*М*ОДЕЛИРОВАНИЕ И *А*НАЛИЗ *И*НФОРМАЦИОННЫХ *С*ИСТЕМ

Том 8 № 2 2001

Ярославский государственный
университет имени П.Г.Демидова

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
имени П.Г.Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 8 №2 2001

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.8, №2 2001

Лицензия ЛР №020319 от 30.12.96. Корректор А.А.Аладьева
Подписано в печать 30.11.2001. Формат 60x88$^1/_8$. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 5,92. Уч.-изд.л. 3,5. Тираж 100 экз. №207

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 3–9

УДК 514.17

О характеризации порождающих множеств

Карасёв Р.Н.[1]
Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

В этой статье изучается некоторое свойство выпуклых множеств. Рассматривается критерий, позволяющий упростить проверку этого свойства. Также вводится некоторая модификация этого свойства, которая позволяет исследовать нормы в $\mathbb{R}^n$, в которых каждое множество диаметра 1 может быть вложено в тело постоянной ширины 1.

1. Введение

В этой статье изучаются выпуклые множества, обладающие некоторым специальным свойством. Чтобы его сформулировать, введем сначала некоторые определения и обозначения.

Напомним, что сумма $A + B$ и разность A/B Минковского двух множеств A и B из векторного пространства определяются равенствами (см. [1])

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} b + A, \quad A/B = \{c : c + B \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B} -b + A.$$

Эти операции взаимно полуобратны, то есть

$$(A/B) + B \subseteq A, \quad A \subseteq (A + B)/B.$$

Будем считать, что все множества лежат в некотором рефлексивном банаховом пространстве E (E^* — сопряженное пространство к E, B_1 — единичный шар E) и все выпуклые множества — замкнуты, если не упомянуто противное. Через $\operatorname{bd} X$ и $\operatorname{int} X$ будем обозначать границу множества X и его внутренность соответственно.

Определение 1. Множество Y называется *слагаемым* множества X, если найдется такое Y^*, что $Y + Y^* = X$.

Определение 2. Множество X называется *дополняемым* относительно семейства множеств P в E, если для всех таких $T \in P$, что $Y/(-T) \neq \emptyset$, Y — слагаемое X. Множество $X \subseteq E$ назовем *порождающим*, если оно дополняемо относительно всех подмножеств $T \subseteq E$.

Основная цель этой статьи — характеризация порождающих множеств. Порождающие множества изучались в работах [2, 3, 4, 5 и др.]. Название "порождающее" взято из [2]. В [4] было доказано, что всякое двумерное множество — порождающее, а в [5] изучались многогранники, являющиеся порождающими множествами.

Определение 3. Множество A назовем *X-сильно выпуклым* ([2], а также см. [6, с. 118 – 119]), если $A = X/(-T)$, где $T \subset E$, $T \neq \emptyset$.

Определение 4. Пусть X и Y — строго выпуклые тела. Тогда Y назовем *локально вложимым* в X, если выполняется следующее: для любой точки $x \in \operatorname{bd} X$ найдется такая точка $y \in \operatorname{bd} Y$ и некоторая окрестность U точки y, что

$$(Y \cap U) + (x - y) \subseteq X.$$

Т. е., при трансляции, переводящей точку y в точку x, образ множества $Y \cup U$ лежит в X.

Заметим, что из-за строгой выпуклости Y точка y определена однозначно, так как внешняя нормаль к X в x должна быть и внешней нормалью к Y в y. Точка на границе строго выпуклого множества однозначно определена внешней нормалью. Следовательно, точка y однозначно определена x.

Следующие определения общеизвестны, см. [1, 2].

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-01-00705

Определение 5. Функция $s : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$s(p, X) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle,$$

называется *опорной функцией* множества $X \subseteq E$.

Определение 6. Для выпуклого множества $X \subseteq E$ *конусом нормалей* $N_x(X) \subseteq E^*$ в точке $x \in \operatorname{bd} X$ называется

$$N_x(X) = \{p \in E^* : \langle p, x \rangle = s(p, X)\}.$$

Определение 7. *Барьерным конусом* множества $X \subseteq E$ называется

$$b(X) = \{p \in E^* : s(p, X) < +\infty\}.$$

Основной результат работы — следующая теорема.

Теорема 1. Если $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ для выпуклого множества $X \subseteq E$, то X порождающее тогда и только тогда, когда для всех $T \in E$ таких, что $|T| \leq 2$ и $Y = X/(-T) \neq \emptyset$, Y — слагаемое X.

Если E — конечномерно, то условие $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ не нужно.

Таким образом, для проверки того, что некоторое множество — порождающие, достаточно проверить дополняемость для попарных пересечений его транслятов.

В работе [2] было показано, что в n-мерном пространстве теорема Каратеодори позволяет ограничить проверку порождаемости проверкой дополняемости такими множествами T, что $|T| \leq n$. В работе [3] получены аналогичные критерии, для того чтобы множество Y было слагаемым X и доказано, что проверка этого сводится к проверке некоторого утверждения для конечных подмножеств X.

Определение 8. Множество $X \subseteq E$ называется множеством *постоянной ширины*, если $|s(p, X) - s(-p, X)|$ постоянно для всех $p \in E^*$.

В данной работе полученные результаты о порождающих множествах применяются к исследованию таких норм в пространстве $\mathbb{R}^n$, что любое множество диаметра 1 может быть вложено в множество постоянной ширины 1 (см. обзор [7]), а также [8], [9] и [10], где разбирается случай евклидовой нормы и ставятся вопросы о других нормах).

Определение 9. Норму $\|\ \|$ в $\mathbb{R}^n$ назовем *совершенной*, если любое множество Y диаметра 1 может быть вложено в множество постоянной ширины 1.

Определение 10. Будем говорить, что норма обладает s-свойством, если B_1 дополняем относительно всех T таких, что $\operatorname{diam} T \leq 1$.

Известно, что евклидова норма, нормы в двумерном пространстве и нормы с параллелотопом в качестве единичного шара — совершенны, см. [7], [8]. Также легко видеть, что прямая сумма двух норм — совершенна, если совершенны каждая из норм (ссылку на этот вполне очевидный факт автору не удалось найти). Это позволяет получить большое количество примеров норм с этим свойством.

В обзоре [7] ставится вопрос о характеризации совершенных норм и в [9] были приведены примеры не совершенных норм. Следуя [9], введем понятие максимального множества диаметра 1.

Определение 11. *Максимальным множеством диаметра 1* называется множество диаметра 1, не являющееся собственным подмножеством какого-либо множества диаметра 1.

В [9] доказано следующее несложное утверждение.

Предложение. Любое множество диаметра 1 является подмножеством некоторого максимального множества диаметра 1.

Это утверждение сводит проверку совершенности нормы к доказательству того, что любое максимальное множество диаметра 1 является телом постоянной ширины 1. Следующие результаты — критерии совершенности нормы.

Теорема 2. Если для единичного шара B_1 нормы множество $Y = B_1 \cap (B_1 + u)$ — слагаемое B_1 при всех u, $\|u\| \leq 1$, то норма совершенная.

Теорема 3. Если норма строго выпукла, то верно и обратное.

Следствие. Если единичный шар B_1 нормы — порождающее множество, то норма совершенная.

2. Вспомогательные факты

Приведем некоторые вспомогательные факты, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1. Если $Y = \cap_{i=1}^n X_i$, где X_i — выпуклы для всех i и $y \in \operatorname{bd} Y$, то

$$N_y(Y) = \sum_{i=1,\ y \in \operatorname{bd} X_i}^{n} N_y(X_i).$$

Эта лемма общеизвестна, см. [1].

Лемма 2. Пусть X — выпуклое множество и $p \in \operatorname{int} b(X)$. Тогда множество $X_{p,a} = \{x \in X : \langle p, x\rangle \geq a\}$ — ограничено.

Доказательство. Пусть $p \in U$, $U \subseteq b(X)$ и $U \subseteq E^*$ — открыто. Очевидно, что $-p \in b(X_{p,a})$, поэтому $U - p \subseteq b(X_{p,a})$ и $U - p$ — окрестность нуля. Следовательно, $\langle p, x\rangle$ ограничено на $X_{p,a}$ при любом p, т.е. $X_{p,a}$ — слабо ограничено. Но тогда $X_{p,a}$ — ограничено (см. [7, с. 185]).

Следующие три леммы хорошо известны (см., например, [1, 2]).

Лемма 3. Если $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$, то для любой точки $y \notin X$ найдется такое $p \in \operatorname{int} b(X)$, что $\langle p, y\rangle > s(p, X)$.

Лемма 4. Если $X = A + B$, то $s(p, X) = s(p, A) + s(p, B)$.

Лемма 5. Если $p \in \operatorname{int} b(X)$, то найдется $x \in X$ такая, что $\langle p, x\rangle = s(p, X)$.

Лемма 6. Пусть X и Y — строго выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и Y локально вложимо в X. Тогда Y — слагаемое X.

Дадим только набросок доказательства этой леммы, так как оно достаточно стандартно. Легко видеть, что определение локальной вложимости можно переформулировать в терминах опорных функций для X и Y и необходимо доказать, что $s(p, X) - s(p, Y)$ — выпуклая функция. Доказательство же выпуклости фактически проводится для функции

$$f(t) = s(tp_1 + (1-t)p_2, X) - s(tp_1 + (1-t)p_2, Y)$$

одной переменной и следует из достаточно тривиального локального критерия выпуклости непрерывной функции:

Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$f(t_0) = at_0 + b, \quad \forall t\ f(t) \geq at + b.$$

Тогда $f(t)$ выпукла.

3. Доказательство теоремы 1

Сначала, как и в работе [2], заметим, что $b(X) = b(Y)$.

В конечномерном случае условие $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ не нужно, так как если $\operatorname{int} b(X) = \emptyset$, то найдется линейное подпространство $L \subset E$ такое, что $b(X) \in L$. Тогда множества X и Y факторизуются по линейному подпространству $L^\perp$, что сводит теорему к случаю $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$.

Пусть $Y^* = X/Y$ и $Z = Y + Y^*$, тогда нужно доказать, что $Z = X$. Множество Y^* очевидно замкнуто, замкнутость множества Z доказана в [2].

Сначала проведем доказательство для конечных T индукцией по числу элементов $|T|$.

Пусть $Z \neq X$. Тогда по лемме 3 найдется $p \in \operatorname{int} b(X) = \operatorname{int} b(Z)$ такое, что $s(p, X) > s(p, Z)$. Также по лемме 5 можно найти такую точку $z \in Z$, что $\langle p, z\rangle = s(p, Z)$. Так как $Z = Y + Y^*$, то найдется $y' \in Y^*$ такое, что $z \in Y + y'$. Так как

$$Y + y' = \cap_{t \in T}(X + t + y'),$$

то по лемме 1

$$N_z(Y + y') = \sum_{t \in T} N_z(X + t + y'), \quad \text{т. е.} \quad p = \sum_{t \in T} p_t, \quad p_t \in N_z(X + t + y').$$

Рассмотрим два случая:

i) Если только один из p_t не равен нулю (при $t = \tau$), то заметим, что $Y + y' \subseteq (X + \tau)$. Тогда, так как $p = p_t$ и

$$s(p, Z) = s(p, Y) + \langle p, y'\rangle = s(p, X) + \langle p, \tau\rangle,$$

то $\langle p, \tau\rangle < 0$ $(s(p, Z) > s(p, X))$. Так как $Y + (y' - \tau) \subseteq X$, то $Y + (y' - \tau) \subseteq Z$ и тогда

$$s(p, Z) \geq s(p, Y) + \langle p, y'\rangle - \langle p, \tau\rangle = s(p, Z) - \langle p, \tau\rangle > s(p, Z),$$

приходим к противоречию.

ii) Если как минимум два вектора p_τ и p_σ не равны нулю, то можно считать, что их сумма p_2 тоже не равна нулю. Пусть $T' = T \setminus \{\tau, \sigma\}$, положим

$$Y_2 = (X + \tau + y') \cap (X + \sigma + y'), \quad Y_2^+ = \cap_{t \in T'}(X + t + y').$$

Тогда $Y + y' = Y_2 \cap Y_2^+$. По условию теоремы, есть множество Y_2^* такое, что $Y_2 + Y_2^* = X$. По лемме 4, имеем,

$$s(p_2, X) = s(p_2, Y_2) + s(p_2, Y_2^*),$$

то есть для любого положительного $\epsilon > 0$ существует такой $t_2 \in Y_2^*$, что

$$s(p_2, X) \le s(p_2, Y_2) + \langle p_2, t_2 \rangle + \epsilon \quad \text{и} \quad Y_2 + t_2 \subseteq X.$$

При этом $p_2 \in N_z(Y_2)$, следовательно, $s(p_2, Y_2) = \langle p_2, z \rangle$.

Пусть

$$Y_3 = (X - t_2) \cap Y_2^+.$$

Ясно, что либо $p - p_2 = 0$, либо $p - p_2 \in N_z(Y_2^+)$. В первом случае имеем,

$$s(p, Y_3) = s(p_2, Y_3) \le s(p_2, X - t_2) \le s(p_2, Y_2) + \epsilon = \langle p_2, z \rangle + \epsilon = \langle p, z \rangle + \epsilon.$$

А во втором имеем,

$$s(p, Y_3) \le s(p_2, Y_3) + s(p - p_2, Y_3) \le s(p_2, X - t_2) + s(p - p_2, Y_2^+) \le \langle p_2, z \rangle + \epsilon + \langle p - p_2, z \rangle = \langle p, z \rangle + \epsilon,$$

что то же самое. Значит, ϵ можно выбрать таким, что

$$s(p, Y_3) < s(p, X), \quad \text{так как} \quad s(p, X) > \langle p, z \rangle.$$

Заметим, что Y_3 — пересечение $|T|-1$ транслятов X и, по предположению индукции, Y_3 — слагаемое X. Тогда, по лемме 4, для любого $\epsilon > 0$ найдется $y'' \in Y_3^*$ такое, что

$$Y_3 + y'' \subseteq X \quad \text{и} \quad s(p, Y_3) + \langle p, y'' \rangle \ge s(p, X) - \epsilon.$$

Так как $s(p, X) > s(p, Y_3)$, то, при достаточно малом ϵ, имеем,

$$\langle p, y'' \rangle > 0 \quad \text{но} \quad Y + y' + y'' \subseteq Y_3 + y'' \subseteq X \quad \text{и, следовательно,} \quad Y + y' + y'' \subseteq Z.$$

Значит, $z + y'' \in Z$ и тогда получаем

$$s(p, Z) \ge \langle p, z + y'' \rangle = \langle p, z \rangle + \langle p, y'' \rangle = s(p, Z) + \langle p, y'' \rangle > s(p, Z),$$

что приводит к противоречию.

Докажем теперь для произвольных T. Предположим $Z \ne X$. Так, как в предыдущем случае, возьмем некоторый $p \in \operatorname{int} b(X)$ такой, что $s(p, X) > s(p, Z)$ и такую точку $z \in Y + y' \subseteq Z$, что $\langle p, z \rangle = s(p, Z)$.

Заметим следующее: если удастся найти такое пересечение конечного числа транслятов

$$Y_F = \cap_{t \in F, F \subset T, |F| < \infty}(X + t + y'), \quad \text{что} \quad s(p, Y_F) < s(p, X),$$

то мы сразу придем к противоречию. Действительно, при этом найдется $y'' \in Y_F^*$ такой, что

$$s(p, X) \le s(p, Y_F) + \langle p, y'' \rangle + \epsilon$$

и при достаточно малом ϵ получаем, что $\langle p, y'' \rangle > 0$. При этом

$$Y + y' + y'' \subseteq Y_F + y'' \subseteq X \Longrightarrow z + y'' \in Y + y' + y'' \subseteq Z.$$

Но тогда

$$s(p, Z) \ge \langle p, z + y'' \rangle = s(p, Z) + \langle p, y'' \rangle > s(p, Z),$$

что приводит к противоречию.

Итак, предположим противное — $s(p, Y_F) \ge s(p, X)$ для всех конечных $F \subset T$. Положим ϵ таким, что $s(p, Z) < s(p, X) - \epsilon$ и обозначим

$$H = \{x \in E : \langle p, x \rangle \ge s(p, X) - \epsilon\}.$$

Тогда все Y_F пересекают H, но $Y + y'$ не пересекает H, так как на $Y + y'$ функция $\langle p, \cdot \rangle$ меньше, чем $s(p, X) - \epsilon$. По лемме 2 все множества $(X + t + y') \cap H$ ограничены и их пересечение $(Y + y') \cap H$ пусто. Так как в рефлексивном банаховом пространстве все ограниченные замкнутые множества компактны в слабой топологии ($(X + t + y')$ замкнуты в слабой топологии, так как они выпуклы и замкнуты в обычной топологии), то пересечение компактных множеств пусто тогда, когда пусто пересечение некоторого конечного подсемейства F. Это означает, что $Y_F \cap H = \emptyset$, что приводит к противоречию.

4. Применение теоремы 1

Покажем, как с помощью теоремы 1 можно доказать некоторые известные утверждения.
Теорема 4. Эллипсоиды — порождающие множества.
Доказательство. Ясно, что по теореме 1 это утверждение достаточно доказать для пересечения двух единичных шаров в гильбертовом пространстве. Возьмем произвольную точку $x \in \operatorname{bd} X$ с единичным вектором внешней нормали n и найдем точку $y \in Y$, у которой такой же вектор нормали. Теперь сдвинем Y так, чтобы точка y совпала с x. При этом по лемме 1, имеем, $n = \alpha n_1 + \beta n_2$.

Если при этом один из векторов αn_1 и βn_2 равен нулю, то или $n = n_1$ или $n = n_2$. Это означает, что X совпадает с соответствующим $X + t_i$. В этом случае Y лежит в X. Рассмотрим случай, когда α и β не равны нулю. Заметим, что из выпуклости единичного шара следует, что $\alpha + \beta \geq 1$.

Тогда множество X задается неравенством

$$X = \{x' : (x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0\},$$

так как это единичный шар, нормаль которого известна. Аналогично, множество точек $x' \in Y$ задано системой

$$(x' - x, x' - x) + 2(n_1, x' - x) \leq (x' - x, x' - x) + 2(n_2, x' - x) \leq 0.$$

Теперь, если какая-то точка x' находится в Y, то сложив оба неравенства системы, определяющей Y, предварительно умножив их на α и β найдем, что

$$(\alpha + \beta)(x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0,$$

Так как $(x' - x, x' - x) \leq (\alpha + \beta)(x' - x, x' - x)$, то выполняется

$$(x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0,$$

то есть $x' \in X$, это означает, что $Y \subseteq X$. Согласно "опорному принципу" из [2] получаем, что Y является слагаемым X.
Теорема 5. Параболоиды — порождающие множества.
Доказательство. Можно считать, что параболоид — это множество точек (y, x) в пространстве $\mathbb{R}^1 \oplus H$, где H — гильбертово пространство, задаваемое неравенством $y \geq (x, x)$.

Для вектора $v \in \mathbb{R}^1 \oplus H$ через v_y и v_x обозначим проекции вектора v на $\mathbb{R}^1$ и H соответственно. Как и в доказательстве предыдущей теоремы возьмем соответствующие точки в X и Y с одинаковой внешней нормалью n и сдвинем Y так, чтобы они совпали. Также, по лемме 1, имеем, что либо $n = n_1$ или $n = n_2$, либо $n = \alpha n_1 + \beta n_2$. Здесь векторы нормали будем считать нормированными условием $n_y = n_{1y} = n_{2y} = -1$, поэтому $\alpha + \beta = 1$. В первом случае, так как множество точек $(y', x') \in X$ задается неравенством

$$y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_x, x' - x),$$

и так как неравенство, определяющее транслят параболоида X, задается его нормалью, то $X + t_1$ или $X + t_2$ совпадает с X. В этом случае $Y \subseteq X$. Во втором случае выпишем неравенства, определяющие точки $(y', x') \in Y$:

$$y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_{1x}, x' - x) y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_{2x}, x' - x).$$

Теперь сложив эти неравенства с коэффициентами α и β, получим неравенство, определяющее X, что доказывает, что $Y \subseteq X$. Как и в предыдущей теореме, из "опорного принципа" следует, что Y — слагаемое X.
Замечание 1. Для гиперболоида это утверждение неверно. В самом деле, покажем, что соответствующее Y не является слагаемым X. Пусть

$$X = \{x : x_1^2 - x_2^2 - x_3^3 \geq 1\}, \quad Y = (X + (0,0,1)^t) \cap (X + (0,0,-1)^t) \quad \text{и} \quad x = (1,0,0)^t.$$

Перенесем параллельно Y так, чтобы его соответствующая точка y перешла в x, мы получим, что сечение Y плоскостью $x_3 = 0$ не будет содержаться в X, так как это сечение будет менее выпуклой гиперболой, чем соответствующее сечение X.

Автору не известно никаких примеров других строго выпуклых порождающих множеств, и можно сформулировать следующую гипотезу:

Гипотеза 1. В размерности не менее трех среди строго выпуклых множеств только эллипсоиды и параболоиды являются порождающими множествами.

Эта гипотеза не очень правдоподобна, но было бы весьма интересно знать какой-либо контрпример.

Также с помощью теоремы 1 можно было бы доказать известный факт (см. [4]) о том, что любое двумерное выпуклое множество является порождающим, однако для этого случая теорема 1 следует из теоремы Каратеодори и имеющиеся доказательства так или иначе использовали этот факт.

5. Доказательства теорем 2 и 3

В данной работе вопрос о полной характеризации совершенных норм не решается, однако теорема 3 является сравнительно обозримым критерием того, что норма со строго выпуклым единичным шаром — совершенна. Теорема 2 дает достаточный критерий для совершенности нормы.

Из теоремы 2 следуют классические факты (см. [11]) о том, что любая норма в двумерном пространстве и евклидова норма — совершенны (см. [8]). Они сразу следуют из теоремы 4 и того факта, что в двумерном случае любое выпуклое множество является порождающим. Следующая лемма — аналог теоремы 1.

Лемма 7. Норма обладает s-свойством, если шар B_1 дополняем относительно всех двухэлементных множеств T таких, что $\operatorname{diam} T \leq 1$.

Доказательство. Доказательство этой леммы такое же, что и у теоремы 1. Нужно только проверить, что при индукционном переходе от множества T к множеству $T' \cup \{-t_2\}$ диаметр множества не может увеличиться. Так как диаметр множества T не превосходит 1, то множество T содержится в Y. А так как $B_1 - t_2 \supseteq (B_1 + \tau) \cap (B_1 + \sigma) \supseteq Y \supseteq T$, то расстояние от $-t_2$ до любой точки из T не превосходит 1.

Доказательство теоремы 2. По лемме 6 можно считать s-свойство выполненным для нормы $\|\cdot\|$. По предложению нужно доказать, что всякое максимальное множество Y диаметра 1 имеет постоянную ширину. Тогда для любой точки $x \notin Y$ найдется точка $y \in Y$ такая, что $\|x - y\| > 1$, так как иначе множество $Y \cup \{x\}$ будет иметь диаметр 1 и содержать Y. Это означает, что $Y = \cap_{y \in Y}(B_1 + y)$ и, по s-свойству, Y является слагаемым B_1.

Пусть теперь ширина Y в каком-то направлении равна $1 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$). Проведем в соответствующем направлении опорную гиперплоскость h и гиперплоскость h' на расстоянии 1 от нее так, что Y лежит между ними и не пересекает h'. По лемме 4 существует такой транслят $B_1 + y$, что $B_1 + y \supseteq Y$ и $(B_1 + y) \cap h' = \emptyset$. Так как Y максимально, то $y \in Y$, но в таком случае y лежит между двумя гиперплоскостями, расстояние между которыми равно 1 и при этом находится на расстоянии больше 1 от одной из них, так как $(B_1 + y) \cap h' = \emptyset$. Противоречие. Значит, ширина Y во всех направлениях равна 1.

Замечание 2. Для нестрого выпуклых тел теорема 2 не верна в обратную сторону. Контрпримером является следующая конструкция единичного шара: возьмем трехмерный куб со стороной 2 и центром в начале координат, и отрежем около его противоположных вершин по пирамидке с боковыми ребрами 1/2.

Множество $Y = B_1 \cap (B_1 + (1/2, -1/2, 0)^t)$ не является слагаемым B_1, так как это будет параллелепипед без отрезанных уголков и с высотой, равной высоте B_1. Достаточно ясно, что трансляты Y не смогут достать до точек на тех ребрах B_1, которые параллельны оси Oz и выходят из отрезанных пирамидок. С другой стороны, экстремальные множества диаметра 1 — это кубы с ребром 1, у которых отрезаны в соответствующих углах две пирамидки, сумма боковых ребер которых (то есть сумма ребра первой и ребра второй) равна 1/2. Нетрудно проверить, что такие экстремальные множества имеют постоянную ширину 1.

Возможно, для строго выпуклых единичных шаров окажется верным следующее утверждение.

Гипотеза 2. Если строго выпуклая норма в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) — совершенна, то она евклидова.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное, то есть что существует такой вектор u ($\|u\| \leq 1$), что множество $Y = B_1 \cap (B_1 + u)$ не является слагаемым B_1 и норма $\|\cdot\|$ — совершенна. По лемме 7 в этом случае найдутся такие точка $y \in \operatorname{bd} Y$ и внешняя нормаль n в этой точке, что для точки $x \in B_1$ с такой же внешней нормалью n ни для какой окрестности $U \ni y$

$$Y \cap U + (x - y) \not\subseteq B_1.$$

Выберем такую окрестность U точки y в множестве Y, что диаметр U не превосходит 1. Тогда рассмотрим множество $F = \{0\} \cup \{u\} \cup U$. По предложению найдется максимальное множество $E \supseteq F$.

Ясно, что $\operatorname{diam} E \leq 1$, значит, $E \subseteq B_1 \cap (B_1 + u)$ и n является внешней нормалью к E в точке y. Пусть h — перпендикулярная n опорная гиперплоскость к E в точке y. Норма $\|\cdot\|$ — совершенна, поэтому ширина множества E в направлении n равна 1. Значит, E пересекает гиперплоскость h', находящуюся на расстоянии 1 от h в некоторой точке y'. Тогда очевидно $\|y - y'\| = 1$ и $E \subseteq B_1 + y'$. При этом n будет нормалью к $B_1 + y'$ в точке y ($B_1 + y'$ не выходит за гиперплоскость h, так как расстояние между h и h' равно 1). Получаем, что множество E и, следовательно, множество $Y \cap U$ попало в транслят B_1 так, что n является внешней нормалью к $B_1 + y'$ в точке y (при этом требуемая точка $x \in B_1$ определится как $x = y - y'$). Это противоречит выбору точки y.

6. Заключение

У автора есть предположение, что множество в трехмерном пространстве, состоящее из цилиндра и двух полушаров, прикрепленных к его торцам, является порождающим. Возможно обобщение определения сильной выпуклости на сильную выпуклость относительно семейства множеств, а не одного множества. Было бы интересно выяснить, какие аналоги свойства быть порождающим множеством и теоремы 1 можно доказать в этом случае. Автор весьма признателен Е.С. Половинкину за обсуждение результатов, которое позволило сделать изложение более кратким и ясным.

Литература

[1] Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[2] Половинкин Е.С., Балашов М.В. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества //Математический сборник. 2000. **191**. №. 1. С. 27–64.

[3] Wieacker J.A. Helly-type decomposition theorems for convex sets //Arch. Math. 1988. **50**. P. 59–67.

[4] Geivaerts M. Enkele eigenschappen van de relatie "homothetisch aanpasselijk" in de ruimte der konvexe lichamen //Med. Konink. Acad. Wetensch. België. 1972. **34**. P. 3 – 19.

[5] McMullen P., Schneider R. and Shepherd G.C., Monotypic polytopes and their intersection properties //Geom. Dedicata. 1974. **3**. P. 99 – 129.

[6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[7] Chakerian G.D., Groemer H. Convex Bodies of Constant Width. in: Convexity and Its Applications, eds P.M. Gruber and J.M. Wills. Birkhäuser, Basel, 1983. P. 49 – 96.

[8] Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Bd. 3, J. Springer Verl., Berlin, 1934.

[9] Groemer H. On complete convex bodies //Geom. Dedicata. 1986. **20**. P. 319 – 334.

[10] Eggleston H.G. Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces //Israel J. Math. 1965. **3**. P. 163–172.

[11] Meissner E. Über Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahresschr. naturforsch. Ges. Zürich. 1911. **56**. P. 42 – 50.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 10–12

УДК 514.17

О наибольшем количестве ребер в графе, не содержащем $K_{2,n}$

Берлов С.Л., Карпов Д.В. [1]
Санкт-Петербургское отделение МИАН
e-mail: dvk@dvk.pdmi.ras.ru

С помощью факторизации конечной проективной плоскости построена новая серия графов с v вершинами, не содержащих полного двудольного подграфа $K_{2,n}$, и с числом ребер $\frac{\sqrt{(n-1)v^3}}{2} + o(v^{4/3})$.

1. Введение

Основной задачей теории экстремальных графов является задача о запрещенном подграфе — вопрос о нахождении наибольшего числа ребер, которое может быть в графе, имеющем v вершин и не содержащем данный запрещенный граф H. Для графа H, как обычно, через $ex(v, H)$ обозначим наибольшее число ребер, которое может быть в графе с v вершинами, не содержащем графа H.

В ряде работ исследовался вопрос об экстремальных графах без полного двудольного графа $K_{m,n}$, известный как проблема Заранкевича. В 1954 году T. Kövari, V.T. Sós и P. Turán в [4] доказали, что

$$ex(v, K_{n,m}) \le \frac{1}{2}(n-1)^{1/m} v^{(2-1/m)} + O(v). \tag{1}$$

В работах [4, 5, 8] с помощью конечной проективной плоскости построена серия примеров графов без $K_{2,2}$ и доказано, что

$$ex(v, K_{2,2}) = \frac{1}{2}(v^{3/2}) + o(v^{3/2}).$$

В графе, соответствующем проективной плоскости R_p над полем $\mathbf{F}_p$ вычетов по модулю p, вершины — это точки R_p, причем точка $(a:b:c)$ соединена ребром с точками прямой $ax+by+cz=0$. Где, как обычно, точки R_p задаются однородными координатами $(x:y:z)$, $x, y, , z \in \mathbf{F}_p$, а $ax+by+cz=0$ — уравнение прямой в однородных координатах. Как известно, R_p имеет p^2+p+1 точек и p^2+p+1 прямых. На каждой прямой лежит по $p+1$ точек и через каждую точку проходит $p+1$ прямая.

Таким образом, оценка из [4] для $K_{2,2}$ оказалась точной. Кроме того, в работе [5] построена серия примеров графов без $K_{3,3}$ и с помощью нее доказано, что $ex(v, K_{3,3}) \ge \frac{1}{2}(v^{5/3}) + o(v^{5/3})$. Следовательно, в случае $K_{3,3}$ оценка (1) дает правильный порядок асимптотики $ex(v, K_{3,3})$, но в этом случае не известно мультипликативной константы при старшем члене. Во многих работах высказывались предположения о точности оценки на $ex(v, K_{n,m})$ из работы [4]. В 1996 году Z. Füredi [9] построил серию примеров графов без $K_{2,n}$, доказывающих точность оценки (1) для этого случая и доказал, что

$$ex(v, K_{2,n+1}) = \frac{\sqrt{(n-1)v^3}}{2} + o(v^{4/3}). \tag{2}$$

В работе строится другая серия экстремальных графов без $K_{2,n}$. Эта конструкция, как и классическая конструкция графов без $K_{2,2}$[5, 4], построена на основе конечных проективных плоскостей.

2. Проективная плоскость над $\mathbf{F}_p$ и графы без $K_{2,n}$

Опишем метод факторизации проективной плоскости, с помощью которого будет построена серия экстремальных графов, без подграфа $K_{2,n+1}$, число ребер в которых позволяет доказать (2).

Пусть линейное отображение проективной плоскости R_p задается матрицей $S \in \mathbf{PGL}_3(\mathbf{F}_p)$ и пусть n — порядок S, как элемента группы $\mathbf{PGL}_3(\mathbf{F}_p)$. Рассмотрим орбиты $\langle T\rangle$ (T — точка из R_p) действия циклической группы $\langle S\rangle$, порожденной S, тогда число элементов в орбите будет делителем n.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №98-01-00216

Линейное отображение S очевидно определяет двойственное действие группы $\langle S\rangle$ на множестве прямых. Прямые t этим действием $\langle S\rangle$ также разбиваются на орбиты $\langle t\rangle$. Очевидно, для орбит прямых и орбит точек есть такое же отношение двойственности, как и для точек и прямых на плоскости.

Пусть R_p^S — множество орбит точек, заданных линейным отображением S.

Определение 1. Для орбиты точек $\langle T\rangle$ и орбиты прямых $\langle t\rangle$ будем говорить, что $\langle T\rangle$ содержится в $\langle t\rangle$ (или $\langle T\rangle\in\langle t\rangle$), если каждая точка из $\langle T\rangle$ принадлежит одной из прямых орбиты $\langle t\rangle$.

Лемма. 1) *Для всех* $\langle T\rangle$ *и* $\langle t\rangle$ *либо* $\langle T\rangle\in\langle t\rangle$, *либо* $\langle T\rangle\cap t'=\emptyset$ *для всех* $t'\in\langle t\rangle$.

2) *Число орбит точек, лежащих в* $\langle t_1\rangle\cap\langle t_2\rangle$, *не превосходит* $\min\{|\langle t_1\rangle|,|\langle t_2\rangle|\}$. *Следовательно, в* $\langle t_1\rangle\cap\langle t_2\rangle$ *не более* n *орбит точек.*

Доказательство. 1) Заметим, что если $P\in t$, то $S^{-1}(P)\in S(t)$, что и доказывает первый пункт.

Следовательно, любая орбита прямых разбивается на содержащиеся в ней орбиты точек. Пересечение любого количества орбит прямых также разбивается на содержащиеся в нем орбиты точек.

2) Возьмем $\langle t_1\rangle$ и $\langle t_2\rangle$. Пусть $T_{i,j}\in S^i(t_1)\cap S^j(t_2)$. Заметим, что $T_{i,j}$ лежит в той же орбите, что и $T_{0,i-j}$ (индекс $i-j$ взят по модулю n). Поэтому, число орбит точек в $\langle t_1\rangle\cap\langle t_2\rangle\le$ числа точек пересечения с прямыми $\langle t_2\rangle$, лежащих на прямой t_1 (на всех остальных прямых из $\langle t_1\rangle$, очевидно, лежит столько же точек). А число точек пересечения на $t_1\le|\langle t_2\rangle|$. Аналогично доказывается, что число орбит точек в $\langle t_1\rangle\cap\langle t_2\rangle\le|\langle t_1\rangle|$. □

По факторизации проективной плоскости R_p^S построим граф $G_S(p)$, вершины которого — орбиты точек из R_p^S. Вершину $\langle P\rangle$ соединим с орбитами точек, лежащих на орбите прямых, двойственной орбите точек $\langle P\rangle$. В случае, когда орбита $\langle P\rangle$ лежит на двойственной себе прямой, вершина $\langle P\rangle$ графа будет смежна себе. Уберем все петли, очевидно, их не более числа точек $(a:b:c)$, для которых $a^2+b^2+c^2\equiv 0 \pmod p$. Известно, что число таких точек равно $p+1$, следовательно, число петель $\le p+1$.

Граф $G_S(p)$ не содержит подграф $K_{2,n+1}$, так как для любых двух вершин $\langle P_1\rangle$ и $\langle P_2\rangle$ множество смежных с ними обеими вершин совпадает с множеством орбит точек, лежащих в пересечении орбит прямых, двойственных $\langle P_1\rangle$ и $\langle P_2\rangle$, которое по лемме $\le n$.

Легко видеть, что конструкция графа $G_S(p)$ полностью повторяет приведенную в работах [4, 5] конструкцию графа без циклов длины 4, соответствующего проективной плоскости R_p.

Ясно, что число ребер в $G_S(p)$ тем больше, чем большее число орбит в R_p^S имеет n элементов. Ниже приведем матрицу, дающую наилучшее для наших целей разбиение проективной плоскости на орбиты.

Пусть $S^k(a,b,c)=(a,b,c)$ для некоторого k и точки $P=(a:b:c)$. То есть вектор (a,b,c) — собственный вектор матрицы S^k. Для отображения S^k проективной плоскости R_p, каждое собственное число кратности один определяет единственную неподвижную точку, а собственное число кратности два дает переходящую в себя прямую, все точки которой могут быть неподвижными.

Пусть $n\,|\,(p-1)$. В этом случае у уравнения $x^n\equiv 1 \pmod p$ ровно n решений, следовательно, матрица S порядка n обязательно имеет три различных собственных числа, а значит, соответствующее отображение имеет хотя бы три неподвижные точки.

Теорема 1. *Пусть* p *— достаточно большое простое число и* $n\in\mathbf{N}$ *такое, что* $n\,|\,(p-1)$.

1) *Если* n *нечетно и* $v=\frac{p^2+p-2}{n}+3$, *то* $\frac{\sqrt{nv^3}}{2}+\frac{nv}{2}>ex(v,K_{2,n+1})>\frac{\sqrt{nv^3}}{2}-\frac{nv}{4}$.

2) *Если* n *четно и* $v=\frac{p^2+2p-3}{n}+3$, *то* $\frac{\sqrt{nv^3}}{2}+\frac{nv}{2}>ex(v,K_{2,n+1})>\frac{\sqrt{nv^3}}{2}-\frac{nv}{2}$.

Доказательство. Верхние оценки на число ребер доказаны в [4]. Докажем нижние оценки. Пусть g — вычет, принадлежащий по модулю p к показателю n. Рассмотрим матрицу порядка n

$$S_g=\begin{pmatrix} g & 0 & 0\\ 0 & g^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1) Если n нечетно, то для всех $k<n$ у матрицы S_g^k три разных собственных числа и три собственных вектора, которым соответствуют точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$. Остальные точки проективной плоскости матрица S_g разбивает на орбиты из n точек, а двойственные им прямые — на орбиты из n прямых. Таким образом, в графе $G_g(p)$ будет $v=3+\frac{p^2+p-2}{n}$ вершин. Легко видеть, что в каждой из орбит прямых, отличных от $x=0,y=0,z=0$, $\ge p+1-\frac{n-1}{2}$ орбит точек. Следовательно, в графе $G_g(p)$ будет v вершин и $\le\frac{\sqrt{nv^3}}{2}-\frac{nv}{4}$ ребер (это нетрудно доказать). Пункт 1 доказан.

2) Пусть $n=2\ell$. Тогда для всех $k<n$, кроме $k=\ell$, матрица S_g^k имеет три разных собственных числа и три собственных вектора. Им соответствуют точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$. У S_g^ℓ два собственных числа равны, поэтому S_g^ℓ оставляет на месте $p+2$ точки: все точки прямой $z=0$ и точку $(0:0:1)$.

Поэтому, S_g имеет 3 орбиты по одной точке, $\frac{p-1}{\ell}$ орбиту по ℓ точек и $\frac{p^2-1}{2\ell}$ орбит по 2ℓ точек. Получили множество R_g из $v = \frac{p^2+2p-3}{2\ell} + 3$ орбит. Оценим суммарное число элементов в соответствующих орбитах прямых. Нетрудно доказать, что в орбите из ℓ прямых $\geq \frac{p+1}{2} - \ell + 1$ орбит точек, а в орбите из 2ℓ прямых $\geq p + 1 - 2\ell + 1$ орбит точек. Следовательно, при достаточно большом p суммарное число орбит точек $>$

$$\frac{p-1}{\ell}\left(\frac{p+1}{2} - \ell + 1\right) + \frac{p^2-1}{2\ell}(p + 1 - 2\ell + 1) > \sqrt{nv^3} - nv.$$

Поэтому, в $G_g(p) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \frac{nv}{2}$ ребер. (Можно получить и более точные неравенства на число ребер.) □

Стандартной теоретико-числовой техникой из теоремы 1 можно получить асимптотику для $ex(v, K_{2,n})$.

Теорема 2. *При данном натуральном n и $v \to \infty$ выполняется соотношение:*

$$ex(v, K_{2,n+1}) = \frac{\sqrt{nv^3}}{2} + o(v^{4/3}).$$

Доказательство. Для всех $\varepsilon > 0, n$ и любого достаточно большого x существует простое число p такое, что $p \equiv 1 \pmod n$ и $x \leq p \leq x + \varepsilon x^{2/3}$, см. [2, с.364]. Отсюда следует, что для всех $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого v существует $p \in \mathbf{P}$ такое, что $p \equiv 1 \pmod n$ и

$$\sqrt{n(v-3) - \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} \leq p \leq \sqrt{n(v-3) - \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} - \varepsilon v^{1/3}. \tag{3}$$

Пусть $v_p = \frac{p^2+p-2}{n} + 3$. Тогда из (3) следует, что $v \geq v_p \geq v - \varepsilon_1 v^{5/6}$. По теореме 1,

$$ex(v, K_{2,n+1}) \geq ex(v_p, K_{2,n+1}) \geq \frac{\sqrt{nv_p^3}}{2} - \frac{nv_p}{4} > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \varepsilon_2 v^{4/3},$$

причем $\varepsilon_2 \leq 4n\varepsilon$. По верхней оценке из [4], имеем $ex(v, K_{2,n+1}) = \frac{\sqrt{nv^3}}{2} + o(v^{4/3})$. □

Литература

[1] Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М: Наука, 1989.

[2] Прахар К. Распределение простых чисел. М: Мир. 1967.

[3] Bollobás B. Extremal graph theory. Chapter 23 in *Handbook of combinatorics*, p.1231-1280. (Edited by R Graham, M. Grötschel and L. Lovász.) Elsevier Science B.V., 1995.

[4] Kövari T., Sós V.T., Turán P. On a problem of K. Zarankiewicz //Colloq. Math. 1955. Vol. 3. P. 50–57.

[5] Brown W.G. On graphs that do not contain a Thomsen graph //Canad. Math. Bull. 1966. Vol.9, №.3. P. 281–285.

[6] Erdös P., Simonovits M. Compactness results in extremal graph theory //Combinatorica. 1982. Vol.2, №.3. P. 275–289.

[7] Faudree R.J., Simonovits M. On a class of degenerate extremal graph problems //Combinatorica. 1983. Vol.3, №.1. P. 83-93.

[8] Erdös P., Rényi A. and Sós V.T. On a problem of graph theory //Studia Sci. Math. Hungar. 1966. Vol.1, №.1-2. P. 215-235.

[9] Füredi Z. New asymptotics for bipartite Turán numbers //J. Comb. Theory. 1996. Ser. A. Vol.75. P. 141-144.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 13–13

УДК 514.17

Об обобщении теорем Кёнига и Вильфа – Секереша

Берлов С.Л., Дольников В.Л., Карпов Д.В. [1]

Санкт-Петербургское отделение МИАН
Ярославский государственный университет
e-mail: dvk@dvk.pdmi.ras.ru

В работе рассматривается совместное обобщение двух теорем теории графов — Кёнига о двудольных графах и Вильфа – Секереша.

В заметке приводится совместное обобщение двух классических теорем: теоремы Кёнига [1] о двудольных графах и теоремы Вильфа – Секереша [2]. Напомним, что граф $G = (V(G), E(G))$ называется k-критическим (или, точнее, критическим по раскраске), если его хроматическое число $\chi(G) = k$, но $\chi(G') < k$ для любого собственного подграфа G' графа G [3]. Заметим, что, по теореме де Брёйна – Эрдёша [4], k-критический граф — конечен и, если $\chi(G) = k$, то G содержит k-критический подграф.
Определение. Пусть x — вершина графа G, тогда через $\deg_{G,k}(x)$ мы обозначим число k-критических подграфов G, содержащих x. Если $k = 2$, то $\deg_{G,2}(x)$ — это степень вершины x в графе G.
Теорема. Если любой подграф G' графа G содержит такую вершину x, что $\deg_{G',k}(x) \leq d$ и $C_s^{k-1} > d$, то $\chi(G) \leq s$.
Доказательство. Доказательство проведём индукцией по числу вершин n графа G. Для $n = 1$ все ясно. Возьмём такую вершину $x \in G$, что $\deg_{G,k}(x) \leq d$. По индуктивному предположению, имеем $\chi(G') \leq s$ для графа $G' = G - x$. Пусть

$$f : V(G)' \longrightarrow I_s = \{1, 2, \ldots s\} \quad s\text{-раскраска } G'.$$

Пусть $I \subseteq I_s$ и $|I| = k - 1$ и G_I — подграф , порождённый $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(i) \bigcup \{x\}$. Если $\chi(G_I) \leq k - 1$, то очевидно, что существует s-раскраска G.

В противном случае, пусть G'_I — это k-критический подграф G_I. Очевидно, что $x \in G'_I$. Если $I \neq J$, то также ясно, что $G'_I \neq G'_J$, так как $V(G'_I) \bigcap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ для всех $i \in I$. Отсюда следует, что $\deg_{G,k}(x) \leq C_s^{k-1} > d$. Это противоречие доказывает, что $\chi(G_I) \leq k - 1$ для некоторого $(k-1)$-элементного $I \subseteq I_s$. Поэтому $\chi(G) \leq s$ и теорема доказана.

Если $k = 2$, то 2-критический подграф G — это ребро и мы получаем теорему Вильфа – Секереша.
Следствие 1. Если в любом подграфе G' графа G есть такая вершина x, что $\deg_{G'}(x) \leq d$, то $\chi(G) \leq d+1$.

Если $k = 3$, то очевидно, что 3-критический подграф G — это нечетный цикл без хорд. Используя теорему в этом случае, мы имеем, $\chi(G) \leq s$, если $C_s^2 > d$, то есть $s^2 - s - 2d > 0$. Поэтому $s > 1/2(1 + \sqrt{8d+1})$, так что $s \geq]1/2(3 + \sqrt{8d+1})[$. Таким образом, мы получили следующий результат.
Следствие 2. Если в любом подграфе G' графа G есть такая вершина x, что x принадлежит не более d нечётным циклам G', то $\chi(G) \leq]1/2(3 + \sqrt{8d+1})[$.

Если $d = 0$, то из следствия 2, мы получаем теорему Кёнига. Заметим также, что неравенство в теореме — точное. Пусть K_n — полный граф на n вершинах; тогда очевидно, что $d = \deg_{K_n,k}(x) = C_{n-1}^{k-1}$ для всех $x \in K_n$ и $\chi(K_n) = n$.

Литература

[1] König D. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre //*Math. Ann.* 1916. 77. P. 453 – 465.

[2] Szekeres G. and Wilf H.S. An inequality for chromatic number of a graph, *J. Comb. Th. B.* 4(1968) 1 – 3.

[3] Dirac G.A. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs // *J. London Math. Soc.* 1952. 27. P. 85 – 92.

[4] de Bruijn and Erdös P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 1951. 54. P. 371 – 373.

[1] Исследования первого и второго автора поддержаны РФФИ (гранты №00-01-00705, №98-01-00216 соответственно).

Модел. и анализ информ. систем. **Т.8, №2** (2001) 14–16

УДК 621.382

Нейросетевой подход к одной задаче децентрализованного управления захватом ресурсов

Короткин А. А., Майоров В. В.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Рассматривается игровая задача захвата ресурсов $r_1, \ldots, r_L$ N параллельными (конкурирующими) процессами. Для нахождения ситуации равновесия в этой игре предлагается полносвязная сеть, состоящая из N нейронных модулей. Каждый модуль сопоставлен соответствующему процессу и представляет собой сеть латерального торможения из L нейронов. В стационарном состоянии единственный активный нейрон модуля указывает номер захваченного ресурса соответствующим процессом.

В классе задач оптимального распределения ограниченных ресурсов рассмотрим следующую задачу. Имеется система из N параллельных процессов $P_1, ..., P_N$, каждый из которых должен захватить и использовать некоторый ресурс из множества $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_L\}$. Все ресурсы r_l, $l = 1, ..., L$, предполагаются однородными, и любой процесс P_n может использовать любой r_l. Если $L \geq N$, то каждый процесс захватывает свободный ресурс, и в рассматриваемой системе не возникает конфликтных ситуаций. При дефиците ресурсов ($L < N$) некоторые r_l будут захвачены несколькими процессами, возникнут конфликтные ситуации, которые приведут к ухудшению характеристик соответствующих процессов.

В принципе для решения задачи захвата ресурсов параллельными процессами может быть использован механизм блокировки, как это делается в распределенных вычислительных системах. Однако блокировка, обеспечивая монопольное использование ресурса, предполагает, вообще говоря, невозможность одновременного протекания процессов, использующих один и тот же ресурс. В рассматриваемой здесь задаче такого жесткого предположения не делается, речь идет лишь о некотором снижении "качества" конфликтующих процессов.

Будем считать, что в рассматриваемой системе захват ресурсов происходит на основе децентрализованного управления [1]. Для формализации задачи рассмотрим следующую модель взаимного влияния конфликтующих процессов. Если P_i и P_j используют один и тот же ресурс, то будем считать, что P_j получает от P_i "помеху" величиной a_{ij}. Можно считать, что помеха является аддитивной, т.е. результат конфликта P_n с процессами $P_i, P_j, \ldots, P_k$, захватившими тот же ресурс, что и P_n, определяется величиной $a_{in} + a_{jn} + \ldots + a_{kn}$.

Описанную конфликтную ситуацию естественно рассматривать как бескоалиционную игру, участниками которой являются процессы $P_1, \ldots, P_N$ [2]. Чистой стратегией игрока P_n служит номер I_n захватываемого ресурса, $I_n \in \{1, 2, \ldots, L\}$. Платежная функция игрока P_n - суммарный уровень помех, который определяется соотношением

$$A_n(I_1, \ldots, I_n, \ldots, I_N) = \sum_{j: I_j \neq I_n} a_{jn}. \tag{1}$$

Естественно, что каждый игрок стремится понизить значение своей платежной функции.

В качестве механизма децентрализованного управления захватом ресурсов рассмотрим нейронную сеть, архитектура которой приведена на рис. 1.

Игроку P_n, $1 \leq n \leq N$, сопоставлен n-й модуль, содержащий L нейронов, каждый из которых, в свою очередь, сопоставляется соответствующему ресурсу. Все нейроны сети будем нумеровать двойным индексом (n, l), где первый индекс – номер модуля, а второй – порядковый номер нейрона в модуле. Синаптические связи сети делятся на два типа: внешние – между нейронами из разных модулей с одинаковым вторым индексом и внутренние, которые связывают нейроны каждого модуля (рис. 2). Веса внешних связей определяются матрицей взаимных "помех" (a_{ij}) следующим образом. Пусть $w(i, j; p)$ – синаптический вес связи от p-го нейрона i-го модуля к p-му нейрону j-го модуля. Тогда $w(i, j; p) = a_{ij}$.

Сеть функционирует в дискретном времени $t = 0, 1, 2\ldots$, при этом каждый такт t состоит из двух этапов. На первом этапе для каждого нейрона за счет внешних связей формируется потенциал, величина которого равна

$$A_{nl} = \sum_{j=1}^{N} a_{jn}\, x_{jl}(t),$$

где $x_{jl}(t)$ - состояние нейрона на такте t. На втором этапе происходит эволюция состояния одного из нейронных модулей. Динамика эволюции состояний $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nL}$ n-го модуля описывается следующими уравнениями:

$$x_{nl}(0) = 1 - A_{nl}(t) \cdot \left(\sum_{q=1}^{L} A_{nq}(t)\right)^{-1} - \varepsilon, \tag{2}$$

$$x_{nl}(\tau) = F\left[\alpha x_{nl}(\tau-1) + \beta \sum_{k \neq l} x_{nk}(\tau-1)\right] \; l = 1, \ldots, L, \tag{3}$$

где $\tau = 1, 2, \ldots$ – номер такта "внутренней" эволюции состояния n-го модуля, F - функция активации

$$F(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ s, & 0 \leq s \leq 1, \\ 1, & s > 1, \end{cases} ,$$

ε - "малая" случайная величина, а синаптические веса внутренних связей модуля установлены следующими:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{L}, \quad \beta = -\frac{1}{L}$$

Фактически нейронный модуль представляет собой хорошо известную сеть латерального торможения [3]. За конечное число "внутренних" тактов состояния всех нейронов, кроме k-го нейрона, установятся в ноль: $x_{nl} = 0$, $l \neq k$, а $x_{nk} = 1$. Индекс k - это номер нейрона, начальное состояние которого максимально:

$$x_{nk}(0) = \max_{1 \leq l \leq L} x_{nl}(0),$$

что, как следует из (2), эквивалентно условию

$$A_{nk}(t) = \min_{1 \leq l \leq L} A_{nl}(t).$$

Таким образом, на каждом такте состояния всех нейронов сети равны 0 или 1. Единственный активный нейрон (его состояние равно +1) каждого модуля указывает на номер ресурса, захваченный соответствующим процессом. Динамика построенной сети аналогична динамике сети Хопфилда. Пусть на каждом такте происходит эволюция состояний нейронов только одного модуля (асинхронная динамика). Предположим, что взаимные "помехи" симметричны $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ii} = 0$, $i, j = 1, \ldots, N$. Тогда нетрудно показать, что каждый такт сети приводит к уменьшению ограниченной снизу функции

$$A(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n\left(I_1(t), \ldots, I_N(t)\right),$$

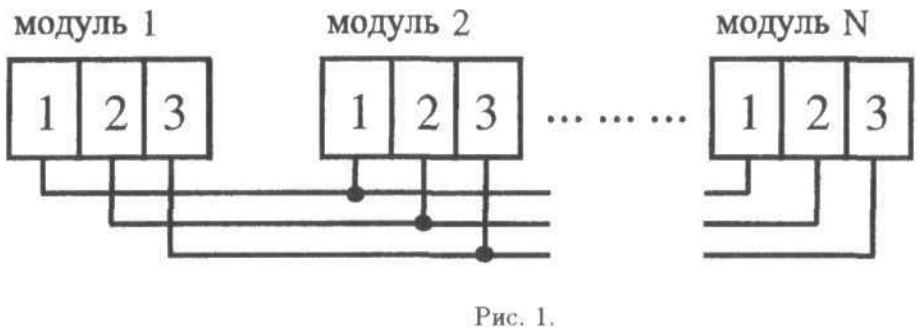

Рис. 1.

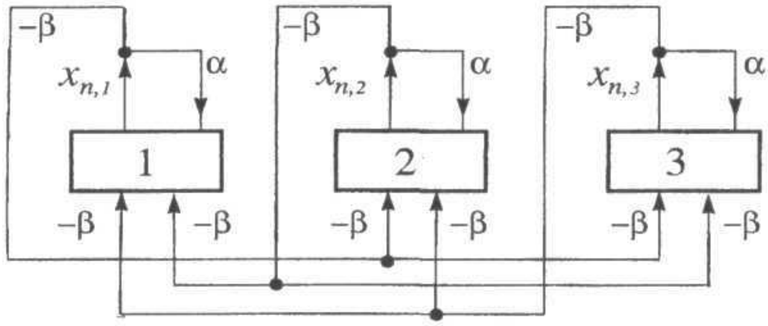

Рис. 2.

где A_n – платежная функция n-го игрока, определенная в (1), $I_n(t)$ – номер активного нейрона n-го модуля на такте t (номер ресурса, захваченного процессом P_n).

Следовательно, через конечное число тактов установится стационарное состояние, которое, очевидно, есть ситуация равновесия по Нэшу для рассматриваемой игры.

Литература

[1] Варшавский В.И. Коллективное поведение автоматов. М. : Наука. 1973.

[2] Короткин А.А. Игровая модель распределения ограниченного ресурса по параллельным процессам //Модели исследования операций в вычислительных системах. Ярославль. 1985. С.100–104.

[3] Lippman R.P. An introduction to computing with neural nets //IEEE ASSP Magazine. Apr. 1987. P.4–22.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 17–22

УДК 514.17

Об аналоге теоремы Каратеодори для M-сильно выпуклых множеств

Карасёв Р.Н.[1]
Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

В данной работе приводится доказательство аналога теоремы Каратеодори для таких M-сильно выпуклых множеств, что множество M — порождающее.

1. Введение

В данной работе приводится доказательство аналога теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке. Чтобы его сформулировать введем сначала некоторые определения и обозначения.

Напомним, что сумма Минковского $A + B$ и разность Минковского A/B двух множеств A и B из векторного пространства определяются равенствами (см. [1])

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} b + A, \quad A/B = \{c : c + B \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B} -b + A.$$

Эти операции взаимно полуобратны, то есть $(A/B) + B \subseteq A$, $\quad A \subseteq (A + B)/B$.

Будем считать, что все множества лежат в $\mathbb{R}^n$. Через $|X|$, $\operatorname{cl} X$, $\operatorname{bd} X$ и $\operatorname{int} X$ будем обозначать: количество элементов в конечном множестве X, или ∞, если множество X бесконечно; замыкание, границу и внутренность множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Для линейной функции $\lambda(x)$ положим $H_t^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda(x) \le t\}$.

Определение 1. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Выпуклое множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *M-сильно выпуклым* , если $X = M/(-T)$ для некоторого $T \subseteq \mathbb{R}^n$, $T \neq \emptyset$. То есть X — это пересечение некоторого семейства транслятов M. Частный случай этого определения есть понятие R-сильной выпуклости, когда M — это евклидов шар радиуса R.

Это усиление понятия выпуклости приведено в [2, с. 118 - 119], где даны ссылки на некоторые работы, где это понятие исследовалось. В большей части этих работ рассматривался двумерный случай (см. также [3]). Такое понятие выпуклости естественно приводит к определению выпуклой оболочки.

Определение 2. Если множество $S \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $M/S \neq \emptyset$, то множество $\operatorname{conv}_M S = M/(M/S)$ называем *M-выпуклой оболочкой* S. Иначе говоря, $\operatorname{conv}_M S$ — это пересечение всех транслятов M, содержащих S. Заметим также, что $\operatorname{conv}_M S$ — это наименьшее по включению M-сильно выпуклое множество, содержащее S. Через $\operatorname{con} S$ и $\operatorname{conv} S$ обозначаем обычную коническую и выпуклую оболочку S.

Если M — евклидов шар, то выполняется следующее свойство, которое играет важную роль в статье в дальнейшем (см., например, [3], [4]).

Определение 3. Выпуклое множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *порождающим*, если для любого M-сильно выпуклого множества X найдется такое выпуклое $X^* \subseteq \mathbb{R}^n$, что $X + X^* = M$.

В работе доказывается теорема Каратеодори для M-сильно выпуклых множеств, если M — порождающее. Для случая строго выпуклого M это утверждение было доказано в диссертации Балашова. Для не строго выпуклого M аналог теоремы Каратеодори М.В. Балашовым доказан с заменой константы $n+1$ на большую. Основной результат данной работы — следующий аналог теоремы Каратеодори.

Теорема 1. Пусть M — порождающее и $S \subseteq \mathbb{R}^n$ такое, что $M/S \neq \emptyset$, тогда

$$\operatorname{conv}_M S = \operatorname{cl} \bigcup_{U \subseteq S, |U| \le n+1} \operatorname{conv}_M U.$$

Замечание. Из этой теоремы легко следует, что для компактных S имеет место формула

$$\operatorname{conv}_M S = \operatorname{cl} \bigcup_{U \subseteq S, |U| \le n+1} \operatorname{conv}_M U,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-01-00705

если заметить, что множество наборов из не более $n+1$ элемента S компактно.

Аналог теоремы Каратеодори будет выведен из следующего утверждения:

Теорема 2. Пусть M — порождающее и $M/S \subseteq M$ для некоторого конечного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда существует такое $U \subseteq S$, что $M/U \subseteq M$ и $|U| \leq n+1$.

2. Доказательство теорем 1 и 2

В этом разделе теоремы 1 и 2 доказываются по модулю некоторых технических лемм, которые будут доказаны позже. Сначала выведем теорему 1 из теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Ясно, что теорему 1 достаточно доказать для конечных S. Имеем

$$\operatorname{conv}_M S \supseteq \bigcup_{U \subseteq S, |U| \leq n+1} \operatorname{conv}_M U$$

для всех $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим противное, что существует такая x (можно считать $x=0$), что

$$x \in \operatorname{conv}_M S \quad \text{и} \quad x \notin \bigcup_{U \subseteq S, |U| \leq n+1} \operatorname{conv}_M U.$$

Так как $0 \in \operatorname{conv}_M S = M/(M/S)$, то для всех $y \in M/S$, имеем $M - y \ni 0$ или $y \in M$, то есть $M/S \subseteq M$.

Тогда, по теореме 2, существует такое множество $U \subseteq S$, что $|U| \leq n+1$ и $M/U \subseteq M$. Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что $0 \in \operatorname{conv}_M U$. Это противоречие доказывает теорему 1.

По поводу далее используемых стандартных топологических понятий и результатов (см. [5]).

Лемма 1. Если семейство $\mathcal{F}$ подмножеств топологического пространства X таково, что все $Y \in \mathcal{F}$ гомологически тривиальны и любое компактное подмножество $K \subseteq X$ принадлежит некоторому $Y \in \mathcal{F}$, то X тоже гомологически тривиально.

Лемма 2. Если $X = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ — топологическое пространство, где все U_i — открыты и гомологически тривиальны, $U_i \subseteq U_j$ при $i < j$, то X тоже гомологически тривиально.

Следующая лемма — основная при доказательстве теоремы 2.

Основная лемма. Пусть A и B — выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество $A \setminus \operatorname{cl}(A+B)$ либо пусто, либо гомологически тривиально.

Доказательство этой леммы будет приведено позже, сейчас докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Положим $\{X(s)\}_{s \in S}$, где $X(s) = (M - s) \setminus M$. По условию теоремы, имеем

$$\bigcap_{s \in S} X(s) = (M/S) \setminus M = \emptyset.$$

Покажем, что для всех $V \subseteq S$ множество

$$\bigcap_{s \in V} X(s) = (M/V) \setminus M$$

либо пусто, либо гомологически тривиально. Пусть $A = M/V$. По условию теоремы, A — M-сильно выпукло, т. е. $M = A + B$ для некоторого выпуклого B. Так как M — замкнуто, то по основной лемме $A \setminus M$ либо пусто, либо гомологически тривиально. Так как $\cap_{s \in S} X(s) = \emptyset$, то из топологической теоремы Хелли (см. [2, с. 53]) получаем, что $\cap_{s \in U} X(s) = \emptyset$ для некоторого $U \subseteq S$ и $|U| \leq n+1$. Тогда

$$(M/U) \setminus M = \bigcap_{s \in U} X(s) = \emptyset, \quad \text{то есть} \quad M/U \subseteq M$$

и все доказано.

3. Доказательство основной леммы

Из следующей последовательности лемм мы выведем основную лемму.

Лемма 3. Основную лемму достаточно доказать, если $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\operatorname{int} A = \emptyset$, то все будем рассматривать в $L = \operatorname{aff} A$ и можно также считать, что L — подпространство. Пусть $C = \operatorname{cl}(A+B)$ и $C' = C \cap L$. Покажем, что существует такое $B' \subseteq L$, что

$C' = \mathrm{cl}(A+B')$. Для этого достаточно показать, что разность опорных функций $s(p, C')$ и $s(p, A)$ выпукла (см. [3]). Для всех $p \in L^*$ имеем

$$s(p, C') = \inf_{p^\perp \in L^\perp} s(p + p^\perp, C) \quad \text{и, значит,} \quad s(p, C') - s(p, A) = \inf_{p^\perp \in L^\perp} s(p + p^\perp, C) - s(p, A).$$

При этом $s(p, A) = s(p + p^\perp, A)$ (ведь $A \in L$), а значит, в правой части стоит выпуклая функция

$$f(p + p^\perp) = s(p + p^\perp, C) - s(p + p^\perp, A)$$

аргумента $p + p^\perp$ (так как $C = \mathrm{cl}(A + B)$). Мы должны доказать, что функция

$$f'(p) = s(p, C') - s(p, A) = \inf_{p^\perp \in L^\perp} f(p + p^\perp)$$

выпукла. Пусть $p_1, p_2 \in L^*$ и $t \in [0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $p_1^\perp, p_2^\perp \in L^\perp$ так, что

$$f'(p_1) > f(p_1 + p_1^\perp) - \varepsilon \quad f'(p_2) > f(p_2 + p_2^\perp) - \varepsilon.$$

Функция f выпукла, следовательно, $f(t(p_1 + p_1^\perp) + (1 - t)(p_2 + p_2^\perp)) \le$

$$\le t f(p_1 + p_1^\perp) + (1 - t) f(p_2 + p_2^\perp) \quad \text{и значит,} \quad f'(tp_1 + (1 - t)p_2) \le t f'(p_1) + (1 - t) f'(p_2) + \varepsilon.$$

В силу того, что $\varepsilon > 0$ произвольно, имеем

$$f'(tp_1 + (1 - t)p_2) \le t f'(p_1) + (1 - t) f'(p_2), \quad \text{т. е.} \quad f' \quad \text{выпукла и} \quad C' = \mathrm{cl}(A + B').$$

Так как $A \subseteq L$, $A + B' \subseteq L$, $\mathrm{int}\, A \ne \emptyset$ в пространстве L и $A \setminus \mathrm{cl}(A + B') = A \setminus \mathrm{cl}(A + B)$, то основную лемму достаточно проверить для A и B'. Лемма 3 доказана.

Далее предполагаем, что $\mathrm{int}\, A \ne \emptyset$.

Лемма 4. *Для выпуклых множеств A и B множества $A \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ и $\mathrm{int}\, A \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ гомотопически эквивалентны, если $\mathrm{int}\, A \ne \emptyset$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}(A + B) = \emptyset$. Тогда $\mathrm{int}\, A \setminus \mathrm{cl}(A + B) = \mathrm{int}\, A$, а $A \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ отличается от этого множества точками из $\mathrm{bd}\, A$ и, очевидно, оба они гомотопически тривиальны.

Пусть теперь существует $p \in \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}(A + B)$ (можно полагать, что $p = 0$). Тогда очевидно, что для любого луча r, выходящего из p, $r \cap A \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ — это полуинтервал $(x_r, y_r]$, а $r \cap (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ — это интервал (x_r, y_r) (при этом возможно $y_r = \infty$ на луче r). Точка x_r непрерывно зависит от луча r на множестве тех лучей, для которых $r \cap A \setminus \mathrm{cl}(A + B) \ne \emptyset$, а точка y_r непрерывно зависит от луча r, если считать луч пополненным бесконечно удаленной точкой. Пусть

$$\phi_r = \min\left\{\frac{\|x_r\| + \|y_r\|}{2}, \|x_r\| + 1\right\} \quad \text{и} \quad \psi_r \quad \text{— сужение} \quad \phi_r \quad \text{на} \quad r \cap (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B).$$

Отображения ϕ_r и ψ_r задают непрерывные отображения

$$\phi : A \setminus \mathrm{cl}(A + B) \to (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B) \quad \text{и} \quad \psi : (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B) \to A \setminus \mathrm{cl}(A + B),$$

которые дают гомотопическую эквивалентность между $A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ и $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B)$. Действительно, отображение $\phi(\psi(z))$ гомотопически эквивалентно тождественному посредством гомотопии $h(t, z) = (1 - t)z + t\phi(\psi(z))$, и аналогично для $\psi(\phi(z))$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Утверждение основной леммы верно, если оно верно для ограниченных A и B.*

Доказательство. По леммам 3 и 4 достаточно доказать гомологическую тривиальность множества $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B)$, где $\mathrm{int}\, A \ne \emptyset$. Сначала *предположим, что множество $\mathrm{cl}(A + B)$ не содержит ни одной прямой*. Следовательно, существует такая линейная функция λ на $\mathbb{R}^n$, что множества $H_t^\lambda \cap \mathrm{cl}(A + B)$ ограничены при любом t. Тогда множества $H_t^\lambda \cap A$ и $H_a^\lambda \cap B$ тоже ограничены при любом t.

После прибавления к функции λ некоторой константы можно считать, что $l(a) \ge 0$ для всех $a \in A$ и $l(b) \ge 0$ для всех $b \in B$.

Обозначим $A_t = H_t^\lambda \cap A$ и $B_t = B \cap H_t^\lambda$. Множество $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A + B)$ является объединением возрастающей по включению последовательности открытых множеств

$$(\mathrm{int}\, A_n) \setminus \mathrm{cl}(A + B) \quad n \in \mathbb{N},$$

поэтому по лемме 2 достаточно доказать гомологическую тривиальность каждого из $(\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$.

Так как $l(a) \geq 0$ для всех $a \in A$ и $l(b) \geq 0$ для всех $b \in B$, то нетрудно заметить, что

$$H_n^\lambda \cap \operatorname{cl}(A+B) = H_n^\lambda \cap \operatorname{cl}(A_n + B_n) \quad \text{и, значит,} \quad (\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A+B) = (\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A_n + B_n).$$

Но по лемме 4 и основной лемме для ограниченных множеств, множество в правой части гомологически тривиально, либо пусто.

Значит, остается рассмотреть случай, когда $\operatorname{cl}(A+B)$ содержит некоторую прямую l. Пусть π — проекция вдоль прямой l, а $\lambda(x)$ — некоторая линейная функция, не постоянная на прямой l.

В этом случае множества $\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$ и $(\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$ гомотопически эквивалентны с помощью отображения π. Действительно, для точки $x \in \pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$

$$\pi^{-1}(x) \cap (\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B) = \pi^{-1}(x) \cap \operatorname{int} A.$$

При этом $\pi^{-1}(x) \cap \operatorname{int} A$ является некоторым открытым интервалом $(x_1\ x_2)$ (возможно, что точки некоторые из точек x_1, x_2 лежат в бесконечности на прямой $\pi^{-1}(x)$). Для $x \in \pi(\operatorname{int} A)$ положим

$$a_1(x) = \lambda(x_1) < a_2(x) = \lambda(x_2),$$

при этом может быть $a_1(x) = -\infty$ и $a_2(x) = +\infty$.

Если для каждого $x \in \pi(\operatorname{int} A)$ взять точку $\rho(x) \in \pi^{-1}(x)$ так, что

$$\lambda(\rho(x)) = \tan(\frac{1}{2}(\arctan(a_1(x)) + \arctan(a_2(x)))),$$

(считая, что $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ и $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$) то ρ будет непрерывным. Отображения ρ и π зададут гомотопическую эквивалентность множеств $\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$ и $(\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$.

Если заметить, что

$$\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)) = ((\operatorname{int} \pi(A)) \setminus \operatorname{cl}(\pi(A) + \pi(B))),$$

и предположить, что для множеств $\pi(A)$ и $\pi(B)$ все уже доказано, то доказательство можно считать законченным с помощью индукции по размерности.

Далее предполагается, что A и B ограничены, тогда $\operatorname{cl}(A+B) = A+B$.

Лемма 6. Если утверждение основной леммы верно для строго выпуклых, гладких и ограниченных A и B, то основная лемма верна.

Доказательство. Пусть основная лемма верна для гладких и строго выпуклых B. Для выпуклого множества B, очевидно, найдется семейство гладких и строго выпуклых множеств $\{B_i\}_{i \geq 1}$ такое, что $B_{i+1} \subseteq B_i$ для всех $i \geq 1$ и $B = \bigcap_{i \geq 1} B_i$.

Так как для B_i основная лемма верна, то $A \setminus (A + B_i)$ либо пусты, либо гомологически тривиальны. Так как $A \setminus (A+B)$ — это объединение упорядоченного по включению семейства своих относительно открытых подмножеств $A \setminus (A + B_i)$, каждое из которых гомологически тривиально, либо пусто, то $A \setminus (A+B)$ гомологически тривиально, либо пусто.

Пусть теперь основная лемма верна для гладких и строго выпуклых A и B. Покажем, что она верна для случая, когда A либо не гладко, либо не строго выпукло. При этом B уже можно считать гладким и строго выпуклым. По леммам 3 и 4 достаточно показать, что множество $\operatorname{int} A \setminus (A+B)$ гомологически тривиально или пусто.

Рассмотрим последовательность гладких и строго выпуклых множеств $\{A_i\}_{i \geq 1}$ таких, что $A_{i+1} \supseteq A_i$ для всех $i \geq 1$, $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$. Тогда A — предел последовательности $\{A_i\}_{i \geq 1}$ в хаусдорфовой метрике для выпуклых компактов и существует такая последовательность $\varepsilon_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, что $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$ и $A \subseteq A_i + \varepsilon_i S_1$, где S_1 — евклидов шар радиуса 1. Пусть $B_i = B + \varepsilon_i S_1$. Тогда множества A_i, B_i — гладкие, строго выпуклые и

$$A_i \subseteq A, \quad \text{и} \quad A_i + B_i = A_i + \varepsilon_i S_1 + B \supseteq A + B, \quad \text{причем,} \quad A = \bigcup_{i \geq 1} A_i \quad \text{и} \quad A + B = \bigcap_{i \geq 1} A_i + B_i.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{int} A) \setminus (A+B) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i).$$

Каждое $(\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i)$ либо гомологически тривиально, либо пусто. Для любого компакта $K \subseteq (\operatorname{int} A) \setminus (A + B)$ найдется такое i, что $K \subseteq (\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i)$; достаточно взять i таким, что

$$\varepsilon_i < \min\{\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} A), \operatorname{dist}(K, A + B)\}.$$

По лемме 1 $(\operatorname{int} A) \setminus (A + B)$ гомотопически тривиально, либо пусто и все доказано.

В дальнейшем выпуклые множества A и B считаем ограниченными, гладкими и строго выпуклыми. Заметим, что если множество $0 \in B$, то $A \setminus (A + B) = \emptyset$, и в этом случае основная лемма верна. Поэтому далее предполагаем, что $O \notin B$ и, следовательно, $\operatorname{con} B$ — гладкие острые выпуклые конусы.

Для любой прямой l и вектора $x \parallel l$ и двух точек $a_1, a_2 \in l$ будем говорить, что a_2 больше (дальше) a_1 относительно вектора x, если $a_2 = a_1 + \lambda x$, где $\lambda > 0$. Понятие меньше (ближе) определяется аналогично.

Лемма 7. Для любого вектора $= 0 \neq x \in X$ и любой прямой $l \parallel x$ пересечение $l \cap (A \setminus (A + B))$ либо пусто, либо состоит из одного полуинтервала.

Доказательство. Ясно, что $T_1 = l \cap A$ и $T_2 = l \cap (A + B)$ — отрезки, как пересечения прямой и выпуклого множества. Так что нам нужно показать, что множество $T_1 \setminus T_2$ либо пусто, либо состоит из одного полуинтервала.

Докажем от противного. Утверждение этой леммы может быть неверным только в одном случае, когда отрезок T_2 содержится внутри T_1. Но $x \in \operatorname{con} B$, значит, найдется $b = \lambda x \in B$ $(\lambda > 0)$, значит множество $A + B$ содержит отрезок $T_1 + b$ на прямой l, то есть $T_1 \supset T_2 \supseteq T_1 + b$, что является противоречием.

Лемма 8. Пусть A, B — ограниченные, гладкие, строго выпуклые и $O \notin B$. Тогда найдется такое непрерывное отображение $f : A \to A$, что: 1) $f(a) - a \in -\operatorname{con} B$ для любого $a \in A$; 2) $f(f(a)) = a$ для любого $a \in A$; 3) $f(A) \subseteq A \setminus (A + B)$.

Доказательство. Пусть $A' = A + \operatorname{con} B$ и докажем более сильное утверждение, что существует отображение $f : A' \to A$, такое, что: $1) f(a) - a \in -\operatorname{con} B$ для любого $a \in A'$; 2) $f(f(a)) = f(a)$ для любого $a \in A'$; $3) f(A') \subseteq A \setminus (A + B)$.

Определим f сначала на $\operatorname{bd} A'$. Так как B — гладкое, то множество A' — гладкое. Обозначим через n_p^C внешнюю нормаль к гладкому выпуклому множеству C в точке $p \in \operatorname{bd} C$.

Точке $a \in \operatorname{bd} A'$ поставим в соответствие $f(a) \in \operatorname{bd} A$, так, что $n^A_{f(a)} = n^{A'}_a$. Тогда очевидно, что $f(f(a)) = f(a)$ для всех $a \in A$. Покажем, что оно непрерывно и выполняются свойства 1), 3).

Отображение f — композиция сферического отображения множества A' и отображения обратного к сферическому множества A и, следовательно, непрерывно.

Для всех точек $a \in \operatorname{bd} A'$ существует такое $x \in \operatorname{con} B$, что $a \in \operatorname{bd}(A + x)$. Тогда ясно, что $n_a^{A'} = n_a^{A+x}$ и $f(a) = a - x$, то есть $f(a) - a \in -\operatorname{con} B$. Свойство 1 выполнено.

Докажем выполнение свойства 3. Образ $\operatorname{Im} f$ отображения f — это те точки $p \in \operatorname{bd} A$, для которых $n_p^A \in \operatorname{con} B^*$, где $\operatorname{con} B^*$ — двойственный конус к $\operatorname{con} B$. Покажем, что если $p \in \operatorname{Im}$, то $p \notin A + B$. В самом деле, если $n_p^A \in \operatorname{con} B^*$, то $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (n_p^A, x) \leq 0\}$. Так как n_p^A — внешняя нормаль к A, то $(n_p^A, a - p) \leq 0$ для всех $a \in A$.

Значит, $(n_p^A, x - p) \leq 0$ для всех $x = a + b \in A + B$, а это означает, что если $p \in A + B$, то $p = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$) и $(n_p^A, p - a) = (n_p^A, b) = 0$. Тогда $p, a \in A$ и так как A строго выпукло, то $p = a$ и $b = O$. Но это противоречит $O \notin B$. Значит, $p \notin A + B$ и $p \in A \setminus (A + B)$.

Теперь продолжим отображение f на все A'. Пусть $x' \in \operatorname{int}(-\operatorname{con} B)$. Для любой $a \in A'$ положим

$$g(a) \in \operatorname{bd} A' \quad g(a) - a = \lambda(a) x', \quad \lambda(a) \geq 0 \quad \text{и} \quad f'(a) = f(g(a)).$$

Легко видеть, что $g(a)$ определено и непрерывно. Следовательно, $f'(a)$ — непрерывно и для него свойства 2 и 3 очевидно продолжают выполняться, а свойство 1 выполняется потому, что

$$f'(a) - a = f(g(a)) - a = f(g(a)) - g(a) + g(a) - a = f(g(a)) - g(a) + \lambda(a)x' \in \operatorname{con} B + \operatorname{con} B = \operatorname{con} B.$$

Тем самым лемма доказана.

Доказательство основной леммы. По лемме 6 достаточно рассматривать ограниченные, строго выпуклые и гладкие A и B. Также можно считать, что $O \notin B$.

Рассмотрим отображение f из леммы 8. Покажем, что оно задает гомотопическую эквивалентность A и $f(A)$. Пусть $i : f(A) \to A$ — отображение вложения. Тогда $i \circ f$ гомотопно тождественному отображению A, так как отрезок $[a, f(a)] \subseteq A$ для любой точки $a \in A$. Отображение $f \circ i$ равно тождественному отображению $f(A)$. Значит, f — гомотопическая эквивалентность A и $f(A)$.

Покажем теперь, что f задает гомотопическую эквивалентность $A \setminus (A + B)$ и $f(A) = f(A \setminus (A + B))$. В этом случае отображение $f \circ i$ равно тождественному отображению $f(A)$. Отображение $i \circ f$ гомотопно тождественному отображению множества $A \setminus (A+B)$. В самом деле, покажем, что для любой точки $a \in A \setminus (A+B)$ отрезок $[a\ i(f(a))]$ лежит в $A \setminus (A+B)$. По лемме 7 этот отрезок параллелен некоторому $x \in \operatorname{con} B$, и по свойству 1 отображения f прямая, содержащая этот отрезок, пересекает $A \setminus (A+B)$ по некоторому полуинтервалу, это значит, что отрезок $[a\ i(f(a))]$ содержится в этом полуинтервале, так как его концы содержатся в нем. Таким образом доказано, что $A \setminus (A+B)$ гомотопически эквивалентно A. Доказательство завершено, так как выпуклое множество A, очевидно, гомологически тривиально.

4. Заключение

Автор хочет поблагодарить М.В. Балашова за формулировку задачи, В.Л. Дольникова за всестороннюю поддержку и содержательные обсуждения и Г.Н. Яковлева за полезные советы при подготовке статьи.

Литература

[1] Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.

[3] Половинкин Е.С., Балашов М.В. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества //Математический сборник. 2000. **191**. №. 1. С. 27–64.

[4] Geivaerts M. Enkele eigenschappen van de relatie "homothetisch aanpasselijk" in de ruimte der konvexe lichamen //Med. Konink. Acad. Wetensch. België. 1972. **34**, P. 3–19.

[5] Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 23–24

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику

Парфенов П. Г.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

В работе указывается способ построения многочленов на черно-белых изображениях, с помощью которых можно вычислять эйлерову характеристику этих изображений.

В работах [1, 2, 3, 4, 5] рассматривались алгоритмы расчета эйлеровой характеристики черно-белых изображений, в основе которых лежало суммирование значений некоторых функций, определенных на фрагментах этих изображений, при этом получение значений этих функций предполагало непосредственное распознавание типа такого рода фрагментов. В настоящей работе значение таких функций удается получить с помощью многочленов, естественно, определенных на соответствующих фрагментах изображения. Черно-белое изображение A задается матрицей $A = (a_{ij})$ размера m×n с элементами равными 0 или 1. Фрагментом s размера 2×2 изображения A называется любая подматрица матрицы A, состоящая из элементов $a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}$. В работах [1,3,4,5] было показано, что существуют функции F, определенные на фрагментах s размера 2×2 изображения A, такие, что эйлерова характеристика

$$\chi(A) = \sum_{s \subseteq A} F(s).$$

Двухпараметрическое семейство таких функций приведено в работе [4]. Эти функции удается задать в виде:

$$F(s) = p(s) = p(a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}),$$

где $p(a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1})$ - многочлены. Укажем теперь конкретный вид этих многочленов. В соответствии с тем, что на двумерных изображениях существуют два типа связности, имеются два вида многочленов:

$$F_1(s) = p_1(s) = 1/4(a_{ij} + a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{i+1j+1} - 4(a_{ij+1}a_{i+1j} + a_{ij}a_{i+1j+1}) +$$

$$+(a-2)a_{ij}a_{ij+1} - (a+2)a_{i+1j}a_{i+1j+1} + (b-2)a_{ij+1}a_{i+1j+1} - (b+2)a_{ij}a_{i+1j} +$$

$$4(a_{ij}a_{ij+1}a_{i+1j} + a_{ij+1}a_{i+1j}a_{i+1j+1} + a_{ij}a_{i+1j}a_{i+1j+1} + a_{ij}a_{ij+1}a_{i+1j+1}) - 4a_{ij}a_{ij+1}a_{i+1j}a_{i+1j+1}),$$

для "сильной" связности и

$$F_2(s) = p_2(s) = 1/4(a_{ij} + a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{i+1j+1} + (a-2)a_{ij}a_{ij+1} - (a+2)a_{i+1j}a_{i+1j+1} +$$

$$+(b-2)a_{ij+1}a_{i+1j+1} - (b+2)a_{ij}a_{i+1j} + 4a_{ij}a_{ij+1}a_{i+1j}a_{i+1j+1})$$

для "слабой" связности. Очевидно, что выражение для эйлеровой характеристики можно преобразовать к виду:

$$\chi_k(A) = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} p_k(a_{ij}, a_{ij+1}, a_{i+1j}, a_{i+1j+1}),$$

где $k = 1, 2$ в соответствии с типом связности.

Литература

[1] Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин //М.:Мир, 1972.

[2] Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн.2// М.:Мир, 1982.

[3] Gray S.B. Local properties of binary images in two dimensions //IEEE Trans.Computers. 1971. May. C-20, 5. P. 551-561.

[4] Парфенов П.Г. Об эйлеровой характеристике изображения // Архитектура и программное обеспечение вычислительных систем. Ярославль, 1992. С.76-79.

[5] Парфенов П.Г. Алгоритмы расчета эйлеровой характеристики трехмерного изображения // Моделирование и анализ информационнных систем.Вып.2.Ярославль, 1993. С.3-7.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 25–28

УДК 517.9

Асимптотическая интерполяция на основе Паде-аппроксимации в задачах с параметром

Комарова Е.В.[1]
Российский университет дружбы народов

Для параметрической начальной задачи, где параметр принимает значения как малые, стремящиеся к нулю, так и значения близкие к единице строится приближенное аналитическое выражение на основе модификации Паде - конструкции. Аппроксимация Паде строится как "мост", "соединяющий" две асимптотики решения начальной задачи при малых и близких к единице значениях параметра и представляет собой асимптотическую интерполяционную процедуру построения решения.

Рассмотрим начальную задачу вида:

$$\varepsilon\dot{x} = F(x,y,t), \qquad \dot{y} = f(x,y,t), \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \qquad y(0,\varepsilon) = y^0 \tag{2}$$

где $x \in R^n, y \in R^m$, при $\varepsilon \in [0,1]$ и $t \in [0,1]$.

Данная работа представляет собой развитие результатов, предложенных Дмитриевым М.Г. и Беляевой Н.П. [1], [2] по построению Паде - аппроксимации на основе сращивания предельных асимптотик, где параметр $\varepsilon \in [0,\infty)$. Здесь в отличие от [1], [2] рассматривается конечный интервал изменения параметра.

Пусть в задаче (1),(2) выполняются следующие условия [3]:

1. Функции $F(x,y,t), f(x,y,t)$ - достаточное число раз дифференцируемы в некоторой открытой области G пространства переменных (z,t), где $z = \binom{x}{y}$

2. Уравнение $F(x,y,t) = 0$ относительно x имеет в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{D}$ пространства переменных решение $x = \varphi(y,t)$ такое, что

a) $x = \varphi(y,t)$ - непрерывная функция в $\bar{D}$,

b) точки $(\varphi(t),y,t) \in G$ при $(y,t) \in \bar{D}$,

c) корень $x = \varphi(y,t)$ является изолированным в $\bar{D}$, т.е. существует такое $\eta > 0$, что $F(x,y,t) \neq 0$ при $0 < \| x - \varphi(y,t) \| < \eta, (y,t) \in \bar{D}$

3. Система (1),(2) имеет единственное решение $\bar{y}(t)$ на сегменте $0 \le t \le 1$, причем точки $(\bar{y},t) \in D$ при $t \in [0,1]$, где D - множество внутренних точек области $\bar{D}$. Кроме того, предполагаем, что $f(\varphi(y,t),y,t)$ непрерывно дифференцируема по y в $\bar{D}$.

Введем присоединенную систему

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = F(\tilde{x},y,t), \tau \ge 0, \tag{3}$$

в которой y и t рассматриваются как параметры. В силу пункта 2 $\tilde{x} = \varphi(y,t)$ является изолированной точкой покоя системы (3) при $(y,t) \in \bar{D}$.

4. Точка покоя $\tilde{x} = \varphi(y,t)$ системы (3) устойчива по первому приближению.

5. Решение $\tilde{x}$ присоединенной системы (3) при $y = y^0, t = 0$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = F(\tilde{x},y^0,0), \tau \ge 0, \tilde{x}(0) = x^0 \tag{4}$$

удовлетворяет условиям

a) $\tilde{x}(\tau) \to \varphi(y^0,0)$ при $\tau \to \infty$,

b) Точки $(\tilde{x}(\tau),y^0,0) \in G$ при $\tau \ge 0$.

Теорема. (Васильевой, [3]) *При выполнении условий 1-5 найдутся постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1),(2) существует на сегменте $0 \le t \le T$, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\| x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon) \| \le C\varepsilon^{n+1}, 0 \le t \le T, \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования (проект №Е00-1.0-158)

где

$$X_n(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i[\bar{x}_i(t)+Px_i(\tau)],\tau=\frac{t}{\varepsilon}$$

Таким образом, при $\varepsilon\to 0$ имеем сингулярно - возмущенную задачу, асимптотика которой представляет собой сумму регулярного и пограничного рядов [3]:

$$x_{\varepsilon\to 0}(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+...+\varepsilon^n x_n(t)+Px_0(\tau)+\varepsilon Px_1(\tau)+...+\varepsilon^n Px_n(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}) \qquad (6)$$

где $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$.

Теперь приведем асимптотику решения (1),(2) при $\varepsilon\to 1$. В этой области изменения параметра задача (1),(2) регулярно возмущенная, асимптотика которой представима в виде

$$z_{\varepsilon\to 1}(t,\varepsilon)=z_0(t)+(\varepsilon-1)z_1(t)+...+(\varepsilon-1)^{n-1}z_{n-1}(t)+O((\varepsilon-1)^n) \qquad (7)$$

или после замены $\eta=\varepsilon-1$ получим

$$z_{\eta\to 0}(t,\eta)=z_0(t)+\eta z_1(t)+...+\eta^{n-1}z_{n-1}(t)+O(\eta^n) \qquad (8)$$

В отличие от работ [1], [2], где параметр ε рассматривался на всей числовой оси, будем строить модификации Паде - конструкции решения задачи (1), базируясь на асимптотиках (6),(8).

Паде - аппроксимацией порядка [n/n] назовем рациональную функцию вида:

$$x_{[n,n]}=\frac{a_0(t)+\tilde{a}_0(\tau)+\varepsilon(a_1(t)+\tilde{a}_1(\tau))+...+\varepsilon^n(a_n(t)+\tilde{a}_n(\tau))}{1+\varepsilon b_1(t)+...+\varepsilon^{n-1}b_{n-1}(t)+\varepsilon^n b_n(t)}, \qquad (9)$$

где параметр $\varepsilon\in[0,1]$. Здесь числитель дроби представляет собой сумму регулярных и пограничных членов некоторого ряда по ε. Причем коэффициенты $a_0(t),a_1(t),...,a_n(t)$ и $\tilde{a}_0(\tau),\tilde{a}_1(\tau),...,\tilde{a}_n(\tau)$ и $b_1(t),...,b_n(t)$ здесь пока неизвестные гладкие функции своих аргументов.

Коэффициенты (9) будем определять на основе двух асимптотических приближений при $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to 1$. Очевидно, что путем растяжения вместо $\varepsilon=1$ можно использовать любое конечное значение параметра, например, $\varepsilon=m$. Тогда определяющим при выборе точки $\varepsilon=m$ при $0<m<\infty$ в первую очередь стоит исходить из наличия точного решения или приближенного решения при $\varepsilon=m$. Здесь возникает вопрос о построении интерполяционной процедуры для нахождения поверхности $z(t,\varepsilon)$ во всей области изменения параметра ε на основе информации о решении и его аппроксимациях в окрестности нуля и некоторой точки m.

Коэффициенты в (9) будут находиться из систем, получающихся на основе асимптотического равенства (9) двум предельным асимптотикам:

$$\begin{aligned}&\tfrac{a_0(t)+\tilde{a}_0(\tau)+\varepsilon(a_1(t)+\tilde{a}_1(\tau))+...+\varepsilon^n(a_n(t)+\tilde{a}_n(\tau))}{1+\varepsilon b_1(t)+...+\varepsilon^{n-1}b_{n-1}(t)+\varepsilon^n b_n(t)}=\\&=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+...+\varepsilon^n x_n(t)+Px_0(\tau)+...+\varepsilon^n Px_n(\tau)+O(\varepsilon^{n+1})\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{a_0(t)+\tilde{a}_0(\tau)+\varepsilon(a_1(t)+\tilde{a}_1(\tau))+...+\varepsilon^n(a_n(t)+\tilde{a}_n(\tau))}{1+\varepsilon b_1(t)+...+\varepsilon^{n-1}b_{n-1}(t)+\varepsilon^n b_n(t)}=\\&=z_0(t)+(\varepsilon-1)z_1(t)+...+(\varepsilon-1)^{n-1}z_{n-1}(t)+O((\varepsilon-1)^n)\end{aligned} \qquad (11)$$

Каждое из выражений равенства (10) разложим на сумму регулярного, не содержащего переменную τ, и погранслойного с переменной τ слагаемых. Предположим, что коэффициенты асимптотических разложений (6), (8) есть известные функции. Коэффициенты числителя Паде - аппроксимации находятся из (10) сравнением коэффициентов при $1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^n$, а знаменателя при $1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^{n-1}$. Следовательно, из (10), после приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях ε, можно определить $2n+2$ неизвестных функций $a_0(t),a_1(t),...,a_n(t)$, $\tilde{a}_0(\tau),\tilde{a}_1(\tau),...,\tilde{a}_n(\tau)$. И аналогично из (11) определяются n неизвестных функций $b_1(t),...,b_n(t)$. Как результат получаем систему из $3n+2$ уравнений с $3n+2$ неизвестными. При этом отметим, что для нахождения коэффициентов $b_1(t),...,b_n(t)$ необходимо рассматривать $n-1$ уравнение из-за того, что по предположению первый коэффициент $b_0(t)=1$.

Применение математических пакетов символьных вычислений (например, Maple) позволяет получать формальное решение в пределах объема имеющихся машинных ресурсов. Для простоты изложения остановимся на случае при $n=2$, тем более, что для приложений такой порядок аппроксимации оказывается достаточным. Итак, для $a_0(t),a_1(t),a_2(t)$ и $\tilde{a}_0(\tau),\tilde{a}_1(\tau),\tilde{a}_2(\tau)$ имеем систему

$$\begin{cases} a_0(t) = \bar{x}_0(t), \\ a_1(t) = \bar{x}_0(t)b_1(t) + \bar{x}_1(t) \\ a_2(t) = \bar{x}_0(t)b_2(t) + \bar{x}_1(t)b_1(t) + \bar{x}_2(t) \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_0(\tau) = Px_0(\tau), \\ \bar{a}_1(\tau) = Px_0(\tau)b_1(0) + Px_1(\tau), \\ \bar{a}_2(\tau) = Px_1(\tau)b_1(0) + Px_0(\tau)b_1'(0)\tau + Px_0(\tau)b_2(0) + Px_2(\tau) \end{cases} \tag{13}$$

Аналогичным образом для нахождения Паде - коэффициентов $b_1(t), b_2(t)$ получаем следующую систему

$$\begin{cases} \frac{(a_0(t)+a_1(t)+\bar{a}_0(t)+a_2(t)+\bar{a}_1(t)+\bar{a}_2(t)-z_0(t)-z_0(t)b_1(t)-z_0(t)b_2(t))}{1+b_1(t)+b_2(t)} = 0 \\ \frac{(2\bar{a}_2(t)-\bar{a}_0(t)b_1(t)-2\bar{a}_0(t)b_2(t)+\bar{a}_2(t)b_1(t)+a_2(t)b_1(t)-\bar{a}_1(t)b_2(t)-a_1(t)b_2(t)-\bar{a}_2'(t)tb_1(t)-\bar{a}_2'(t)tb_2(t)}{1+b_1(t)+b_2(t)^2} + \\ + \frac{-\bar{a}_1'(t)tb_1(t)-\bar{a}_1'(t)tb_2(t)-\bar{a}_0'(t)tb_2(t)-2z_1(t)b_1(t)-2z_1(t)b_2(t)-z_1(t)b_1(t)^2-z_1(t)b_2(t)^2-\bar{a}_0'(t)tb_1(t)}{1+b_1(t)+b_2(t)^2} + \\ + \frac{-2z_1(t)b_1(t)b_2(t)+a_1(t)+2a_2(t)-\bar{a}_2'(t)t-z_1(t)-a_0(t)b_1(t)-2a_0(t)b_2(t)-\bar{a}_0'(t)t+\bar{a}_1(t)-\bar{a}_1'(t)t)}{1+b_1(t)+b_2(t)^2} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Отметим, что если знаменатели в (14) не имеют нулей по ε при всех $t \in [0,T]$,то после несложных преобразований получаем при $t = 0$ тождества, из которых следует, что $b_i(0)$ можно положить равными любой константе. Здесь положим $b_i(0) = 1$.

Теорема. *Предположим, что для задачи (1),(2) выполнены условия 1-5 и системы (12),(13),(14) разрешимы относительно вектора $b(t)$ таким образом, что полином $1 + \varepsilon b_1(t) + \ldots + \varepsilon^n b_n(t)$ не имеет нулей при $t \in [0,T]$. Тогда Паде - аппроксимация вектора решения задачи (1),(2) существует на $[0,T]$, и коэффициенты определяются из систем (12),(13),(14)*

Заметим, что знаменатель Паде - дроби может обращаться в нуль в некоторых точках. Эти точки можно вычислить, приравняв к нулю знаменатель дроби (9). По предположению $b_i(0) = 1, i = 1..n$, т.е. по непрерывности коэффициентов $b_i(t), i = 1..n$ существует отрезок $[0,t_1] \subseteq [0,T]$, на котором полином знаменателя Паде дроби не имеет нулей. Однако для конкретных классов задач можно попытаться выписать условия на коэффициенты, при которых знаменатель Паде не обращается в нуль при любом значении параметра ε. Например, можно рассмотреть класс линейных задач.

Предложенный способ построения приближенных двух параметрической поверхности есть аналог некоторой интерполяционной процедуры. Как известно, точность интерполяционной процедуры повышается при использовании информации о значениях функции в точках. Знания асимптотических разложений в окрестности некоторых точек содержат информацию о производных. Следовательно, интерполяционная процедура на основе асимптотик может быть достаточно эффективной.

Пример

Продемонстрируем работу алгоритма построения асимптотической интерполяции на основе Паде - аппроксимации для начальной задачи с параметром ε следующего вида

$$\varepsilon\dot{x} = -2x + \sin t, \tag{15}$$

$$x(0,\varepsilon) = 1 \tag{16}$$

при $\varepsilon \in [0,1]$ и $t \in [0,2]$.

Построим аппроксимацию Паде порядка $[1/1]$.

Асимптотика при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$x_{\varepsilon\to 0} = \frac{\sin t}{2} + \varepsilon\frac{\cos t}{4} + e^{-2\tau} - \frac{1}{4}\varepsilon e^{-2\tau} \tag{17}$$

Асимптотика при $\varepsilon \to 1$ -

$$x_{\varepsilon\to 1} = -\frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t + \frac{27}{25}e^{-2t} - \frac{3}{25}\varepsilon\cos t - \frac{4}{25}\varepsilon\sin t + \frac{12}{5}\varepsilon e^{-2t}t + \frac{3}{25}\varepsilon e^{-2t} - \frac{12}{5}e^{-2t}t \tag{18}$$

Строим модификацию Паде - аппроксимации

$$
\begin{aligned}
x_{[1/1]} = -\Big(& \frac{2-2\cos^2 t-24\sin te^{-2t}+4\sin t\cos t-2\varepsilon+4\varepsilon\cos^2 t-8\varepsilon\sin t\cos t-11\varepsilon\sin te^{-2t}}{-2\sin t+24e^{-2t}-4\cos t+2\varepsilon\sin t+9\varepsilon\cos t+11\varepsilon e^{-2t}}+ \\
& + \frac{-12\varepsilon\cos te^{-2t}+4e^{-2t/\varepsilon}\sin t-48e^{-2t(1+\varepsilon)/\varepsilon}+8e^{-2t/\varepsilon}\cos t+3\varepsilon e^{-2t/\varepsilon}\sin t-36\varepsilon e^{-2t(1+\varepsilon)/\varepsilon}+6\varepsilon e^{-2t/\varepsilon}\cos t}{-2\sin t+24e^{-2t}-4\cos t+2\varepsilon\sin t+9\varepsilon\cos t+11\varepsilon e^{-2t}}\Big)
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Заметим, что знаменатель (19) может иметь нули функции $t(\varepsilon)$ в рассмотренных областях изменения t и ε.

Эксперименты показывают, что несмотря на наличие особенностей конструкции (9) дает удовлетворительную аппроксимацию точной поверхности вне нулей знаменателя. В таблицах приведено сравнение разностей асимптотик и точного решения при разных значениях параметра ε

$\varepsilon = \frac{1}{3}$

t	$\Delta_{[1,1]}$	$\Delta_{\varepsilon\to 0}$	$\Delta_{\varepsilon\to 1}$
0.1	0.0413806989	0.0747095836	0.1559618160
0.2	0.0682371877	0.1143011231	0.1765067237
0.4	0.0912229038	0.1417827749	0.0896162739
0.8	0.0681309786	0.1228895379	-0.0538391633
0.9	0.0544057356	0.1120445467	-0.0661631442

$\varepsilon = \frac{2}{5}$

t	$\Delta_{[1,1]}$	$\Delta_{\varepsilon\to 0}$	$\Delta_{\varepsilon\to 1}$
0.1	0.0369910848	0.0781204456	0.1106136296
0.2	0.0632863395	0.1239034255	0.1316309100
0.4	0.0897764356	0.1616119345	0.0762801878
0.8	0.0734056143	0.1468643271	-0.0361838184
0.9	0.0607796432	0.1348160927	-0.0478125977

Логично предположить, что имеет место удовлетворительная точность интерполяции на исходном множестве, исключая множество меры нуль.

Литература

[1] Беляева Н.П., Дмитриев М.Г. Сращивание асимптотик решения начальной задачи с параметром на основе Паде-аппроксимации //Программные системы. М. 1999.

[2] Беляева Н.П. Разработка алгоритмов построения семейств траекторий динамических систем на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений : Автореф. дисс. ...канд. физ.-мат. наук /ЯрГУ. Ярославль. 1999. 19 с.

[3] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

Модел. и анализ информ. систем. Т.**7**, №**2** (2000) 29–33

УДК 541.1+612.82

Организация однородной полносвязной сети в кольцо множеств синхронно функционирующих нейронов

Лагутина Н.С.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Рассмотрена полносвязная сеть из нейронов, организованных в N синхронно функционирующих множеств. Аналитически получены формулы для временных рассогласований между спайками нейронов. Изучаемые сети импульсных нейронов могут быть использованы для долговременного хранения периодических последовательностей в системах, решающих задачи идентификации, классификации или прогноза.

Введение

В данной работе рассмотрена модель полносвязной однородной сети импульсных нейронов. Показано, что множество нейронов может быть представлено в виде объединения N непустых попарно непересекающихся подмножеств, в каждом из которых нейроны функционируют синхронно и периодически. Приводится схема доказательства того, что при соответствующих начальных условиях существует устойчивый режим работы сети и можно найти формулы для временных рассогласований между импульсами нейронов, принадлежащих разным множествам.

1. Модель импульсного нейрона

Существует большое количество моделей нейронов, учитывающих те или иные особенности биологической нервной клетки. В работах [1] — [4] предложена и исследована модель нейрона, отражающая следующие ее качества.

Состояние нервной клетки характеризуется разностью потенциалов между внутренней и внешней поверхностью мембраны (границы) тела нейрона — мембранным потенциалом. Если потенциал достигает некоторого порогового уровня, то нейрон генерирует кратковременный высокоамплитудный импульс (спайк), обусловленный ионными токами, проходящими через активные каналы мембраны. Рожденный нейроном спайк распространяется по аксону (древовидному отростку от тела нейрона) и его разветвлениям. Последние образуют с другими нейронами контакты — синапсы. При поступлении сигнала по аксону к синапсу в нем освобождаются химические вещества (медиаторы), которые вызывают возбуждение или торможение в нейроне-приемнике. На некотором промежутке времени после своего спайка нейрон абсолютно невосприимчив к внешнему воздействию. Этот временной промежуток называется периодом рефрактерности.

Модель основана на анализе натриевого и калиевого токов, проходящих через активные каналы мембраны. Учитывается экспериментальный факт запаздывания калиевого тока по отношению к натриевому. Величина задержки принята за единицу времени.

Для мембранного потенциала $u(t) > 0$ предлагается следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\dot{u} = \lambda\left[-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1))\right]u. \tag{1}$$

Здесь $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ — положительные достаточно гладкие функции, характеризующие состояние натриевых и калиевых каналов, с помощью которых происходит перенос ионов через мембрану. Будем считать, что $f_{Na}(u) \to 0$ и $f_K(u) \to 0$ при $u \to \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$. По смыслу задачи параметр, определяющий скорость протекания электрических процессов, $\lambda \gg 1$. Пусть также выполнено условие :

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0. \tag{2}$$

В работах [1] и [2] проведено подробное исследование динамики мембранного потенциала нейрона $u(t)$ Пусть спайк начинается с того момента, когда $u(t)$ пересекает единичное значение с положительной скоростью и заканчивается, когда $u(t)$ пересекает единичное значение с отрицательной скоростью. Будем считать, что спайк произошёл в нулевой момент времени. Моменты окончания данного и начала следующего спайков обозначим соответственно t_1 и t_2. Тогда имеют место асимптотические равенства:

$$t_1 = T_1 + o(1), \qquad t_2 = T_2 + o(1). \tag{3}$$

$$T_1 = f_K(0) - 1, \qquad T_2 = T_1 + (f_{Na}(0) + 1)/\alpha + 1, \tag{4}$$

На основе уравнения (1) построена модель взаимодействия нейронов, описанная в [5]. Она учитывает, что нейрон испытывает воздействие другого нейрона только при одновременном выполнении трёх условий: он вышел из состояния рефрактерности; на соответствующих синапсах выделился медиатор; спайк воздействующего нейрона начался в тот момент, когда рассматриваемый нейрон не находился в рефрактерном состоянии.

В результате уравнение мембранного потенциала нейрона, находящегося под воздействием m других нейронов, приобретает вид:

$$\dot{u} = \lambda\left[-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1))\right]u +$$

$$+\left[\lambda\alpha\sum_{k=1}^{m} g_k \cdot H(u)\cdot\psi(v_k)\cdot\theta\left(\int_{t-(2-\varepsilon)T_1}^{t}(H(u)-\psi(v_k))dt+\delta\right)\right]u(t),. \tag{5}$$

Здесь g_k — вес, а $v_k(t)$ — мембранный потенциал, соответствующие k-му нейрону; функция ψ является индикатором наличия медиатора:

$$\psi(v) = 1 - \theta(1 - v(t))\theta(1 - v(t - (1-\varepsilon)T_1)), \tag{6}$$

где θ — функция Хевисайда, а $0 < \varepsilon < 0.5$; функционал $H(u)$ обеспечивает наличие периода рефрактерности $T_R \approx 3T_1$ у нейрона, находящегося под воздействием:

$$H(u) = \theta(1 - u(t))\theta(1 - u(t - (1-\varepsilon)T_1))\theta(1 - u(t - 2(1-\varepsilon)T_1)); \tag{7}$$

$0 < \delta < 0.5$.

Следует отметить два существенных отличия этой модели взаимодействия нейронов от рассматриваемой в [1] и [2]. Во-первых, увеличивается время жизни медиатора до $(2-\varepsilon)T_1$, во-вторых, учитывается особенность выделения медиатора в то время, когда нейрон находится в рефрактерном состоянии.

2. Организация однородной полносвязной нейронной сети в кольцо множеств синхронно функционирующих нейронов

Нейронная сеть называется полносвязной и однородной, если каждый нейрон сети связан со всеми другими нейронами и все весовые коэффициенты одинаковы. Рассмотрим такую сеть, состоящую из описанных выше нейронов. Сеть можно разбить на N непустых попарно непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots, X_N$, количество элементов которых обозначим через $m_1, m_2, \ldots, m_N$ соответственно. Рассмотрим колебательные режимы, в которых последовательно и в цикле происходит синхронная генерация импульсов нейронами первого, второго, и т.д., N-го, снова первого и т.д. множеств.

Пусть на некотором начальном промежутке времени спайки элементов множества X_{i+1} следуют за спайками элементов из множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, и внутри каждого множества спайки начинаются в порядке возрастания номеров. Будем говорить, что нейрон стационарно действует на другой, если спайк второго произошел позже, чем распался медиатор, появившийся под действием спайка первого нейрона. Пусть на элементы множества X_i стационарно действуют все элементы из множеств $X_{i-2}, X_{i-3}, \ldots, X_{i-a_i-1}$, где $a_i > 0$, то есть во время спайков нейронов из множества X_{i-a_i-2}, нейроны множества X_i находятся в рефрактерном состоянии, но выходят из него к началу генерации импульсов нейронами из множества X_{i-a_i-1}. Таким образом, общее число стационарно действующих элементов на нейрон из множества X_i равно

$$A_i = \sum_{j=i-a_i-1}^{i-2} m_j.$$

К стационарному воздействию добавляется влияние нейронов из множества X_{i-1} по мере генерации ими импульсов.

Теорема. *Пусть величины:*

$$\xi_i = \frac{T_2 - 2qT_1A_i + 2T_1\sum_{j=1}^{N}(A_i - A_j)m_{j-1}^{-1}}{m_{i-1}\left(q + \sum_{j=1}^{N} m_j^{-1}\right)} \tag{8}$$

удовлетворяют условиям:

$$\xi_i < 2T_1,$$

$$\sum_{l=1}^{N}\xi_l - \sum_{j=i-a_i}^{i}\xi_j > T_R,$$

$$\sum_{l=1}^{N}\xi_l - \sum_{j=i-a_i-1}^{i}\xi_j < T_R,$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Существует устойчивый режим работы сети (аттрактор), при котором нейроны, принадлежащие каждому из множеств, функционируют синхронно. Генерация спайков нейронами множеств X_1, X_2, …, X_N осуществляется последовательно и циклически. Временные рассогласования между спайками элементов, принадлежащих $i-1$-ому и i-ому множествам, равны соответственно величинам $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \to \infty$).

Рассмотрим схему доказательства теоремы. Каждому нейрону сети поставим в соответствие два индекса: первый – номер множества, которому принадлежит нейрон, второй – порядковый номер внутри этого множества. Множества с номерами $i \pm cN$, $c = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отождествляются.

Обозначим $t_{i,n}^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ - последовательные моменты времени начала спайков (i, n)-го нейрона ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$, $n = 1, 2, \ldots, m_i$). Функционирование системы на промежутке $[t_{1,1}^k; t_{N,m_N}^k]$ будем называть k-ым тактом прохождения волны возбуждения по сети.

Предположим, что моменты спайков нейронов на любом такте прохождения волны по сети удовлетворяют нескольким условиям.

Во–первых, моменты начала спайков нейронов на каждом такте волны упорядочены:

$$t_{N,m_N}^{k-1} < t_{1,1}^k \le t_{1,2}^k < \ldots \le t_{1,m_N}^k < t_{2,1}^k < \ldots < t_{N,m_N}^k < t_{1,1}^{k+1}.$$

Во–вторых, нейроны из множества X_{i-1} оказывают непосредственное воздействие на элементы множества X_i, т.е.

$t_{1,m_1}^k < t_{N,1}^{k-1} + 2T_1$, $t_{i,m_i}^k < t_{i-1,1}^k + 2T_1$, $i = 2, \ldots, N$.

В–третьих, каждый нейрон из множества X_i после выхода из рефрактерного состояния оказывается под воздействием спайков нейронов множества X_{i-a_i-1}, т.е.

$t_{i-a_i-2,m_{i-a_i-2}}^k < t_{i,1}^{k-1} + T_R \le t_{i,m_i}^{k-1} + T_R < t_{i-a_i-1,1}^k$, $i = 1, \ldots, N$.

$t_{i,1}^k > t_{i-2,m_{i-2}}^k + 2T_1$, $i = 1, \ldots, N$.

Эти условия позволяют доказать два важных утверждения, являющихся основой доказательства теоремы.

Обозначим через $\xi_{i,j}^k = t_{i,j}^k - t_{i,j-1}^k$ — рассогласование между спайками j-го и $j-1$-го нейронов i-го множества ($i = 1, 2, \ldots, N, j = 2, 3, \ldots, N$) на k-м такте прохождения волны. Пусть $\xi_{i,1}^k = t_{i,1}^k - t_{i-1,m_{i-1}}^k$ — рассогласование между спайками первого элемента i-го множества и последнего элемента $i-1$-го множества ($i = 1, 2, \ldots, N$).

Утверждение 1. *Справедлива формула:*

$$\xi_{i,j}^2 = \frac{\xi_{i,j}^1}{1 + (m_{i-1} + j - 1)q} + o(1), \tag{9}$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, $j = 2, \ldots m_i$, $m_0 = m_N$.

Заданные условия относительно начального распределения импульсов нейронов дают возможность найти моменты спайков элементов сети на втором этапе прохождения волны, начинающегося в момент $t^2_{1,1}$ спайком первого нейрона первого множества.

На каждом промежутке времени: $[t^1_{1,1}, t^1_{N,1}]$, $[t^1_{N,1}, t^1_{N,2}]$, ..., $[t^1_{N,m_N}, t^2_{1,1}]$ в соответствии с формулой (5) можно получить уравнения, описывающие динамику изменения мембранного потенциала $u(t)$. Аналогичные вычисления подробно рассмотрены в [5]. Асимптотически интегрируя последовательно эти уравнения, учитывая стационарное воздействие нейронов из множеств $X_{N-1}, X_{N-2}, \ldots, X_{N-a_1}$, а также то, что значение мембранного потенциала в момент начала генерации спайка равно единице, для $t^2_{1,1}$ получим:

$$t^2_{1,1} = t^1_{N,m_N} + \frac{T_2 - t^1_{N,m_N} + t^1_{1,1} - q\sum_{k=1}^{m_N-1} k(t^1_{N,k+1} - t^1_{N,k}) - 2qT_1A_1}{1 + qm_N} + o(1). \tag{10}$$

Для нахождения момента времени $t^2_{1,2}$ — начала спайка второго нейрона из множества X_1, нужно учесть, что для этого элемента к воздействию импульсов, приходящих из множества X_N, добавляется импульс первого нейрона из множества X_1. В результате получим :

$$t^2_{1,2} = t^2_{1,1} + \frac{T_2 - t^2_{1,1} + t^1_{1,2} - q\sum_{k=1}^{m_N-1}(k-1)(t^1_{N,k+1} - t^1_{N,k}) - 2qT_1A_1}{1 + q(m_N+1)} + o(1). \tag{11}$$

Это выражение преобразуется с учетом (10). В результате для $\xi^2_{1,2} = t^2_{1,2} - t^2_{1,1}$ справедлива формула (9). Аналогично получаем соотношение для $\xi^2_{1,k}$, $k = 3, \ldots, m_1$. Заметим, что такие же рассуждения можно провести для нейронов из множеств $X_2, \ldots, X_N$.

Из этого утверждения следует, что спайки нейронов внутри множеств с течением времени синхронизируются и в пределе, при $t \to \infty$, $\xi_{i,j} \to 0$ для $j > 1$.

Утверждение 2. *Пусть* $\xi^1_{i,j} = 0$ *и* $\xi^2_{i,j} = 0$ *для* $j \geq 2$. *Тогда для величин* $\xi^1_{i,1}$, $\xi^2_{k,1}$, *где* $i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 2, 3, \ldots, N$ *(временных рассогласований между спайками нейронов соседних множеств), с точностью до* $o(1)$ *(при* $\lambda \to \infty$*) справедливы соотношения:*

$$\xi^2_{1,1}(1 + qm_N) + \sum_{k=2}^{N} \xi^1_{k,1} = T_2 - 2T_1qA_1, \tag{12}$$

$$\sum_{l=1}^{i-1} \xi^2_{l,1} + (1 + qm_{i-1})\xi^1_{i,1} + \sum_{l=k+1}^{N} \xi^1_{l,1} = T_2 - 2T_1qN_i, \tag{13}$$

$$\sum_{l=1}^{N-1} \xi^2_{l,1} + (1 + m_{N-1}q)\xi^2_{N,1} = T_2 - 2T_1qN_N. \tag{14}$$

Вычисления, подобные описанным выше, показывают, что для $i = 1, 2, \ldots, N$,:

$$\xi^2_{i,1} = \frac{T_2 - \sum_{r=2}^{m_1} \xi^1_{1,r} - \ldots - \sum_{t=1}^{m_N} \xi^1_{N,t} - q\sum_{l=2}^{m_N}(l-1)\xi^1_{N,l} - 2qT_1A_i}{1 + m_{i-1}q},$$

$$\xi^2_{i,j} = \frac{\xi^1_{i,j}}{1 + (m_{i-1} + j - 1)q}, \qquad j = 2, \ldots, m_i.$$

Так как $\xi^2_{k,j}, \xi^1_{k,j}$ с течением времени стремятся к нулю для $j \geq 2$, получаем формулы (12) - (14).

Эти уравнения описывают итерационный процесс, отражающий соотношения между временными рассогласованиями спайков на последовательных тактах прохождения волны по сети. Этот процесс сходится, так как итерационные соотношения удовлетворяют условиям метода Зейделя для решения системы линейных уравнений с положительно определенной и симметрической матрицей. Компоненты его предельной точки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, заданы формулами (8).

Таким образом, теорему можно считать доказанной. Полное доказательство будет опубликовано позднее.

3. Заключение

Следует отметить, что разбиение сети на множества $X_1, X_2, \ldots, X_N$ производилось достаточно произвольно, так же как произвольно нумеровались множества. Тем самым число аттракторов системы очень велико.

Сеть является "гибкой" системой, позволяющей хранить разнообразные периодические последовательности. Данные среды могут быть использованы, например, в системах, осуществляющих идентификацию периодических последовательностей. При настройке адаптивных систем, решающих задачи классификации или прогноза, также возникает необходимость многократного периодического повторения обучающей выборки.

Литература

[1] Кащенко С.А., Майоров В.В. Исследование дифференциально–разностных уравнений, моделирующих импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т.5, №12. С. 13 — 25.

[2] Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Волновые образования в кольцевых нейронных системах // Математическое моделирование. 1997. Т.9, №3. С. 29 — 39.

[3] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Об одной модели функционирования нейронной сети // Модел. динам. попул. Н.Новгород, 1990. С. 70 —78.

[4] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т.2, №11. С. 64 —76.

[5] Лагутина Н.С. Самоорганизация полносвязной сети импульсных нейронов // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2000. Т.7. №2. С.20 — 25.