



МОДЕЛИРОВАНИЕ И
АНАЛИЗ
ИНФОРМАЦИОННЫХ
СИСТЕМ

Том 9 № 1 2002

Ярославский государственный
университет имени П.Г.Демидова

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.9, №1. 2002

Следящий преобразователь потокового нейрона <i>Толпыгин А.Ю.</i>	3
Построение и верификация параллельного алгоритма для моделирования распространения упругих волн методом конечных разностей <i>Певзнер Р.Л., Сагиров Т.А.</i>	8
О сложности одной многокритериальной задачи <i>Груздев О.И., Краснов М.В.</i>	15
Нечеткие аналоги эйлеровой характеристики для полутоновых изображений <i>Парфенов П.Г.</i>	19
Коррекция результатов каротажа глубоких скважин <i>Неклюдов Д.М.</i>	21
Клеточная нейронная сеть, реализующая анизотропный полосовой фильтр <i>Иванов А.В.</i>	30
Приоритетное множество для системы массового обслуживания $M_3 D_3 1$ <i>Черменский П.П.</i>	34
Применение алгоритма Matching Pursuit для анализа петрофизических данных <i>Янаев М.М.</i>	40
Об удалении ребер из k -связного графа без потери k -связности <i>Пастор А.В.</i>	43

Лицензия ЛР №020319 от 30.12.96. Корректор А.А.Аладьева
Подписано в печать 21.04.2002. Формат 60x88¹/₈. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 8,38. Уч.-изд.л. 4,95. Тираж 100 экз. № 225

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

Следящий преобразователь потокового нейрона

Толпыгин А.Ю.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

В работе изучена возможность повышения эффективности работы потокового нейрона. Показано, что качество работы нельзя улучшить больше чем в 10 раз, независимо от размеров памяти нейрона.

1. Введение

Напомним [2, 3], что потоковыми нейронами называются нейроны, которые работают со случайными последовательностями битовых сигналов (потоками), передавая информацию плотностью потока бинарных импульсов. Основной частью потокового нейрона является следящий преобразователь. В него поступают входные сигналы нейрона, преобразованные на синапсах. Следящий преобразователь осуществляет функции мембранного потенциала биологического нейрона [1]. Он оценивает плотность поступающего на него бинарного потока.

2. Следящий преобразователь

Следящий преобразователь — это часть потокового нейрона, описанного в [2, 3]. В него поступают результаты суммирования выходов синапсов нейрона. Следящий преобразователь нужен для оценивания плотности бинарного потока. Он состоит из простых преобразований (1) и r -разрядного регистра памяти Z , в котором и хранится текущая оценка потока.

Опишем математическую модель следящего преобразователя. На его вход поступает бинарная случайная последовательность $X = (x_1, x_2, \dots, x_t, \dots)$, где x_t — независимые случайные величины, такие что $x_t \in \{0, 1\}$, $P\{x_t = 1\} = p$, $P\{x_t = 0\} = q = 1 - p$. Через z_t будем обозначать случайную величину, которая равна значению, хранящемуся в регистре Z . В зависимости от значения входного потока x_t и значения z_t в дискретный момент времени t в следующий момент $t + 1$ значение z_{t+1} изменяется по правилам

$$z_{t+1} = z_t + (x_t - \delta_t)/n, \quad (1)$$

где δ_t — случайная величина, распределение которой строится по следующему правилу: $\delta_t \in \{0, 1\}$, $P\{\delta_t = 1 \mid z_t = a\} = a$; $n = 2^r$.

Заметим, что переполнения регистра Z не происходит, поскольку при $z_t = 1$ $\delta_t = 1$, следовательно, $z_{t+1} \leq 1$. Аналогично при $z_t = 0$ $\delta_t = 0$, следовательно, $z_{t+1} \geq 0$. Поэтому для любого t выполняются неравенства $0 \leq z_t \leq 1$.

В работе [4] показано, что случайная величина z_t сходится к случайной величине z при $t \rightarrow \infty$, у которой:

$$\begin{aligned} Ez &= p, \\ Dz &= \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ^2 — является некоторой функцией от p .

3. Основной результат работы

Линейным следящим преобразователем будем называть следящий преобразователь, у которого значение в регистре Z изменяется на каждом последовательном шаге не более чем на $\frac{1}{n}$.

Показано, что при любой конструкции линейного следящего преобразователя, имеющего память размера $n > 4$, существует такое значение p , что

$$Dz_t \geq \frac{2}{27 \cdot n} - \frac{5}{27 \cdot n^2}. \quad (3)$$

Таким образом показано, что принципиально улучшить работу следящего преобразователя невозможно.

4. Сведение к марковской цепи

Рассмотрим вспомогательную марковскую цепь. Состояния этой цепи обозначим S_m^l , где m — номера всех возможных значений регистра Z : $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, l — все возможные значения входного потока X : $l \in \{0, 1\}$.

Обозначим через $P_{m_1, m_2}^{l_1}$ вероятность перехода из состояния $S_{m_1}^{l_1}$ в состояние $S_{m_2}^{l_2}$. Заметим, что из линейности следящего преобразователя следует

$$P_{m_1, m_2}^{l_1} = 0, \text{ при } |m_1 - m_2| > 1.$$

Построим новую марковскую цепь M , объединив состояния вспомогательной марковской цепи при одинаковых m . Состояния марковской цепи M обозначим через S_m , где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Вероятности перехода P_{m_1, m_2} из состояния S_{m_1} в состояние S_{m_2} выражаются через вероятности перехода вспомогательной марковской цепи из состояния $S_{m_1}^{l_1}$ в состояние $S_{m_2}^{l_2}$:

$$\begin{aligned} P_{m_1, m_2} &= P_{m_1, m_2}^{l_1} = \\ &= P\{l_1 = 1\} \cdot P_{m_1, m_2}^1 + P\{l_1 = 0\} \cdot P_{m_1, m_2}^0 = \\ &= p \cdot P_{m_1, m_2}^1 + q \cdot P_{m_1, m_2}^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Для наглядности запишем вероятности перехода для этой цепи в таблицу, где по вертикали состояние, из которого осуществляется переход, а по горизонтали — в какое состояние.

	S_0	S_1	S_2	...	S_{n-1}	S_n
S_0	$1 - P_{01}$	P_{01}	0		0	0
S_1	P_{10}	$1 - P_{10} - P_{12}$	P_{12}		0	0
S_2	0	P_{21}	$1 - P_{21} - P_{23}$	\ddots	0	0
\vdots				\ddots	\ddots	
S_{n-1}	0	0	0	\ddots	$1 - P_{n-1, n-2} - P_{n-1, n}$	$P_{n-1, n}$
S_n	0	0	0		$P_{n, n-1}$	$1 - P_{n, n-1}$

Таблица 1. Матрица вероятностей перехода марковской цепи M .

5. Нахождение стационарных вероятностей

Нетрудно видеть, что построенная марковская цепь неприводима и неперiodична, поэтому у нее существует стационарный режим [5]. Обозначим через π_i вероятность нахождения марковской цепи M в состоянии S_i в стационарном режиме, тогда для их нахождения имеем следующие рекуррентные уравнения:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \cdot (1 - P_{01}) + \pi_1 \cdot P_{10}, \\ \pi_1 = \pi_0 \cdot P_{01} + \pi_1 \cdot (1 - P_{10} - P_{12}) + \pi_2 \cdot P_{21}, \\ \pi_2 = \pi_1 \cdot P_{12} + \pi_2 \cdot (1 - P_{21} - P_{23}) + \pi_3 \cdot P_{32}, \\ \dots \\ \pi_{n-1} = \pi_{n-2} \cdot P_{n-2, n-1} + \pi_{n-1} \cdot (1 - P_{n-1, n-2} - P_{n-1, n}) + \pi_n \cdot P_{n, n-1}, \\ \pi_n = \pi_{n-1} \cdot P_{n-1, n} + \pi_n \cdot (1 - P_{n, n-1}), \end{cases}$$

и условие нормировки

$$\sum_{i=0}^n \pi_i = 1. \quad (5)$$

Решая систему, получаем

$$\pi_i = \frac{P_{i-1,i}}{P_{i,i-1}} \cdot \pi_{i-1} = \frac{P_{i-1,i}}{P_{i,i-1}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{01}}{P_{10}} \cdot \pi_0, \quad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Из (5) следует

$$\pi_0 \cdot \left(1 + \frac{P_{01}}{P_{10}} + \frac{P_{01}}{P_{10}} \cdot \frac{P_{12}}{P_{21}} + \dots + \frac{P_{01}}{P_{10}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{n-1,n}}{P_{n,n-1}} \right) = 1.$$

Для π_0 получаем следующее выражение

$$\pi_0 = \frac{P_{10} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1}}{P_{10} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1} + P_{01} \cdot P_{21} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1} + \dots + P_{01} \cdot \dots \cdot P_{n-1,n}}. \quad (7)$$

Из (6) с учетом (7) получаем:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{P_{01} \cdot \dots \cdot P_{i-1,i}}{P_{10} \cdot \dots \cdot P_{i,i-1}} \cdot \pi_0 = \\ &= \frac{P_{01} \cdot \dots \cdot P_{i-1,i} \cdot P_{i+1,i} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1}}{P_{10} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1} + P_{01} \cdot P_{21} \cdot \dots \cdot P_{n,n-1} + \dots + P_{01} \cdot \dots \cdot P_{n-1,n}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Итак, вероятности нахождения марковской цепи M в состояниях S_i ($i = 0, \dots, n$) в стационарном режиме определяются выражениями (7) и (8).

Подставляя (4) в (7) и (8), эти вероятности можно записать в следующем виде:

$$\pi_i = \frac{\sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot p^j \cdot q^{n-j}}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j \cdot q^{n-j}}, \quad (9)$$

где через a_{ij} и a_j обозначены следующие величины:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{\tau_j} \prod_{k=1}^i P_{k-1,k}^{\tau_{jk}} \cdot \prod_{k=i+1}^n P_{k,k-1}^{\tau_{jk}}, \\ a_j &= \sum_{i=0}^n a_{ij}, \end{aligned}$$

где $\tau_j = (\tau_{j1}, \tau_{j2}, \dots, \tau_{jn})$, $\tau_{jk} = \{0, 1\}$, $\sum_{k=1}^n \tau_{jk} = j$, $i = 0, 1, \dots, n$.

6. Оценка дисперсии

Будем считать, что марковская цепь находится в стационарном режиме.

С учетом (2) выражение для дисперсии преобразуем следующим образом:

$$Dz_t = \sum_{i=0}^n \pi_i^t \cdot \left(\frac{i}{n} - p \right)^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Dz = \sum_{i=0}^n \pi_i \cdot \left(\frac{i}{n} - p \right)^2.$$

Согласно (9)

$$Dz = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot \left(\frac{i}{n} - p \right)^2}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j \cdot q^{n-j}}.$$

Для доказательства (3) нужно доказать справедливость для некоторой константы C следующего неравенства:

$$\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot p^j \cdot q^{n-j} \cdot \left(\frac{i}{n} - p\right)^2}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j \cdot q^{n-j}} \geq \frac{C}{n}.$$

Домножив левую часть на $\frac{p^n \cdot q^n}{p^n \cdot q^n}$, перепишем это неравенство следующим образом:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot p^{n+j} \cdot q^{2n-j} \cdot \left(\frac{i}{n} - p\right)^2 \geq \frac{C}{n} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot p^{n+j} \cdot q^{2n-j}. \quad (10)$$

Проинтегрируем по p

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot p^{n+j} \cdot q^{2n-j} \cdot \left(\frac{i}{n} - p\right)^2 dp \geq \frac{C}{n} \cdot \int_0^1 \sum_{j=0}^n a_j \cdot p^{n+j} \cdot q^{2n-j} dp.$$

Раскроем выражение в скобках

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot \left[\frac{i^2}{n^2} \int_0^1 p^{n+j} \cdot q^{2n-j} dp - \frac{2i}{n} \int_0^1 p^{n+j+1} \cdot q^{2n-j} dp + \int_0^1 p^{n+j+2} \cdot q^{2n-j} dp \right] \geq \\ \geq \frac{C}{n} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot \int_0^1 p^{n+j} \cdot q^{2n-j} dp. \end{aligned}$$

Это неравенство можно записать через гамма-функцию

$$\int_0^1 y^{\mu-1} \cdot (1-y)^{\nu-1} dy = \frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}, \quad (\mu, \nu > 0)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot \left[\frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)} - \frac{2i}{n} \cdot \frac{\Gamma(n+j+2) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+3)} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(n+j+3) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+4)} \right] \geq \frac{C}{n} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим

$$\phi(i, j, n) = \frac{i^2}{n^2} - \frac{2i}{n} \cdot \frac{n+j+1}{3n+2} + \frac{(n+j+2) \cdot (n+j+1)}{(3n+3) \cdot (3n+2)}$$

и перепишем (11)

$$\sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)} \cdot \sum_{i=0}^n a_{ij} \cdot \phi(i, j, n) \geq \frac{C}{n} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)}. \quad (12)$$

Заменим $\phi(i, j, n)$ на ее минимум $\psi(j, n)$

$$\begin{aligned} \psi(j, n) &= \min_{0 \leq i < n} \phi(i, j, n) = \phi(i_0, j, n) = \\ &= \phi\left(\frac{n \cdot (n+j+1)}{3n+2}, j, n\right) = \frac{(n+j+1) \cdot (2n-j+1)}{(3n+3) \cdot (3n+2)^2} \end{aligned}$$

и подставим в (12) с учетом (9)

$$\sum_{j=0}^n a_j \cdot \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)} \cdot \psi(j, n) \geq \frac{C}{n} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot \frac{\Gamma(n+j+1) \cdot \Gamma(2n-j+1)}{\Gamma(3n+2)}. \quad (13)$$

Заменяем $\psi(j, n)$ на ее минимум

$$\min_{0 \leq j \leq n} \psi(j, n) = \psi(j_0 = 0, n) = \psi(j_0 = n, n) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{(3n + 3) \cdot (3n + 2)^2},$$

подставим в (13) и, сократив, получим

$$\frac{2n^2 + 3n + 1}{(3n + 3) \cdot (3n + 2)^2} \geq \frac{C}{n}. \quad (14)$$

Из (14) выведем ограничения на константу C

$$C \leq \frac{2}{27} - \frac{15n^2 + 23n + 8}{27 \cdot (9n^3 + 21n^2 + 16n + 4)}.$$

Минимальное значение правой части получается при $r = 1$, $n = 2^r = 2$, а при $r \geq 2$, $n \geq 4$ выполняется

$$C \leq \frac{2}{27} - \frac{5}{27 \cdot n}.$$

Литература

- [1] Бернс Б. Неопределенность в нервной системе. М.: Мир, 1969. 252 с.
- [2] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Цифровая реализация потокового нейрона // Радиотехника и электроника. 1995. N11. С. 1652-1660.
- [3] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Схемотехнические модели построения потоковых нейронов на базе цифровой техники // Микроэлектроника. 1996. Т.25. N1. С. 3-8.
- [4] Тимофеев Е.А. Моделирование нейрона, передающего информацию плотностью потока бинарных импульсов // Автоматика и телемеханика. 1997. N3. С. 190-199.
- [5] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984.

УДК 519.688

Построение и верификация параллельного алгоритма для моделирования распространения упругих волн методом конечных разностей

Певзнер Р. Л., Сагиров Т. А.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Данная статья посвящена применению параллельных вычислений в реализации алгоритма моделирования распространения упругих волн в твердых трехмерно-неоднородных средах методом конечных разностей. Приведены методы параллелизации данного алгоритма, а также верификация построенной схемы с помощью специализированных инструментов. На основе данных методов построен оригинальный программный продукт, который в настоящее время успешно функционирует на гетерогенном кластере.

1. Введение

В настоящее время обработка и интерпретация данных сейсморазведки очень часто ведется при использовании чрезвычайно упрощенных моделей среды. Одной из основных причин этого являются ограниченные представления о распространении упругих волн в сложностроенных средах. Существенное повышение эффективности сейсморазведки при решении сложных задач, таких как, например, выделение малоамплитудных тектонических нарушений, исследования анизотропии физических свойств среды и т.д., может быть достигнуто за счет развития методов, которые позволили бы решать прямую задачу сейсморазведки - получать синтетические сейсмограммы для сред с произвольным распределением упругих параметров.

Одним из немногих методов получения синтетических сейсмограмм, который удовлетворяет указанным требованиям, является метод конечных разностей, не накладывающий жестких ограничений на используемую модель строения среды. Универсальность подхода в значительной мере ограничена крайне высокими вычислительными затратами. Результатом этого послужило то, что еще около пятнадцати лет назад [1] некоторые исследователи предполагали, что метод конечных разностей для задач моделирования может оказаться бесперспективен и область применения будет ограничена алгоритмами миграции на основе скалярного волнового уравнения. Однако стремительное развитие вычислительной техники привело к тому, что уже сейчас удается применить этот подход для решения трехмерных задач о распространении сейсмических колебаний в твердых средах, не обладая при этом специализированными компьютерами.

В настоящее время наиболее перспективным способом увеличения производительности вычислительной системы при решении задач подобного рода следует признать применение параллельных вычислений, проводимых на нескольких компьютерах, объединенных в кластер.

В статье рассматривается практическая реализация алгоритма моделирования распространения упругих волн в твердых трехмерно-неоднородных средах, основанная на применении параллельных вычислений в рамках гетерогенного мультиплатформенного кластера.

2. Моделирование распространения упругих волн методом конечных разностей

2.1. Физические основы метода

Основными уравнениями, описывающими распространение волн в изотропных однородных средах являются уравнение движения (1) и соотношения между напряжениями (σ) и деформациями (2) [2].

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x,$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцированием (2) по соответствующим координатам и подстановкой в (1) легко получить систему уравнений движения для упругой среды без внешних сил, записанную в смещениях частиц (u, v, w) .

2.2. Моделируемая область и описание граничных условий

В силу того, что объем доступной памяти и производительность компьютеров ограничены, область пространства, в которой моделируется распространение упругих волн, была ограничена прямоугольным параллелепипедом.

Границы этой области должны быть мнимыми с точки зрения распространения волны, например, волна не должна отражаться от этих границ. Использование условий Дирихле, когда значения функции (смещения или давления) вдоль границы полагаются равными нулю, или условия Неймана (когда первая производная полагается равной нулю) являются не очень удачным выходом из положения, так как в этом случае границы модели являются сильными отражателями, что создает значимые дополнительные помехи на рассчитываемой волновой картине.

При разработке алгоритма нами были использованы граничные условия, предложенные в [3], основанные на произведении простых дифференциальных операторов первого порядка, каждый из которых обеспечивает хорошую абсорбцию энергии волны, распространяющейся в определенном направлении и с определенной скоростью. Направления распространения волн и их скорости могут выбираться из каких-либо априорных соображений, однако в целом полученное условие не слишком чувствительно к выбору параметров. Общий вид граничного условия для акустического волнового уравнения:

$$\left\{ \prod_{j=1}^m \left((\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} u = 0, \quad (3)$$

где $|\alpha_j| < \pi/2$ для любых значений j . Произведение в (3) означает произведение операторов первого порядка как полиномов относительно $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$. Случай $m = 2$ проверен экспериментально.

2.3. Построение разностной схемы

Заменяя в полученном выражении непрерывные производные их дискретными аналогами, можно получить собственно расчетные выражения, связывающие смещения в текущий момент времени со смещениями в окрестности точки в предыдущие моменты времени.

Пространство модели было разбито равномерной кубической сеткой, в узлах которой и вычислялись значения смещений.

Для расчета волнового поля мы воспользовались вычислительной схемой, обеспечивающей второй порядок точности описания пространственных и временных производных, реализованной на девятиточечном шаблоне типа "крест".

3. Построение базовой модели параллелизации программы моделирования

Описание поля в одной точке (при 4-байтном представлении числа с плавающей запятой) требует как минимум 36 байт оперативной памяти (использование памяти на магнитных дисках невозможно в силу

чрезвычайно низкой скорости обмена). Это означает, что модель, занимающая 2 Гб памяти, что является пределом для одного процесса на ПК под ОС Windows, может состоять не более чем из 55 миллионов узлов, отвечающих, например, кубику со стороной из примерно 400 узлов. Для большинства реальных задач этого недостаточно.

Приведенные рассуждения показывают, что основной задачей, которую необходимо решить при практической реализации алгоритма, является увеличение размеров модели. Опыт применения конечно-разностного моделирования для двумерных задач показал, что там основная задача – это уменьшение времени расчета модели. Для трехмерных задач в силу небольших размеров моделируемого объема среды типичное время расчета модели в целом оказывается существенно меньше, так как нужно сделать гораздо меньше шагов по времени.

В силу того, что значение поля в каждом узле в текущий момент времени не зависит от значений поля в узлах, расположенных далее чем на размер ячейки сети от данного, наиболее очевидный способ построить параллельный алгоритм для рассматриваемой задачи может быть сформулирован следующим способом. Исходный куб модели делился на несколько последовательных слоев, с толщиной, зависящей от вычислительных мощностей используемых компьютеров. В каждом слое точки модели были аналогичны точкам модели в исходной задаче, а также, на границах взаимодействия, присутствуют одноточечные слои синхронизации с соседними слоями. Одноточечные синхронизационные слои повторяют крайние слои соседних кусков модели.

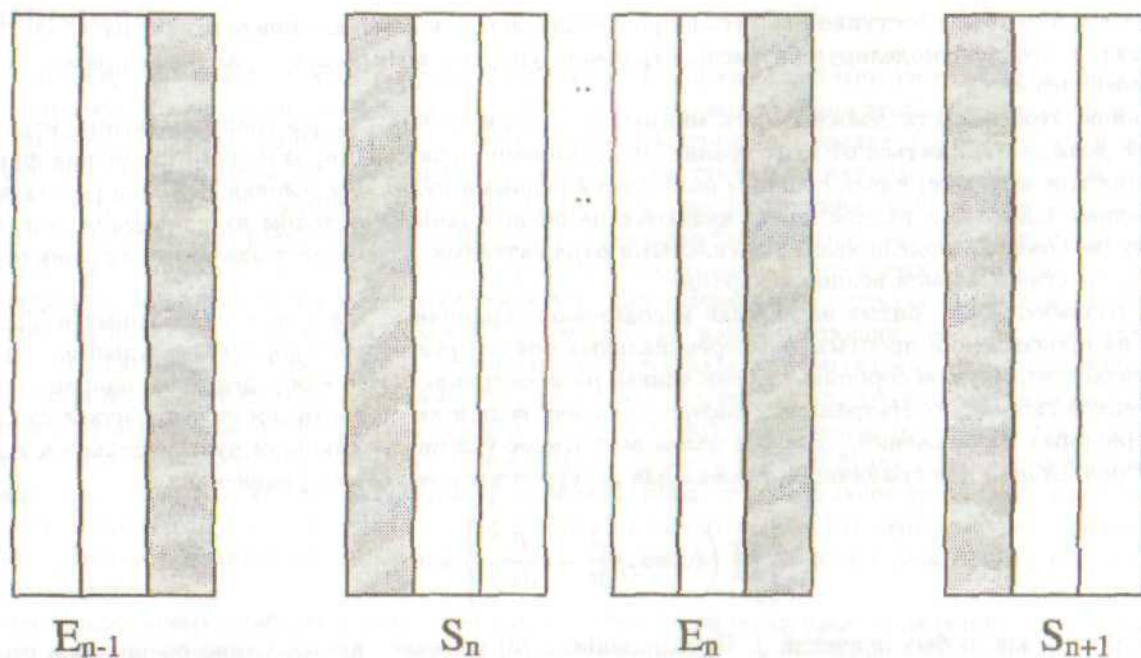


Рис. 1. Разделение памяти. S – стартовая точка, E – конечная точка.

Серым цветом выделены синхронизационные слои.

Таким образом, общая схема пересчета модели может быть выражена следующими этапами:

1. Получить синхронизационные слои от соседей.
2. Посчитать основной слой.
3. Дождаться запроса и переслать граничные слои соседям.

Для реализации данной схемы потребовалось распараллеливание внутри программы. Так, для ожидания запроса и передачи данных были использованы легковесные процессы или нити, по одной на каждую границу. То есть схему работы программы можно показать следующими этапами:

Работа синхронизационных нитей:

1. Дождаться запроса.
2. Сравнить запрашиваемый шаг с шагом основной программы.

3. Если шаги совпадают, то отдать необходимые данные.
4. Если шаги не совпадают, то сигнализировать соседу, чтобы он ждал.

Работа основной программы:

1. Послать запрос соседям и получить информацию.
2. Пересчитать шаг.
3. Дождаться, пока все соседи затребуют и получат данные.

Изложенная выше схема была успешно реализована. В качестве транспортной среды был избран стек протоколов TCP/IP. Как показал опыт, такой выбор позволил в дальнейшем оперативно перенести программу на другие платформы, что обеспечило создание гетерогенного кластера. В данный момент программный комплекс активно используется в научных интересах моделирования волновых полей.

4. Моделирование и верификация

Для исследования непротиворечивости процесса обмена данными была построена модель, состоящая из двух процессов, объединенных между собой двумя коммуникационными каналами, один из которых использовался правым процессом, а второй – левым. Целью верификации была проверка модели на отсутствие дедлоков, ливлоков и неправильных точек завершения программы.

Как средство моделирования был выбран язык Promela, а как средство верификации – программный продукт Spin центра исследования Computer Science Research компании Bell Labs. Детальное описание Spin может быть найдено в [4, 5].

На рисунках 2 и 3 приведены блок-схемы работы коммуникационных нитей и основных процессов. Данные блок-схемы были представлены в виде следующих спецификаций на языке Promela:

1. Модель левой коммуникационной нити.	1. Модель левого процесса.
<pre> proctype left_thread() { mtype mesg; int req_step; loop: do :: right_ans?mesg, req_step -> goto proceed; :: (l_error == true) -> goto funcend; :: (l_final == true) -> goto funcend; od; proceed: if :: (mesg == request_msg) -> goto request; :: (mesg == err_msg) -> goto error; fi; error: l_error = true; goto funcend; request: if :: (req_step == l_step) -> goto givedata; :: (req_step != l_step) -> goto givewait; fi; givedata: if :: right_ans!data_msg, 0; :: (l_error == true) -> goto funcend; fi; l_sync = l_sync + 1; </pre>	<pre> proctype left_proc() { byte gotright; int req_num; int answer; int ans_param; l_step = 0; start: if :: (l_step == endstep) -> l_final = true; :: (l_step != endstep) -> skip; fi; gotright = false; l_sync = 0; req_num = 0; goto request; request: req_num = req_num + 1; if :: (req_num == req_limit) -> goto error; :: (req_num != req_limit) -> skip; fi; if :: (gotright == true) -> goto calc; :: (gotright != true) -> goto r_request; fi; r_request: if </pre>

1. Модель левой коммуникационной нити.	1. Модель левого процесса.
<pre> goto loop; givewait: if :: right_ans!wait_msg,0; :: (l_error == true) -> goto funcend; fi; goto loop; funcend: skip; } </pre>	<pre> :: left_ans!request_msg,l_step; :: (l_error == true) -> goto funcend; fi; if :: left_ans?answer,ans_param; :: (l_error == true) -> goto funcend; fi; if :: (answer == wait_msg) -> goto request; :: (answer == data_msg) -> gottright=true; goto request; fi; error: if :: left_ans!err_msg,0; :: timeout -> skip; :: (l_error == true) -> goto funcend; fi; l_error = true; goto funcend; calc: if :: goto error; :: goto success; fi; success: if :: (l_sync != 0) -> l_step = l_step + 1; goto start; :: (l_sync == 0) -> goto success; fi; funcend: skip; } </pre>

Правый процесс и правая коммуникационная нить аналогичны, с точностью до замены переменных и коммуникационных каналов.

В рассматриваемом случае были использованы следующие переменные (нотация языка Promela):

```

#define err_msg      0
#define wait_msg    1
#define data_msg    2
#define request_msg 3

chan left_ans = [0] of {short, int}
chan right_ans = [0] of {short, int}

```

То есть в системе использовались четыре типа сообщений, а также коммуникационные каналы типа "рандеву" с передачей двух параметров.

Построенная модель была верифицирована с помощью программы Spin. Верификация проводилась полным перебором пространства состояний с помощью техники bitstate hashing [6]. Верификация показала отсутствие дедлоков, ливлоков и неправильных точек завершения процессов. Это дает основания полагать, что представленная выше общая схема проведения параллельных вычислений является непротиворечивой и корректной относительно поставленных критериев.

5. Заключение

Построенная схема взаимодействия параллельных процессов для вполне конкретного класса задач является вполне работоспособной и уже на данный момент дает практические результаты. На основе выше-

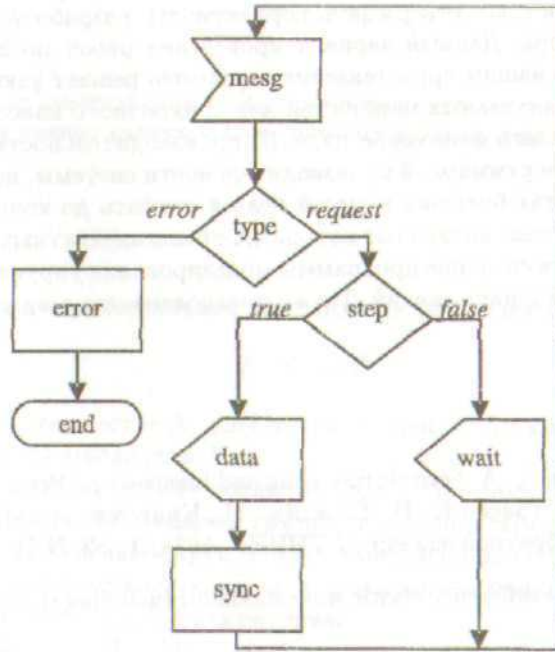


Рис. 2. Блок-схема коммуникационной нити

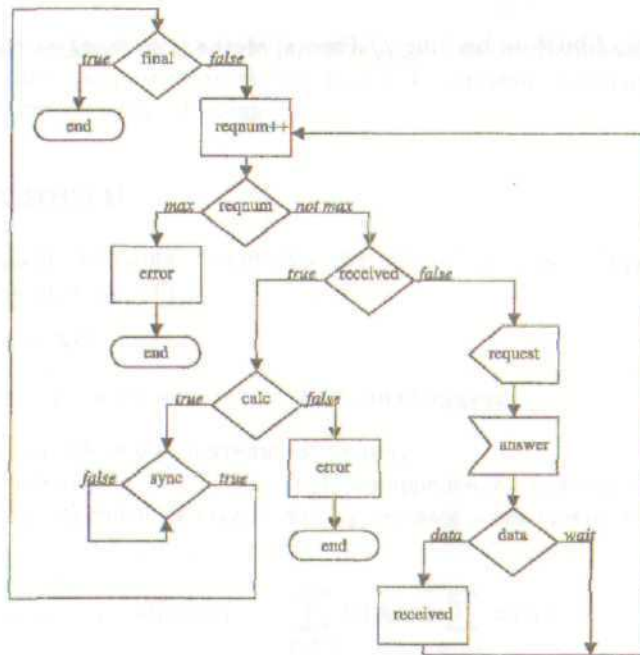


Рис. 3. Блок-схема основного процесса

приведенных алгоритмов разработан оригинальный программный продукт, написанный на языке ANSI C++.

Использование платформонезависимого стека протоколов TCP/IP в качестве основы коммуникаций позволило создать на базе компьютеров ФГУП ИПЦ "Недра" гетерогенный кластер, включающий в себя несколько Windows- и Linux-машин, который в настоящее время используется для моделирования распространения волновых полей в различных средах. В настоящее время в кластере используется 6 процессоров Intel Pentium III, суммарный объем ОЗУ составляет порядка 6 Гб.

Приведенные выкладки позволяют утверждать корректность разработанного протокола взаимодействия процессов внутри кластера. Данный вариант проведения работ по параллелизации, конечно, не является универсальным, но, по нашим представлениям, успешно решает узкий круг проблем, связанных с расширением памяти и вычислительных мощностей для конкретного класса алгоритмов.

Произведенные замеры показали некоторое падение производительности отдельно взятой машины, что полностью окупается ростом суммарной производительности системы, построенной из многих ЭВМ. Производительность при расчетах больших моделей нельзя считать до конца исследованной, так как в рамках вычислительных мощностей, доступных авторам, не было адекватных компьютерных комплексов.

В дальнейшем предполагается создание программы моделирования упругих волн с помощью конечных разностей в терминах скоростей и напряжений. Также предполагается создание аналогичной кластерной версии продукта.

Литература

- [1] Wason C. B., Black J. L., King G. A. Seismic modeling and inversion // Proc. of the IEEE. 1984. Vol. 72. P. 1385-1393. (Русский перевод: Уэйсон К. Б., Блэк Дж. Л., Кинг Дж. А.. Моделирование сейсмических волновых полей и решение обратной задачи // ТИИЭР. 1984. Т. 82, N 10. С. 179-189.)
- [2] Hestholm S., Ruud B. 3-D finite-difference elastic wave modeling including surface topography // Geophysics. 1998. Vol. 63. P. 613-622.
- [3] Higdon R. L. Absorbing boundary conditions for elastic waves // Geophysics. 1991. Vol. 56 P. 231-241.
- [4] Holzmann G. J.. Design and Validation of Computer Protocols. Prentice-Hall, New Jersey. 1991.
- [5] Holzmann G. J. The Spin Model Checker // IEEE Trans. on Software Engineering. 1997. Vol. 23, N 5. P. 279-295.
- [6] Holzmann G. J. An analysis of bitstate hashing // Formal Methods in Systems Design. 1998. Vol. 13, 3. P. 287-305.

УДК 519.6

О сложности одной многокритериальной задачи

Груздев О.И., Краснов М.В.¹

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

Целью работы служит демонстрация того, что труднорешаемость многокритериальных дискретных задач определяется именно наличием более одного критерия, а не сложностью множества допустимых элементов.

Введение

При рассмотрении задач многокритериальной оптимизации речь идет о векторной функции

$$J : X \rightarrow R^k, \quad (1)$$

подлежащей оптимизации на множестве X допустимых решений. Дискретный характер задачи оптимизации предполагает конечность множества X .

Хорошо известно, что многие известные полиномиально разрешимые однокритериальные задачи дискретной оптимизации становятся NP-полными уже при введении второго критерия; в частности такими задачами являются задача о кратчайшем пути, задача о минимальном остовном дереве, задача о назначениях (подробнее см. [1-3]) Возникает вопрос о том, что оказывается решающим в этом факте: структура множества допустимых элементов или число критериев.

Задача 1. *Заданы множество $H = \{h_1, \dots, h_n\}$, на котором определена k -мерная функция $c = c(h_i)$, вектор $C \in R^k$ и натуральное m . Требуется выяснить, существует ли подмножество $A \subseteq H$, для которого выполняются следующие условия:*

$$|A| = m, \quad \sum_{h_i \in A} c(h_i) \leq C. \quad (2)$$

Внимание к этой задаче определяется простотой множества допустимых решений. В случае $k = 1$ Задача 1 является полиномиально разрешимой с помощью тривиального алгоритма. Ниже будет показано, что при $k > 1$ Задача 1 становится NP-полной.

1. Анализ сложности

Напомним, что задача распознавания называется NP-полной в смысле Кука-Карпа, если выполняются следующие условия (подробнее см. [4]):

- задача входит в класс NP;
- к ней полиномиально сводится некоторая NP-полная задача.

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 2. *Заданы множество $P = \{p_1, \dots, p_q\}$, натуральное число m , и для каждого элемента $p_i \in P$ определен вес $w(p_i) \geq 0$. Требуется выяснить, существует ли такое подмножество S множества P , для которого*

$$|S| = m, \quad \sum_{p_i \in S} w(p_i) = \sum_{p_i \notin S} w(p_i). \quad (3)$$

Теорема 1. *Задача 2 является NP-полной.*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 00-01-00662 и 02-01-06551)

Доказательство. Легко убедиться, что **Задача 2** входит в класс NP. Это следует из того, что недетерминированному алгоритму нужно только угадать подмножество S и за полиномиальное время проверить, что все его элементы принадлежат множеству P и выполняются следующие условия:

$$|S| = m, \quad \sum_{p_i \in S} w(p_i) = \sum_{p_i \notin S} w(p_i).$$

Осуществим полиномиальное сведение к **Задаче 2** хорошо известной задачи **Разбиение**, напомнив предварительно ее формулировку [4].

Задано множество $M = \{a_i, i \in \{1, \dots, s\} = N_s\}$ натуральных чисел. Требуется выяснить, существует ли такое подмножество $M_1 \subseteq M$, для которого выполняется равенство:

$$\sum_{a_i \in M_1} a_i = \sum_{a_i \in M \setminus M_1} a_i. \quad (4)$$

Рассмотрим индивидуальную задачу **Разбиение** с заданным множеством M . Соответствующую индивидуальную **Задачу 2** построим следующим образом:

- 1) положим $q = 2s - 1$;
- 2) рассмотрим множество P с количеством элементов, равным q ;
- 3) для каждого элемента $p_i \in P$ определим вес

$$w(p_i) = \begin{cases} a_i, & i \in \{1, \dots, s\}, \\ 0, & i \in \{s+1, \dots, 2s-1\}; \end{cases}$$

- 4) значение m положим равным s .

Покажем, что для индивидуальной **Задачи 2** с такими исходными данными существует множество $S \subseteq P$, удовлетворяющее условию (3) с $m = s$, в том и только в том случае, когда для задачи **Разбиение** существует множество $M_1 \subseteq M$, удовлетворяющее условию (4).

Пусть для индивидуальной задачи **Разбиение** существует множество $M_1 \subseteq M$, для которого выполняется $\sum_{a_i \in M_1} a_i = \sum_{a_i \in M \setminus M_1} a_i$. Тогда в качестве решения соответствующей **Задачи 2** можно рассмотреть множество S , которое строится следующим образом:

- 1) включим в множество те элементы $p_i \in P$, которые ассоциируются с элементами, вошедшими в M_1 ;
- 2) для выполнения условия $|S| = m$ добавим недостающее количество элементов с нулевыми весами.

Предположим теперь, что существует множество $S \subseteq P$, для которого выполняется условие (3). Тогда для нахождения множества M_1 задачи **Разбиение** достаточно удалить из множества S элементы с нулевым весом. \square

Теорема 2. *Задача 1 при $k > 1$ является NP-полной.*

Доказательство. Покажем сначала, что **Задача 1** принадлежит классу NP. Действительно, недетерминированному алгоритму нужно лишь угадать множество A и затем за полиномиальное время проверить, выполняются ли для него следующие условия:

$$|A| = m, \quad \sum_{h_i \in A} c(h_i) \leq C.$$

Осуществим полиномиальное сведение к **Задаче 1** с $k = 2$ только что рассмотренной **Задачи 2**.

Рассмотрим индивидуальную **Задачу 2** с заданным множеством P , натуральным числом m и заданным весом $w(p_i) \geq 0$ для любого элемента $p_i \in P$. Соответствующую индивидуальную **Задачу 1** построим следующим образом:

- 1) положим $n = |P|$;
- 2) в качестве множества H возьмем множество P ;

3) для каждого элемента $h_i \in H$ вес определим формулой

$$c(h_i) = (w(p_i), W - w(p_i)), \quad (5)$$

где $W = \sum_{i=1}^{|P|} w(p_i)$;

4) вектор $C \in R^2$ определим в виде:

$$C = (B, mW - B), \quad (6)$$

где $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|P|} w(p_i)$.

Покажем, что для индивидуальной **Задачи 1** с такими исходными данными существует множество $A \subseteq H$, удовлетворяющее условиям (2) с параметрами C из условия (6), в том и только в том случае, когда существует множество $S \subseteq P$, удовлетворяющее условиям (3).

Пусть для индивидуальной **Задачи 2** существует такое множество $S \subseteq P$, что

$$|S| = m, \quad \sum_{p_i \in S} w(p_i) = \sum_{p_i \notin S} w(p_i).$$

Сконструированная индивидуальная **Задача 1** будет иметь в качестве решения элементы, ассоциированные с элементами множества S (так как каждому элементу $p_i \in S$ с весом $w(p_i)$ соответствует элемент $h_i \in A$ с весом $(w(p_i), W - w(p_i))$):

$$\begin{aligned} \sum_{h_i \in A} c(h_i) \leq C &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h_i \in A} c_1(h_i) \leq C_1 \\ \sum_{h_i \in A} c_2(h_i) \leq C_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p_i \in S} w(p_i) \leq C_1 \\ \sum_{p_i \in S} (W - w(p_i)) \leq C_2 \end{array} \right. \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p_i \in S} w(p_i) \leq B \\ \sum_{p_i \in S} (W - w(p_i)) \leq mW - B \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p_i \in S} w(p_i) \leq B \\ \sum_{p_i \in S} w(p_i) \geq B \end{array} \right. \Rightarrow \\ \sum_{p_i \in S} w(p_i) = B = \frac{1}{2} \sum_{p_i \in P} w(p_i) &\Rightarrow \sum_{p_i \in S} w(p_i) = \sum_{p_i \notin S} w(p_i). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что существует подмножество A множества H , для которого выполняется условия (2) с параметрами из условий (6). Тогда в качестве решения соответствующей **Задачи 2** возьмем множество $S \subseteq P$, элементы которого ассоциируются с элементами из множества A . \square

2. Псевдополиномиальный алгоритм

Учитывая, что для задачи **Разбиение**, использованной при доказательстве NP-полноты **Задачи 1**, известен псевдополиномиальный алгоритм (см. [4]), можно рассчитывать на существование алгоритма с псевдополиномиальной временной сложностью для нахождения полного множества альтернатив **Задачи 1**. Напомним, что элемент $x \in X$ называется паретовским минимумом, если из условий $f(x^*) \leq f(x)$ и $x^* \in X$ следует, что $f(x) = f(x^*)$. Множество X^* , состоящее из всех паретовских минимумов, называется паретовским множеством (ПМ), или множеством минимальных по Парето элементов. Подмножество $X^0 \subseteq X^*$ называется полным множеством альтернатив (ПМА), если его мощность $|X^0|$ минимальна и выполняется равенство: $F(X^0) = F(X^*)$ (более подробно см. [5]).

Для построения алгоритма рассмотрим конструкцию, которая будет представлять собой трехмерную матрицу D , элементы $d_{i,(j_1,j_2),l}$ которой принимают только два значения: T и F . Условие $d_{i,(j_1,j_2),l} = T$, где $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j_1 \leq C_1$, $0 \leq j_2 \leq C_2$ и $1 \leq l \leq m$, означает истинность утверждения "существует подмножество множества $\{h_1, \dots, h_i\}$, которое содержит l элементов и суммы весов его элементов по первому и по второму критерию в точности равны j_1 и j_2 соответственно".

Опишем работу предложенного алгоритма.

Инициализация: во всех ячейках матрицы ставится F .

Элементы первого слоя $d_{1,(j_1,j_2),1} = T$ тогда и только тогда, когда $j_1 = c_1(h_1)$ и $j_2 = c_2(h_1)$. Каждый следующий слой (где слой - это множество элементов матрицы с одинаковым индексом i) заполняется с использованием значений, расположенных в предыдущем слое.

Для $1 < i \leq q$, $0 \leq j_1 \leq C_1$, $0 \leq j_2 \leq C_2$ и $1 \leq l \leq m$ равенство $d_{i,(j_1,j_2),l} = T$ имеет место только в ситуациях:

$$\begin{cases} d_{i,(j_1,j_2),1} = T, & \text{если } c_1(h_i) = j_1 \text{ и } c_2(h_i) = j_2, \\ d_{i,(j_1,j_2),l} = T, & \text{если } d_{i-1,(j_1,j_2),l} = T, \\ d_{i,(j_1,j_2),l} = T, & \text{если } d_{i-1,(j_1-c_1(h_i),j_2-c_2(h_i)),l-1} = T. \end{cases}$$

Процесс завершается, когда вся таблица будет заполнена. Индивидуальная задача будет решена, поскольку ей соответствует ответ "да" тогда и только тогда, когда $d_{n,(j_1,j_2),m} = T$, (где $0 \leq j_1 \leq C_1$ и $0 \leq j_2 \leq C_2$).

Легко заметить, что время работы предложенного алгоритма ограничено полиномом от nC_1C_2 , а так как $m \leq n$, то трудоемкость алгоритма можно оценить полиномом от $n^2C_0^2$, где $C_0 = \max(C_1, C_2)$.

Предложенный алгоритм дает решение для Задачи 1 в форме задачи распознавания. В случае же необходимости нахождения непосредственно подмножества, удовлетворяющего условию (2), алгоритм модифицируется следующим образом.

Инициализация: во всех ячейках матрицы ставится 0.

Процедура заполнения таблицы:

$$\begin{cases} d_{i,(j_1,j_2),l} = i, & \text{если } c_1(h_i) = j_1 \text{ и } c_2(h_i) = j_2, \\ d_{i,(j_1,j_2),l} = d_{i-1,(j_1,j_2),l}, & \text{если } d_{i-1,(j_1,j_2),l} \neq 0, \\ d_{i,(j_1,j_2),l} = i - 1, & \text{если } d_{i-1,(j_1-c_1(h_i),j_2-c_2(h_i)),l-1} \neq 0. \end{cases}$$

Тем самым вместо "флага" T на каждом шаге алгоритма в ячейках таблицы хранится номер предпоследнего элемента, вошедшего в текущее подмножество. Для нахождения искомого подмножества проводится обратный ход алгоритма.

Литература

- [1] Bondarenko V.A., Mustard J., Pokrovski A.V. Combinatorial problem connected with Stabilization of System with Quasichotic Behaviour. Deakin University. Geelong AU. 1997. P. 1-23.
- [2] Булатов В.А. NP-полнота двухкритериальной задачи об остовном дереве// Современные проблемы математики и информатики. Ярославль, 1997. С. 58-62.
- [3] Краснов М.В. NP-полнота многокритериальной задачи о назначениях// Современные проблемы математики и информатики. Ярославль, 1997. С. 63-67.
- [4] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
- [5] Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач// Дискретная математика. 1994. Т. 6. №1. С. 3-33.

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Нечеткие аналоги эйлеровой характеристики для полутоновых изображений

Парфенов П. Г.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

На основе многочленов, вычисляющих эйлерову характеристику черно-белых изображений, в работе рассматривается подход к определению нечетких аналогов эйлеровой характеристики для полутоновых изображений.

Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики черно-белых изображений рассматривались в работах [1, 2, 3, 4, 5]. В заметке [6] были построены многочлены на черно-белых изображениях, вычисляющие их эйлерову характеристику. В настоящей работе предлагается рассматривать значения этих полиномов на полутоновых изображениях в качестве нечеткого аналога эйлеровой характеристики. Полутоновое изображение A задается матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами, принимающими значение на отрезке $[0;1]$. Фрагментом s размера 2×2 изображения A называется любая подматрица матрицы A , состоящая из элементов $a_{ij} = p_1, a_{i+1j} = p_2, a_{ij+1} = p_3, a_{i+1j+1} = p_4$. В работах [1,3,4,5] было показано, что существуют функции F , определенные на фрагментах s размера 2×2 изображения A , такие, что эйлерова характеристика

$$\chi(A) = \sum_{s \subseteq A} F(s).$$

В работе [6] указан способ построения функций $F(s)$ в виде многочленов. В соответствии с этим результатом зададим значения для нечеткого аналога функции $F(s)$ на фрагментах s размера 2×2 полутонового изображения следующим образом:

$$F_1^f(s) = 1/4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4(p_1p_4 + p_2p_3) + (a-2)p_1p_3 - (a+2)p_2p_4 + (b-2)p_2p_4 - (b+2)p_1p_3 + 4(p_1p_2p_3 + p_2p_3p_4 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4) - 4p_1p_2p_3p_4),$$

для "сильной" связности и

$$F_2^f(s) = 1/4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + (a-2)p_1p_2 - (a+2)p_3a_4 + (b-2)p_2p_4 - (b+2)p_1p_3 + 4p_1p_2p_3p_4)$$

для "слабой" связности. Выражение для нечеткого аналога эйлеровой характеристики можно, очевидно, преобразовать к виду:

$$\chi_k^f(A) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} F_k^f(a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}),$$

где $k = 1, 2$ в соответствии с типом связности. Ниже (Рис.1) приведены примеры некоторых полутоновых изображений и соответствующие многочлены, задающие значения нечетких аналогов эйлеровой характеристики, соответственно, слева направо:

$$\chi_2^f = 3 - p_1 - p_2, \chi_2^f = 2 - p_1 - p_2, \chi_2^f = 4p_1^3 - 4p_1^2.$$

Приведенные примеры, как представляется, показывают, что определенный вышеуказанным образом аналог эйлеровой характеристики достаточно хорошо согласуется с естественными требованиями к такого рода нечеткой функции.

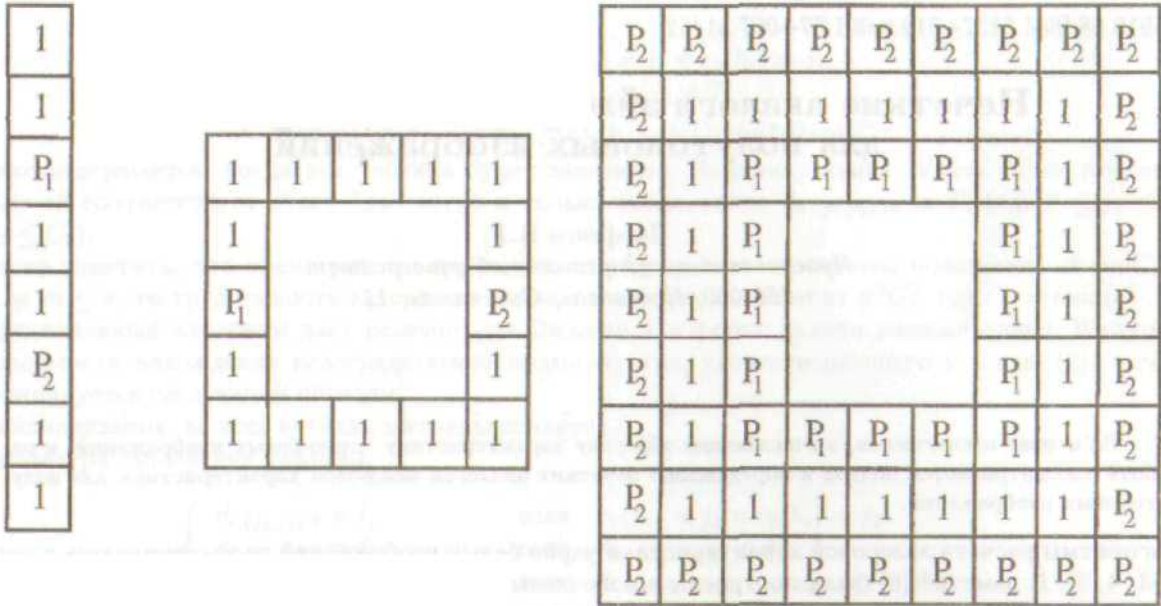


Рис. 1.

Литература

- [1] Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин. М.:Мир, 1972.
- [2] Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн.2. М.:Мир, 1982.
- [3] Gray S.B. Local properties of binary images in two dimensions //IEEE Trans.Computers. 1971. May, C-20, 5. P. 551-561.
- [4] Парфенов П.Г. Об эйлеровой характеристике изображения // Архитектура и программное обеспечение вычислительных систем. Ярославль, 1992. С.76-79.
- [5] Парфенов П.Г. Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики трехмерного изображения //Моделирование и анализ информационных систем. Вып.2. Ярославль, 1993. С. 3-7.
- [6] Парфенов П.Г. Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику //Моделирование и анализ информационных систем. Т.8, №2. Ярославль, 2001. С. 37-38.

УДК 681.3

Коррекция результатов каротажа глубоких скважин

Неклюдов Д.М.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Введение

В данной работе описаны алгоритмы коррекции результатов измерений (каротажа) в глубоких скважинах. Коррекция проводится за счет устранения нелинейных искажений (неточности в определении глубины), программной калибровки измеряющего прибора и устранения систематической ошибки - ошибки в измерениях самого параметра для данных каротажа.

Эти алгоритмы были применены для анализа данных профилометрии и гамма-каротажа Воротиловской скважины.

Для данных профилометрии проведенные вычисления показали, что нелинейные искажения практически отсутствуют. Выделена систематическая ошибка. После устранения этих двух ошибок выяснилось, что данные профилометрии возрастают по времени.

Применение этих алгоритмов для анализа данных гамма-каротажа показало, что систематическая ошибка практически отсутствует; нелинейные искажения значительно больше, чем у профилометрии, их амплитуда изменяется в пределах одного метра, и они могут быть исправлены, а небольшие изменения масштабирующего коэффициента позволяют добиться почти точного совпадения графиков гамма-каротажа. Это означает, что устранена неточность в калибровке измеряющего прибора.

1. Постановка задачи

Результаты геофизических измерений в глубоких скважинах можно охарактеризовать следующим образом:

- число измерений составляет несколько тысяч;
- измерения содержат как нелинейные искажения, так и систематическую ошибку, которые изменяются в зависимости от глубины;
- нелинейные искажения и систематическую ошибку можно считать малыми и медленно изменяющимися;
- неточная калибровка.

Итак, даны результаты измерений

$$y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,N}, y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,N}, \dots, y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,N}$$

некоторой неизвестной функции $y = F(x)$ на заданном интервале $[A, B]$ с шагом $d = \frac{B-A}{N-1}$.

Пусть измерения проводятся с небольшими нелинейными искажениями, задаваемыми неизвестной функцией $h_j(x)$, где $j = 1, 2, \dots, n$. Поэтому измеряется не функция $y = F(x)$, а функция $y = F(x + h_j(x))$. Кроме того, измерения содержат также небольшую систематическую ошибку, которую обозначим через $g_j(x)$.

Из всего сказанного, измеренные значения $y_{j,i}$ функции $F(x)$ можно представить как

$$\begin{aligned} y_{j,i} &= k_j(x_i)F(x_i + h_j(x_i)) + g_j(x_i), \\ x_i &= (i-1)d + A, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где k_j - масштабирующий (калибровочный) коэффициент.

Требуется найти функции $h_j(x)$, $g_j(x)$, $k_j(x)$

Строгие математические ограничения на функции $h_j(x)$, $g_j(x)$ состоят в том, что $h_j(x)$ и $g_j(x)$ m раз дифференцируемы и нормы (максимум модуля) как самих функций, так и всех первых m производных ограничены сверху небольшим значением ε . Также будем считать, что для параметра $k_j(x)$ значение нормы (максимум модуля) близко к единице.

В том случае, когда значение функции F неизвестно, нахождение нелинейных искажений и систематической ошибки можно проводить по результатам нескольких измерений. Естественно, что у систематической ошибки речь может идти только о нахождении приращений.

Далее, функции $h_j(x)$, $g_j(x)$, $k_j(x)$ будем называть корректирующими параметрами.

2. Нахождение корректирующих параметров на небольшом интервале

Пусть на заданном небольшом интервале $[a, b]$ даны результаты двух измерений $y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,M}$ и $y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,M}$ одного и того же параметра с шагом d , напомним, что $d = \frac{b-a}{N-1}$

$$\begin{aligned} y_{1,i} &= k_1(x_i)F(x_i + h_1(x_i)) + g_1(x_i), \\ y_{2,i} &= k_2(x_i)F(x_i + h_2(x_i)) + g_2(x_i), \\ x_i &= (i-1)d + a, \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Здесь же отметим, что оба измерения проводятся с одинаковым шагом по глубине.

Предположим, что значение M не очень большое (несколько сотен). В этом случае участок измерения ($[a, b = a + (M-1)d]$) небольшой, и поэтому предположения о нелинейных искажениях и систематической ошибке позволяют считать, что на этом участке они постоянны.

Сделав замену аргумента у функции F , получаем следующую вспомогательную задачу.

Даны результаты двух измерений

$$\begin{aligned} y_{1,i} &= F(x_i), \\ y_{2,i} &= kF(x_i + h) + g, \\ x_i &= (i-1)d + a, \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется найти неизвестные h, g, k .

2.1. Решение оптимизационной задачи

Обозначим через $\Phi(x)$ функцию, задающую результаты второго измерения. Неизвестные смещения по обеим осям g, h и коэффициент k будем находить из предположения, что функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ должны быть примерно одинаковы.

За меру близости двух функций возьмем наиболее применяемую функциональную норму – норму пространства L^2 .

Таким образом, для нахождения g, h, k получаем следующую экстремальную задачу

$$\int_a^b (F(x) - k\Phi(x-h) - g)^2 dx \rightarrow \min.$$

Считая, что h кратно шагу d дискретизацию этой задачи с приближением функции ступенчатой можно записать следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^M (y_{1,i} - ky_{2,i-h} - g)^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Необходимое условия экстремума $\frac{\partial L}{\partial g} = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial k} = 0$ можно записать как

$$\begin{aligned} g &= g(h) = \frac{\sum_{i=1}^M y_{1,i} \cdot \sum_{i=1}^M y_{2,i}^2 - \sum_{i=1}^M y_{1,i} y_{2,i} \sum_{i=1}^M y_{2,i}}{M \sum_{i=1}^M y_{2,i}^2 - (\sum_{i=1}^M y_{2,i})^2}, \\ k &= k(h) = \frac{\sum_{i=1}^M y_{1,i} - gM}{\sum_{i=1}^M y_{2,i}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нахождение неизвестной h в явном виде невозможно, поэтому для ее нахождения имеем следующую задачу

$$L(h) = \sum_{i=1}^M (y_{1,i} - k(h)y_{2,i-h} - g(h))^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

где $g(h)$ и $k(h)$ определено в (4) для каждого фиксированного h .

При таком способе нахождения h возможно появление "дребезга" – скачка нелинейных искажений. Для устранения дребезга сделаем следующую модификацию. Введем некоторый порог p такой, что если $p > |1 - L(h_{min})/L(0)|$, то $h=0$, h_{min} – такое h , где $L(h)$ достигает своего минимального значения.

3. Нахождение корректирующих параметров на большом интервале

В п. 2 мы решили задачу на маленьком интервале $[a, b]$. В этом пункте будет показано, как построить решение на исходном интервале $[A, B]$ с помощью решений на малом интервале.

Для того чтобы решить задачу на большом интервале, нужно последовательно выполнить несколько действий:

- Разобьем исходный интервал $[A, B]$ на более мелкие. Будем решать задачу определенную в п. 2 для отдельно взятого маленького интервала - $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, J$, где $a_1 = A, a_2 = b_1, \dots, a_j = b_{j-1}, \dots, b_j = B$ и J - количество маленьких интервалов.
- После вычислений h_j^1, g_j^1, k_j^1 по формулам (4) и (5) на каждом j -ом интервале, $j = 1, \dots, J$, для всего отрезка мы получим ступенчатые функции

$$\begin{aligned} H_1 &= h_1^1 \cup h_2^1 \cup \dots \cup h_J^1, \\ G_1 &= g_1^1 \cup g_2^1 \cup \dots \cup g_J^1, \\ K_1 &= k_1^1 \cup k_2^1 \cup \dots \cup k_J^1, \end{aligned} \quad (6)$$

где знак \cup обозначает "склеивание" значений функций на интервалах.

- Затем сдвинем границы интервалов $[a_j, b_j]$ на число $T = \frac{b_j - a_j}{I}$, $I > 0$, тогда $a_j := a_j + T, b_j := b_j + T$. И снова вычислить h_j^2, g_j^2, k_j^2 на каждом j -ом интервале, тем самым получим функции

$$\begin{aligned} H_2 &= h_1^2 \cup h_2^2 \cup \dots \cup h_J^2, \\ G_2 &= g_1^2 \cup g_2^2 \cup \dots \cup g_J^2, \\ K_2 &= k_1^2 \cup k_2^2 \cup \dots \cup k_J^2. \end{aligned} \quad (7)$$

- Проделав I таких действий, получим I ступенчатых функций $H_i, G_i, K_i, i = 1, \dots, I$ таких, что

$$\begin{aligned} H_i &= h_1^i \cup h_2^i \cup \dots \cup h_J^i, \\ G_i &= g_1^i \cup g_2^i \cup \dots \cup g_J^i, \\ K_i &= k_1^i \cup k_2^i \cup \dots \cup k_J^i. \end{aligned} \quad (8)$$

- Откуда получаем окончательный ответ для функций линейного искажения, систематической ошибки и масштабирующего коэффициента на всем большом интервале.

$$\begin{aligned}\hat{H}(x_l) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I H_i(x_l), \\ \hat{G}(x_l) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I G_i(x_l), \\ \hat{K}(x_l) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I K_i(x_l).\end{aligned}\tag{9}$$

$$l = 1, 2, \dots, N. \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Данный алгоритм позволяет построить функции корректирующих параметров для всего интервала $[A, B]$.

4. Нахождение корректирующих параметров для n измерений

Итак, имеем алгоритм для решения поставленной задачи для случая 2-х измеренных сигналов. Рассмотрим случай, когда сигналов $n > 2$.

Для нахождения корректирующих параметров в случае, когда имеется n замеров одной и той же величины, выберем некоторый эталонный сигнал S (методы построения эталонного сигнала описаны ниже), относительно которого получим интересующие нас данные.

Далее найдем корректирующие функции по алгоритмам описанных в п. 2 – 3, относительно эталонного сигнала и обозначим как

$$\hat{H}_{avg_j}(x_l),$$

$$\hat{G}_{avg_j}(x_l),$$

$$\hat{K}_{avg_j}(x_l).$$

$$l = 1, 2, \dots, N. \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тем самым получим оценки на функции систематической ошибки, нелинейных искажений и масштабирующего коэффициента относительно эталонного сигнала.

4.1. Способы выбора эталонных сигналов

Здесь мы покажем некоторые способы построения эталонных сигналов.

Первый способ. Вначале приведем самый простой способ – это в качестве эталонного сигнала просто выбрать один из n уже имеющихся сигналов. Это может быть, например, либо первый, либо последний сигнал.

Второй способ. Для того чтобы определить эталонный сигнал, мы выберем какой-либо из имеющихся сигналов, например последний, обозначим его через s и будем искать нелинейное искажение, масштабирующий коэффициент и систематическую ошибку для каждого из оставшихся сигналов относительно s .

В результате получим $n - 1$ функций $\hat{H}_j(x_i)$, $\hat{K}_j(x_i)$ и $\hat{G}_j(x_i)$, $j = 1, \dots, n - 1$, $i = 1, \dots, N$ см. формулу (9). Далее найдем среднее значение функции нелинейных искажений,

$$H_{avg}(x_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{H}_j(x_l). \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad j = 1, 2, \dots, n-1.\tag{10}$$

Для того чтобы найти эталонный сигнал S , сигнал s преобразуем следующим образом:

$$S(x_l) = s(x_l + H_{avg}(x_l)), \quad l = 1, 2, \dots, N,\tag{11}$$

т.е. сопоставим нашим замерам "наиболее ожидаемое" (наиболее правильное) местоположение по глубине (координате x). $S(x_i)$ – это и есть наш искомый эталонный сигнал.

Третий способ. Этот способ похож на предыдущий, также мы выберем какой-либо из имеющихся сигналов, например последний, обозначим его через s и будем искать нелинейное искажение, масштабирующий коэффициент и систематическую ошибку для каждого из оставшихся сигналов относительно s .

В результате получим $n-1$ функций $\hat{H}_j(x_i)$, $\hat{K}_j(x_i)$ и $\hat{G}_j(x_i)$, $j = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, N$ см. формулу (9). Далее каждый из n сигналов преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_j(x_i) &= F_j(x_i - \hat{H}_j(x_i)), \\ Y_n(x_i) &= F_n(x_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \\ j &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{12}$$

В результате эталонным сигналом будем считать

$$\begin{aligned} S(x_i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j(x_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{13}$$

5. Профилеметрия Воротиловской скважины

В этом разделе приведены результаты применения методов нахождения корректирующих параметров для профилеметрии (полусумма диаметра и перпендикуляра к нему) Воротиловской скважины.

Измерения проводились каверномером СКПД-3, имеющим диапазон измерений от 10 см до 760 см с погрешностью ± 1 см. На каждом сечении измерялась наибольшая ось и длина перпендикуляра к ней. Было произведено шесть измерений с интервалом времени несколько месяцев.

5.1. Нахождение нелинейного искажения и систематической ошибки

Для оценки нелинейного искажения и систематической ошибки профилеметрии скважины была произведена некоторая модификация описанных ранее методов в п. 2.

Модификация методов состояла в том, что:

- для данного случая уместно считать, что масштабирующий коэффициент равен единице;
- По предположению о том, что диаметр скважины с течением времени должен увеличиваться (из-за разрушения стенок) и значение нелинейных искажений предполагалось близким к нулю (из-за значительного веса измерительного прибора - около 100 кг), то в качестве эталонной функции S был просто взят первый сигнал.

Порог для устранения дребезга нелинейных искажений установлен равным 0.01. Экспериментально проверено, что при таком значении порога ($p = 0.01$) устраняется дребезг в пределах ± 25 см.

Далее, алгоритмами, описанными в п. 2-4, производилось поочередное сравнение данных с эталонной функцией.

Для подтверждения всего вышесказанного приведем графики результатов анализа на глубинах 1500-2500 метров (рис. 1).

Из рисунка видно, что с каждым годом происходит увеличение диаметра (разрушение скважины), также отмечается рост каверн, особенно это заметно на глубине около 2000 м.

Хочется отметить, что после устранения дребезга нелинейных искажений само нелинейное искажение (параметр h_i) на всем участке исследования 700-4500 м стало практически нулевым, за исключением тех мест, где существует большая кавернозность.

В следующей таблице указаны нормы (в сантиметрах) отклонения сигналов профилеметрии друг от друга до и после устранения нелинейного искажения и систематической ошибки.

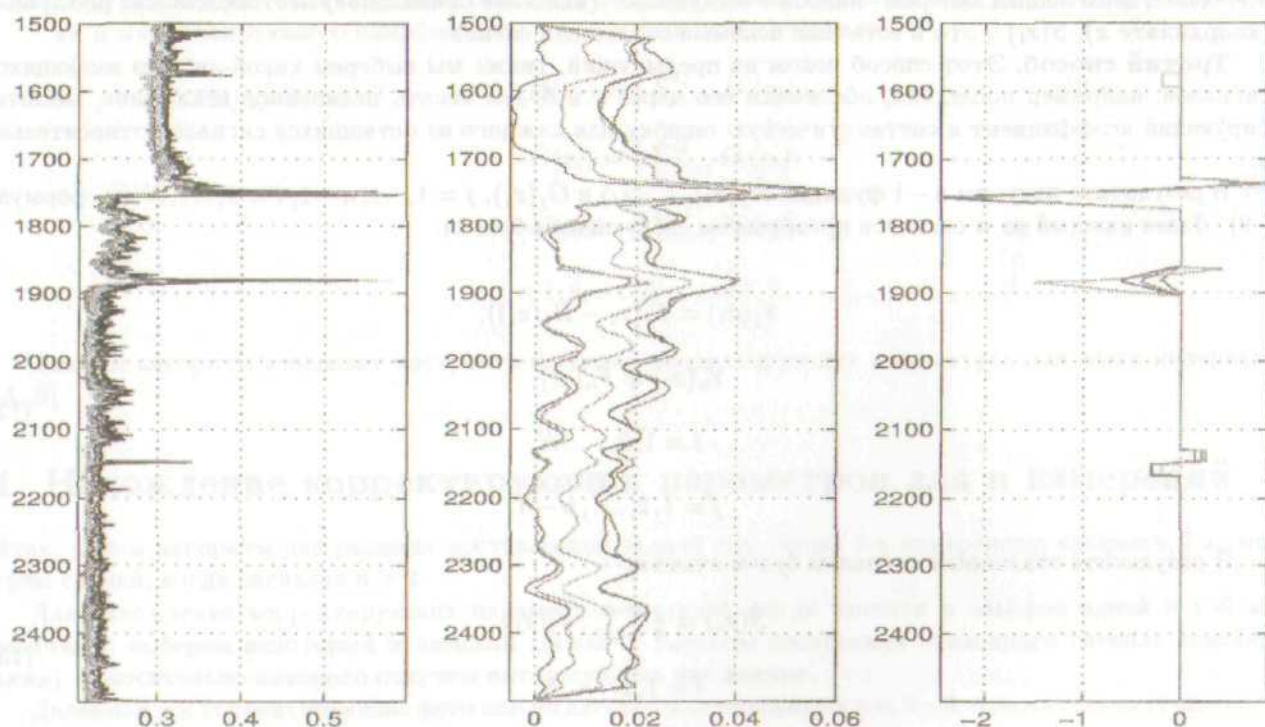


Рис. 1. Профилеметрия (1500-2500 м), (м). Слева - графики профилеметрии, в центре - графики систематической ошибки, справа - графики нелинейных искажений. Графики наложены друг на друга. Отмечается стабильный рост функции с каждым замером.

i	$\ y_i(x) - y_1(x)\ $	$\ y_i(x + h(x)) - y_1(x)\ $	$\ y_i(x + h(x)) + g(x) - y_1(x)\ $
1	0.112	0.106	0.113
2	0.450	0.397	0.180
3	0.503	0.496	0.108
4	0.588	0.581	0.099
5	0.639	0.623	0.104

Из таблицы видно, что после удаления нелинейного искажения и систематической ошибки нормы разностей функций уменьшаются примерно в 4 - 6 раз.

6. Гамма-каротаж Воротиловской скважины

В этом разделе приведены результаты применения методов нахождения корректирующих параметров для Гамма-каротажа (естественной радиоактивности пород) Воротиловской скважины. Было произведено 9 измерений с интервалом времени в несколько месяцев.

Отметим, что последние три графика построены по цифровым данным.

6.1. Нахождение корректирующих параметров

Для анализа гамма-излучения была применена методика, описанная в п. 2-4 данной статьи. Значение порога для устранения дребезга нелинейных искажений установлено равным 0.01 ($p = 0.01$), что дало устранение дребезга в пределах 50 см.

Эталонный сигнал будем строить по цифровым данным, как показано в п. 4.1 (см. Второй способ). В качестве функции $s(x)$ возьмем данные, полученные последними.

Далее был приведен в действие алгоритм, описанный в п. 2-4

Из рис. 2 видно, что значение параметра k_i - масштабирующего коэффициента меняется. На глубинах 1950 м, 2080 м значение параметра k_i строго уменьшается, т.е. значения гамма-излучения увеличиваются.

Сравнивая результаты анализа гамма-каротажа с результатами профилометрии, отмечен тот факт, что h_i -нелинейные искажения на всем участке 700-3700 м ведут себя совершенно по-разному, возможно, это связано с большой разницей в весе измеряющих приборов.

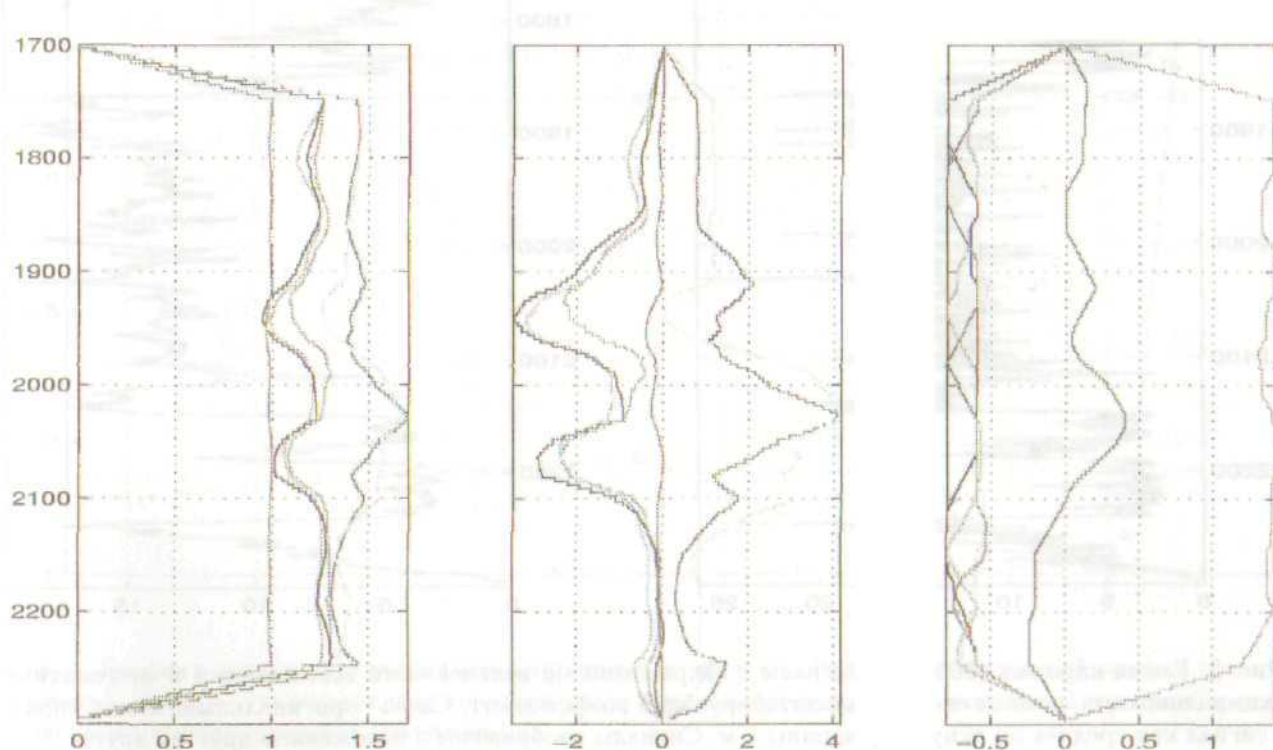


Рис. 2. Гамма-каротаж (2000 м). Слева - графики масштабирующего коэффициента, справа - графики нелинейного искажения (м); в центре - графики систематической ошибки. Графики построены относительно эталонного сигнала, с наложением друг на друга.

Посмотрим на рис. 2, где изображены масштабирующий коэффициент, нелинейное искажение и систематическая ошибка для функций гамма-каротажа относительно эталонного сигнала. Обратим внимание на большие значения функций масштабирующего коэффициента ($\sim 1,4$, хотя по предположению (см. "Введение") значение его должно быть близко к единице), но если взглянуть на среднее значение по времени гамма-каротажа (см. рис. 4), то можно отметить резкое увеличение общего гамма-излучения по всей глубине скважины в последних данных (на рисунке - нижний график), что и повлекло увеличение масштабирующего коэффициента. На верхнем графике указаны средние значения по времени гамма-каротажа после исправления нелинейного искажения, систематической ошибки и масштабирующего коэффициента.

Глядя на рис. 3, отметим: можно найти такие корректирующие функции для каждого сигнала, что исходный сигнал с исправленным нелинейным искажением, систематической ошибкой и корректирующим коэффициентом, практически будет совпадать с эталонным.

Итак, эффективное действие методики см. п. 2, 4 продемонстрировано на конкретном примере.

В следующей таблице указаны нормы отклонения сигналов гамма-каротажа относительно эталонного сигнала до и после исправления корректирующих параметров.

i	$\ y_i(x) - S(x)\ $	$\ y_i(x + h(x)) - S(x)\ $	$\ y_i(x + h(x)) + g(x) - S(x)\ $
1	5.57	5.40	0.71
2	5.56	4.90	0.91
3	10.94	6.42	0.80
4	7.51	5.76	0.67
5	7.09	5.40	0.65
6	2.84	0.06	0.06

Из таблицы видно, что после удаления нелинейного искажения систематической ошибки и исправления масштабирующего коэффициента нормы разностей функций уменьшаются примерно в 10 - 12 раз. Что

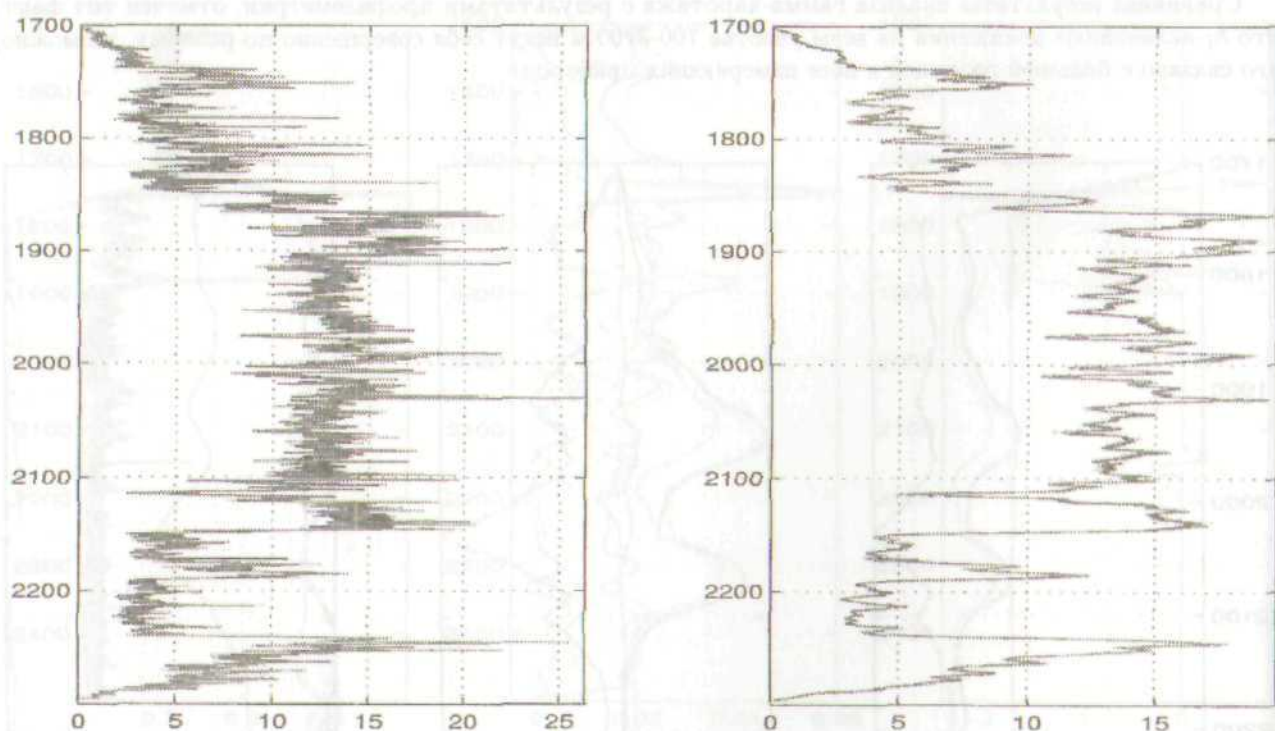


Рис. 3. Гамма-каротаж (2000 м). Сигналы с исправленными нелинейными искажениями и систематическими ошибками, помноженные на масштабирующий коэффициент. Слева - оригинальный сигнал, справа - сигнал как среднее по окну полуширины 5 м. Сигналы изображены с наложением друг на друга

подтверждают графики на рис. 3, где наблюдается практически идеальное совмещение функций.

7. Геологические выводы

7.1. Профилеметрия

По результатам выявленных нелинейных искажений и систематической ошибки видно, что нелинейные искажения практически отсутствуют, за исключением тех мест, где наблюдается наибольшая кавернозность ствола (рис. 1). Такие места отчетливо выделяются на глубинах 1750 м, 1900 м, 2650 м, 3100 м, 3280 м. Особенно заметен стабильный рост каверн на глубинах 1750 м и 1900 м (рис. 1).

7.2. Гамма-каротаж

По результатам выявленных систематических ошибок и масштабирующих коэффициентов можно судить не только о погрешности измерений и изменении общего фона гамма-излучения пород скважины, но можно отметить резкие всплески на графиках систематических ошибок и масштабирующих коэффициентов (рис. 2, 3), что говорит о наличии особенностей в этих местах. Это отчетливо видно на глубинах в районах: 1950 м, 2080 м, 2650 м, 3250 м.

Отметим, что значения систематической ошибки не очень большие, и поэтому для практических целей их можно считать равными нулю.

7.3. Выявление зависимости между ростом каверн и интенсивностью гамма-излучения

Сопоставляя результаты решения задач о нахождении функций корректирующих параметров каротажа глубоких скважин можно отметить связь между ростом каверн и изменением интенсивности гамма-излучения. По графикам рис. 1, 2 можно заметить, что значительное изменение гамма-каротажа связано

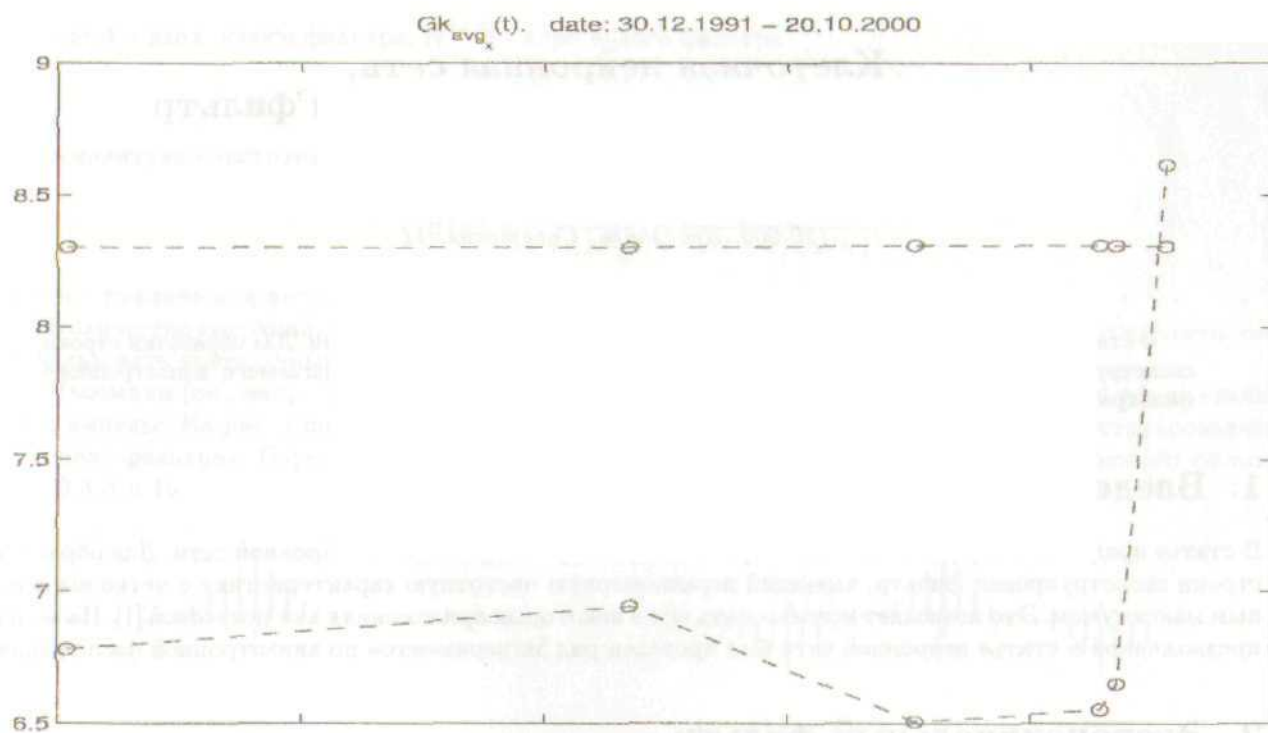


Рис. 4. Графики средних значений гамма-каротажа по времени. Внизу - оригинальный график средних значений. Вверху - график средних значений после исправления нелинейных искажений систематической ошибки и масштабирующего коэффициента.

с образованием и ростом каверн. Особенно ярко выраженная зависимость наблюдается в районе 1700-2100 м.

Литература

- [1] Глубокое бурение в Пучеж-Катунской импактной структуре. СПб.: ВСЕГЕИ, 1999.

УДК 621.382

Клеточная нейронная сеть, реализующая анизотропный полосовой фильтр

Иванов А.В.

*Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14*

В статье предлагается анизотропный фильтр на клеточной нейронной сети. Для обработки строки сконструирован полосовой фильтр. В качестве иллюстрации работы предлагаемого анизотропного фильтра приводятся результаты экспериментов на модели нейросети.

1. Введение

В статье предлагается реализация анизотропного фильтра на клеточной нейронной сети. Для обработки строки сконструирован фильтр, имеющий неравномерную частотную характеристику с четко выраженным максимумом. Это позволяет использовать его в некоторых приложениях как полосовой [1]. На модели предложенной в статье нейронной сети был проведен ряд экспериментов по анизотропной фильтрации.

2. Экспоненциальный фильтр

В этом разделе приводится ядро свертки экспоненциально сглаживающего фильтра.

Напомним (см., напр., [2]), что линейная фильтрация строки $X = (x_{-N}, \dots, x_0, \dots, x_N)$ фильтром с ядром $W = (w_{-N}, \dots, w_0, \dots, w_N)$ сводится к вычислению свертки $Y = (y_{-N}, \dots, y_0, \dots, y_N)$, где

$$y_n = \sum_{k=-N}^N w_k x_{n-k} = \sum_{k=-N}^N w_{n-k} x_k. \quad (1)$$

X называется входным сигналом, Y - выходной сигнал, W - ядро свертки. При вычислении (1) будем считать, что $w_i = 0$ и $x_i = 0$ при $i \in (-\infty; -N - 1] \cup [N + 1; \infty)$. Обозначим операцию свертки через $Y = W * X$.

Экспоненциально сглаживающий фильтр реализуется сверткой с ядром $W^{(a)}$, где

$$w_n^{(a)} = \frac{a}{2-a} (1-a)^{|n|}, \quad (2)$$

где a - параметр фильтра; $a \in (0; 1]$.

3. Построение полосового фильтра

В этом разделе предлагается конструкция полосового фильтра, реализация которого не требует большого объема вычислений.

Для построения фильтра будут использоваться несколько однотипных фильтров нижних частот. Выход фильтра \bar{Y} будет формироваться как алгебраическая сумма выходов трех экспоненциально сглаживающих фильтров. Один из них будет браться со знаком плюс, а два других - со знаком минус. Особенность заключается в том, что выходы второго и третьего фильтров сдвигаются по строке на одну и ту же величину (обозначим ее δ) вправо и влево соответственно. То есть

$$\bar{y}_n = y_n - y_{n-\delta} - y_{n+\delta},$$

где y_i - выход экспоненциального фильтра; $i \in [-N, N]$. Учитывая (1), выход нового фильтра можно записать в виде

$$\bar{Y} = W^{(a, \delta)} * X, \quad (3)$$

где X - вход нового фильтра, $W^{(a,\delta)}$ - ядро нового фильтра

$$w_n^{(a,\delta)} = w_n^{(a)} - w_{n-\delta}^{(a)} - w_{n+\delta}^{(a)}, \quad (4)$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра с ядром $W^{(a,\delta)}$ будет иметь вид

$$H(w) = \frac{a^2(1 - 2 \cos(\delta w))}{1 + (1 - a)^2 - 2(1 - a) \cos(w)}, \quad (5)$$

где w - циклическая частота. Получение (5) описано в разделе 6.

Количество операций, необходимых для реализации предлагаемого фильтра, можно сократить, если использовать приведенный в [4] способ быстрого счета свертки с ядром (2).

Напомним (см., напр., [2]), что импульсной реакцией фильтра называется реакция фильтра на единичный импульс. На рис. 1 показаны импульсные реакции экспоненциального (слева) и сконструированного (справа) фильтров. Параметр экспоненциального фильтра равен $a = 0.3$. Параметры нового фильтра $a = 0.3, \delta = 10$.



Рис. 1. Импульсные реакции фильтров

4. Архитектура сети для анизотропной фильтрации

До этого момента в статье рассматривалась обработка одномерного сигнала. В этом разделе предлагается архитектура клеточной нейронной сети, осуществляющей анизотропную фильтрацию двумерного сигнала. Обработка каждой строки аналогична обработке фильтром с ядром $W^{(a,\delta)}$. По столбцу осуществляется экспоненциальное сглаживание.

Описанный в разделе 3 полосовой фильтр можно получить, используя лишь один экспоненциальный фильтр вместо трех. В этом можно убедиться, переписав, согласно (1), свертку (3) в виде

$$\bar{Y} = W^{(a)} * \bar{X}$$

$\bar{x}_n = x_n - x_{n-\delta} - x_{n+\delta}$, где X - вход построенного полосового фильтра.

То есть, подавая на вход фильтра с экспоненциальным ядром $W^{(a)}$ сигнал \bar{X} , мы получим такой же результат, как если бы входной сигнал X обрабатывался полосовым фильтром с ядром $W^{(a,\delta)}$.

В работе [3] описывается структура нейросети для обработки двумерного сигнала экспоненциально сглаживающим фильтром. Описанный анизотропный фильтр можно реализовать на той же сети, изменив лишь сигнал, поступающий на входы нейронов. Так, если $x_{m,n}$ - это исходный сигнал, то на вход сети нужно подавать $\bar{x}_{m,n} = x_{m,n} - x_{m,n-\delta} - x_{m,n+\delta}$.

5. Эксперименты на модели сети

Описанная в разделе 4 сеть была программно смоделирована. В этом разделе приводятся результаты экспериментов на такой модели.

Примером задачи, в которой можно применять предложенный полосовой фильтр, может служить задача обработки интерференционных картин, получаемых при контроле поверхностей оптических деталей. В интерферограмме полезная составляющая по строке изменяется синусоидально, а по столбцу остается постоянной. Цель обработки интерферограммы заключается в нахождении расстояний между максимумами гармонических колебаний сигнала вдоль строки. Фильтрация интерферограммы призвана подготовить ее для такой обработки на ЭВМ.

Для экспериментов использовалась интерферограмма размером 512×512 . На рис. 2 показана часть интерференционной картины. На рис. 3 - та же часть после фильтрации предложенным анизотропным

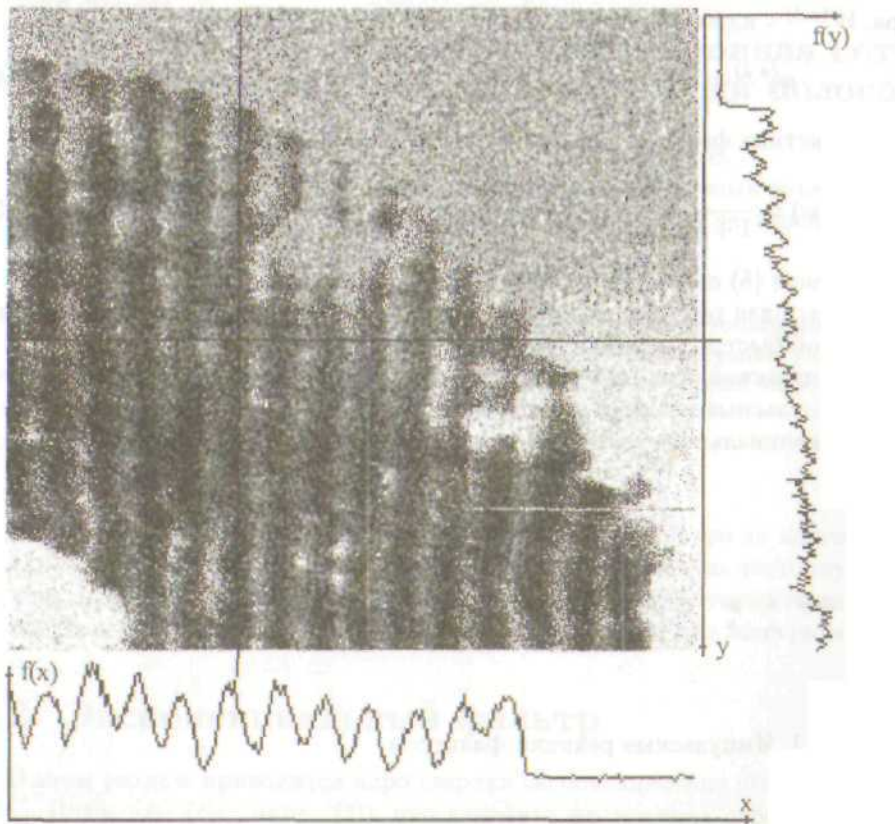


Рис. 2.

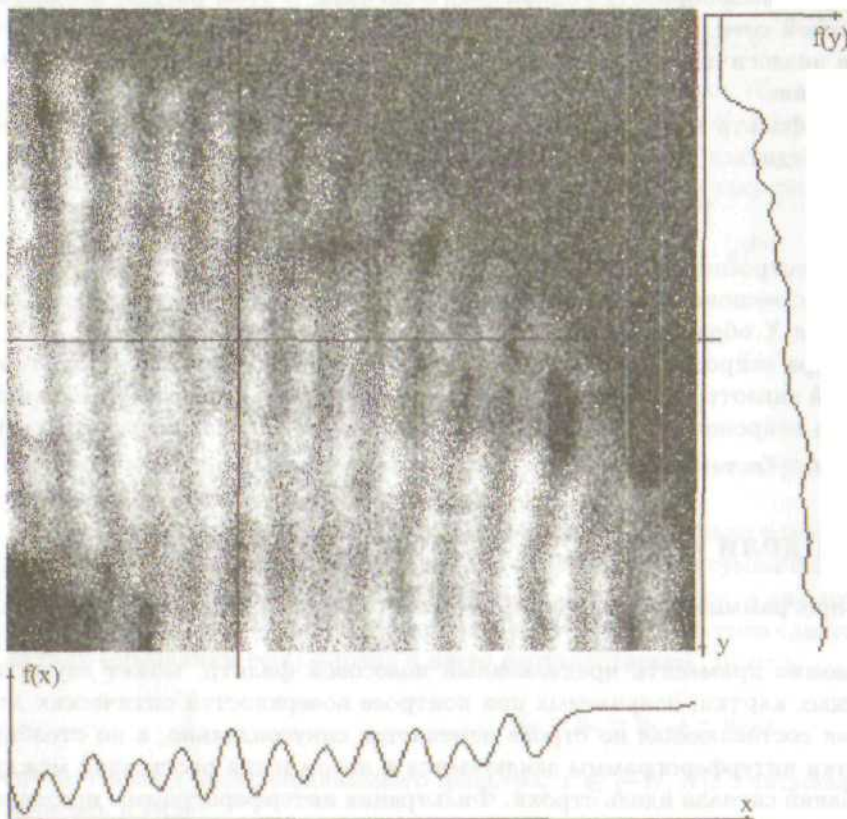


Рис. 3.

фильтром. Филтрация строки осуществлялась с параметрами $a = 0.2$, $\delta = 10$, столбца - с параметром $a = 0.3$.

Чтобы лучше показать разницу между исходным и отфильтрованным сигналом, в интерферограмме были выбраны одна строка и один столбец (на рисунках они выделены черным цветом). Снизу и справа от интерференционных картин приведены значения из этих строки и столбца соответственно.

Изменение, после филтрации, амплитуды колебаний сигнала вдоль строки в данном случае не имеет значения, так как для последующей обработки важна только частота колебаний, а она осталась прежней. Отфильтрованный сигнал легко поддается дальнейшей обработке на ЭВМ.

6. Получение амплитудного спектра

В разделе описывается получение амплитудного спектра сконструированного фильтра.

Сначала нужно получить амплитудный спектр экспоненциального фильтра с ядром (2). Для этого найдем передаточную функцию фильтра [1] как двустороннее Z -преобразование (см., напр., [5]) его импульсной реакции. В поставленной задаче $w_n^{(a)}$ определены только для $n \in [-N; N]$. Для достаточно больших N при вычислении суммы можем пренебречь членами ряда при $n \in (-\infty; -N - 1] \cup [N + 1; \infty)$ в силу того, что они ничтожно малы.

$$\begin{aligned} W^{(a)}(z) &= Z_{II} \{w_n^{(a)}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n^{(a)} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{-n}^{(a)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(a)} z^{-n} - w_0^{(a)} z^0 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{2-a} (1-a)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{2-a} (1-a)^n z^{-n} - \frac{a}{2-a} = \frac{a}{2-a} \left(\frac{1}{1-(1-a)z} + \frac{1}{1-(1-a)z^{-1}} - 1 \right) = \\ &= \frac{a^2}{1+(1-a)^2 - (1-a)(z+z^{-1})}. \end{aligned}$$

Заменой в выражении передаточной функции переменной z на e^{jw} получается частотная характеристика фильтра [1].

$$W(e^{jw}) = \frac{a^2}{1+(1-a)^2 - 2(1-a)\cos(w)}. \quad (6)$$

Отсутствие комплексной составляющей в (6) говорит о том, что при филтрации сдвига сигнала по фазе не происходит.

Учитывая, что $Z\{x_{n \pm k}\} = z^{\pm k} Z\{x_n\}$, можно, согласно (4), выразить передаточную функцию нового фильтра через передаточную функцию экспоненциального

$$Z_{II} \{w_n^{(a,\delta)}\} = Z_{II} \{w_n^{(a)}\} - z^{-\delta} Z_{II} \{w_n^{(a)}\} - z^{\delta} Z_{II} \{w_n^{(a)}\} = Z_{II} \{w_n^{(a)}\} (1 - z^{-\delta} - z^{\delta}).$$

Заменяя переменную z на e^{jw} , получим частотную характеристику нового фильтра

$$W^{(a,\delta)}(e^{jw}) = \frac{a^2}{1+(1-a)^2 - (1-a)(e^{jw} + e^{-jw})} (1 - e^{\delta jw} - e^{-\delta jw}) = \frac{a^2(1 - 2\cos(\delta w))}{1+(1-a)^2 - 2(1-a)\cos(w)}.$$

Литература

- [1] Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.
- [2] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Наука, 1963.
- [3] Карлин А.К., Короткин А.А., Стрелков Н.А. Клеточная нейронная сеть в задаче филтрации двумерного сигнала // Моделирование и анализ информационных систем. 2000 Т.7, №2. С.38-43.
- [4] Артемьев А.В., Карлин А.К. Реализация экспоненциального фильтра с помощью клеточных нейронных сетей на бинарных потоках // Моделирование и анализ информационных систем. 1999 Т.6, №1. С.12-15.
- [5] Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.

УДК 519.872

Приоритетное множество для системы массового обслуживания $M_3|D_3|1$

Черменский П.П.

*Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14*

1. Введение

В работе рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одного прибора и бесконечной очереди, на вход которой поступают требования трех типов, разрешается прерывание обслуживания. Для этой системы найдено параметрическое описание приоритетного множества - множества всех значений средних длин очередей в системе. Задача решалась путём сведения исходной системы к системе с ветвящимися потоками вторичных требований. Решение основано на результатах работ [1]-[4].

2. Постановка задачи и результат

Опишем исходную систему. Система $M_3|D_3|1$ состоит из одного прибора и бесконечной очереди. На вход системы поступают три пуассоновских потока требований. Интенсивность первого потока равна $\lambda_1 = \lambda\alpha_1$, интенсивность второго потока равна $\lambda_2 = \lambda\alpha_2$, интенсивность третьего потока равна $\lambda_3 = \lambda\alpha_3$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Длительности обслуживания требований из каждого потока постоянны и равны соответственно a_1, a_2, a_3 . Будем считать, что выполняется условие существования стационарного режима: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 < 1$. Допускается прерывание обслуживания требований с последующим дообслуживанием. Правило, выбирающее порядок обслуживания требований, назовем дисциплиной обслуживания.

Через L_1^*, L_2^*, L_3^* обозначим соответственно среднюю длины очередей требований первого, второго и третьего типов при некоторой дисциплине обслуживания.

Определим приоритетное множество:

$$M = \{(L_1^*, L_2^*, L_3^*), \text{ по всем дисциплинам обслуживания.}\} \quad (1)$$

В работе показано, что приоритетное множество M является выпуклой оболочкой точек (L_1^*, L_2^*, L_3^*) в трехмерном пространстве, принадлежащих объединению следующих множеств:

$$M = \bigcup \{M(\sigma_i) \mid \sigma_i \in S_3\}, \quad (2)$$

где S_3 - группа подстановок степени три, σ_i - подстановки, принадлежащие S_3 :

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Множество $M(\sigma_i)$ определяется как множество точек $(L_\alpha^*, L_\beta^*, L_\gamma^*)$, заданных уравнениями:

$$\begin{aligned} L_\alpha^* &= \left\{ \lambda_\alpha \lambda_\beta (a_\beta - y_1)^2 + \lambda_\alpha \lambda_\gamma (a_\gamma - z_2)^2 + \rho_\alpha^2 \right\} \frac{1}{2(1 - \rho_\alpha)}, \\ L_\beta^* &= \left\{ \lambda_\beta \lambda_\gamma (a_\gamma - z_1)^2 + \lambda_\beta a_\alpha \rho_\alpha + \rho_\beta^2 \right\} \frac{1}{2(1 - \rho_\alpha)(1 - (\rho_\alpha + \rho_\beta))} + \frac{\lambda_\beta \rho_\alpha}{1 - \rho_\alpha} y_1, \\ L_\gamma^* &= \left\{ \lambda_\alpha a_\alpha^2 + \frac{\rho_\alpha + \rho_\beta + a_\beta \rho_\beta + \lambda_\gamma a_\gamma^2}{1 - (\rho_\alpha + \rho_\beta)} \right\} \frac{\lambda_\gamma}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda_\gamma \rho_\alpha}{1 - \rho_\alpha} (z_2 - z_1) + \frac{\lambda_\gamma (\rho_\alpha + \rho_\beta)}{1 - (\rho_\alpha + \rho_\beta)} z_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где константы $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \rho$ равны: $\rho_\alpha = \lambda_\alpha a_\alpha, \rho_\beta = \lambda_\beta a_\beta, \rho_\gamma = \lambda_\gamma a_\gamma, \rho = \rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma$. А произвольные параметры y_1, z_1, z_2 удовлетворяют ограничениям: $0 \leq y_1 \leq a_\beta, 0 \leq z_1 \leq z_2 \leq a_\gamma$.

3. Схема нахождения приоритетного множества

Опишем основные этапы нахождения приоритетного множества M .

1) Выберем достаточно малый параметр θ и рассмотрим те дисциплины обслуживания, которые допускают прерывание обслуживания только в моменты времени, кратные θ . Для таких дисциплин обслуживания рассматриваемая система сводится к системе с ветвящимися потоками вторичных требований (СВПВТ), изученной в работах [2] и [1]. Обозначим через $L_i, i = \bar{1}, k+m+s$ средние длины очередей в этой системе.

2) В работе [4] показано, что приоритетное множество для СВПВТ является многогранником в R^{k+m+s} , обозначим его $P(\theta)$.

3) Пусть $M_P(\theta)$ – проекция $P(\theta)$ в пространстве $\{(L_1^*, L_2^*, L_3^*)\}$. При этой проекции точка с координатами (L_1, \dots, L_{k+m+s}) переходит в точку $(L_1^* = \sum_1^k L_i, L_2^* = \sum_{k+1}^{k+m} L_i, L_3^* = \sum_{k+m+1}^{k+m+s} L_i)$. Проекции вершин многогранника $P(\theta)$, в которых достигается минимум линейной функции

$$F = C_1 \sum_1^k L_i + C_2 \sum_{k+1}^{k+m} L_i + C_3 \sum_{k+m+1}^{k+m+s} L_i \quad (4)$$

и будут вершинами многогранника $M_P(\theta)$. Таким образом, для нахождения многогранника $M_P(\theta)$, нужно найти все те вершины многогранника $P(\theta)$, в которых достигается минимум линейной функции (4) при всевозможных значениях C_1, C_2, C_3 .

4) Приоритетное множество M находится как $\lim_{\theta \rightarrow 0} M_P(\theta)$.

4. Сведение к СВПВТ

Опишем подробнее первый этап решения. СВПВТ строится следующим образом. Выберем $0 < \theta \ll 1$, так чтобы $a_1 = k\theta, a_2 = m\theta, a_3 = s\theta$, для простоты будем считать k, m, s натуральными. Будем рассматривать только те дисциплины обслуживания, которые допускают прерывания обслуживания в моменты времени, кратные θ . В результате получаем систему, имеющую $k+m+s = n$ новых типов требований, которая определяется следующим образом:

- 1) система состоит из одного прибора и $k+m+s$ типов требований;
- 2) на вход системы поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ ; Поступившее требование с вероятностью α_1 считается требованием 1 типа, с вероятностью α_2 требованием $(k+1)$ типа, с вероятностью α_3 требованием $(k+m+1)$ типа, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$;
- 3) каждое из $(m+k+s)$ типов требований имеет постоянное время обслуживания θ ;
- 4) в каждый момент времени обслуживается только одно требование, прерывание обслуживания не допускается;
- 5) требования одного типа обслуживаются в порядке поступления;
- 6) после завершения обслуживания требований i -го типа, с вероятностью q_{ij} появляется требование j -го типа, которое ставится в очередь на обслуживание, где:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1, i \neq k, i \neq k + m, i \neq k + m + s. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, вышеописанная СВПВТ совпадает с системой, изученной в [1].

5. Дисциплины обслуживания

Для нахождения минимума функции (4) нам необходимо описать те дисциплины обслуживания, при которых он достигается (различным значениям констант C_1, C_2, C_3 будут соответствовать различные дисциплины обслуживания). Эта задача решалась в работах [3] и [4]. Приведем необходимые нам результаты этих работ.

Каждая дисциплина обслуживания, при которой достигается минимум произвольной линейной функции от средних длин очередей L_i в СВПВТ, задается подстановкой $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$ следующим образом: требования, имеющие тип σ_i , будут ставиться на обслуживание раньше требований типа σ_j , если $i < j$. Опишем вспомогательные величины, которые необходимы для вычисления этих подстановок.

Введём величины γ_i - математическое ожидание суммарной длительности обслуживания (без учета ожидания) требований типа i и всех требований типа j , для которых $\prod_{r=i}^{j-1} q_{rr+1} > 0$. Ясно, что:

$$\gamma_i = \begin{cases} (k-i+1)\theta, & 1 \leq i \leq k. \\ (k+m-i+1)\theta, & k+1 \leq i \leq k+m. \\ (k+m+s-i+1)\theta, & k+m+1 \leq i \leq k+m+s. \end{cases} \quad (6)$$

Следуя работе [3], приоритетными индексами требований i -го типа будем называть величины R_i , которые определяются следующим образом (константы C_1, C_2 и C_3 входят в уравнение функции (4)):

$$R_i = \begin{cases} \frac{C_1}{\gamma_i}, & 1 \leq i \leq k, \text{ и } C_1 > 0. \\ \frac{C_2}{\gamma_i}, & k+1 \leq i \leq k+m, \text{ и } C_2 > 0. \\ \frac{C_3}{\gamma_i}, & k+m+1 \leq i \leq k+m+s, \text{ и } C_3 > 0. \\ 0, & \forall i, \text{ при } C_1 < 0, \text{ или } C_2 < 0, \text{ или } C_3 < 0. \end{cases}$$

В работе [3] доказано, что дисциплина обслуживания, при которой достигается минимум функции (4), заключается в следующем: если $R_i > R_j$, то требование типа i должно ставиться на обслуживание раньше требования типа j ; если же два требования имеют одинаковый приоритетный индекс, то порядок их обслуживания может быть выбран произвольно.

Из этих результатов следует, что подстановки σ для СВПВТ, определяющие дисциплины обслуживания, при которой для заданных значений C_1, C_2 и C_3 достигается минимум функции (4), будут следующими:

$$\sigma = (*, \alpha', w_2, w_2 - 1, \dots, w_1 + 1, v_1, v_1 - 1, \dots, \beta', w_1, w_1 - 1, \dots, \gamma') \quad (7)$$

Здесь индексы α', β', γ' получаются применением произвольной подстановки $\sigma' \in S_3$ к множеству индексов $\{1, k+1, k+m+1\}$. Произвольные параметры v_1, w_1, w_2 являются натуральными и изменяются в следующих пределах: $\beta' < v_1 \leq \min\{i \mid i \in \{k, k+m, n\}, i > \beta'\}$, $\gamma' < w_1 < w_2 \leq \min\{i \mid i \in \{k, k+m, n\}, i > \gamma'\}$. При этом $*$ - означает любую подстановку оставшихся индексов из множества $\{1, \dots, k+m+s\}$.

Из описания СВПВТ очевидно следует, что для любых требований (за исключением требований 1, $k+1$ и $k+m+1$ типов), порядок обслуживания между ними можно менять произвольным образом, если выполняется следующее условие: приоритетные индексы R_i всех этих требований должны удовлетворять одному и тому же из неравенств:

$$\begin{aligned} R_1 \geq R_i \geq R_{k+1} \geq R_{k+m+1}; & \quad R_1 \geq R_i \geq R_{k+m+1} \geq R_{k+1}; \\ R_{m+k+1} \geq R_i \geq R_{k+1} \geq R_1; & \quad R_{m+k+1} \geq R_i \geq R_1 \geq R_{k+1}; \\ R_{k+1} \geq R_i \geq R_{k+m+1} \geq R_1; & \quad R_{k+1} \geq R_i \geq R_1 \geq R_{k+m+1}; \end{aligned}$$

Данное свойство было использовано при вычислении подстановок (7).

6. Сведения, необходимые для вычисления вершин $M_P(\theta)$

Для нахождения вершин многогранника $M_P(\theta)$ необходимо вычислить величины L_i (средние длины очередей требований в СВПВТ) для заданных дисциплин обслуживания, задаваемых подстановками, при

которых реализуется минимум функции (4). Все необходимые нам подстановки описаны в уравнении (7). Приведем необходимые нам результаты работ [1] и [4].

Введём величины x_{ij} , являющиеся решениями следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_{ir} + \sum_{i=1}^n a_{ir}x_{ij} = G_{jr}, \quad 1 \leq j \leq r \leq n. \quad (8)$$

$$x_{\sigma,\sigma_j} = 0, \quad \text{если } i > j.$$

где константы a_{ij} и G_{ij} определяются как:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1, \quad i \notin \{1, k+1, k+m+1\}; & a_{i,i+1} &= -1, \quad i \notin \{k, k+m, k+m+s\}; \\ a_{11} &= 1 - \lambda_1\theta; & a_{i1} &= -\lambda_1\theta, \quad i \neq 1; \\ a_{k+1,k+1} &= 1 - \lambda_2\theta; & a_{i,k+1} &= -\lambda_2\theta, \quad i \neq k+1; \\ a_{k+m+1,k+m+1} &= 1 - \lambda_3\theta; & a_{i,k+m+1} &= -\lambda_3\theta, \quad i \neq k+m+1; \\ a_{ij} &= 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= G_{ji}, \quad \forall i, j; \\ G_{ij} &= 0, \quad i, j \notin \{1, k+1, k+m+1\}; \\ G_{ij} &= \lambda_i\lambda_j\theta^2(\lambda_1k + \lambda_2m + \lambda_3s), \quad i, j \in \{1, k+1, k+m+1\}; \\ G_{ij} &= \begin{cases} \lambda_i\lambda_1\theta, & 1 \leq j \leq k, \quad i \in \{1, k+1, k+m+1\}. \\ \lambda_i\lambda_2\theta, & k+1 < j \leq k+m, \quad i \in \{1, k+1, k+m+1\}. \\ \lambda_i\lambda_3\theta, & k+m+1 < j \leq k+m+s, \quad i \in \{1, k+1, k+m+1\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, как показано в работе [1], средние длины очередей для СВПВТ находятся следующим образом.

$$L_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij}\theta + W_r, & j \in \{1, k+1, k+m+1\}. \\ \sum_{i=1}^n x_{ij}\theta, & j \notin \{1, k+1, k+m+1\}. \end{cases} \quad (11)$$

$$W_r = \lambda_r\theta^2(\lambda_1k + \lambda_2m + \lambda_3s)/2.$$

Для решения уравнений (8) и вычисления L_j будет полезным следующее утверждение:

Утверждение 1. Пусть приоритетный индекс R_j для системы СВПВТ удовлетворяет неравенству: $R_j \geq \max\{R_1, R_{k+1}, R_{k+m+1}\}$. Тогда $L_j = 0$.

Доказательство. Обозначим через t_0 момент поступления первого требования в систему (это будет требование 1-го, $k+1$ -го, или $k+m+1$ -го типа). Через t_α , $\alpha \in N$ обозначим моменты завершения обслуживания требований. Доказательство проведем индукцией по α . Через $L_j(t)$ обозначим длину очереди требований типа r в момент времени t . Из описания системы ясно, что во время обслуживания некоторого требования, в системе могут появляться требования только 1-го, $k+1$ -го или $k+m+1$ -го типа. Следовательно, $L_j(t) = L_j(t_{\alpha-1})$ для $t_{\alpha-1} < t < t_\alpha$ и $j \neq 1, j \neq k+1, j \neq k+m+1$.

Если в момент времени t_1 , в системе появляется требование r типа, то оно сразу ставится на обслуживание (в соответствии с определением дисциплины обслуживания). Очевидно, что $L_j(t_1) = 0$. Пусть в некоторый момент времени $t_{\alpha-1}$ выполняется $L_j(t_{\alpha-1}) = 0$. Рассмотрим систему в момент t_α . Если в этот момент в системе появилось требование типа r , то оно сразу ставится на обслуживание и длина соответствующей очереди не меняется. Итак, доказано, что $L_j(t_\alpha) = 0$ в произвольный момент времени t_α , а следовательно, и в произвольный момент времени t выполняется $L_j(t) = 0$. \square

Следствие 1. Если приоритетный индекс R_j для системы СВПВТ удовлетворяет неравенству: $R_j \geq \max\{R_1, R_{k+1}, R_{k+m+1}\}$, тогда для любого i : $x_{ij} = 0$.

Доказательство. Из утверждения (1) следует, что $L_j = 0$. Величины $x_{ij} = 0, \forall i$ будут удовлетворять уравнениям (8), (11), и поэтому являются их решениями. \square

7. Вычисление средних длин очередей для СВПВТ

Очевидно, что для вычисления средних длин очередей в СВПВТ мы можем рассмотреть любую из подстановок (7), определяющих оптимальную дисциплину обслуживания, при которой достигается минимум линейной функции (4). Рассмотрим, например, подстановку для которой $\alpha' = 1$, $\beta' = k + 1$, $\gamma' = k + m + 1$ и найдем средние длины очередей при соответствующей ей дисциплине обслуживания в СВПВТ.

Найдем L_1 :

$$x_{j1} = \begin{cases} \lambda_1 L_1 + \lambda_1^2(j-1)\theta, & 1 \leq j \leq k. \\ \lambda_1 \lambda_2(j - v_1)\theta, & v_1 < j \leq k + m. \\ \lambda_1 \lambda_3(j - w_2)\theta, & w_2 < j \leq n. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_1 = \left\{ \lambda_1^2 k(k-1)\theta^2 + \lambda_1 \lambda_2(k+m-v_1)(k+m-v_1+1)\theta^2 + \lambda_1 \lambda_3(n-w_2)(n-w_2+1)\theta^2 + W_1 \right\} \frac{1}{2(1-\lambda_1 k \theta)} \quad (12)$$

Найдем L_r для $k+1 < r \leq v_1$:

$$x_{jr} = \begin{cases} \lambda_1 L_r + \lambda_1 \lambda_2 \theta, & 1 \leq j \leq k. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_r = \frac{\lambda_1 \lambda_2 k \theta^2}{1 - \lambda_1 k \theta}, \quad k+1 < r \leq v_1. \quad (13)$$

Найдем L_r для $w_1 < r \leq w_2$:

$$x_{jr} = \begin{cases} \lambda_1 L_r + \lambda_1 \lambda_3 \theta, & 1 \leq j \leq k. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_r = \frac{\lambda_1 \lambda_3 k \theta^2}{1 - \lambda_1 k \theta}, \quad w_1 < r \leq w_2. \quad (14)$$

Найдем L_{k+1} :

$$x_{jk+1} = \begin{cases} \lambda_2 L_1 + \lambda_1 L_{k+1} + \lambda_1 \lambda_2(j-1)\theta, & 1 \leq j \leq k. \\ \lambda_2 L_{k+1} + \frac{\lambda_2^2(j-(k+1))\theta}{1-\lambda_1 k \theta}, & k+1 \leq j \leq v_1. \\ \lambda_2 L_{k+1} + \frac{\lambda_2^2(v_1-(k+1))\theta}{1-\lambda_1 k \theta} + \lambda_2^2(j-v_1)\theta, & v_1 < j \leq k+m. \\ \lambda_2 L_{w_2}(j-w_1) + \lambda_2 \lambda_3(j-w_1)\theta, & w_1 < j \leq w_2. \\ \lambda_2 L_{w_2}(w_2-w_1) + \lambda_2 \lambda_3(j-w_1)\theta, & w_2 < j \leq n. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_{k+1} = \left\{ \lambda_2 k \theta L_1 + \lambda_1 \lambda_2 k(k-1)\theta^2/2 + \frac{\lambda_2^2 \theta^2}{1-\lambda_1 k \theta} (v_1 - (k+1)) \left(\frac{v_1 - k}{2} + m + k - v_1 \right) + \lambda_2^2 (m + k - v_1)(m + k - v_1 + 1)\theta^2/2 + \lambda_2 \lambda_3 (n - w_1)(n - w_1 + 1)\theta^2/2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 k \theta^2}{1-\lambda_1 k \theta} (w_2 - w_1) \left(\frac{w_2 - w_1 + 1}{2} + n - w_2 \right) + W_2 \right\} \frac{1}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)} \quad (15)$$

Найдем L_r для $k+m+1 < r \leq w_1$:

$$x_{jr} = \begin{cases} \lambda_1 L_r + \lambda_1 \lambda_3 \theta, & 1 \leq j \leq k. \\ \lambda_2 L_r + \lambda_2 \lambda_3 \theta, & k+1 \leq j \leq k+m. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_r = \frac{\lambda_3 \theta (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)}, \quad k + m + 1 < r \leq w_1. \quad (16)$$

Найдем L_{m+k+1} :

$$x_{jm+k+1} = \begin{cases} \lambda_3 L_1 + \lambda_1 L_{k+m+1} + \lambda_1 \lambda_3 (j-1) \theta, & 1 \leq j \leq k. \\ \lambda_3 L_{k+1} + \lambda_2 L_{k+m+1} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 \theta}{1 - \lambda_1 k \theta} (j - (k+1)), & k+1 \leq j \leq v_1. \\ \lambda_3 L_{k+1} + \lambda_2 L_{k+m+1} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 \theta}{1 - \lambda_1 k \theta} (v_1 - (k+1)) + \lambda_2 \lambda_3 (j - v_1) \theta, & v_1 < j \leq k+m. \\ \lambda_3 L_{k+m+1} + \frac{\lambda_3^2 (j - (k+m+1))}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)}, & k+m+1 \leq j \leq w_1. \\ \lambda_3 L_{k+m+1} + \frac{\lambda_3^2 (w_1 - (k+m+1))}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)} + \frac{\lambda_3^2 (j - w_1)}{1 - \lambda_1 k \theta}, & w_1 < j \leq w_2. \\ \lambda_3 L_{k+m+1} + \frac{\lambda_3^2 (w_1 - (k+m+1))}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)} + \frac{\lambda_3^2 (w_2 - w_1)}{1 - \lambda_1 k \theta} + \lambda_3^2 (j - w_2) \theta, & w_2 < j \leq n. \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$L_{k+m+1} = \left\{ \lambda_3 k \theta L_1 + \lambda_1 \lambda_3 (k-1) k \theta^2 / 2 + \lambda_3 m \theta L_{k+1} + \lambda_2 \lambda_3 (m+k-v_1)(m+k+1-v_1) \theta^2 / 2 + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{1 - \lambda_1 k \theta} (v_1 - (k+1)) \left(\frac{v_1 - k}{2} + m + k - v_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_3^2 (w_1 - (k+m+1))}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta)} \left(\frac{w_1 - (k+m)}{2} + n - w_1 \right) + \frac{\lambda_3^2 (w_2 - w_1)}{1 - \lambda_1 k \theta} \left(\frac{w_2 - w_1}{2} + n - w_2 \right) + \right. \\ \left. + \lambda_3^2 (n - w_2)(n - w_2 + 1) \theta^2 / 2 \right\} \frac{1}{1 - (\lambda_1 k \theta + \lambda_2 m \theta + \lambda_3 s \theta)} \quad (17)$$

8. Построение приоритетного множества M

Чтобы найти приоритетное множество M , необходимо вычислить величины L_1^* , L_2^* , L_3^* . Для этого надо найти пределы $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k L_i$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^{k+m} L_i$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{i=k+m+1}^{k+m+s} L_i$ при всевозможных дисциплинах обслуживания задаваемых подстановками (7) – они и будут искомыми величинами L_1^* , L_2^* , L_3^* . В результате получаются формулы (3), задающие соответствующие точки (L_1^*, L_2^*, L_3^*) в трехмерном пространстве, выпуклой оболочкой которых является приоритетное множество M . При этом произвольные параметры v_1, w_1, w_2 и y_1, z_1, z_2 будут связаны следующим образом:

$$y_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} (v_1 - \beta'); \quad z_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} (w_1 - \gamma'); \quad z_2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} (w_2 - \gamma');$$

Литература

- [1] Китаев М.Ю., Рыков В.В. Система обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований // АиТ. 1980. 9. С. 52-61.
- [2] Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени. I // ТВП. 1974. Вып. 3. Т. XIX. С. 558-576.
- [3] Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени. II // ТВП. 1978. Вып. 2. Т. XXIII. С. 331-339.
- [4] Тимофеев Е.А. Оптимизация средних длин очередей в системе обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований // АиТ. 1995. С. 60-67.

УДК 519.677

Применение алгоритма Matching Pursuit для анализа петрофизических данных

Янаев М.М.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Данная статья посвящена некоторым особенностям применения алгоритма Matching Pursuit на практике. Алгоритм применяется для анализа петрофизических рядов. Рассматриваются некоторые методы решения проблем подготовки ряда, такие как неравномерность дискретизации и дополнение количества отсчетов ряда до степени двойки. Описан алгоритм выделения изменений в литологическом строении скважины. Этот алгоритм рассматривается на конкретном примере - анализе плотности Уральской СГ-4.

1. Введение

В настоящее время методы спектрального анализа очень широко применяются в геофизике. Они являются одним из самых важных инструментов для анализа и обработки сейсмических данных. Например, спектральный анализ Фурье дает исчерпывающую информацию о частотном составе анализируемых сигналов в целом. Для случая стационарных сигналов информации представляемой классическим спектральным анализом достаточно, чтобы охарактеризовать свойства сигнала. Однако с помощью анализа Фурье тяжело увидеть нужную информацию об изменении частотного состава во времени. Это является существенным недостатком классического спектрального анализа, который проявляется для нестационарных сигналов. Учитывая, что петрофизические ряды являются нестационарными сигналами и требуют наглядной визуализации, особую актуальность приобретают алгоритмы, характеризующие изменение частотных характеристик по времени [4], [5]. Одним из таких алгоритмов является Matching Pursuit [1], он представляет исходный одномерный сигнал в двумерный массив, состоящий из значений, характеризующих распределение энергии сигнала в плоскости "время-частота". В статье рассматриваются проблемы возникающие при практическом применении алгоритма МР для анализа петрофизических рядов, а также его структурные особенности границ развития вторичных процессов. Возможности анализа петрофизического ряда продемонстрированы на конкретном примере - изучение структуры неоднородных процессов в сигнале, составленном из данных по плотности Уральской СГ-4. Комбинированное применение алгоритма МР с базисом из вейвлетного пакета [2], [3] выявило некоторые границы изменения состава вещества.

2. Проблемы применения алгоритма МР для анализа петрофизических данных

Для работы использовался алгоритм МР, реализованный в пакете Wavelab для среды Matlab. Чтобы получить разложение, требуется задать следующие данные:

- 1) количество векторов, которые получатся в результате работы алгоритма,
- 2) вейвлету, измененные версии которой составляют разложение,
- 3) одномерный массив (исследуемый ряд), на него накладываются следующие условия:
 - а) количество отсчетов в сигнале должно быть равным степени двойки,
 - б) отсчеты в сигнале должны идти через равные отрезки времени,

Но существуют ряды, которые не обладают такими свойствами. Встаёт проблема, как избавиться от неравномерности ряда и дополнить количество отсчетов до степени двойки, при этом не внося в сигнал существенные искажения, которые могут помешать анализу. Существует возможность исследовать сигнал по "кускам", но нас интересуют не только локальные свойства сигнала, но и глобальные.

Решение проблемы неравномерности ряда применением классических методов интерполяции приносит результаты только при отсутствии десяти-пятнадцати отсчетов. При больших лакунах этот отрезок заполняется более или менее гладкой функцией, что не характерно для петрофизических данных. Алгоритм в этом месте выявляет особенность, которая не похожа на остальной ряд. При этом остаются в тени те изменения параметров ряда, которые мы ищем.

Предлагается

- 1) дополнять гауссовым шумом количество отсчетов в ряде до степени двойки,
- 2) небольшие пробелы (менее двадцати отсчетов) в данных интерполировать сплайном, составленным по исходному ряду,
- 3) пробелы более двадцати отсчетов заполнять гауссовым шумом.

Среднеквадратичное отклонение в гауссовском шуме берется таким же, как и у исходного сигнала. Рассмотрим пример.

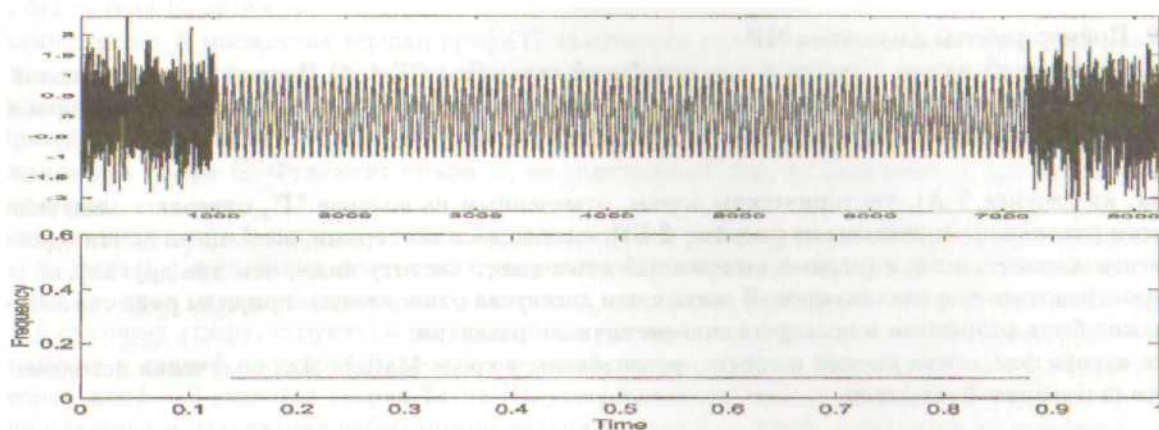


Рис. 1. Синтезированный ряд

Синтезированный ряд (см. рис. 1), состоящий из 8096 отсчетов, в начале и конце которого включен гауссовский шум. На картинке разложения он никак не отразился. При увеличении количества векторов, выбираемых из словаря, составленного из вейвлеты Coiflet3, алгоритм будет подбирать вектора для выражения шума.

Число векторов, которые образуют разложение, предлагается определять следующим образом. К исходному сигналу дописывается гауссов шум. Такое максимальное количество атомов, при котором добавка не отразится на картине разложения, можно считать искомым числом.

3. Подготовка данных по плотности СГ-4 для анализа с помощью МР

Ряд составлен из данных по плотности Уральской СГ-4. Исходные данные отличаются существенно неравномерной дискретизацией. Некоторые места с измерениями через пять сантиметров, другие - через двадцать. С целью получения устойчивых оценок на выборке достаточной длительности использовались приёмы, обсуждавшиеся выше:

- 1) количество отсчетов в ряде до степени двойки дополнялось гауссовым шумом с параметром, как у исходного ряда

- 2) промежутки, где данные отсутствовали менее одного метра, интерполировались кубическим сплайном, составленным по интервалу, где состав вещества существенно не менялся.
- 3) пробелы протяженностью более метра, где данные отсутствовали, заполнялись гауссовским шумом.

4. Анализ полученных результатов

Не обсуждая в деталях соответствие выявленных особенностей сигнала и проявленных процессов, обусловивших изменение плотности пород, поскольку данное обсуждение выходит за рамки настоящей статьи, отметим наиболее простые и понятные соответствия. Заметим, что дополнение количества отсчетов в ряде до степени двойки не отразилось на картине разложения.

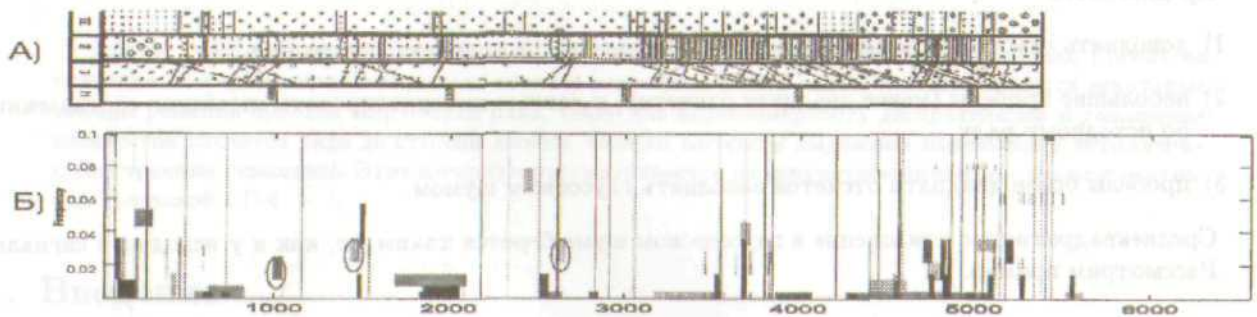


Рис. 2. Пример работы алгоритма МР

а) Литологический разрез Уральской сверхглубокой скважины СГ-4. б) Первый шаг адаптивной фильтрации петрофизического ряда (использована вейвлета Coiflet3, обеспечивающая выделение границ процессов, изменяющих плотность пород)

Так, на рисунке 2 А), тектоническим зонам, отмеченным на колонке "Г", отвечают следующие особенности разложения (показаны на рисунке 2 Б)), являющиеся векторами, имеющими почти одинаковые частотные характеристики (первый выделенный атом имеет частоту ниже, чем два других), но различную пространственную локализацию. В связи с чем дискуссия относительно природы ряда тектонических зон может быть разрешена в пользу их сингенетичного развития.

Все алгоритмы, обсуждаемые в статье, реализованы в среде Matlab. Для получения исходных кодов пишите maksyanaev@yandex.ru.

Литература

- [1] Mallat S., and Zhong S., Matching Pursuit with time-frequency dictionaries// IEEE Trans. Signal proc. 1993, 41, p. 3397-3415.
- [2] Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры при менения// Успехи физических наук 1996, 166, № 11 1145-1170.
- [3] Левкович-Маслюк Л., Переберин А. Два курса по вейвлет-анализу// Учебная программа 8-й международной конференции
- [4] Shaobing S., Chen, Donoho D.L., Saunders M. A. Atomic decomposition by basis pursuit// SIAM journal on Scientific Computing
- [5] Альмендингер А. М. Применение частотно-временных разложений для анализа сейсмических данных: Магистерская работа МГУ / Геологический факультет. 2001

УДК 514.17

Об удалении ребер из k -связного графа без потери k -связности

Пастор А. В.¹

Российская Академия Наук, Санкт-Петербургское отделение,
МИАН им. В.А. Стеклова, 191011 Россия,
С-Петербург, наб. р. Фонтанки 27,
e-mail: pastor@pdmi.ras.ru

В работе доказывается, что в k -связном графе G , не содержащем вершин степени k , для любого минимального фрагмента H существует ребро e , соединяющее вершину фрагмента H с вершиной, не принадлежащей фрагменту H , такое, что удаление из графа G ребра e не приводит к потере k -связности. Также доказывается, что если минимальный фрагмент H удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то удаление из графа G любого ребра, принадлежащего фрагменту H , не приводит к потере k -связности.

1. Введение. Основные определения

Граф G называется k -связным, если он содержит как минимум $k + 1$ вершину и сохраняет связность при удалении любых $k - 1$ вершин. Настоящая работа посвящена вопросу об удалении ребер из k -связного графа без потери k -связности.

Подмножество R множества вершин графа G называется *разделяющим* множеством, если при удалении этих вершин граф теряет связность. Разделяющее множество, содержащее ровно x вершин, называется также *x -разделяющим*. Объединение нескольких (но не всех) компонент связности, образующееся при удалении из k -связного графа G вершин произвольного k -разделяющего множества R , называется *фрагментом* графа G . Фрагмент графа G , не содержащий других фрагментов, мы будем называть *минимальным*.

Вопрос о сохранении k -связности графа при удалении его ребер вызывает большой интерес, связанный в первую очередь с попытками построения редуцирующей теории, позволяющей при помощи последовательности простых операций (таких, как удаление и стягивание ребер) свести произвольный k -связный граф к k -связному графу, структура которого была бы известна (при этом все промежуточные графы, возникающие в данной последовательности операций, также должны быть k -связными). Примером такой теории для $k = 3$ является теория Татта [1], утверждающая, что из любого трехсвязного графа при помощи удаления и стягивания ребер можно получить *колесо* — граф, состоящий из простого цикла и вершины, смежной со всеми вершинами этого цикла.

В 1969 году R. Halin в работе [2] доказал, что из любого k -связного графа G , степени всех вершин которого не меньше $k + 1$, можно удалить одно из ребер без потери k -связности. В связи с этим возникает естественный вопрос о том, удаление каких ребер k -связного графа, степени всех вершин которого не меньше $k + 1$, не нарушает его k -связность.

В работе [2] фактически доказано, что если H — фрагмент k -связного графа G , содержащий наименьшее число вершин, и R — k -разделяющее множество, при удалении которого образовался фрагмент H , то в результате удаления из графа G любого ребра, соединяющего вершину фрагмента H с вершиной множества R , образуется k -связный граф. Далее, в работе [3], R. Halin доказал, что при удалении из графа G произвольного ребра, принадлежащего фрагменту H , также получается k -связный граф.

В связи с этим возникает вопрос, может ли удаление ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту k -связного графа G , степени всех вершин которого не меньше $k + 1$, нарушить его k -связность? В настоящей работе доказано, что удаление любого ребра, принадлежащего минимальному фрагменту графа G , удовлетворяющему некоторым дополнительным условиям, не может нарушить k -связность графа G . Однако для произвольного минимального фрагмента данное утверждение неверно.

В 1972 году W. Mader в работе [4] доказал, что любой цикл произвольного k -связного графа содержит либо вершину степени k , либо ребро, удаление которого не нарушает k -связность графа. Таким образом, в любом цикле k -связного графа G , степени всех вершин которого не меньше $k + 1$, содержится ребро, при удалении которого из графа G получается k -связный граф. Из этого, в частности, следует, что в

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №99-01-00113

любом минимальном фрагменте графа G содержится ребро, удаление которого не нарушает k -связность графа G .

В настоящей работе доказано, что для любого минимального фрагмента H графа G , образующегося при удалении k -разделяющего множества R , существует ребро e , соединяющее вершину фрагмента H с вершиной множества R , такое, что при удалении из графа G ребра e получается k -связный граф.

Замечание. 1) Очевидно, что в каждом фрагменте произвольного k -связного графа содержится хотя бы один минимальный фрагмент. Из этого следует, что если в k -связном графе G есть хотя бы одно k -разделяющее множество, то в графе G существуют хотя бы два минимальных фрагмента.

2) Легко видеть, что если в графе G нет k -разделяющих множеств, то при удалении любого ребра граф G сохраняет k -связность.

1.1. Основные обозначения

В настоящей работе мы будем использовать следующие обозначения. Для произвольного графа G через V_G и E_G мы будем обозначать множество вершин и ребер графа G соответственно.

Для произвольного подмножества $A \subset V_G$ через $G - A$ мы будем обозначать подграф графа G , порожденный множеством вершин $V_G \setminus A$.

Аналогично, для произвольного подмножества $B \subseteq E_G$ через $G - B$ мы будем обозначать подграф, полученный в результате удаления из графа G всех ребер, входящих в множество B .

Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset V_G$. Множество вершин графа G , не принадлежащих множеству A , но смежных хотя бы с одной из вершин множества A , мы будем обозначать через $N_G(A)$. Множество вершин графа G , не принадлежащих множеству A , и не смежных ни с одной из вершин множества A , мы будем обозначать через \overline{A}^G . В тех случаях, когда это не может привести к неоднозначному пониманию обозначений, мы будем писать $N(A)$ и \overline{A} соответственно.

Заметим, что если H — фрагмент k -связного графа G , то множество $N(V_H)$ является разделяющим множеством, отделяющим фрагмент H , а множество $\overline{V_H}^G$ есть множество вершин всех компонент связности графа $G - N(V_H)$, не вошедших в фрагмент H .

2. Простейшие свойства фрагментов и разделяющих множеств

Пусть G — произвольный k -связный граф. Начнем с изучения свойств его разделяющих множеств и минимальных фрагментов. В данном разделе мы приведем доказательства нескольких вспомогательных утверждений, использовавшихся также в работе [5].

Определение 1. Будем говорить, что разделяющее множество R графа G *разделяет* множество вершин $X \subset V_G$, если в графе $G - R$ не все вершины множества $X \setminus R$ принадлежат одной компоненте связности.

Определение 2. Пусть H — подграф связного графа G , порожденный некоторым подмножеством множества вершин графа G и R — подмножество множества вершин графа G , не пересекающееся с множеством вершин подграфа H . Обозначим через $H_{G,R}^*$ граф с множеством вершин $V_{H_{G,R}^*} = V_H \cup R$ и множеством ребер

$$E_{H_{G,R}^*} = \{(a, b) \mid (a, b) \in E_G \vee \{a, b\} \subseteq R\}.$$

В случае, если $R = N_G(H)$, мы будем обозначать данный граф через H_G^* .

В тех случаях, когда это не может привести к неоднозначному пониманию обозначений, мы будем вместо H_G^* писать H^* .

Лемма 1. Пусть H — фрагмент k -связного графа G , образующийся в результате удаления k -разделяющего множества R . Пусть T — разделяющее множество в графе H^* . Тогда T является разделяющим множеством и в графе G .

Доказательство. Предположим противное, то есть что граф $G - T$ является связным. Рассмотрим произвольные две вершины a и b графа $H^* - T$. Поскольку граф $G - T$ связан, вершины a и b соединены в графе $G - T$ некоторым путем $S = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, где $s_0 = a$ и $s_m = b$.

Если все вершины пути S принадлежат множеству V_{H^*} , то последовательность вершин (s_0, s_1, \dots, s_m) является путем, соединяющим a и b также и в графе $H^* - T$.

Пусть не все вершины пути S принадлежат множеству V_{H^*} . Рассмотрим произвольный участок (s_i, \dots, s_j) пути S , лежащий вне V_{H^*} (причем $s_{i-1}, s_{j+1} \in V_{H^*}$). Заметим, что вершины графа G , не принадлежащие H^* , не могут быть смежны с вершинами фрагмента H , поскольку при удалении множества R они оказываются в разных компонентах связности. Таким образом, вершины s_{i-1} и s_{j+1} должны принадлежать множеству R . Следовательно, в графе H^* они соединены ребром, на которое можно заменить участок пути между вершинами s_{i-1} и s_{j+1} . Поступив аналогично с другими участками пути S , выходящими за пределы H^* , мы получим путь между вершинами a и b , в графе $H^* - T$.

Мы доказали, что в любом случае вершины a и b соединены в графе $H^* - T$ некоторым путем. Следовательно, множество T не является разделяющим в графе H^* , что противоречит условию. \square

Лемма 2. Пусть H — фрагмент k -связного графа G , образующийся в результате удаления k -разделяющего множества R . Тогда каждая из вершин множества R смежна хотя бы с одной из вершин фрагмента H .

Доказательство. Предположим противное, то есть что вершина $a \in R$ не смежна ни с одной из вершин фрагмента H . Тогда все остальные вершины множества R (а их $k-1$) также отделяют фрагмент H , что противоречит k -связности графа G . \square

Лемма 3. Для любого k -связного графа G выполняются следующие утверждения.

- 1) Для любого фрагмента H графа G , граф H^* является k -связным.
- 2) Фрагмент H , содержащий более одной вершины, минимален тогда и только тогда, когда граф H^* является $(k+1)$ -связным.

Доказательство. 1) Пусть H^* не является k -связным графом. Очевидно, что граф H^* содержит как минимум $k+1$ вершину. Следовательно, в нем есть $(k-1)$ -разделяющее множество T , которое по лемме 1 является $(k-1)$ -разделяющим и в графе G , что противоречит k -связности этого графа.

2) Пусть для некоторого минимального фрагмента H , содержащего более одной вершины, граф H^* не является $(k+1)$ -связным. Тогда, поскольку граф H^* , очевидно, содержит как минимум $k+2$ вершины, в нем есть k -разделяющее множество T . Пусть при удалении этого множества из графа H^* образовались компоненты связности H_1, H_2, \dots, H_m (где $m \geq 2$). Поскольку все вершины множества R в графе H^* попарно смежны, существует компонента H_i , такая, что $V_{H_i} \cap R = \emptyset$. Тогда H_i является фрагментом графа G , содержащимся в H , что противоречит минимальности фрагмента H . Следовательно, для любого минимального фрагмента H графа G , граф H^* является $(k+1)$ -связным.

Обратно, пусть граф H^* является $(k+1)$ -связным, но фрагмент H содержит фрагмент F . Рассмотрим k -разделяющее множество $T = N_G(F)$. Заметим, что вершины фрагмента F могут быть смежны только с вершинами множества V_{H^*} . Следовательно, по лемме 2, все вершины множества T содержатся в V_{H^*} , что противоречит $(k+1)$ -связности графа H^* . \square

Лемма 4. Пусть G — k -связный граф, в котором отмечены k вершин. Удалим из него m неотмеченных вершин и t отмеченных вершин, где $m+t \leq k-1$. Тогда из любой оставшейся неотмеченной вершины b можно пойти не менее чем до $k-m-t-1$ неудаленных отмеченных вершин, не проходя через удаленные и отмеченные вершины.

Доказательство. Удалим дополнительно $k-1-t-m$ произвольные отмеченные вершины. Поскольку исходный граф был k -связным, получится связный граф. Следовательно, от любой неотмеченной вершины b полученного графа можно пойти хотя бы до одной из оставшихся неудаленных $m+1$ отмеченной вершины, не проходя через другие отмеченные вершины. Таким образом, от вершины b можно пойти хотя бы до одной из любых $m+1$ неудаленных отмеченных вершин, не проходя через удаленные и отмеченные вершины, откуда следует утверждение леммы. \square

Лемма 5. Пусть R — k -разделяющее множество связного графа G . Рассмотрим подграфы G_1, G_2, \dots, G_n графа G , каждый из которых является либо компонентой связности, либо объединением нескольких компонент связности графа $G - R$, причем каждая вершина графа $G - R$ принадлежит ровно одному из подграфов G_i . Пусть графы $(G_1)_{G,R}^*$, $(G_2)_{G,R}^*$, \dots , $(G_n)_{G,R}^*$ являются k -связными. Рассмотрим произвольное $(k-1)$ -элементное множество $T \subset V_G$, удовлетворяющее одному из следующих двух условий.

- 1) Существуют хотя бы два подграфа G_i и G_j графа $G - R$, такие, что $V_{G_i} \not\subset T$ и $V_{G_j} \not\subset T$.
- 2) Существует подграф G_i графа $G - R$, такой, что

$$V_{G_i} \not\subset T, \quad \overline{V_{G_i}} \subseteq T \quad \text{и} \quad |\overline{V_{G_i}}| \geq \frac{k-1}{2}.$$

Тогда одна из компонент связности графа $G - T$ содержит все вершины этого графа, не принадлежащие множеству R , и более половины вершин множества $R \setminus T$.

Доказательство. Будем называть вершины множества R отмеченными. Пусть $|T \cap R| = t$ и $|T \cap V_{G_i}| = m_i$. Тогда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = k - 1 - t.$$

Удалим из графа G и из графов $(G_i)_{G,R}^*$ все вершины множества T . Поскольку из графа $(G_i)_{G,R}^*$ мы удалили t отмеченных и m_i неотмеченных вершин, по лемме 4, в образовавшемся графе от каждой неотмеченной вершины можно дойти как минимум до $k - t - m_i$ отмеченных вершин, не проходя через другие отмеченные вершины. Далее мы рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть в подграфах G_i и G_j графа $G - R$ содержатся вершины b_i и b_j соответственно, не принадлежащие множеству T . Тогда заметим, что $m_i + m_j \leq k - 1 - t$, следовательно,

$$(k - t - m_i) + (k - t - m_j) \geq k + 1 - t > k - t. \quad (1)$$

Из этого неравенства следует, что вершины b_i и b_j должны быть соединены в графе $G - T$ путями с общей отмеченной вершиной. Таким образом, вершины b_i и b_j соединены путем в графе $G - T$. Аналогично, любые две неотмеченные вершины графа $G - T$, принадлежащие разным компонентам связности графа $G - R$, соединены путем в графе $G - T$. Следовательно, из любой неотмеченной вершины графа $G - T$ можно попасть в любую другую неотмеченную вершину этого графа, то есть все неотмеченные вершины принадлежат одной компоненте связности графа $G - T$. Кроме того, из неравенства (1) следует, что либо вершина b_i , либо вершина b_j соединена в графе $G - T$ путями более чем с половиной отмеченных вершин этого графа.

2) Пусть существует подграф G_i графа $G - R$, такой, что

$$V_{G_i} \not\subseteq T, \quad \overline{V_{G_i}} \subseteq T \quad \text{и} \quad |V_{G_i}| \geq \frac{k-1}{2}.$$

В этом случае

$$m_i \leq k - 1 - t - \frac{k-1}{2},$$

откуда мы получаем, что

$$2(k - t - m_i) \geq 2 + 2 \left(\frac{k-1}{2} \right) = k + 1 > k - t. \quad (2)$$

Из этого неравенства следует, что в графе $G - T$ любые две неотмеченные вершины (которые обязаны принадлежать подграфу G_i) должны быть соединены путями с общей отмеченной вершиной. Следовательно, в этом случае из любой неотмеченной вершины графа $G - T$ также можно попасть в любую другую неотмеченную вершину, то есть все неотмеченные вершины принадлежат одной компоненте связности графа $G - T$. Кроме того, из неравенства (2) следует, что любая неотмеченная вершина графа $G - T$ соединена путями более чем с половиной отмеченных вершин этого графа.

Итак, в каждом из рассмотренных случаев существует компонента связности графа $G - T$, содержащая все неотмеченные (то есть не принадлежащие множеству R) вершины этого графа. Более того, в каждом из случаев существует отмеченная вершина графа $G - T$, соединенная путями более чем с половиной отмеченных вершин этого графа. Таким образом, в любом случае более половины отмеченных вершин графа $G - T$ (то есть вершин, принадлежащих множеству $R \setminus T$) принадлежат той же компоненте связности графа $G - T$, что и все неотмеченные вершины этого графа. \square

3. Удаление ребер из минимальных фрагментов

Пусть a и b — две смежные вершины k -связного графа G . Рассмотрим граф $G' = G - \{(a, b)\}$. Легко видеть (см. например [6, глава 1, лемма 4.1]), что если T — $(k-1)$ -разделяющее множество графа G' , то граф $G' - T$ состоит ровно из двух компонент связности, причем вершины a и b принадлежат разным компонентам связности этого графа.

Теорема 1. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G , такой, что $|V_H| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_H$ и вершину $b \in V_G$, смежную с a . Пусть $G' = G - \{(a, b)\}$. Тогда для любого $(k-1)$ -разделяющего множества T графа G' выполняются следующие утверждения:

1) Если $b \in V_H$, то $\overline{V_H} \subset T$, причем $|\overline{V_H}| \leq \frac{k}{2} - 1$.

2) Если $b \notin V_H$, то либо $\overline{V_H} \subset T$, причем $|\overline{V_H}| \leq \frac{k}{2} - 1$, либо все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ принадлежат множеству $R = N_G(V_H)$, причем количество вершин этой компоненты связности меньше, чем количество вершин другой компоненты связности графа $G' - T$.

Доказательство. Легко видеть, что граф H является компонентой связности графа $G - R$. Пусть G_1, \dots, G_n — другие компоненты связности этого графа. По лемме 3 графы $(G_1)_G^*, \dots, (G_n)_G^*$ являются k -связными, а граф $(H)_G^* - (k+1)$ -связным. Рассмотрим графы $H' = H - \{(a, b)\}$ и $(H')_{G,R}^* = H_G^* - \{(a, b)\}$. Поскольку граф $(H')_{G,R}^*$ получается из графа H_G^* удалением одного ребра, он является k -связным.

Заметим, что $V_H \not\subset T$, так как иначе граф $G' - T$ совпадает с графом $G - T$, который должен быть связным, поскольку граф G является k -связным.

Предположим, что $\overline{V_H} \not\subset T$. Тогда хотя бы в двух из фрагментов H', G_1, \dots, G_n графа G' содержатся вершины, не принадлежащие множеству T . Следовательно, по лемме 5, все вершины графа $G' - T$, не входящие в R , и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности.

Аналогично, если $\overline{V_H} \subset T$, но $|\overline{V_H}| > \frac{k}{2} - 1$, то все вершины графа $G' - T$, не входящие в R , и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности.

Итак, мы доказали, что в любом случае выполнено одно из следующих двух утверждений: либо $\overline{V_H} \subset T$, причем $|\overline{V_H}| \leq \frac{k}{2} - 1$, либо все вершины графа $G' - T$, не входящие в R , и более половины вершин множества $R \setminus T$ попадают в одну компоненту связности. В случае, если выполнено первое из этих условий, утверждение теоремы верно. Предположим, что выполнено второе условие.

1) Пусть $a, b \in V_H$. Тогда вершины a и b лежат в одной компоненте связности графа $G' - T$. Следовательно, граф $G' - T$ является связным, что противоречит условию теоремы.

2) Пусть $b \notin V_H$. Тогда очевидно, что $b \in R$. Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Тогда все вершины графа $G' - T$, не принадлежащие множеству R , должны принадлежать множеству V_A . Следовательно, $B \subset R$. Кроме того, более половины вершин множества $R \setminus T$ также должны принадлежать V_A . Следовательно, $|V_A| > |V_B|$. \square

Следствие. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G , такой, что $|\overline{V_H}| \geq \frac{k-1}{2}$. Тогда удаление из графа G любого ребра, принадлежащего фрагменту H , не ведет к потере k -связности.

Доказательство. Пусть a и b — две смежные вершины фрагмента H . Из пункта 1 теоремы 1 следует, что если в графе $G' = G - \{(a, b)\}$ есть $(k-1)$ -разделяющее множество, то $|\overline{V_H}| \leq \frac{k}{2} - 1$, что противоречит условию. \square

Лемма 6. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G , такой, что $|V_H| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_H$ и вершину $b \in R$, смежную с a . Пусть в графе $G' = G - \{(a, b)\}$ есть $(k-1)$ -разделяющее множество T , такое, что все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ принадлежат множеству $R = N_G(V_H)$. Тогда количество вершин этой компоненты связности меньше, чем количество вершин фрагмента H .

Доказательство. Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Легко видеть, что $V_A \not\subset R$, следовательно, $V_B \subset R$.

Рассмотрим множество $T_1 = T \cup \{b\}$. Легко видеть, что если $|V_B| > 1$, то множество T_1 является k -разделяющим множеством в графе G , отделяющим подграф $B' = B - \{b\}$. Тогда множество

$$S = (T_1 \cap V_H) \cup (R \setminus V_{B'})$$

является разделяющим в графе G — оно отделяет подграф $H - T_1$, который не пуст, так как содержит вершину a . Таким образом, поскольку фрагмент H минимален, $|S| > k$. Следовательно, $|T_1 \cap V_H| > |V_{B'}|$, но тогда

$$|V_H| \geq |T_1 \cap V_H| + 1 > |V_{B'}| + 1 = |V_B|.$$

В случае, если $|V_B| = 1$, также $|V_H| > |V_B|$, поскольку по условию $|V_H| \geq 2$. \square

Лемма 7. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G , такой, что $|V_H| > 1$. Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_H$ и вершину $b \in V_G$, смежную с a . Тогда, если в графе $G' = G - \{(a, b)\}$ есть $(k-1)$ -разделяющее множество T , такое, что ни одна из компонент связности графа $G' - T$ не содержится в множестве $R = N_G(V_H)$, то

$$|V_H| \geq |\overline{V_H}| + 3.$$

Доказательство. Пусть A и B — компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Заметим, что, по теореме 1, все вершины множества $\overline{V_H}$ принадлежат множеству T . Следовательно, все вершины подграфов A и B принадлежат множеству $V_H \cup R$. Таким образом, поскольку ни одна из компонент связности графа $G' - T$ не содержится в R , в каждой из них должна содержаться хотя бы одна вершина фрагмента H . Пусть $x \in V_A \cap V_H$ и $y \in V_B \cap V_H$.

Заметим, что поскольку фрагмент H является минимальным, степени вершин x и y в графе G должны быть не менее $k + 1$ (т.к. если, например, вершина x имеет степень не более k , то она образует минимальный фрагмент, содержащийся в H). Следовательно, степени вершин x и y в графе G' должны быть не менее k . При этом вершина x может быть смежна в графе G' только с вершинами множества $(V_A \cup T) \cap (V_H \cup R)$. Аналогично, вершина y может быть смежна в графе G' только с вершинами множества $(V_B \cup T) \cap (V_H \cup R)$. Но заметим, что $V_A \subset V_H \cup R$ и $V_B \subset V_H \cup R$. Следовательно,

$$(V_A \cup T) \cap (V_H \cup R) = V_A \cup ((V_H \cup R) \cap T)$$

и

$$(V_B \cup T) \cap (V_H \cup R) = V_B \cup ((V_H \cup R) \cap T).$$

Таким образом,

$$|(V_H \cup R) \cap T| + |V_A| - 1 \geq k \quad \text{и} \quad |(V_H \cup R) \cap T| + |V_B| - 1 \geq k.$$

Из этого, поскольку

$$|(V_H \cup R) \cap T| + |V_A| + |V_B| = |V_H| + |R|,$$

мы получаем, что

$$|(V_H \cup R) \cap T| \geq 2k + 2 - |V_H| - |R| = k + 2 - |V_H|.$$

Следовательно, поскольку все вершины множества $\overline{V_H}$ содержатся в T ,

$$|\overline{V_H}| = |T| - |(V_H \cup R) \cap T| \leq k - 1 - (k + 2 - |V_H|) = |V_H| - 3.$$

□

Замечание. Оценка, полученная в лемме 7, является наилучшей возможной. Это видно из следующего примера. Для произвольного натурального n рассмотрим полные графы из n вершин A , B и C , полный граф из $n - 1$ вершины D и две вершины x и y . Соединим попарно ребрами все вершины графов A и C , B и C , A и D , B и D . Вершину x соединим с вершинами графов A и C , вершину y — с вершинами графов B и C , и, кроме того, соединим вершины x и y (см. рисунок).

Легко видеть, что полученный граф G является $(2n)$ -связным, причем множество $R = V_A \cup V_B$ является $(2n)$ -разделяющим множеством графа G . Заметим, что подграф H , порожденный множеством вершин $V_C \cup \{x\} \cup \{y\}$, является минимальным фрагментом графа G , причем $N(H) = R$ и $\overline{V_H} = V_D$. Следовательно, $|V_H| = n + 2 = |\overline{V_H}| + 3$. Но при этом в графе $G' = G - \{(x, y)\}$ есть $(2n - 1)$ -разделяющее множество $T = V_C \cup V_D$, причем каждая из образующихся при его удалении компонента связности содержит либо вершину x , либо вершину y , и, следовательно, не может содержаться в R .

Следствие 1. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G и (a, b) — произвольное ребро фрагмента H . Тогда, если граф $G' = G - \{(a, b)\}$ не является k -связным, то $|V_H| \geq |\overline{V_H}| + 3$.

Доказательство. Пусть $|V_H| < |\overline{V_H}| + 3$. Тогда, по лемме 7, если в графе G' есть $(k - 1)$ -разделяющее множество T , то все вершины одной из компонент связности графа $G' - T$ должны принадлежать множеству $R = N(H)$. Но эта компонента связности должна содержать либо вершину a , либо вершину b , что невозможно, поскольку эти вершины не принадлежат множеству R . □

Следствие 2. Пусть R — k -разделяющее множество k -связного графа G , при удалении которого образуются компоненты связности G_1, G_2, \dots, G_n . Тогда для любой из компонент связности G_i , кроме, может быть, одной, при удалении из графа G любого ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту, содержащемуся в G_i , образуется k -связный граф.

Доказательство. Пусть в минимальном фрагменте H_i , содержащемся в подграфе G_i , есть ребро (a, b) , такое, что граф $G - \{(a, b)\}$ не является k -связным. Тогда, по следствию 1 к лемме 7,

$$|V_{H_i}| \geq |\overline{V_{H_i}}| + 3 > |\overline{V_{G_i}}|.$$

Следовательно, для любого $j \neq i$, мы получаем, что

$$|V_{G_i}| > |\overline{V_{G_i}}| \geq |V_{G_j}|.$$

Рассмотрим ребро (c, d) из минимального фрагмента H_j , содержащемуся в подграфе G_j , где $j \neq i$. Если граф $G - \{(c, d)\}$ не является k -связным, то, рассуждая аналогично, получаем $|V_{G_i}| < |V_{G_j}|$, что невозможно. Следовательно, при удалении из графа G любого ребра, принадлежащего произвольному минимальному фрагменту, содержащемуся в G_j , где $j \neq i$, образуется k -связный граф. \square

Теорема 2. Пусть H — минимальный фрагмент k -связного графа G , такой, что все вершины фрагмента H и множества $R = N(H)$ имеют в графе G степени не меньше $k+1$. Тогда в графе G существует ребро, соединяющее вершину фрагмента H и вершину множества R , при удалении которого из графа G образуется k -связный граф.

Доказательство. Поскольку все вершины фрагмента H имеют в графе G степени не меньше $k+1$, фрагмент H содержит хотя бы две вершины. Выберем произвольную вершину $b \in R$ и вершину $a \in V_H$, смежную с b . Если граф $G' = G - \{(a, b)\}$ является k -связным, то искомое ребро найдено.

Пусть в графе G' есть $(k-1)$ -разделяющее множество T . Обозначим через A и B компоненты связности графа $G' - T$, содержащие вершины a и b соответственно. Тогда, по теореме 1 и лемме 7, имеет место один из следующих двух случаев: либо $B \subset R$, причем $|V_A| > |V_B|$, либо $\overline{V_H} \subset T$, причем $|V_H| \geq |\overline{V_H}| + 3$.

В первом случае, если $B \subset R$ и $|V_A| > |V_B|$, легко видеть, что подграф $B_1 = B - \{b\}$ является фрагментом графа G , отделяемым k -разделяющим множеством $T \cup \{b\}$. При этом очевидно, что $|V_{B_1}| < |\overline{V_{B_1}}|$. Кроме того, по лемме 6,

$$|V_{B_1}| < |V_B| < |V_H|.$$

Во втором случае, если $\overline{V_H} \subset T$ и $|V_H| \geq |\overline{V_H}| + 3$, в графе G есть k -разделяющее множество T_1 , такое, что $\overline{V_H} \subset T_1$. Пусть граф $G - T_1$ состоит из компонент связности G_1, G_2, \dots, G_n . Не умаляя общности, можно считать, что компонента связности G_1 содержит наименьшее число вершин среди всех этих компонент.

Пусть F — произвольный минимальный фрагмент, содержащийся в G_1 . Очевидно, что все вершины фрагмента F являются либо вершинами фрагмента H , либо вершинами множества R . Следовательно, все они имеют в графе G степени не меньше $k+1$, откуда $|V_F| > 1$. С другой стороны, поскольку подграф G_1 является наименьшим по числу вершин среди подграфов G_1, G_2, \dots, G_n , легко видеть, что $|V_F| < |\overline{V_F}|$. В частности это означает, что $|V_F| < |V_H|$, поскольку $|V_H| \geq |\overline{V_H}| + 3$.

Заметим, что $V_F \not\subset V_H$, поскольку фрагмент H минимален. Пусть в фрагменте F есть хотя бы одна вершина фрагмента H . Тогда в фрагменте F содержится ребро, соединяющее вершину фрагмента H с вершиной множества R . Но поскольку $|V_F| < |\overline{V_F}|$, по следствию 1 из леммы 7, при удалении данного ребра из графа G должен образоваться k -связный граф. Следовательно, искомое ребро найдено.

Таким образом, в любом из двух рассматриваемых случаев нам достаточно исследовать ситуацию, когда в графе G есть фрагмент F , такой, что $V_F \subset R$, причем $|V_F| < |\overline{V_F}|$ и $|V_F| < |V_H|$. Рассмотрим фрагмент F_0 , наименьший по числу вершин среди фрагментов, все вершины которых принадлежат множеству R . Очевидно, что для фрагмента F_0 также выполняются неравенства $|V_{F_0}| < |\overline{V_{F_0}}|$ и $|V_{F_0}| < |V_H|$.

Пусть S — k -разделяющее множество, при удалении которого образуется фрагмент F_0 . Рассмотрим произвольную вершину $d \in V_{F_0}$. Поскольку $V_{F_0} \subset R$, вершина d , по лемме 2, должна быть смежна с какой-либо вершиной $c \in V_H$. Но поскольку $V_{F_0} \cap V_H = \emptyset$, мы получаем, что $c \in S$.

Пусть в графе $G'' = G - \{(c, d)\}$ есть $(k-1)$ -разделяющее множество U , при удалении которого образуются компоненты связности C и D , содержащие вершины c и d соответственно. Тогда, поскольку $|V_{F_0}| < |\overline{V_{F_0}}|$, по лемме 7, мы получаем, что $V_C \subset S$. Из этого, по лемме 6, следует, что $|V_C| < |V_{F_0}|$. Следовательно, $|V_C| < |V_H|$ и $|V_C| < |\overline{V_C}|$. Далее возможны два случая.

1) Пусть $\overline{V_H} \subset U$. Тогда $V_C \subset V_H \cup R$. Заметим, что подграф C является фрагментом в графе G , отделяемым k -разделяющим множеством $U_1 = U \cup \{d\}$. Пусть C_0 — произвольный минимальный фрагмент графа G , содержащийся в C . Заметим, что $V_{C_0} \not\subset V_H$, поскольку фрагмент H минимален. Далее, $V_{C_0} \not\subset R$, поскольку $|V_{C_0}| \leq |V_C| < |V_{F_0}|$, а фрагмент F_0 содержит наименьшее число вершин среди фрагментов, все вершины которых принадлежат множеству R .

Таким образом, фрагмент C_0 содержит как вершины фрагмента H , так и вершины множества R . Рассмотрим произвольное ребро (x, y) фрагмента C_0 , такое, что $x \in V_H$ и $y \in R$. Поскольку, как легко видеть, $|V_{C_0}| < |\overline{V_{C_0}}|$, при удалении данного ребра из графа G должен образоваться k -связный граф, и искомое ребро найдено.

2) Пусть $\overline{V_H} \not\subset U$. Тогда, по теореме 1, мы получаем, что $V_D \subset R$. Пусть $|V_D| = \ell$. Рассмотрим произвольную вершину $x \in \overline{V_H} \setminus U$. Заметим, что вершина x может быть смежна только вершинам жеста $\overline{V_H}$ и вершинам множества $R \setminus V_D$. Но поскольку граф G является k -связным, степень верши x должна быть не меньше k . Следовательно,

$$|\overline{V_H}| - 1 + k - \ell \geq k,$$

откуда

$$|\overline{V_H}| \geq \ell + 1 > |V_D|.$$

Заметим теперь, что

$$|V_G| = |V_H| + |R| + |\overline{V_H}| = |V_C| + |U| + |V_D|.$$

Но, по доказанному выше,

$$|V_H| > |V_C|, \quad |R| > |U|, \quad |\overline{V_H}| > |V_D|,$$

что невозможно.

Литература

- [1] Tutte W. T. A theory of 3-connected graphs // *Indag. Math.* 1961. V.23. P. 441-455.
- [2] Halin R. A theorem on n -connected graphs // *Journal of Combinatorial Theory.* 1969. V.7. P. 150-154.
- [3] Halin R., Studies on minimally n -connected graphs // *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Welsh D. J. A., Ed.). Academic Press, London - New York, 1971. P. 129-136.
- [4] Mader W. Ecken vom Grad n in minimalen n -fach zusammenhängenden Graphen // *Arch. Math.* 1972. V.19. №2. P. 219-224.
- [5] Карпов Д. В., Пастор А. В. О структуре k -связного графа // *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2000. Т.266. С. 76-106.
- [6] Bollobas B., *Extremal graph theory.* Academic Press, London - New York - San Francisco, 1978.

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
имени П.Г.Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 9 №1 2002

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

Главный редактор
В.А.Соколов

Редакционная коллегия
О.Л.Бандман, В.А.Бондаренко, В.Ш.Бурд, М.Г.Дмитриев,
А.В.Зафиевский, Ю.Г.Карпов, С.А.Кащенко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Левин,
И.А.Ломазова, В.В.Майоров, В.Э.Мальшкин, В.А.Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А.Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

©Ярославский
государственный
университет, 2002