me}$;
- $\llbracket \neg \varphi \rrbracket_{Me} = S - \llbracket \varphi \rrbracket_{Me}$;
- $\llbracket \langle a \rangle \varphi \rrbracket_{Me} = \{s \mid \exists s' [s \xrightarrow{a} s' \text{ и } s' \in \llbracket \varphi \rrbracket_{Me}]\}$;
- $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_{Me} = \llbracket \varphi \rrbracket_{Me} \cap \llbracket \psi \rrbracket_{Me}$;
- $\llbracket [a] \varphi \rrbracket_{Me} = \{s \mid \forall s' [s \xrightarrow{a} s' \text{ следует } s' \in \llbracket \varphi \rrbracket_{Me}]\}$;
- $\llbracket \mu R.\varphi \rrbracket_{Me}$ – это наименьшая неподвижная точка функции $\tau : 2^S \rightarrow 2^S$: $\tau(S') = \llbracket \varphi \rrbracket_{Me}[R := S']$;
- интерпретация $\nu R.\varphi$ аналогична, только берётся наибольшая неподвижная точка.

Система помеченных переходов M удовлетворяет формуле φ модального μ -исчисления, если начальное состояние системы принадлежит множеству $\llbracket \varphi \rrbracket_{Me}$.

4. Неразрешимость модального μ -исчисления для класса вполне структурированных систем переходов

Доказательство неразрешимости задачи проверки модели для модального μ -исчисления и в целом класса вполне структурированных систем переходов сводится к проблеме останова для машины Минского [4].

Машина Минского – это набор $(\{q_0, \dots, q_{n+1}\}, \{x_1, \dots, x_m\}, \{\delta_0, \dots, \delta_n\})$, где x_i – счётчики, q_i – состояние, q_0 – начальное состояние, q_{n+1} – финальное (заключительное) состояние, δ_i – правило перехода для q_i ($0 \leq i \leq n$). Состояния подразделяются на два типа. Состояния первого типа имеют правила переходов вида $\langle x_j := x_j + 1; \text{goto } q_k \rangle$ для некоторых j, k . Состояния второго типа имеют правила переходов вида $\langle \text{if } x_j = 0 \text{ then goto } q_k \text{ else } (c_j := c_j - 1; \text{goto } q_{k'}) \rangle$ для некоторых j, k, k' .

Конфигурация машины Минского – это набор $(q_i, c_1, \dots, c_m)$, где q_i – состояние машины, $c_1, \dots, c_m$ – натуральные числа, являющиеся значениями соответствующих счётчиков. Рассматривается поведение машины с нулевыми начальными значениями счётчиков. Таким образом, начальная конфигурация представляется как $(q_0, 0, \dots, 0)$. Исполнение машины – это последовательность конфигураций, начинающаяся в начальной конфигурации и индуктивно определяемая в соответствии с правилами переходов. Необходимо отметить, что исполнение детерминировано, т.к. каждое состояние имеет не более одного правила переходов. Машина Минского останавливается, если исполнение содержит конфигурацию с состоянием q_{n+1} , т.е. достигает финального состояния. Задача достижения финального состояния для машины Минского неразрешима [4].

Рассмотрим машину Минского как помеченную систему переходов. Для каждого состояния q_i и допустимых из этого состояния переходов $\langle x_j := x_j + 1; \text{goto } q_k \rangle$ (для состояния первого типа), $\langle x_j := x_j - 1; \text{goto } q_{k'} \rangle$ или $\langle \text{if } x_j = 0 \text{ then goto } q_k \text{ else goto } q_{k'} \rangle$ (для состояния второго типа) сопоставим метки inc_i , dec_i и nul_i соответственно.

Тогда машина Минского – система переходов $LTSM = (S, T, \rightarrow, s_0)$, где $S = Q \times C$, $Q = Q^I \cup Q^{II} \cup \{q_{n+1}\}$ – состояния машины, Q^I – состояния первого типа, Q^{II} – второго типа, q_{n+1} – финальное состояние, C – множество всевозможных векторов значений счётчиков, $s_0 = (q_0, 0, \dots, 0)$, $T = \{inc_i \mid \forall i : q_i \in Q^I\} \cup \{dec_i, nul_i \mid \forall i : q_i \in Q^{II}\}$, $\rightarrow \subseteq (S \times T \times S)$ определяется правилами переходов для машины Минского $\delta_0, \dots, \delta_n$ и правилом назначения меток переходам, указанным выше.

Зададим естественным образом отношение $\leq$ частичного порядка на множестве конфигураций S машины Минского $LTSM$. Для двух конфигураций системы $LTSM$ имеем: $(q, c_1, \dots, c_m) \leq (q', c'_1, \dots, c'_m)$, если $q = q'$ и $c_i \leq c'_i$, $\forall i : 0 \leq i \leq m$. Это отношение является вполне упорядочиваемым квазипорядком по лемме Диксона [1].

Система $(LTSM, \leq)$ не является вполне структурированной, т.к. не выполняется условие совместимости квазипорядка $\leq$ с отношением переходов $\rightarrow$. Это условие нарушается, например, в следующей ситуации. Возьмём некоторое состояние второго типа $q_i \in Q^{II}$. Этому состоянию соответствует правило перехода $\langle \delta_i : \text{if } x_j = 0 \text{ then goto } q_k \text{ else } (x_j := x_j - 1; \text{ goto } q_{k'}) \rangle$. Следовательно, из состояния q_i с учётом условий возможны переходы в состояния q_k и $q_{k'}$, т.е. $q_i \xrightarrow{nul_i} q_k$ и $q_i \xrightarrow{dec_i} q_{k'}$. Рассмотрим две конфигурации (q_i, c) и (q_i, c') , где c, c' – векторы значений счётчиков, такие что $c_j = 0$, $c'_j = 1$ и $\forall i \neq j : c_i = c'_i$. Таким образом, $(q_i, c) \leq (q_i, c')$. Из конфигурации (q_i, c) возможен переход nul_i , а из (q_i, c') этот переход невозможен по правилу δ_i , что противоречит условию совместимости квазипорядка $\leq$ с отношением переходов. Следовательно, $(LTSM, \leq)$ не является вполне структурированной системой переходов.

Рассмотрим “слабую” модель машины Минского $WkTSM$, которая будет удовлетворять условию вполне структурированности. Для этого ослабим правила переходов для состояний второго типа, позволив недетерминизм следующего вида: $\forall q_i \in Q^{II} \langle \delta_i : \text{if } x_j = 0 \text{ then goto } q_k \text{ else } \{(x_j := x_j - 1; \text{ goto } q_{k'}) \text{ or } (\text{goto } q_k)\} \rangle$.

Утверждение 3. $(WkTSM, \leq)$ – вполне структурированная система переходов.

Доказательство. Достаточно показать выполнимость условия совместимости вполне упорядочиваемого квазипорядка $\leq$ с отношением переходов $\rightarrow$ и описать алгоритм построения предбазиса.

Рассмотрим некоторое состояние машины Минского первого типа, т.е. $q_i \in Q^I$. Этому состоянию соответствует правило перехода $\langle \delta_i : x_j := x_j + 1; \text{ goto } q_k \rangle$. Следовательно, из состояния q_i всегда существует переход в состояние q_k , т.е. $q_i \xrightarrow{inc_i} q_k$. Таким образом, для всех конфигураций (q_i, c) , где $q_i \in Q^I$, всегда существует и только один переход inc_i .

Возьмём состояние второго типа $q_i \in Q^{II}$. Этому состоянию соответствует правило перехода $\langle \delta_i : \text{if } x_j = 0 \text{ then goto } q_k \text{ else } \{(x_j := x_j - 1; \text{ goto } q_{k'}) \text{ or } (\text{goto } q_k)\} \rangle$. Следовательно, из состояния q_i с учётом условий возможны переходы $q_i \xrightarrow{nul_i} q_k$ и $q_i \xrightarrow{dec_i} q_{k'}$. Для двух конфигураций $(q_i, c) \leq (q_i, c')$ возможны следующие варианты срабатываний переходов. Если из (q_i, c) возможен переход с меткой nul_i (например, в случае $x_j = 0$), т.е. $(q_i, c) \xrightarrow{nul_i} (q_k, c)$, то по правилу δ_i существует и переход $(q_i, c') \xrightarrow{nul_i} (q_k, c')$, причём $(q_k, c) \leq (q_k, c')$. Если из (q_i, c) возможен переход с меткой dec_i (только в случае $x_j > 0$), т.е. $(q_i, c) \xrightarrow{dec_i} (q_{k'}, c_2)$, то по δ_i существует переход $(q_i, c') \xrightarrow{dec_i} (q_{k'}, c'_2)$. Поскольку в обеих конфигурациях (q_i, c) и (q_i, c') при переходе dec_i c_j и c'_j были уменьшены на единицу, то $(q_{k'}, c_2) \leq (q_{k'}, c'_2)$.

Отсюда следует выполнимость условия совместимости $\leq$ с отношением переходов $\rightarrow$.

Опишем алгоритм построения предбазиса. Построим минимальную конфигурацию 0t , при которой переход с пометкой t может сработать. Для допустимого перехода inc_i из некоторого состояния $q_i \in Q^I$ или перехода nul_i для $q_i \in Q^{II}$ конфигурация 0t равна $(q_i, 0, \dots, 0)$. Для перехода dec_i из $q_i \in Q^{II}$, задаваемого правилом $(\text{if } x_j > 0 \text{ then } (x_j := x_j - 1; \text{ goto } q_k))$, ${}^0dec_i = (q_i, 0, \dots, c_j, \dots, 0)$, где $c_j = 1$.

Обозначим через t^0 конфигурацию, получаемую в результате срабатывания перехода t из конфигурации 0t . Рассмотрим множество $\uparrow s \cap \uparrow t^0$, состоящее из таких конфигураций s' , что s' может быть получена в результате срабатывания перехода t и $s \leq s'$. Это множество является направленным вверх конусом и в силу вполне упорядочиваемости отношения $\leq$ имеет конечный базис, который обозначим $\text{lub}(s, t^0)$. Конечный базис $\text{lub}(s, t^0)$ состоит из одной конфигурации и может быть эффективно построен следующим образом. Рассмотрим конфигурации $t^0 = (q, c_1, \dots, c_m)$, $s = (q', c'_1, \dots, c'_m)$. Для того, чтобы пересечение конусов $\uparrow s \cap \uparrow t^0$ не было пустым, необходимо выполнение условия $q = q'$. Тогда $\text{lub}(s, t^0) = (q, \max(c_1, c'_1), \dots, \max(c_m, c'_m))$.

Пусть теперь некоторая конфигурация $s' \in \text{Pred}_t(\uparrow s)$. Тогда возможно срабатывание перехода t , которое переводит s' в конфигурацию $s'' \in \uparrow s$. Отсюда следует, что $s'' \in \uparrow t^0$. С другой стороны, для любой конфигурации s'' такой, что $s'' \in \uparrow s$ и $s'' \in \uparrow t^0$ можно построить $\text{Pred}_t(s'')$. Получаем $\text{Pred}_t(\uparrow s) = \text{Pred}_t(\uparrow \text{lub}(s, t^0)) \approx \uparrow \text{Pred}_t(\text{lub}(s, t^0))$.

Эта формула задаёт эффективное построение конечного базиса множества $Pred_t(\uparrow s)$ по конечному базису $lub(s, t^0)$. $\square$

Для системы переходов $WkTSM$ построим формулу φ μ -исчисления, которая выражает существование конечного исполнения (т.е. исполнения, ведущего в финальное состояние) для системы $WkTSM$, в точности равного конечному исполнению машины Минского $LSTM$.

Для состояния q_i первого типа построим следующую формулу: $\varphi_i = \langle inc_i \rangle Z$. Для состояния q_i второго типа строится формула: $\varphi_i = \langle dec_i \rangle Z \vee \langle nul_i \rangle Z \wedge \langle dec_i \rangle \text{false}$. Наконец мы имеем результирующую формулу $\varphi = \mu Z. [\] \text{false} \vee \bigvee_{i=0}^n \varphi_i$. Каждая подформула φ_i моделирует только те срабатывания системы $WkTSM$, которые соответствуют срабатываниям машины Минского $LSTM$, а подформула $[\] \text{false}$, означающее невозможность срабатывания никакого перехода, задаёт множество финальных конфигураций. Таким образом формула φ определяет множество конечных исполнений машины Минского.

“Слабая” модель машины Минского $WkTSM$ удовлетворяет формуле φ , если $s_0 = (q_0, 0, \dots, 0) \in [\varphi]$, что соответствует проблеме останова для машины Минского $LSTM$. Получили следующее утверждение.

Утверждение 4. Задача проверки модели для модального μ -исчисления и “слабой” модели машины Минского $WkTSM$ неразрешима.

Следствие 1. Задача проверки модели для модального μ -исчисления и в целом класса вполне структурированных систем переходов неразрешима.

5. Система переходов автоматного типа

Рассмотрим подкласс вполне структурированных систем переходов.

Определение 2. Вполне структурированная система переходов автоматного типа WSA – это вполне структурированная система переходов $WSTS = (S, T, \rightarrow, s_0)$, дополненная отношением вполне упорядочиваемого квазиупорядка $\leq \subseteq S \times S$, где $S = Q \times D$, Q – конечное множество управляющих состояний, D – бесконечное множество значений некоторых характеристик, $s_0 \in S$ – начальное состояние, $\rightarrow \subseteq S \times T \times S$ такое, что $\exists \rightarrow \bullet \subseteq Q \times T \times Q$: для любого состояния (q, d) существует некоторый переход $(q, d) \xrightarrow{t} (q', d')$ тогда и только тогда, когда существует переход $q \xrightarrow{t} q'$; отношение $\leq$ определяется так, что $(q, d) \leq (q', d') \iff q = q' \text{ и } d \leq d'$.

Утверждение 5. Система $(WSA, \leq)$ удовлетворяет условию совместимости по убыванию отношения $\leq$ с отношением переходов $\rightarrow$, т.е. для любых состояний $s_1 \leq s'_1$ и перехода $s'_1 \xrightarrow{t} s'_2$ существует переход $s_1 \xrightarrow{t} s_2$, такой что $s_2 \leq s'_2$.

Доказательство. Возьмём некоторые состояния $s_1 = (q_1, d_1)$, $s'_1 = (q'_1, d'_1)$ системы $(WSA, \leq)$, такие что $s_1 \leq s'_1$, т.е. $q_1 = q'_1$ и $d_1 \leq d'_1$. По определению $(WSA, \leq)$ переходы $s_1 \xrightarrow{t} s_2$ и $s'_1 \xrightarrow{t} s'_2$, где $s_2 = (q_2, d_2)$, $s'_2 = (q'_2, d'_2)$, возможны тогда и только тогда, когда существует переход $q_1 \xrightarrow{t} q_2$. Из вполне структурированности $(WSA, \leq)$ следует, что $s_2 \leq s'_2$, т.е. $q_2 = q'_2$ и $d_2 \leq d'_2$. $\square$

Из этого утверждения следует разрешимость задачи субпокрытия [2] для класса вполне структурированных систем переходов автоматного типа. Это означает, что для двух состояний s и s' разрешима задача достижимости из s состояния s'' , такого что $s'' \leq s'$.

6. Разрешимость модального μ -исчисления

Утверждение 6. Пусть WSA – эффективная по пересечению вполне структурированная система переходов автоматного типа, φ – формула модального μ -исчисления, построенная без отрицаний и без оператора наибольшей неподвижной точки ν , над множеством действий T и множеством элементарных высказываний P , где $p \in P$ удовлетворяет условию, что $s \models p \implies \forall s' \geq s : s' \models p$. Тогда задача выполнимости формулы φ для WSA разрешима.

Доказательство. Множество состояний $[p]$ по условию является верхним конусом. Если $[\varphi_1]$ и $[\varphi_2]$ верхние конусы, то $[\varphi_1] \wedge [\varphi_2]$, $[\varphi_1] \vee [\varphi_2]$ также верхние конусы.

Пусть $[\varphi]$ – верхний конус. Тогда $[\langle t \rangle \varphi] = Pred_t([\varphi])$, т.е. $[\langle t \rangle \varphi]$ – верхний конус. Множество состояний $[[t]\varphi]$ представляет собой $Pred_t([\varphi])$ за исключением тех состояний, из которых существует переход

(действие) t в некоторое состояние $s' \notin \llbracket \varphi \rrbracket$. Из утверждения 5 следует, что если такой переход t существует из некоторого состояния $s \in \text{Pred}_t(\llbracket \varphi \rrbracket)$, то этот же переход существует из меньшего состояния $s'' \in \min(\text{Pred}_t(\llbracket \varphi \rrbracket))$. Следовательно, исключая из базиса множества $\text{Pred}_t(\llbracket \varphi \rrbracket)$ “плохие” состояния, можно построить базис верхнего конуса $\llbracket [t]\varphi \rrbracket$.

Пусть $\llbracket \varphi \rrbracket$ – пустое множество, т.е. $\varphi = \text{false}$. Тогда множество $S' = \llbracket [t]\varphi \rrbracket = \llbracket [t]\varphi \rrbracket$ представляет собой множество всех состояний S за исключением состояний, из которых существует переход t . Проводя рассуждения, аналогичные представленным выше, получаем, что S' – верхний конус.

Рассмотрим множества состояний $\llbracket \mu R. \varphi \rrbracket$, представляющее собой наименьшую неподвижную точку функции $\tau : 2^S \rightarrow 2^S$, $\tau(S') = \llbracket \varphi \rrbracket e[R := S']$. Если формула φ не содержит конструкций неподвижных точек и отрицаний, то, очевидно, функция $\tau(S')$ является монотонной по включению, т.е. $S_1 \subseteq S_2 \implies \tau(S_1) \subseteq \tau(S_2)$. К тому же, если S' является верхним конусом, то и $\tau(S')$ – верхний конус. Более того, из доказанного выше следует, что и $\tau(\emptyset)$ – верхний конус. Так как $\emptyset \subseteq \tau(\emptyset)$, то из монотонности τ имеем $\tau(\emptyset) \subseteq \tau(\tau(\emptyset))$. Повторяя это рассуждение, получим цепочку: $\emptyset \subseteq \tau(\emptyset) \subseteq \tau^2(\emptyset) \subseteq \dots$, где $\tau^{i+1}(S') = \tau(\tau^i(S'))$. Из утверждения 2 следует существование $k \in \mathbb{N}$ такого, что $\tau^k(\emptyset) = \tau^{k+1}(\emptyset)$. Докажем, что это наименьшая неподвижная точка. Очевидно, $\mu R. \tau(R) \subseteq \tau^k(\emptyset)$ по определению наименьшей неподвижной точки. С другой стороны, имеем $\emptyset \subseteq \mu R. \tau(R)$, из монотонности получаем $\tau(\emptyset) \subseteq \tau(\mu R. \tau(R)) = \mu R. \tau(R)$, и так далее, т.е. $\tau^k(\emptyset) \subseteq \mu R. \tau(R)$ для любого k . Таким образом, получаем итеративный алгоритм нахождения наименьшей неподвижной точки: $\llbracket \mu R. \varphi \rrbracket = \bigcup_i \tau^i(\emptyset)$. Отсюда следует, что $\llbracket \mu R. \varphi \rrbracket$ – верхний конус.

Получили, что для любой формулы φ без отрицаний и оператора наибольшей неподвижной точки множество состояний $\llbracket \varphi \rrbracket$ образует верхний конус и представляется конечным базисом. WSA удовлетворяет формуле φ , если $s_0 \in \llbracket \varphi \rrbracket$, что возможно проверить, т.к. $\llbracket \varphi \rrbracket$ – верхний конус. $\square$

7. Заключение

В статье была рассмотрена задача проверки модели для вполне структурированных систем переходов автоматного типа и модального μ -исчисления. Задача разрешима для подмножества модального μ -исчисления, не допускающего в формуле отрицаний и оператора наибольшей неподвижной точки ν , с условием на элементарные высказывания, $s \models p \implies \forall s' \geq s : s' \models p$. Очевидно, что если каждое элементарное высказывание $p \in P$ является высказыванием над множеством управляющих состояний Q , то задача проверки модели разрешима для любой формулы модального μ -исчисления без ограничений на операторы, т.к. сводится к аналогичной задаче для системы переходов с конечным числом состояний.

Автор выражает благодарность В. А. Соколову за внимание к этой работе и ценные замечания.

Литература

- [1] Dickson L. E. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with r distinct prime factors. // Amer. Journal Math. 1913. 35. p. 413-422.
- [2] Finkel A., Schnoebelen Ph. Well-structured transition systems everywhere! // Theoretical Computer Science. 2001. 256(1-2). p. 63-92.
- [3] Stirling C. P. Modal and temporal logics. // Handbook of Logic in Computer Science. 1992. Vol. 2. Oxford University Press. p. 477-563.
- [4] Минский М. Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971.

УДК 681.3

Конечное представление отношений на мультимножествах

Башкин В.А.

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

E-mail: bas@uniyar.ac.ru

получена 15 марта 2003

Исследуются возможности представления бесконечных бинарных отношений на мультимножествах при помощи различных способов замыканий конечных базисов. Показано, что у отношений эквивалентности существуют бесконечные аддитивные и транзитивные базисы, также существуют бесконечные аддитивные транзитивные базисы у симметричных и у рефлексивных отношений. Единственным полностью конечным случаем является аддитивный транзитивный базис симметричного рефлексивного отношения.

1. Введение

Во многих формализмах, используемых при моделировании сложных параллельных и распределенных информационных систем, глобальное состояние системы моделируется при помощи мультимножества над множеством локальных состояний некоторых элементов системы. Например, в сетях Петри глобальным состоянием (разметкой) является мультимножество над множеством позиций сети. При анализе поведенческих свойств в семантике ветвящегося времени (branching-time) используется понятие бисимулярности, то есть эквивалентности состояний системы с точки зрения наблюдаемого при этих состояниях поведения. Известно, что для сетей Петри отношение бисимуляции разметок неразрешимо, поэтому исследуются более сильные отношения, сохраняющие бисимулярность. При этом усиление достигается, как правило, за счет выделения замкнутых относительно того или иного отношения подмножеств бисимуляции разметок. В [1] используется замкнутое относительно сложения подмножество бисимуляции, причем при очень сильном дополнительном условии на участвующие разметки — они должны различаться не более чем на одну фишку. В [2] используется замыкание относительно аддитивности и транзитивности (без дополнительных ограничений). При этом в обоих случаях для эффективного построения отношений используется представление бесконечных бисимуляций при помощи конечного базиса. Такое представление возможно не всегда, существуют отношения, все базисы которых бесконечны.

Известно, что у любого симметричного рефлексивного бинарного отношения на множестве мультимножеств существует конечный базис относительно аддитивного транзитивного замыкания. Впервые это было доказано в [3] (хотя и в несколько другой формулировке и в терминах конгруэнтностей в коммутативных подгруппах), а позднее (независимо) в [4]. Конструктивное доказательство в терминах базисов относительно аддитивного транзитивного замыкания было предложено в [2].

Возникает вопрос: можно ли упростить способ построения базиса или ослабить требования к исходному отношению таким образом, чтобы конечная базисуемость сохранилась. Данная работа дает отрицательный ответ. Во-первых, нельзя упростить способ построения, так как существуют бинарные отношения эквивалентности на мультимножествах, которые обладают только бесконечными базисами относительно аддитивного и транзитивного замыканий. Кроме того, нельзя ослабить требования к отношению, так как существуют симметричные отношения и рефлексивные отношения, обладающие только бесконечными базисами относительно аддитивного транзитивного замыкания.

2. Основные определения

Через Nat обозначим множество неотрицательных целых чисел.

Пусть X — непустое множество.

Мультимножеством M над множеством X называется функция $M : X \rightarrow Nat$. Мощность мультимножества $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Числа $\{M(x) \mid x \in X\}$ называются коэффициентами мультимножества,

коэффициент $M(x)$ определяет число экземпляров элемента x в M . Мультимножество M конечно, если конечно множество $\{x \in X \mid M(x) > 0\}$. Множество всех конечных мультимножеств над данным множеством X обозначается как $\mathcal{M}(X)$.

Пусть $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}(X)$. Полагаем:

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = M_2(x)$ – отношение равенства;

$M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) \leq M_2(x)$ – отношение включения;

$M_1 = M_2 + M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = M_2(x) + M_3(x)$ – операция сложения двух мультимножеств;

$M_1 = M_2 \cap M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = \min(M_2(x), M_3(x))$ – операция пересечения двух мультимножеств;

$M_1 = M_2 - M_3 \Leftrightarrow \forall x \in X \ M_1(x) = M_2(x) \ominus M_3(x)$ – разность (где $\ominus$ – вычитание до нуля);

Подробнее о теории мультимножеств см. в [5].

3. Отношения на множестве мультимножеств

Пусть X – конечное непустое множество.

Введем операцию сложения на множестве пар мультимножеств.

Пусть $(M_1, M_2), (M'_1, M'_2) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ – пары мультимножеств над множеством X . Определим их сумму как

$$(M_1, M_2) + (M'_1, M'_2) =_{def} (M_1 + M'_1, M_2 + M'_2).$$

Определение 1. Пусть $B \subseteq \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ – бинарное отношение на множестве мультимножеств над X .

1) Через B^A обозначим аддитивное замыкание отношения B , где сложение производится по правилу, приведенному выше.

2) Через B^T обозначим транзитивное замыкание отношения B .

3) Через B^{AT} обозначим аддитивное транзитивное замыкание отношения B .

Будем использовать сокращения A -замыкание, T -замыкание и AT -замыкание соответственно.

Пусть $\alpha \in \{A, T, AT\}$.

Определение 2. Пусть $B \subseteq \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ – бинарное отношение на множестве мультимножеств над X . Отношение $B' \subseteq \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ называется α -базисом отношения B , если $(B')^\alpha = B^\alpha$.

Определение 3. Базис B' называется минимальным α -базисом отношения B , если не существует $B'' \subset B'$, такого что $(B'')^\alpha = B^\alpha$.

Лемма 1. Пусть $B \subseteq \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ – бинарное отношение на множестве мультимножеств над X .

1) Все минимальные α -базисы отношения B либо конечны, либо бесконечны.

2) Если у B существует конечный α -базис, то все минимальные α -базисы отношения B конечны;

3) Если у B существует бесконечный минимальный α -базис, то все α -базисы отношения B бесконечны.

Доказательство. 1) Предположим противное. Пусть B_j и B_i – различные минимальные базисы отношения B , причем B_j – конечный, а B_i – бесконечный.

Каждый элемент базиса B_j может быть выражен через конечное число элементов B_i . Поскольку число элементов B_j конечно, весь базис B_j может быть выражен через конечное подмножество базиса B_i . Следовательно, если B_i не конечен, то он не минимален – противоречие.

2) В качестве одного из минимальных базисов можно взять часть данного конечного базиса. Тогда из первой части леммы следует конечность всех минимальных базисов.

3) Предположим противное – существует конечный базис. В качестве одного из минимальных базисов можно взять часть данного конечного базиса. Тогда из первой части леммы следует конечность всех минимальных базисов – противоречие. $\square$

Мы хотим определить, при каких условиях α -замкнутое и в общем случае бесконечное отношение B обладает конечным α -базисом, то есть может быть представлено конечным числом элементов. Мы не рассматриваем в качестве α симметричные замыкания, так как с их помощью невозможно получить из конечного отношения бесконечное. Также мы не рассматриваем рефлексивные замыкания, так как получаемые с их помощью бесконечные отношения имеют простую структуру.

В качестве возможных ограничений на B мы рассматриваем требования его симметричности, рефлексивности и транзитивности.

Рассмотрим в качестве α аддитивные и транзитивные замыкания. Оказывается, даже если B – отношение эквивалентности, у него могут существовать бесконечные минимальные базисы.

Теорема 1. 1) Существуют отношения эквивалентности на мультимножествах с бесконечными минимальными A -базисами.

2) Существуют отношения эквивалентности на мультимножествах с бесконечными минимальными T -базисами.

Доказательство. В качестве примера для обоих случаев рассмотрим множество X из одного элемента и отношение эквивалентности

$$B = \{(i, i), (1, i+2), (i+2, 1) \mid i \in \text{Nat}\}$$

(здесь пары мультимножеств представлены как пары натуральных чисел).

Рассмотрим случай A -замыкания.

Пусть $B' = \{(0, 0), (1, 1)\} \cup \{(1, i+2), (i+2, 1) \mid i \in \text{Nat}\}$. Очевидно, что B' является A -базисом отношения B^A . Докажем минимальность B' . Предположим противное: некая пара $(x, y) \in B'$ может быть получена аддитивным замыканием других пар из B' . Однако при любом сложении мультимножеств видов $(1, i+2)$, $(i+2, 1)$ или $(1, 1)$ (пустую пару можно не рассматривать) в итоговой паре оба коэффициента становятся больше единицы – противоречие.

Рассмотрим случай T -замыкания.

Пусть $B' = \{(0, 0)\} \cup \{(1, i+2), (i+2, 1) \mid i \in \text{Nat}\}$. Очевидно, что B' является T -базисом отношения B^T (любая пара вида (i, i) может быть получена транзитивным замыканием двух симметричных пар). Докажем минимальность B' . Предположим противное: некая пара $(x, y) \in B'$, где $x \neq y$, может быть получена транзитивным замыканием других пар из B' . Однако при транзитивном замыкании мультимножеств видов $(1, i+2)$ и $(i+2, 1)$ может получиться только рефлексивная пара — противоречие. $\square$

Итак, ни аддитивное, ни транзитивное замыкание не могут быть использованы для генерации бесконечных отношений на основе конечных базисов, даже если B – отношение эквивалентности. Кроме того, легко показать, что существуют аддитивные и транзитивные замыкания отношений эквивалентности, которые сами не являются отношениями эквивалентности.

Рассмотрим в качестве α аддитивное транзитивное замыкание.

Теорема 2. 1) Существуют симметричные отношения на мультимножествах с бесконечными минимальными AT -базисами.

2) Существуют рефлексивные отношения на мультимножествах с бесконечными минимальными AT -базисами.

Доказательство. В качестве доказательства рассмотрим примеры:

1) Рассмотрим множество X из двух элементов и симметричное отношение

$$B = \{((i, i+1), (i, i+1)) \mid i \in \text{Nat}, i > 0\}$$

(здесь пары мультимножеств представлены как пары векторов длины 2).

Покажем, что базис B – минимальный. Пусть

$$B_k = \{((i, i+1), (i, i+1)) \mid i, k \in \text{Nat}, k \geq i > 0\}$$

– первые k элементов базиса B . Нам достаточно показать, что $(k+1)$ -й элемент не может быть выражен через предыдущие, то есть

$$((k+1, k+2), (k+1, k+2)) \notin B_k^{AT}$$

Заметим, что и в левой, и в правой части всех пар векторов из B второй коэффициент на единицу больше первого. При сложении любых двух пар в левой и правой части получаются векторы, где второй коэффициент больше первого на 2. Только при транзитивном замыкании таких пар разность коэффициентов не меняется. Однако очевидно, что одним транзитивным замыканием пару $((k+1, k+2), (k+1, k+2))$ из B_k не получить.

2) Рассмотрим множество X из двух элементов и рефлексивное отношение

$$B = Id(\mathcal{M}(X)) \cup \{((1, 0), (i, 1)) \mid i \in Nat, i \geq 2\}$$

(здесь пары мультимножеств представлены как пары векторов длины 2, $Id(\mathcal{M}(X)) = \{(m, m) \mid m \in \mathcal{M}(X)\}$ — отношение идентичности на $\mathcal{M}(X)$).

Пусть $B' = \{((1, 0), (1, 0)), ((0, 1), (0, 1))\} \cup \{((1, 0), (i, 1)) \mid i \in Nat, i \geq 2\}$.

Очевидно, что B' — AT -базис отношения B . Покажем, что базис B' — минимальный. Пусть

$$B'_k = \{((1, 0), (1, 0)), ((0, 1), (0, 1))\} \cup \{((1, 0), (i, 1)) \mid i, k \in Nat, k \geq i \geq 2\}$$

— первые $k + 2$ элементов базиса B' . Достаточно показать, что $(k + 3)$ -й элемент не может быть выражен через предыдущие, то есть

$$((1, 0), (k + 1, 1)) \notin (B'_k)^{AT}$$

Рассмотрим все нерефлексивные элементы отношения B'_k . Они имеют вид $((1, 0), (i, 1))$, где $i \geq 2$. Первый коэффициент в правой части пары на $i - 1$ больше, чем первый коэффициент в левой. Второй коэффициент в правой части пары на 1 больше, чем второй коэффициент в левой.

Рассмотрим рефлексивные пары $((1, 0), (1, 0))$ и $((0, 1), (0, 1))$. В них левые и правые части совпадают.

Если сложить любые две нерефлексивные пары, то в полученной паре разность между вторым коэффициентом в правой и левой части увеличится и станет равной двум. При любом транзитивном замыкании эта разность уменьшиться не сможет, поскольку в B'_k во всех парах "правая" координата не меньше "левой". Но для построения пары $((1, 0), (k + 1, 1))$ нам необходимо по крайней мере одно суммирование нерефлексивных пар — чтобы увеличить на единицу разность по первому коэффициенту. $\square$

4. Заключение

Автор выражает благодарность проф. И.А.Ломазовой за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

- [1] Autant C., Schnoebelen Ph. Place bisimulations in Petri nets // Proc. of ICATPN'92. Lecture Notes in Computer Science. 1992. V.616. P.45–61.
- [2] Bashkin V.A., Lomazova I.A. Resource bisimulations in Nested Petri Nets // Proc. of CS&P'2002. Vol.1. Informatik-Bericht №161. Humboldt-Universitat zu Berlin. Berlin. 2002. P.39–52.
- [3] Redei L. The theory of finitely generated commutative semigroups. Oxford University Press. 1965.
- [4] Hirshfeld Y. Congruences in commutative semigroups. Research report ECS-LFCS-94-291. Edinburgh: University of Edinburgh, Department of Computer Science. 1994.
- [5] Петровский А.Б. Основные понятия теории мультимножеств. М.: Едиториал УРСС, 2002.