

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 25 № 1(73) 2018

Основан в 1999 году
Выходит 6 раз в год

Главный редактор

В.А. Соколов,

доктор физико-математических наук, профессор, Россия

Редакционная коллегия

С.М. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Россия; **Л. Авено**, проф., Франция;
В.С. Афраимович, проф.-исследователь, Мексика; **О.Л. Бандман**, д-р техн. наук, Россия;
В.Н. Белых, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Бондаренко**, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Россия; **С.Д. Глызин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.); **А. Дехтярь**, проф.,
США; **М.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Л. Дольников**, д-р физ.-мат. на-
ук, проф., Россия; **В.Г. Дурнев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.А. Захаров**, д-р физ.-мат.
наук, проф., Россия; **Л.С. Казарин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **Ю.Г. Карпов**, д-р техн.
наук, проф., Россия; **С.А. Кащенко**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **А.Ю. Колесов**, д-р
физ.-мат. наук, проф., Россия; **Н.А. Кудряшов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Заслуженный деятель
науки РФ, Россия; **О. Кушнаренок**, проф., Франция; **И.А. Ломазова**, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Россия; **Г.Г. Малинецкий**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия; **В.Э. Малышкин**, д-р техн. наук,
проф., Россия; **А.В. Михайлов**, д-р физ.-мат. наук, проф., Великобритания; **В.А. Непомня-
щий**, канд. физ.-мат. наук, Россия; **Н.Х. Розов**, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН, Россия;
Н. Сидорова, д-р наук, Нидерланды; **Р.Л. Смелянский**, д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр.
РАН, академик РАЕН, Россия; **Е.А. Тимофеев**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия (зам. гл. ред.);
М.Б. Трахтенброт, д-р комп. наук, Израиль; **Д.В. Тураев**, проф., Великобритания; **Ф. Шне-
блен**, проф., Франция

Ответственный секретарь **Е. В. Кузьмин**, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Адрес редакции: ЯрГУ, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru; телефон (4852) 79-77-73

Научные статьи в журнал принимаются по электронной почте. Статьи должны содержать УДК, аннотации на русском и английском языках и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX . Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, №1. 2018

От редактора специального выпуска <i>Глызин С. Д.</i>	5
--	---

Динамические системы

О переносе ряда понятий статистической радиофизики в теорию одномерных точечных отображений <i>Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В.</i>	7
Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым <i>Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н.</i>	18
Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо <i>Быцюра С. В., Левашова Н. Т.</i>	33
Инвариантные характеристики вынужденных колебаний балки с продольным сжатием <i>Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М.</i>	54
Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова <i>Горюнов В. Е.</i>	63
Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием <i>Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В.</i>	71
Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности <i>Давыдова М. А., Захарова С. А.</i>	83
Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями <i>Куликов А. Н., Куликов Д. А.</i>	92
Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью <i>Марушкина Е. А.</i>	102
Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений <i>Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.</i>	112
Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией <i>Нефедов Н. Н., Никулин Е. И.</i>	125
Краевые состояния и киральные солитоны в топологических полях Черна–Саймонса–Холла <i>Агаларов А. М., Гаджимурадов Т. А., Потапов А. А., Рассадин А. Э.</i>	133

Вычислительная геометрия

О минимальном коэффициенте поглощения для n -мерного симплекса <i>Невский М. В., Ухалов А. Ю.</i>	140
--	-----

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 – 66186 от 20.06.2016 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова". Подписной индекс – 31907 в Объединенном каталоге "Пресса России". Редактор, корректор А.А. Аладьева. Редактор перевода Э.И. Соколова. Подписано в печать 21.02.2018. Дата выхода в свет 28.02.2018. Формат 60x84¹/₈. Усл. печ. л. 17,4. Уч.-изд. л. 15,2. Объем 150 с. Тираж 46 экз. Свободная цена. Заказ 001/018. Адрес типографии: ул. Советская, 14, оф. 109, г. Ярославль, 150003 Россия. Адрес издателя: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

ISSN 1818–1015 (Print)
ISSN 2313–5417 (Online)

P.G. Demidov Yaroslavl State University

MODELING AND ANALYSIS
OF INFORMATION SYSTEMS

Volume 25 No 1(73) 2018

Founded in 1999
6 issues per year

Editor-in-Chief

V. A. Sokolov,

Doctor of Sciences in Mathematics, Professor, Russia

Editorial Board

S.M. Abramov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **V. Afraimovich**, Prof.-researcher, Mexico; **L. Aveneau**, Prof., France; **O.L. Bandman**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.N. Belykh**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.A. Bondarenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.D. Glyzin**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **A. Dekhtyar**, Prof., USA; **M.G. Dmitriev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.L. Dol'nikov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.G. Durnev**, Prof., Dr. Sci., Russia; **L.S. Kazarin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **Yu.G. Karpov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **S.A. Kashchenko**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.Yu. Kolesov**, Prof., Dr. Sci., Russia; **O. Kouchnarenko**, Prof., France; **N.A. Kudryashov**, Dr. Sci., Prof., Russia; **I.A. Lomazova**, Prof., Dr. Sci., Russia; **G.G. Malinetsky**, Prof., Dr. Sci., Russia; **V.E. Malyshkin**, Prof., Dr. Sci., Russia; **A.V. Mikhailov**, Prof., Dr. Sci., Great Britain; **V.A. Nepomniaschy**, PhD, Russia; **N.H. Rozov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAE, Russia; **Ph. Schnoebelen**, Senior Researcher, France; **N. Sidorova**, Dr., Assistant Prof., Netherlands; **R.L. Smeliansky**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, Russia; **E.A. Timofeev**, Prof., Dr. Sci., Russia (*Deputy Editor-in-Chief*); **M. Trakhtenbrot**, Dr., Israel; **D. Turaev**, Prof., Great Britain; **V.A. Zakharov**, Prof., Dr. Sci., Russia

Responsible Secretary **E. V. Kuzmin**, Prof., Dr. Sci., Russia

Editorial Office Address: P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia
Website: <http://mais-journal.ru>, e-mail: mais@uniyar.ac.ru

© P.G. Demidov Yaroslavl State University, 2018

Contents

Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1. 2018

Dynamical Systems

- On the Transfer of a Number of Concepts of Statistical Radiophysics
to the Theory of One-dimensional Point Mappings
Agalarov A. M., Potapov A. A., Rassadin A. E., Stepanov A. V. 7
- Asymptotic Approximation of the Solution of the Reaction-Diffusion-Advection Equation
with a Nonlinear Advective Term
Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N. 18
- Upper and Lower Solutions for the FitzHugh–Nagumo Type System of Equations
Bytsyura S. V., Levashova N. T. 33
- Invariant Characteristics of Forced Oscillations of a Beam with Longitudinal Compression
Glyzin S. D., Lokhanin M. V., Sirotnin D. M. 54
- The Andronov–Hopf Bifurcation in a Biophysical Model of the Belousov Reaction
Goryunov V. E. 63
- Features of the Local Dynamics of the Opto-Electronic Oscillator Model with Delay
Grigorieva E. V., Kaschenko S. A., Glazkov D. V. 71
- On a Singularly Perturbed Problem of the Nonlinear Thermal Conductivity
in the Case of Balanced Nonlinearity
Davydova M. A., Zakharova S. A. 83
- The Kuramoto–Sivashinsky equation. A Local Attractor Filled with Unstable Periodic Solutions
Kulikov A. N., Kulikov D. A. 92
- Periodic and quasiperiodic solutions in the system of three Hutchinson equations
with a delayed broadcast connection
Marushkina E. A. 102
- Periodic Variations of an Autowave Structure in Two-dimensional System of Parabolic Equations
Melnikova A. A., Deryugina N. N. 112
- Existence and Stability of the Periodic Solution with an Interior Transitional Layer
in the Problem with a Weak Linear Advection
Nefedov N. N., Nikulin E. I. 125
- Edge States and Chiral Solitons in Topological Hall and Chern–Simons Fields
Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. E. 133

Computational Geometry

- On Minimal Absorption Index for an n -Dimensional Simplex
Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. 140

От редактора специального выпуска

С. Д. Глызин

Данный выпуск журнала содержит статьи, подготовленные на основе докладов Международной научной конференции «**Новые тенденции в нелинейной динамике**».

Конференция была организована и проведена с 5 по 7 октября 2017 года в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова в сотрудничестве с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Ижевским институтом компьютерных исследований.

Выпуск открывается работой, принадлежащей коллективу авторов (А.М. Агаларов, А.А. Потапов, А.Э. Рассадин и А.В. Степанов), в которой обсуждается возможность использования биспектра при исследовании регулярного и хаотического поведения одномерных точечных отображений.

Статья Е.А. Антипова, Н.Т. Левашовой и Н.Н. Нефедова посвящена анализу решений вида движущегося фронта начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция в полосе с периодическими условиями по одной из переменных. Особенностью данной работы является постановка задачи в двумерной области и наличие большого адвективного слагаемого в исходном уравнении.

В работе С.В. Быцоры и Н.Т. Левашовой рассматривается решение вида движущегося фронта сингулярно возмущенной системы уравнений типа ФицХью–Нагумо. Приведен алгоритм построения верхнего и нижнего решений системы параболических уравнений с одномасштабным внутренним переходным слоем. Этот алгоритм может быть в дальнейшем обобщен на более сложные системы с двухмасштабными переходными слоями или на системы с разрывными реактивными слагаемыми.

Вынужденные колебания упругой балки с продольным сжатием обсуждаются в статье С.Д. Глызина, М.В. Лоханина и Д.М. Сиротина. Для изучения инвариантных числовых характеристик аттрактора соответствующей динамической системы вычислялись корреляционный интеграл и корреляционная размерность, а также β -статэнтропия. Зависимость β -статэнтропии от частоты внешнего воздействия может служить эффективным инструментом для оценки адекватности математической модели вынужденных колебаний балки с потерей устойчивости.

В работе В.Е. Горюнова рассмотрена математическая модель колебательной химической реакции Белоусова. Взаимодействие основных компонентов в такой реакции интерпретируется феноменологически близкой к ней моделью популяционной динамики. Решена задача о диффузионной потере устойчивости пространственно однородного цикла, бифурцирующего из состояния равновесия системы.

Статья Е.В. Григорьевой, С.А. Кашенко и Д.В. Глазкова посвящена моделированию оптико-электронного осциллятора, описываемого системой дифференциальных уравнений с запаздыванием. Анализируется локальная динамика сингулярно возмущенной системы в окрестности нулевого состояния равновесия.

Применение модифицированного асимптотического метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств позволило М.А. Давыдовой и С.А. Захаровой исследовать проблему существования устойчивых по Ляпунову стационарных решений с внутренними слоями уравнения нелинейной теплопроводности в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры.

В статье А.Н. Куликова и Д.А. Куликова рассмотрена периодическая краевая задача для уравнения Курамото–Сивашинского. Изучены локальные бифуркации в окрестности пространственно однородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. В работе показано, что потеря устойчивости однородными состояниями равновесия приводит

к появлению двумерного локального аттрактора, все решения на котором, кроме одного пространственно неоднородного состояния, – периодические функции времени.

В работе Е. А. Марушкиной исследуются периодические и квазипериодические решения системы трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью.

Исследованию решений типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области посвящена статья А. А. Мельниковой и Н. Н. Дерюгиной. Исследование проведено с помощью методов теории контрастных структур, что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой и определить скорость фронта в зависимости от времени.

В статье Н. Н. Нефедова и Е. И. Никулина изучается сингулярно возмущенная периодическая по времени задача для параболического уравнения реакция-адвекция-диффузия со слабой линейной адвекцией. Рассмотрен случай реактивного члена в виде кубической нелинейности. В работе на основе уже известных результатов исследуется более общая постановка задачи, причем предоставляются более слабые достаточные условия для существования решения с внутренним переходным слоем, чем в предыдущих работах.

А. М. Агаларов, Т. А. Гаджимурадов, А. А. Потапов и А. Э. Рассадин в своей работе рассматривают проблему многокомпонентного расширения $(2 + 1)D$ -калибровочной топологической модели Jackiw–Pi, описывающей нелинейную квантовую динамику заряженных частиц в многослойных системах Холла. С применением размерной редукции авторами построены многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера для частиц с учетом их взаимодействия.

Динамические системы

©Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-7-17

УДК 537.862, 517.9

О переносе ряда понятий статистической радиофизики в теорию одномерных точечных отображений

Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. В статье обсуждается возможность использования биспектра при исследовании регулярного и хаотического поведения одномерных точечных отображений. Эффективность трансфера этого понятия в нелинейную динамику продемонстрирована на примере отображения Фейгенбаума. Также в работе рассмотрено применение энтропии Кульбака–Лейблера в теории точечных отображений. Показано, что эта величина информационного характера пригодна для описания поведения статистических ансамблей одномерных отображений. В рамках этой теории выявлены некоторые общие свойства её поведения. Конструктивизм энтропии Кульбака–Лейблера в теории точечных отображений показан также прямым её вычислением для отображения «зуб пилы» с линейным начальным распределением вероятностей. Кроме того, для этого отображения указано счётное множество начальных распределений вероятностей, попадающих в его стационарное распределение вероятностей за конечное число шагов.

Ключевые слова: бифуркация удвоения периода, дискретное преобразование Фурье, уравнение Фробениуса–Перрона, В-сплайн, разбиение единицы

Для цитирования: Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., "О переносе ряда понятий статистической радиофизики в теорию одномерных точечных отображений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 7–17.

Об авторах: Агаларов Агалар Магомед-Закиевич, orcid.org/0000-0003-1083-4124, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором Теоретической физики, Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН, ул. М. Ярагского, 94, г. Махачкала, 367015, Россия, e-mail: aglarow@mail.ru

Потапов Александр Алексеевич, orcid.org/0000-0001-9864-3546, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр., Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, корп. 7, г. Москва, 125009, Россия
Президент совместной китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов, просп. Хуанг Пу, 601, Университет ДжиНан, Гуанджоу, Китай, 510632, e-mail: potapov@cplire.ru

Рассадин Александр Эдуардович, orcid.org/0000-0002-7396-0112, член Правления, Нижегородское математическое общество, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: brat_ras@list.ru

Степанов Антон Викторович, orcid.org/0000-0003-4306-1199, канд. физ.-мат. наук, ст. преп.,
Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, ул. К. Маркса, 29, г. Чебоксары, 428000, Россия,
e-mail: for.antonstep@gmail.com

Благодарности:

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-08-01356-а.

Введение

В настоящее время нелинейная динамика продолжает своё интенсивное развитие. В ней как появляются новые направления, так и формируется более глубокое понимание уже известных, неуклонно расширяется область её приложений в различных разделах науки и техники. Так, за последние годы открыт принципиально новый вид динамического хаоса – смешанная динамика [1], характерная для таких неголономных механических систем, как кельтский камень или волчок Суслова. Этот тип хаоса кардинально отличается от консервативного хаоса в гамильтоновых неинтегрируемых системах и странных аттракторов диссипативных систем. Большой интерес во всём мире в последнее время вызывает анализ типичных для радиофизической проблематики так называемых «химерных состояний» (или химер) в ансамблях связанных идентичных осцилляторов (см. [2] и ссылки там). Химерами называют кластеры осцилляторов с несинхронной динамикой в локализованных областях пространства, в то время как все другие осцилляторы демонстрируют синхронную динамику. Далее, потенциальные возможности, присущие широкополосным системам связи на основе динамического хаоса, привлекают всё большее число исследователей и ученых во всём мире. Свойство самосинхронизации приемника с передатчиком, возможность реализации множества хаотических последовательностей на одном генераторе хаоса, сплошной спектр плотности мощности – все это позволяет надеяться на широкое использование хаотических сигналов в системах обработки и передачи информации в самом ближайшем будущем [3]. Особо отметим имеющие большие перспективы применения нелинейной динамики в радиолокации [4] и в анализе нелинейных радиотехнических систем с запаздывающей обратной связью [5]. Очевидно, что возможен и обратный процесс, а именно перенос методов статистической радиофизики в нелинейную динамику. В частности, к теории динамического хаоса могут быть адаптированы тройная автокорреляционная функция стохастической величины $\xi(t)$ [6]

$$Q(\tau_1, \tau_2) = \langle \xi(t) \cdot \xi(t + \tau_1) \cdot \xi(t + \tau_2) \rangle, \quad (1)$$

имеющая в статистической радиофизике смысл меры негауссовости случайного процесса [6], и её биспектр [6], т.е. двойное преобразование Фурье от функции (1)

$$B(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\tau_1, \tau_2) \cdot \exp(-i \cdot \omega_1 \cdot \tau_1 - i \cdot \omega_2 \cdot \tau_2) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2. \quad (2)$$

Энтропия Кульбака–Лейблера, введенная в [7] для двух распределений вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$ как

$$K_{12} = \int p_2(x) \cdot \ln \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \cdot dx, \quad (3)$$

в течение последних десятилетий также активно используется в задачах обработки сигналов и изображений [8, 9].

В докладе [10] величина (2) была применена к рассмотрению поведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих детерминированным хаосом, а в докладе [11] функционал (3) обсуждался применительно к стохастическим динамическим системам.

Данная статья продолжает линию на трансфер понятий статистической радиофизики в теорию динамических систем, начатую в [10, 11], в части другого важного объекта исследования нелинейной динамики — отображений отрезка $I = [a, b]$ в себя:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f : I \rightarrow I. \quad (4)$$

Далее в статье рассмотрены примеры, иллюстрирующие конструктивизм применения биспектра (2) и энтропии Кульбака–Лейблера (3) при исследовании поведения отображений вида (4). В заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

1. Биспектры отображения Фейгенбаума

При числе итераций $N \gg 1$ отображения (4) тройная автокорреляционная функция динамической переменной x_n может быть вычислена как

$$Q_{jk} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_n \cdot x_{n+j} \cdot x_{n+k}. \quad (5)$$

Формула (5) означает, что в выражении (1) при переходе к анализу точечных отображений статистическое усреднение заменено усреднением по дискретному времени. Соответственно для оценки биспектра в рамках теории точечных отображений вместо двойного интегрирования в выражении (2) достаточно применить к матрице (5) двойное дискретное преобразование Фурье [12]

$$B_{jk} = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N U_{jl} \cdot U_{km} \cdot Q_{lm}, \quad (6)$$

где $U_{jk} = \exp \left[-i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot j \cdot k}{N} \right]$ — унитарная матрица дискретного преобразования Фурье [12].

Результаты применения формул (5) и (6) к отображению Фейгенбаума

$$f(x, \lambda) = 1 - \lambda \cdot x^2, \quad I = [-1, 1], \quad (7)$$

ставшему всемирно известным после выхода работы [13], в которой на основе анализа поведения числовой последовательности (4) с функцией (7) при различных значениях параметра $\lambda \in [0, 2]$ было показано, что сценарий перехода к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода универсален для широкого класса динамических систем [13], приведены на рис. 1–4.

Из рис. 1 и 2 видно, что при значениях параметра $\lambda < \lambda_c (= 1.4011\dots)$ модуль биспектра отображения Фейгенбаума имеет регулярный характер, соответствующий выходу изображающей точки отображения (7) на периодический режим после первой (рис. 1) и третьей (рис. 2) бифуркации удвоения периода соответственно. Из рис. 3 видно, что квазирегулярное движение системы происходит вблизи цикла периода 3. В непосредственной близости к области развитого хаоса (рис. 4) модуль биспектра имеет крайне нерегулярный характер.

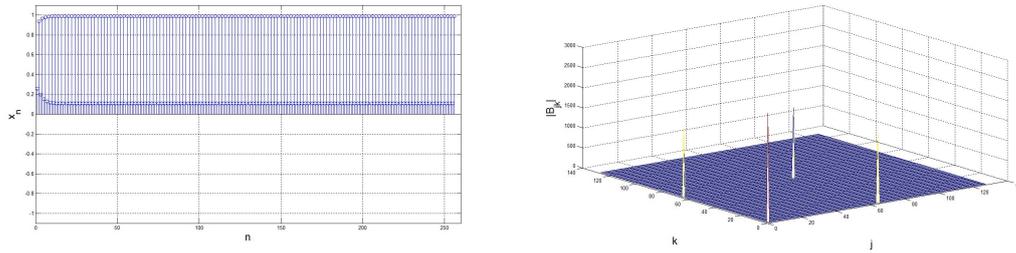


Рис. 1. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 0.91$

Fig. 1. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 0.91$

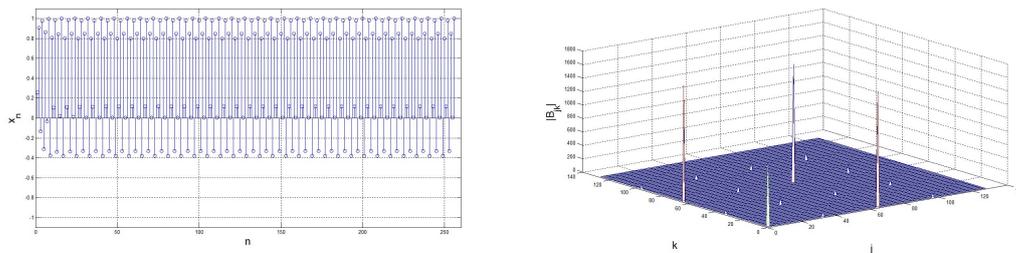


Рис. 2. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.38$

Fig. 2. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.38$

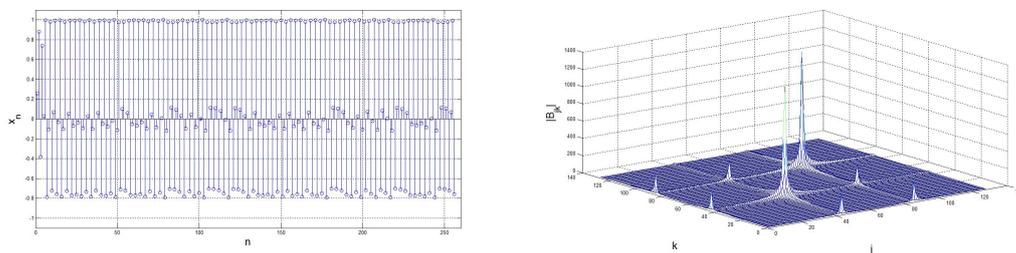


Рис. 3. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.79$

Fig. 3. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.79$

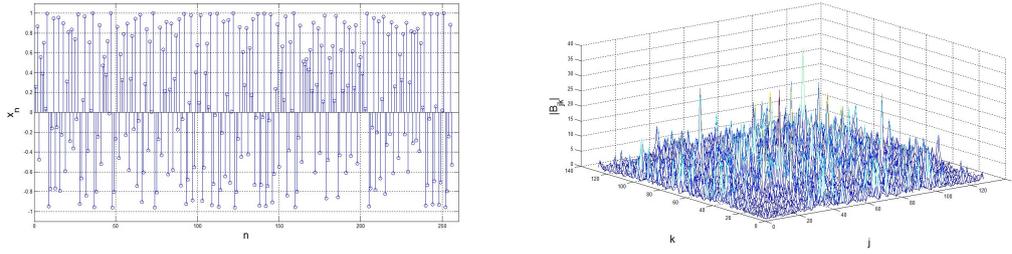


Рис. 4. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.96$

Fig. 4. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.96$

2. Общие свойства энтропии Кульбака–Лейблера для одномерных отображений

Рассмотрим ансамбль одномерных отображений (4) с начальной плотностью распределения вероятностей $p_0(x)$. Пусть для определённости $I = [0, 1]$, тогда должно быть

$$\int_0^1 p_0(x) \cdot dx = 1. \quad (8)$$

Под действием отображения f плотность распределения вероятностей ансамбля начинает эволюционировать в дискретном времени согласно уравнению Фробениуса–Перрона [14]:

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^r |f'(\xi_k(x))|^{-1} \cdot p_n(\xi_k(x)), \quad (9)$$

где $p_n(x)$ — плотность распределения на n -м шаге, а суммирование в (9) идёт по всем прообразам точки $x \in I$ при отображении f .

Мы можем обобщить определение (3) энтропии Кульбака–Лейблера для случая одномерных точечных отображений следующим образом:

$$K_n[p_0] = \int_0^1 p_n(x) \cdot \ln \frac{p_n(x)}{p_0(x)} \cdot dx. \quad (10)$$

Последовательность функционалов (10) зависит от конкретного вида начального распределения вероятностей $p_0(x)$ и обладает рядом очевидных свойств:

А. $K_0[p_0] = 0$ для любого начального распределения вероятностей $p_0(x)$.

Б. Если оператор Фробениуса–Перрона имеет неподвижную точку $p(x)$, т.е. если в некоторой норме $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = p(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n[p_0] \equiv K_\infty[p_0] = \int_0^1 p(x) \cdot \ln \frac{p(x)}{p_0(x)} \cdot dx. \quad (11)$$

3. Энтропия Кульбака–Лейблера для отображения «зуб пилы»

Покажем, как работает введённое в предыдущем разделе определение величины (10) на примере отображения «зуб пилы» [14]

$$f(x) = \{2 \cdot x\}, \quad (12)$$

где фигурные скобки обозначают взятие дробной части числа. График отображения (12) приведён на рис. 5.

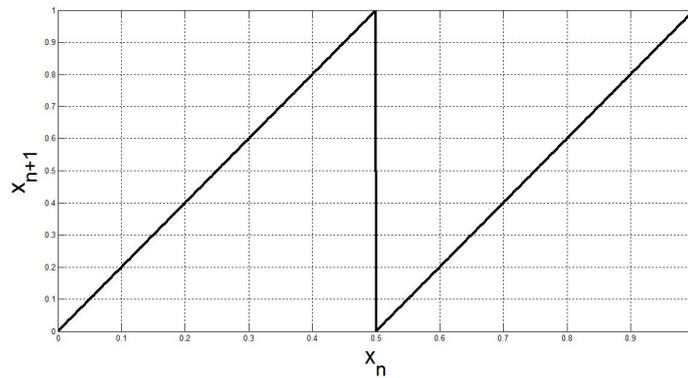


Рис. 5. График отображения «зуб пилы»
 Fig. 5. Graph of the "saw tooth" mapping

Уравнение Фробениуса–Перрона (9) для отображения (12) есть [14]

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot p_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot p_n\left(\frac{x+1}{2}\right). \quad (13)$$

Это уравнение имеет следующее инвариантное распределение [14]:

$$p(x) = 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (14)$$

Выберем начальное распределение вероятностей для отображения (12) в виде

$$p_0(x) = 2 \cdot x, \quad (15)$$

тогда с помощью уравнения (13) найдём, что

$$p_n(x) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{x}{2^{n-1}}. \quad (16)$$

Подставив эту плотность распределения вероятностей на n -м шаге в выражение (10), вычислим энтропию Кульбака–Лейблера для отображения (12) с начальным распределением (15):

$$K_n[2 \cdot x] = \frac{1 - 2^{-n}}{2} + \frac{(1 - 2^{-n})^2}{4 \cdot 2^{-n}} \cdot \ln \frac{1 + 2^{-n}}{1 - 2^{-n}} + \ln \frac{1 + 2^{-n}}{2}. \quad (17)$$

Графики выражений (16) и (17) приведены на рис. 6. Легко видеть, что $\|p_n - p\|_{C[0,1]} = 2^{-n}$, т.е. с ростом n последовательность функций (16) стремится к инвариантному распределению (14), что мы и наблюдаем на рис. 6. Далее, в полном согласии с формулой (11) предельное выражение для энтропии Кульбака–Лейблера (17) равно

$$K_\infty[2 \cdot x] = 1 - \ln 2. \quad (18)$$

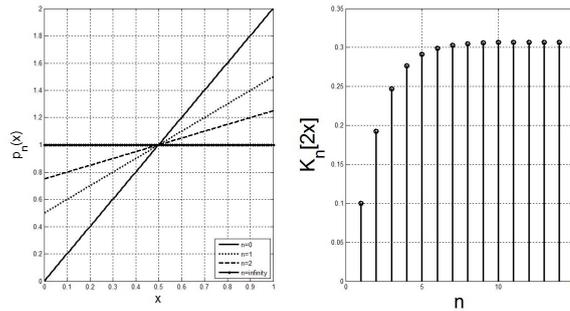


Рис. 6. Временная эволюция плотности вероятностей (слева) и энтропии Кульбака–Лейблера (справа)
 Fig. 6. Temporal evolution of probability density (on the left) and the Kullback–Leibler entropy (on the right)

Хорошо известно, что отображение (12) получается из отображения (7) при $\lambda = 2$ заменой Улама–фон Неймана $x \rightarrow -\cos(2 \cdot \pi \cdot x)$ [14]. Вследствие этого динамика отображения «зуб пилы» чисто хаотична, однако из рис. 6 видно, что эволюция энтропии Кульбака–Лейблера (17) носит явно выраженный регулярный характер. Далее, рассмотрим функцию $\varphi(x)$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi(x) = [0, 2]$, нормированную на нём на единицу $\int_0^2 \varphi(x) \cdot dx = 1$ и осуществляющую разбиение единицы [15]:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) = 1, \quad (19)$$

тогда если начальное распределение вероятностей $p_0(x) = 2 \cdot \varphi(2 \cdot x)$, то в силу уравнений (13) и (19) $p_0(x) = 2 \cdot \varphi(2 \cdot x)$, т.е. мы сразу же попадаем в инвариантное распределение (14). В качестве примера такой функции можно взять В-сплайн степени 1 [16] (см. рис. 7):

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 2 - x, & x \in [1, 2]; \\ 0 & x \notin [0, 2]. \end{cases} \quad (20)$$

Этот результат может быть обобщен, а именно, рассмотрим В-сплайн степени l [16]:

$$\varphi_l(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin k/2}{k/2} \right)^{l+1} \cdot \exp \left[i \cdot k \cdot \left(x - \frac{l+1}{2} \right) \right] \cdot \frac{dk}{2 \cdot \pi}. \quad (21)$$

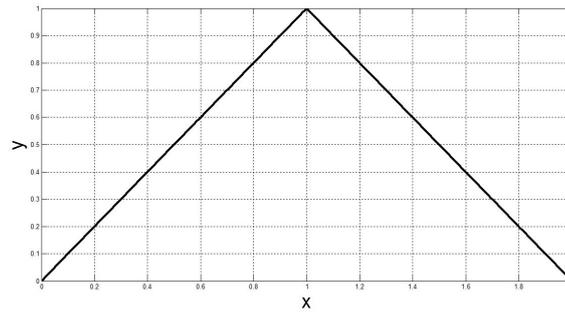


Рис. 7. График В-сплайна степени 1
 Fig. 7. Graph of B-spline of the first degree

Каждая из функций (21) имеет компактный носитель $\text{supp } \varphi_l(x) = [0, l + 1]$, нормирована на нём на единицу $\int_0^{l+1} \varphi_l(x) \cdot dx = 1$ и даёт разбиение единицы (19).

Тогда, выписывая с помощью (13) уравнение Фробениуса–Перрона для отображения f^m

$$p_{n+m}(x) = \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{k=0}^{2^m-1} p_n \left(\frac{x+k}{2^m} \right) \quad (22)$$

и подставляя в него в качестве начального распределения

$$p_0(x) = 2^m \cdot \varphi_{2^m-1}(2^m \cdot x), \quad (23)$$

в силу разбиения единицы (19) получаем $p_m(x) = 1$, т.е., стартуя с начального распределения (23), за m шагов мы попадаем в инвариантное распределение (14) и соответственно в стационарное значение энтропии Кульбака–Лейблера (11), равное $K_\infty[p_0] = - \int_0^1 \ln p_0(x) \cdot dx$.

4. Заключение

При появлении новых сценариев перехода к хаосу, а также для более глубокого понимания уже имеющихся сценариев (Ландау (1944 г.), Рюэля–Такенса (1971 г.), Помо–Манневиля (1979 г.), Фейгенбаума (1980 г.)) могут потребоваться более тонкие критерии наличия хаоса в динамической системе. В целях подбора таких критериев в данной статье было произведено пилотное исследование применения понятия «биспектр» (2) к отображению Фейгенбаума (7). Оно продемонстрировало хорошую различаемость регулярного и хаотического поведения этого отображения с помощью этой величины. Для расширения нашего осознания возможностей биспектра теперь необходимо детальное исследование эффектов скейлинга на структуре «бифуркационного дерева» отображения (7) совместно с графиком зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра, особенно в окрестности критического аттрактора Фейгенбаума [14]. Также весьма существенно расширять перечень отображений с уже исследованным поведением, на траекториях которых вычисляются биспектры. Очевидно, что открываться список этих тестовых отображений будет отображением окружности [14], причём особое внимание должно быть уделено поведению биспектра на границах языков Арнольда.

Величины энтропийного вида в теории динамических систем вводились уже неоднократно – см. [17] и ссылки там, однако все эти введённые параметры носят статический характер. Между тем рассмотрение нами простейшего примера – отображения «зуб пилы» (12) — сразу же продемонстрировало динамическое поведение энтропии Кульбака–Лейблера (10). Следующими после отображения (12) естественными кандидатами для исследования поведения на них энтропии Кульбака–Лейблера являются отображения «тент» и «косой тент» [14], уравнения Фробениуса–Перрона (9) для которых выглядят особенно просто. Результаты работы были доложены на Международной научной конференции «Новые тенденции в нелинейной динамике» (Россия, г. Ярославль, 5 – 7 октября 2017 г.) [18] и на семинаре «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (Россия, г. Нижний Новгород, 8 октября 2017 г.).

Список литературы / References

- [1] Гонченко С.В., Тураев Д.В., “О трёх типах динамики и понятии аттрактора”, *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*, **297**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 133–157; English transl.: Gonchenko S. V., Turaev D. V., “On three types of dynamics and the notion of attractor”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **297**:1 (2017), 116–137.
- [2] Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Scholl E., Анищенко В. С., “Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов”, *Письма в ЖТФ*, **42**:14 (2016), 103–110; English transl.: Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Scholl E., Anishchenko V. S., “Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators”, *Technical Physics Letters*, **42**:7 (2016), 765–768.
- [3] Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Максимов Н. А., Панас А. И., *Генерация хаоса*, ред. Дмитриев А. С., Техносфера, Москва, 2012, 424 с.; [Dmitriev A. S., Efremova E. V., Maksimov N. A., Panas A. I., *Generacija haosa*, ed. Dmitriev A. S., Tehnosfera, Moskva, 2012, 424 pp., (in Russian).]
- [4] Potapov A. A., *The Foundations of Chaos Revisited: From Poincare to Recent Advancements*, ed. Skiadas C., Springer Int. Publ., Switzerland, Basel, 2016, ISBN: 978-3-319-29701-9.
- [5] Кащенко И. С., “Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной”, *Математические заметки*, **101**:2 (2017), 318–320; English transl.: Kashchenko I. S., “Local dynamics of a second-order differential-difference equation with large delay at the first derivative”, *Mathematical Notes*, **101**:1–2 (2017), 379–381.
- [6] Малахов А. Н., *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований*, Сов. радио, Москва, 1978, 376 с.; [Malahov A. N., *Kumuljantnyj analiz sluchajnyh negaussovyh processov i ih preobrazovanij*, Sov. radio, Moskva, 1978, 376 pp., (in Russian).]
- [7] Кульбак С., *Теория вероятности и статистика*, Наука, Москва, 1967, 408 с.; [Kul’bak S., *Teorija verojatnosti i statistika*, Nauka, Moskva, 1967, 408 pp., (in Russian).]
- [8] Савченко В. В., “Различение случайных сигналов в частотной области”, *Радиотехника и электроника*, **42**:4 (1997), 426–429; [Savchenko V. V., “Razlichenie sluchajnyh signalov v chastotnoj oblasti”, *Radiotekhnika i jelektronika*, **42**:4 (1997), 426–429, (in Russian).]
- [9] Горячкин О. В., *Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи*, Радио и связь, Москва, 2003, 230 с.; [Gorjachkin O. V., *Metody slepoj obrabotki signalov i ih prilozhenija v sistemah radiotekhniki i svjazi*, Radio i svjaz, Moskva, 2003, 230 pp., (in Russian).]

- [10] Абдуллаев Г. О., Потапов А. А., Рабазанов А. К., Рассадин А. Э., “Новый критерий различения периодических и хаотических режимов в динамических системах (на примере модели Рикитаке)”, *Материалы XII Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 85-летию профессора М.Г. Алишаева* (Россия, Махачкала, 19–22 сентября 2017 г.), Махачкала, 2017, 8–10; [Abdullaev G. O., Potapov A. A., Rabazanov A. K., Rassadin A. Je., “Novyj kriterij razlichenija periodicheskikh i haoticheskikh rezhimov v dinamicheskikh sistemah (na primere modeli Rikitake)”, *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferencii «Fundamentalnye i prikladnye problemy matematiki i informatiki», priurochennoj k 85-letiju professora M.G. Alishaeva* (Rossija, Mahachkala, 19–22 sentjabrja 2017 g.), Mahachkala, 2017, 8–10, (in Russian).]
- [11] Агаларов А. М., Гаджимурадов Т. А., Потапов А. А., Рассадин А. Э., “Об эволюции энтропии Кульбака–Лейблера в стохастических динамических системах”, *Актуальные проблемы физической и функциональной электроники: материалы 20-й Всероссийской молодежной научной школы-семинара* (Россия, Ульяновск, 19–22 сентября 2017 г.), УЛГТУ, Ульяновск, 2017, 84–85; [Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. Je., “Ob evoljucii entropii Kulbaka–Lejblera v stohasticheskikh dinamicheskikh sistemah”, *Aktualnye problemy fizicheskoj i funkcionalnoj elektroniki: materialy 20-j Vserossijskoj molodezhnoj nauchnoj shkoly-seminara* (Rossija, Uljanovsk, 19–22 sentjabrja 2017 g.), UIGTU, Uljanovsk, 2017, 84–85, (in Russian).]
- [12] Юнаковский А. Д., *Начала вычислительных методов для физиков*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2007, 219 с.; [Junakovskij A. D., *Nachala vychislitelnyh metodov dlja fizikov*, IPF RAN, Nizhny Novgorod, 2007, 219 pp., (in Russian).]
- [13] Feigenbaum M. J., “Universal Behaviour in Nonlinear Systems”, *Los Alamos Science*, **1:1** (1980), 4–27.
- [14] Кузнецов С. П., *Динамический хаос*, Физматлит, 2001, 760 с.; [Kuznetcov S. P., *Dinamicheskij haos*, Fizmatlit, 2001, 760 pp., (in Russian).]
- [15] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, Москва, 1979, 760 с.; [Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., *Sovremennaja geometrija. Metody i prilozhenija*, Nauka, Moskva, 1979, 760 pp., (in Russian).]
- [16] Смоленцев Н. К., *Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB*, ДМК Пресс, Москва, 2008, 356 с.; [Smolencev N. K., *Osnovy teorii vejvletov. Vejvlety v MATLAB*, DMK Press, Moskva, 2008, 356 pp., (in Russian).]
- [17] Заславский Г. М., *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва, 1984, 272 с.; [Zaslavskij G. M., *Stohastichnost dinamicheskikh sistem*, Nauka, Moskva, 1984, 272 pp., (in Russian).]
- [18] Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., “Сценарий перехода к нерегулярной динамике в генераторах хаоса через удвоение периода и биспектры отображения Фейгенбаума”, *Тезисы докладов Международной научной конференции «Новые тенденции в нелинейной динамике»* (Россия, Ярославль, 5–7 октября 2017 г.), ЯрГУ, Ярославль, 2017, 11–12; [Agalarov A. M., Potapov A. A., Rassadin A. Je., Stepanov A. V., “Scenarij perehoda k nereguljarnoj dinamike v generatorah haosa cherez udvoenie perioda i bispektry otobrazhenija Fejgenbauma”, *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Novye tendencii v nelinejnoj dinamike»* (Rossija, Jaroslavl, 5–7 oktjabrja 2017), JarGU, Jaroslavl, 2017, 11–12, (in Russian).]
-

Agalarov A. M., Potapov A. A., Rassadin A. E., Stepanov A. V., "On the Transfer of a Number of Concepts of Statistical Radiophysics to the Theory of One-dimensional Point Mappings", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 7–17.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-7-17

Abstract. In the article, the possibility of using a bispectrum under the investigation of regular and chaotic behaviour of one-dimensional point mappings is discussed. The effectiveness of the transfer of this concept to nonlinear dynamics was demonstrated by an example of the Feigenbaum mapping. Also in the work, the application of the Kullback-Leibler entropy in the theory of point mappings is considered. It has been shown that this information-like value is able to describe the behaviour of statistical ensembles of one-dimensional mappings. In the framework of this theory some general properties of its behaviour were found out. Constructivity of the Kullback-Leibler entropy in the theory of point mappings was shown by means of its direct calculation for the "saw tooth" mapping with linear initial probability density. Moreover, for this mapping the denumerable set of initial probability densities hitting into its stationary probability density after a finite number of steps was pointed out.

Keywords: period doubling bifurcation, discrete Fourier transform, Frobenius–Perron equation, B-spline, partition of unity

On the authors:

Agalar M. Agalarov, orcid.org/0000-0003-1083-4124, PhD,
Institute of Physics. Kh. I. Amirkhanova of the Dagestan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
94 M. Yaragsky str., Makhachkala, 367015, Russia, e-mail: aglarow@mail.ru

Alexander A. Potapov, orcid.org/0000-0001-9864-3546, Dr. Ph.-Math. Sc.
Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences,
11 Mokhovaya str., buil. 7, Moscow, 125009, Russia

JNU-IRE RAS Joint Laboratory of Information Technology and Fractal Processing of Signals, JiNan University,
601 Huangpu avenue, Guangzhou, 510632, China, e-mail: potapov@cplire.ru

Alexander E. Rassadin, orcid.org/0000-0002-7396-0112, Member of the Presidium Nizhny Novgorod Mathematical Society,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950, Russia e-mail: brat_ras@list.ru

Anton V. Stepanov, orcid.org/0000-0003-4306-1199, PhD, senior tutor,
Chuvash State Agriculture Academy,
29 K. Marx str., Cheboksary, 428000, Russia, e-mail: for.antonstep@gmail.com

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, grant No 18-08-01356-a.

© Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-18-32

УДК 517.9

Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым

Антипов Е. А., Левашова Н. Т.¹, Нефедов Н. Н.¹

получена 15 ноября 2017

Аннотация. В работе рассматривается решение вида движущегося фронта начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция в полосе с периодическими условиями по одной из переменных. Особенности настоящей работы является постановка задачи в двумерной области и наличие большого адвективного слагаемого в исходном уравнении. Интерес к решениям вида фронта связан с задачами горения или нелинейных акустических волн. В области определения функции, описывающей движущийся фронт, содержится подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. Задачи с внутренними переходными слоями содержат естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Наличие малого параметра при старшей производной по пространственным координатам делает задачу сингулярно возмущенной. Численное решение таких задач встречает определенные сложности, связанные с выбором сеток и начальных условий. Для решения этих проблем наиболее успешным является использование аналитических методов. Асимптотический анализ с использованием алгоритма Васильевой, проведенный в настоящей работе, позволяет определить условия существования решения вида фронта, а также получить асимптотическое приближение решения, которое можно выбрать в качестве начального условия для численного алгоритма. Кроме того, аналитические методы, использованные в работе, позволяют выписать уравнение для кривой, в области которой локализован фронт. Эти сведения могут быть полезными для разработки математических моделей или численных алгоритмов для решения задач вида реакция-диффузия-адвекция.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия-адвекция, двумерный движущийся фронт, внутренний переходный слой, асимптотическое представление, малый параметр

Для цитирования: Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 18–32.

Об авторах: Антипов Евгений Александрович, orcid.org/0000-0001-6734-683X, зам. начальника Управления информатизации, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Благодарности:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

В работе рассматривается решение вида движущегося фронта начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция в полосе $0 \leq y \leq a$; $x \in \mathbb{R}$ с периодическими условиями по переменной x . Задачи с решением вида фронта на отрезке рассматривались ранее в работах [1–5], движение двумерного фронта в задаче реакция-диффузия было исследовано в работах [6, 7]. Особенностями настоящей работы является постановка задачи в двумерной области и наличие большого адвективного слагаемого в исходном уравнении.

Интерес к решениям вида фронта связан с задачами горения [8] или нелинейных акустических волн [9]. В области определения функции, описывающей движущийся фронт, содержится подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. Задачи с внутренними переходными слоями содержат естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Наличие малого параметра при старшей производной по пространственным координатам делает задачу сингулярно возмущенной. Численное решение таких задач встречает определенные сложности, связанные с выбором сеток и начальных условий. Для решения этих проблем наиболее успешным является использование аналитических методов [10–13]. Асимптотический анализ с использованием алгоритма Васильевой [14], проведенный в настоящей работе, позволяет определить условия существования решения вида фронта, а также получить асимптотическое приближение решения, которое можно выбрать в качестве начального условия для численного алгоритма. Кроме того, аналитические методы, использованные в работе, позволяют выписать уравнение для кривой, в области которой локализован фронт.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} &= A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} + B(u, x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, a), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0, t, \varepsilon) &= u^0(x), \quad u(x, a, t, \varepsilon) = u^1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x + L, y, t, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, a], \quad t \in [0, T], \\ u(x, y, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, a]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функции $A(x, y)$ и $B(u, x, y)$ – L -периодические по переменной x , достаточно гладкие в области $I_u \times \bar{D} \times [0, T]$, где I_u – допустимый интервал значений u , $\bar{D} = \{(x, y) : \mathbb{R} \times [0, a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^1(x)$ – L -периодические, непрерывные при $x \in \mathbb{R}$; $u_{init}(x, y, \varepsilon)$ – непрерывная функция в \bar{D} , L -периодическая по переменной x , удовлетворяющая условиям согласования $u_{init}(x, 0, \varepsilon) = u^0(x)$, $u_{init}(x, a, \varepsilon) = u^1(x)$.

Будем рассматривать задачу (1), считая, что выполнен ряд условий.

Условие А1. Пусть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} + B(u, x, y) = 0 \tag{2}$$

с дополнительным условием $u(x, 0) = u^0(x)$ имеет решение $\varphi^{(-)}(x, y)$, а с дополнительным условием $u(x, a) = u^1(x)$ — решение $\varphi^{(+)}(x, y)$, где $\varphi^{(\mp)}(x, y)$ — достаточно гладкие в \bar{D} L -периодические по переменной x функции, причем

$$\varphi^{(-)}(x, y) < 0 < \varphi^{(+)}(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

Условие А2. Пусть функции $F^{(\mp)}(x, y) := \frac{A(x, y)}{\varphi^{(\mp)}(x, y)}$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x в полосе $\Pi : \{0 \leq y \leq a; x \in \mathbb{R}\}$.

Мы будем исследовать решение задачи (1), которое имеет вид движущегося фронта, а именно такое решение, которое в каждый момент времени при $0 \leq y \leq h(x, t)$ близко к поверхности $\varphi^{(-)}(x, y)$, а при $h(x, t) \leq y \leq a$ близко к поверхности $\varphi^{(+)}(x, y)$, и резко изменяется от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x, y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x, y)$ в окрестности кривой $y = h(x, t)$. В этом случае говорят, что решение задачи (1) имеет внутренний переходный слой в окрестности этой кривой.

Будем считать, что $y = h(x, t)$ — это та кривая, на которой решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1) в каждый момент времени принимает значение, равное полусумме функций $\varphi^{(-)}(x, y)$ и $\varphi^{(+)}(x, y)$:

$$u(x, h(x, t), t, \varepsilon) = \varphi^*(x, h(x, t)) := \frac{1}{2} (\varphi^{(-)}(x, h(x, t)) + \varphi^{(+)}(x, h(x, t))). \quad (3)$$

Кривая $y = h(x, t)$ в каждый момент времени делит область \bar{D} на две части: $\bar{D}^{(-)} = \{(x, y) : \mathbb{R} \times [0; h(x, t)]\}$ и $\bar{D}^{(+)} = \{(x, y) : \mathbb{R} \times [h(x, t); a]\}$.

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l, r) с помощью соотношений

$$x = l - r \sin \alpha, \quad y = h(l, t) + r \cos \alpha, \quad (4)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \quad (5)$$

α — угол между осью y и нормалью к кривой $y = h(x, t)$, проведенной в область $y > h(x, t)$ в каждый момент времени t , отложенный против часовой стрелки, l — x -координата точки на этой кривой, из которой нормаль проводится; r — расстояние от кривой по нормали к ней. Будем считать, что $r > 0$ в области $D^{(+)}$, $r < 0$ в области $D^{(-)}$, $r = 0$ при $y = h(x, t)$, производные функций $h(x, t)$ в выражении (5) берутся при $x = l$.

В окрестности кривой $y = h(x, t)$ перейдем к растянутой переменной

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}. \quad (6)$$

В переменных ξ, l, t дифференциальный оператор в уравнении (1) принимает

ВИД (СМ. [7]):

$$\begin{aligned} L_{\xi,l,t}[u] &:= \varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (h_t - h_x A(l, h(l, t)) - u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ &- \frac{1}{1+h_x^2} (h_t h_x + A(l, h(l, t)) - u h_x) \frac{\partial u}{\partial l} + \sum_{i=1} \varepsilon^i L_i[u], \end{aligned} \quad (7)$$

где L_i – дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным ξ и l , а производные функции $h(x, t)$ берутся при $x = l$.

При $\xi \in \mathbb{R}$ рассмотрим так называемое присоединенное уравнение для функции $\tilde{u}(\xi, h(x, t))$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x, t)}} (h_t(x, t) - h_x(x, t) A(x, h(x, t)) - \tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

где переменные x и t , а также функция $h(x, t)$ играют роль параметров. Это уравнение можно свести к присоединенной системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x, t)}} (h_t(x, t) - h_x(x, t) A(x, h(x, t)) - \tilde{u}) \Phi. \quad (9)$$

Разделив второе уравнение (9) на первое, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{u}, h(x, t))$, которое определяет фазовые траектории присоединенной системы на плоскости (\tilde{u}, Φ) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x, t)}} (h_t(x, t) - h_x(x, t) A(x, h(x, t)) - \tilde{u}). \quad (10)$$

Точки $(\varphi^{(\mp)}(x, h(x, t)), 0)$ фазовой плоскости (\tilde{u}, Φ) являются точками покоя системы (9). Интегрируя уравнение (10), можно выписать явные выражения для фазовых траекторий $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x, t))$, выходящих из точки $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \rightarrow -\infty$, и $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x, t))$, выходящих из точки $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}, h(x, t)) &= \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x, t)}} \left((h_t(x, t) - h_x(x, t) A(x, h(x, t))) (\tilde{u} - \varphi^{(\mp)}(x, h(x, t))) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\tilde{u}^2 - (\varphi^{(\mp)}(x, h(x, t)))^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Если существует гладкая кривая $y = h_0(x, t)$, для которой выполняется равенство

$$\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h_0(x, t)) - \Phi^{(+)}(\tilde{u}, h_0(x, t)) = 0, \quad (12)$$

то на фазовой плоскости (\tilde{u}, Φ) при $h = h_0$ образуется фазовая траектория, соединяющая точки покоя, а именно выходящая из точки покоя $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и входящая в точку покоя $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \rightarrow +\infty$.

Используя явный вид (11) функций $\Phi^{(\mp)}$, сформулируем условие существования соединительной фазовой траектории в следующем виде:

Условие А3. Пусть существует гладкая кривая $y = h_0(x, t)$, являющаяся решением уравнения

$$h_{0t}(x, t) - h_{0x}(x, t)A(x, h_0(x, t)) = \frac{1}{2} (\varphi^{(-)}(x, h_0(x, t)) + \varphi^{(+)}(x, h_0(x, t)))$$

с условиями

$$h_0(x, t) = h_0(x + L, t), \quad h_0(x, 0) = h_{00}(x),$$

где $h_{00}(x)$ — функция, которая определяет начальное положение кривой $y = h(x, t)$.

2. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое приближение $U(x, y, t, \varepsilon)$ решения задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)} \times [0, T]$ и $\bar{D}^{(+)} \times [0, T]$:

$$U(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{D}^{(-)} \times [0, T], \\ U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{D}^{(+)} \times [0, T] \end{cases}$$

в виде сумм двух слагаемых

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon). \quad (13)$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ — регулярная часть асимптотического представления, $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon)$ — функции, описывающие переходный слой, ξ — растянутая переменная вблизи кривой локализации переходного слоя, определенная равенством (6). Каждое слагаемое в (13) будем представлять как разложение по степеням малого параметра ε :

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x, y) + \dots, \quad (14)$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \dots \quad (15)$$

Кривую $y = h(x, t)$ также будем искать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$h(x, t) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \varepsilon^2 h_2(x, t) + \dots \quad (16)$$

Функции $U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon)$ и их производные по направлению нормали к кривой $y = h(x, t)$ будем непрерывно сшивать на кривой $h(x, t)$ в каждый момент времени t :

$$U^{(-)}(l, h(l, t), t, \varepsilon) = U^{(+)}(l, h(l, t), t, \varepsilon) = \varphi^*(l, h(l, t)), \quad (17)$$

$$\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l, h(l, t), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l, h(l, t), t, \varepsilon), \quad (18)$$

где функция $\varphi^*(x, h(x, t))$ определена в (3).

2.1. Регулярная часть асимптотики

Подставляя разложения (14) в равенства

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y^2} \right) = A(x, y) \frac{\partial \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x} - \bar{u}^{(\mp)} \frac{\partial \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y} + B(\bar{u}^{(\mp)}, x, y), \quad (19)$$

раскладывая функции в правой части по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка для функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y), i = 0, 1 \dots$. Будем решать эти уравнения в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$ с условием периодичности по переменной x . Дополнительные условия при $y = 0$ и $y = a$ будем определять из краевых условий задачи (1).

Приравнивая в (19) коэффициенты при ε^0 , получим следующее уравнение:

$$A(x, y) \frac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial x} - \bar{u}_0^{(\mp)} \frac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial y} + B(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, y) = 0,$$

которое совпадает с уравнением (2).

Согласно условию **A1** функции $\varphi^{(-)}(x, y)$ и $\varphi^{(+)}(x, y)$ являются L -периодическими по переменной x решениями этого уравнения, соответственно с условиями

$$\varphi^{(-)}(x, 0) = u^0(x); \quad \varphi^{(+)}(x, a) = u^1(x).$$

Положим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x, y) = \varphi^{(-)}(x, y), \quad \bar{u}_0^{(+)}(x, y) = \varphi^{(+)}(x, y).$$

Далее для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\bar{B}^{(\mp)}(x, y) := B(\varphi^{(\mp)}(x, y), x, y)$$

и аналогичные обозначения для производных функции B .

Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}, i = 1, 2 \dots$ определяются как решения задач

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial \bar{u}_i^{(\mp)}}{\partial x} - \varphi^{(\mp)}(x, y) \frac{\partial \bar{u}_i^{(\mp)}}{\partial y} + W^{(\mp)}(x, y) \bar{u}_i^{(\mp)} &= \bar{f}_i^{(\mp)}(x, y), \\ \bar{u}_i^{(-)}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_i^{(+)}(x, a) = 0, \quad \bar{u}_i^{(-)}(x, y) &= \bar{u}_i^{(+)}(x + L, y), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$W^{(\mp)}(x, y) = -\frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \bar{B}^{(\mp)}}{\partial u}(x, y),$$

$\bar{f}_i^{(\mp)}(x, y)$ — известные функции. В частности, $\bar{f}_1^{(\mp)}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi^{(\mp)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(\mp)}}{\partial y^2}$.

Уравнения (20) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Запишем их уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{A(x, y)}{\varphi^{(\mp)}(x, y)}, \quad (21)$$

$$\left(f_i^{(\mp)}(x, y) - W^{(\mp)}(x, y) \bar{u}_i^{(\mp)} \right) dy = -\varphi^{(\mp)}(x, y) d\bar{u}_i^{(\mp)}.$$

В силу выполнения условия **A2** существуют первые интегралы

$$\Psi^{(\mp)}(x, y) = C_1^{(\mp)} \quad (22)$$

каждого из уравнений (21) и на отрезке $y \in [0, a]$ существуют функции $x = X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)})$ – решения каждого из этих уравнений [15].

Решая уравнения

$$\frac{d\bar{u}_i^{(\mp)}}{dy} = \frac{\bar{f}_i^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)}), y) - W^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)}), y) \bar{u}_i^{(\mp)}}{-\varphi^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y, C_1^{(\mp)}), y)}$$

с условиями $\bar{u}_i^{(-)}(x, 0) = 0, \bar{u}_i^{(+)}(x, a) = 0$, получаем выражения для $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y)$:

$$\bar{u}_i^{(\mp)}(C_1^{(\mp)}, y) = - \int_{0,a}^y \exp \left(\int_{y_1}^y \frac{W^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2)}{\varphi^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y_2, C_1^{(\mp)}), y_2)} dy_2 \right) \frac{\bar{f}_i^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1)}{\varphi^{(\mp)}(X^{(\mp)}(y_1, C_1^{(\mp)}), y_1)} dy_1. \quad (23)$$

Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y)$ – решения задач (20) – будут определяться выражением (23), в которое вместо $C_1^{(\mp)}$ подставлены левые части выражений (22).

2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 Q^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (h_t - h_x A(l, h(l, t)) - \bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha) - \right. \\ & \quad \left. - Q^{(\mp)}) \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial t} - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial \xi} - \\ & - \frac{1}{1+h_x^2} (h_t h_x + A(l, h(l, t)) - (\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha) + Q^{(\mp)}) h_x) \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial l} + \\ & + \sum_{i=1} \varepsilon^i L_i[Q^{(\mp)}] = -Q^{(\mp)} \frac{\partial}{\partial y} \bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha) + QB^{(\mp)}(\xi, l, t, \varepsilon), \quad (24) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} QB^{(\mp)}(\xi, l, t, \varepsilon) := & B(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha) + Q^{(\mp)}, l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \\ & + \varepsilon \xi \cos \alpha) - B(\bar{u}^{(\mp)}(l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha), l - \varepsilon \xi \sin \alpha, h(l, t) + \varepsilon \xi \cos \alpha), \end{aligned}$$

функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определяются выражениями (5), а действие оператора $L_{\xi, l, t}$ определено выражением (7).

Подставляя в равенства (24) суммы (14) и (15), раскладывая входящие в правые части (24) функции по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , будем получать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$, $i = 0, 1, \dots$

В качестве дополнительных условий потребуем убывания на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l, t), t) = 0, \quad (25)$$

а также выполнения условий при $\xi = 0$, которые следуют из равенства (17). Перепишем (17) с учетом разложений (14) и (15):

$$\begin{aligned} & \bar{u}_0^{(-)}(l, h(l, t)) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(l, h(l, t)) + \dots + Q_0^{(-)}(0, l, h(l, t), t) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0, l, h(l, t), t) + \dots = \\ & = \bar{u}_0^{(+)}(l, h(l, t)) + \varepsilon \bar{u}_1^{(+)}(l, h(l, t)) + \dots + Q_0^{(+)}(0, l, h(l, t), t) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0, l, h(l, t), t) + \dots = \\ & = \varphi^*(l, h(l, t)). \end{aligned} \quad (26)$$

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Приравнявая коэффициенты при ε^{-1} в равенствах (24) и при ε^0 в равенствах (26) и принимая во внимание условие (25), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}} \left(h_t(l, t) - h_x(l, t) A(l, h(l, t)) - \left(\varphi^{(\mp)}(l, h(l, t)) + Q_0^{(\mp)} \right) \right) \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} = 0; \\ & \varphi^{(\mp)}(l, h(l, t)) + Q_0^{(\mp)}(0, l, h(l, t), t) = \varphi^*(l, h(l, t)), \quad Q_0^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l, t), t) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Задачу для $Q_0^{(-)}$ будем рассматривать при $\xi \leq 0$, а для $Q_0^{(+)}$ – при $\xi \geq 0$.
Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi, h(l, t)) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(l, h(l, t)) + Q_0^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t), & \xi \leq 0, \\ \varphi^{(+)}(l, h(l, t)) + Q_0^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t), & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\tilde{B}(\xi, l, t) := B(\tilde{u}(\xi, h(l, t)), l, h(l, t)).$$

Каждое из уравнений (27), записанное в этих обозначениях, принимает вид (8). Уравнение (8) эквивалентно системе уравнений (9) и, как показано в пункте 1., существуют производные функции $\tilde{u}(\xi, h(l, t))$, при $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Phi^{(-)}(\xi, h(l, t)) & := \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi, h(l, t)), h(l, t)) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \leq 0, \\ \Phi^{(+)}(\xi, h(l, t)) & := \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi, h(l, t)), h(l, t)) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

для которых имеют место выражения (11).

Каждое из уравнений (29) является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому, решая каждое из них с начальным условием

$$\tilde{u}(0, h(l, t)) = \varphi^*(l, h(l, t)),$$

можно определить явные выражения для функций $\tilde{u}(\xi, h(l, t))$ и $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$, в которых $h(l, t)$ будет играть роль параметра.

Введем обозначения:

$$P^{(\mp)}(h(x, t)) := h_t(x, t) - h_x(x, t)A(x, h(x, t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x, t)).$$

Для функций $h(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$P^{(-)}(h(x, t)) > 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

существует функция $Q_0^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t)$, решение задачи (27) при $\xi \leq 0$, а для функций $y = h(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$P^{(+)}(h(x, t)) < 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

существует функция $Q_0^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t)$, решение задачи (27) при $\xi \geq 0$.

Функции $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$ даются выражениями

$$Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) = 2C^{(\mp)}P^{(\mp)}(h(x, t)) \cdot \exp\left(\frac{P^{(\mp)}(h(x, t))}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}}\xi\right) \times \\ \times \left(1 + C^{(\mp)} \cdot \exp\left(\frac{P^{(\mp)}(h(x, t))}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}}\xi\right)\right)^{-1}. \quad (30)$$

Здесь

$$C^{(\mp)} =$$

$$= (\varphi^*(x, h(x, t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x, t))) \cdot (2P^{(\mp)}(h(x, t)) - (\varphi^*(x, h(x, t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x, t))))^{-1},$$

а $\varphi^*(x, h(x, t))$ определяется выражением (3).

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Приравнивая слагаемые при ε^0 в равенствах (24), получим следующие уравнения для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}}(h_t(l, t) - h_x(l, t)A(l, h(l, t)) - \tilde{u}(\xi, h(l, t))) \frac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} + \\ + \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}}\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t))Q_1 = f_1^{(\mp)}(\xi, l, t), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}
 f_1^{(\mp)}(\xi, l, t) &= \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial t}(\xi, l, h(l, t), t) + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t)) + \\
 &+ \frac{1}{1+h_x^2} (h_t h_x + A(l, h(l, t)) - \tilde{u}(\xi, h(l, t)) h_x) \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial l}(\xi, l, h(l, t), t) - \\
 &- \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}} \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t)) \times \\
 &\times \left(\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l, t)) - \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial x}(l, h(l, t)) \xi + \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial y}(l, h(l, t)) \xi \right) - \\
 &- \frac{1}{1+h_x^2} \left(-h_x^2 \frac{\partial A}{\partial x}(l, h(l, t)) + h_x \frac{\partial A}{\partial y}(l, h(l, t)) \right) \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t)) \xi + \\
 &+ A(l, h(l, t)) \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial x}(l, h(l, t)) - \tilde{u}(\xi, h(l, t)) \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial y}(l, h(l, t)) + \tilde{B}(\xi, l, t),
 \end{aligned}$$

а производные функции $h(x, t)$ берутся при $x = l$. Из равенств (26) в порядке ε^1 следуют краевые условия

$$Q_1^{(\mp)}(0, l, h(l, t), t) + \bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l, t)) = 0. \quad (32)$$

Добавим также условия на бесконечности

$$Q_1^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l, t), t) = 0. \quad (33)$$

Решения задач (31) – (33) можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) &= -\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l, t)) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t))}{\Phi^{(\mp)}(0, h(l, t))} + \\
 &+ \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t)) \int_0^\xi \frac{ds}{\Phi^{(\mp)}(s, h(l, t))} \int_{\mp\infty}^s f_1^{(\mp)}(\eta, l, t) d\eta.
 \end{aligned}$$

Из экспоненциального убывания функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$ при $\xi \rightarrow \mp\infty$ (см. (30)) следует экспоненциальное убывание функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t)$ при $\xi \rightarrow \mp\infty$.

2.2.3. Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции переходного слоя произвольного порядка $k = 2, 3, \dots$ определяются как решения задач

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}} (h_t(l, t) - h_x(l, t) A(l, h(l, t)) - \tilde{u}(\xi, h(l, t))) \frac{\partial Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi} + \\
 + \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l, t)}} \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l, t)) Q_k = f_k^{(\mp)}(\xi, l, t), \\
 Q_k^{(\mp)}(0, l, h(l, t), t) + \bar{u}_k^{(\mp)}(l, h(l, t)) = 0, \quad Q_k^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l, t), t) = 0
 \end{aligned}$$

с известными выражениями для $f_k^{(\mp)}(\xi, l, t)$. Функции $Q_k^{(\mp)}$, $k = 2, 3, \dots$ экспоненциально убывают при $\xi \rightarrow \mp\infty$.

3. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $h_i(l, t)$ $i = 1, 2, \dots$ разложения (16) будем определять из условия сшивания (18) производных по направлению нормали к кривой $h(x, t)$.

Запишем производную по направлению нормали к кривой $h(x, t)$ в переменных r, l, t и в переменных x, y, t :

$$\frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial r} = -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad (34)$$

где $\sin \alpha, \cos \alpha$ определяются выражением (5).

В переменных ξ, l, t эта производная имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

С учетом равенств (34), представления (13) и разложений (14), (15) перепишем условия сшивания производных (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -\sin \alpha \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial y}(l, h(l, t)) - \varepsilon \sin \alpha \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \\ & + \varepsilon \cos \alpha \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}}{\partial y}(l, h(l, t)) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) + \dots = \\ & -\sin \alpha \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial y}(l, h(l, t)) - \varepsilon \sin \alpha \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \\ & + \varepsilon \cos \alpha \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}}{\partial y}(l, h(l, t)) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Введем функцию $H(l, h(l, t), t, \varepsilon)$:

$$H(l, h(l, t), t, \varepsilon) := \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l, h(l, t), t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l, h(l, t), t, \varepsilon),$$

с помощью которой перепишем условие сшивания (18) как

$$H(l, h(l, t), t, \varepsilon) = 0.$$

Представим функцию $H(l, h(l, t), t, \varepsilon)$ в виде суммы

$$H(l, h(l, t), t, \varepsilon) = H_0(l, h(l, t), t) + \varepsilon H_1(l, h(l, t), t) + \varepsilon^2 H_2(l, h(l, t), t) + \dots,$$

где

$$H_0(l, h(l, t), t) = \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) - \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t),$$

$$\begin{aligned} H_1(l, h(l, t), t) = & -\sin \alpha \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial y}(l, h(l, t)) + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) - \\ & - \left(-\sin \alpha \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(l, h(l, t)) + \cos \alpha \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial y}(l, h(l, t)) + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, l, h(l, t), t) \right) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Условия гладкого сшивания (35) в порядке ε^0 с учетом обозначений (28) и (29) дают равенство

$$H_0(l, h(l, t), t) = \Phi^{(-)}(\varphi^*(l, t), h(l, t)) - \Phi^{(+)}(\varphi^*(l, t), h(l, t)) = 0. \quad (36)$$

Выпишем выражение для функции $H_0(x, h(x, t), t)$ с учетом выражений (11):

$$H_0(x, h(x, t), t) = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(x, t)}} \left((h_t(x, t) - h_x(x, t)A(x, h(x, t))) \times \right. \\ \left. \times (\varphi^{(+)}(x, h(x, t)) - \varphi^{(-)}(x, h(x, t))) - \frac{1}{2} \left((\varphi^{(+)}(x, h(x, t)))^2 - (\varphi^{(-)}(x, h(x, t)))^2 \right) \right). \quad (37)$$

Выполнение условия **A3** (см. также (12)) означает, что равенство (36) выполняется при $h(l, t) = h_0(l, t)$. Будем считать, что функция $h_0(x, t)$ является первым слагаемым в разложении (16).

Запишем условия сшивания (35) в порядке ε^1 с учетом разложения (16):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(x, t)}} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x, h_0(x, t), t) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \\ + \frac{\partial H_0}{\partial h}(x, h_0(x, t), t) h_1 + H_1(l, h_0(l, t), t) = 0. \quad (38)$$

Определим функцию $h_1(x, t)$ как решение уравнения (38) с условиями

$$h_1(x, t) = h_1(x + L, t); \quad h_1(x, 0) = 0,$$

где функция $H_0(x, h(x, t), t)$ дается выражением (37). Задача для функции $h_1(x, t)$ разрешима в силу того, что коэффициент при слагаемом h_{1t} в уравнении (38) положительный (см. [15]).

Уравнения для коэффициентов $h_k(x, t)$, $k = 2, 3, \dots$ разложения (16) получают из условий гладкого сшивания (35) в порядке ε^k .

Функции $h_k(x, t)$ определяются как решения задач

$$\frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(x, t)}} \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x, h_0(x, t), t) \frac{\partial h_k}{\partial x} + \\ + \frac{\partial H_0}{\partial h}(x, h_0(x, t), t) h_k + H_k(x, h(x, t), t) = 0; \quad h_k(x, t) = h_k(x + L, t), \quad h_k(x, 0) = 0.$$

4. Асимптотическое представление решения

Определим члены рядов (14)–(16) до номера k включительно и положим

$$\hat{h}_k(x, t) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i h_i(x, t).$$

В окрестности кривой $\hat{h}_k(x, t)$ перейдем к локальным координатам (l, \hat{r}) с помощью соотношений, аналогичных (4), и введем растянутую переменную $\hat{\xi} = \frac{\hat{r}}{\varepsilon}$. Кривая

$\hat{h}_k(x, t)$ в каждый момент времени разделяет область \bar{D} на подобласти $\bar{D}_k^{(-)}$ и $\bar{D}_k^{(+)}$ ($\bar{D}_k^{(-)} : (x, y) \in \mathbb{R} \times [0; \hat{h}_k(x, t)]$ и $\bar{D}_k^{(+)} : (x, y) \in \mathbb{R} \times [\hat{h}_k(x, t), a]$).

Составим суммы

$$\begin{aligned}
 U_k^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x, y) + Q_i^{(-)}(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l, t), t) \right), \quad (x, y, t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0; T], \quad \xi \leq 0; \\
 U_k^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x, y) + Q_i^{(+)}(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l, t), t) \right), \quad (x, y, t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0; T], \quad \xi \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Переменные x и l в (39) связаны первым из соотношений (4) с заменой r на \hat{r} .

Положим

$$U_k = \begin{cases} U_k^{(-)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0; T], \\ U_k^{(+)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0; T]. \end{cases}$$

Функция $U_k(x, y, t, \varepsilon)$ по своему построению удовлетворяет уравнению (1) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ всюду в области \bar{D} , за исключением кривой $\hat{h}_k(x, t)$, а краевым и начальным условиям задачи (1) эта функция удовлетворяет точно.

Для обоснования построенного асимптотического приближения можно воспользоваться методом дифференциальных неравенств, построив по аналогии с [7] нижнее ($\alpha(x, y, t, \varepsilon)$) и верхнее ($\beta(x, y, t, \varepsilon)$) решения задачи (1) и тем самым доказать следующую теорему.

Теорема. При выполнении условий **A1–A3** для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{init}(x, y, \varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями

$$\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leq u_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, 0, \varepsilon),$$

существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t \in [0; T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ является равномерным в области $\bar{D} \times [0; T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть всюду в области $\bar{D} \times [0; T]$ справедлива оценка

$$|u(x, y, t, \varepsilon) - U_n(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad C > 0.$$

Заключение

В настоящей работе была рассмотрена задача, являющаяся примером более общей постановки, а именно задачи для уравнения

$$\varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{A}(u, x, y), \nabla) u + B(u, x, y),$$

где $\mathbf{A}(u, x, y) = \{A_1(u, x, y), A_2(u, x, y)\}$.

Выбранный в (1) специальный вид функций A_1 и A_2 позволяет получить явный вид для функций переходного слоя и уравнение для кривой локализации фронта. Эти сведения могут быть использованы для разработки математических моделей или численных алгоритмов для решения задач вида реакция-диффузия-адвекция.

Список литературы / References

- [1] Нефедов Н. Н., “Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость”, *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 262–269; English transl.: Nefedov N. N., “An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability”, *Differential Equations*, **36**:2 (2000), 298–305.
- [2] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., “Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., “Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:4 (2006), 585–593.
- [3] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevov’nov Yu. V., Nefedov N. N., “Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.
- [4] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N., “Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.
- [5] Nefedov N., Yagremtsev A., “On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers”, *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 62–71.
- [6] Volkov V. T., Nefedov N. N., Antipov E. A., “Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems”, *Lecture Notes in Computer Science.*, **9045** (2015), 408–416.
- [7] Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:3 (2017), 259–279; [Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., “Moving Front Solution of the Reaction-Diffusion Problem”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 259–279, (in Russian).]
- [8] Liberman A., Ivanov M., Peil O., Valiev D., Eriksson L., “Numerical studies of curved stationary flames in wide tubes”, *Combustion Theory and Modelling*, **7**:4 (2003), 653–676.
- [9] Руденко О. В., “Неоднородное уравнение бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн”, *Доклады Академии наук*, **474**:6 (2017), 671–674; English transl.: Rudenko O. V., “Inhomogeneous burgers equation with modular nonlinearity: Excitation and evolution of high-intensity waves”, *Doklady Mathematics*, **95**:3 (2017), 291–294.
- [10] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., “Analytic-numerical approach to solving singularly perturbed parabolic equations with the use of dynamic adapted meshes”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 334–341.
- [11] Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N., “Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 721–729.

- [12] Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V., "Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations", *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 107–118.
- [13] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., "Dynamically adapted mesh construction for the efficient numerical solution of a singular perturbed reaction-diffusion-advection equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 322–338.
- [14] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozrushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990, 208 pp., (in Russian).]
- [15] Неведов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Курс лекций, Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2016, 200 с.; [Nefedov N. N., Popov V. Ju., Volkov V. T., *Obyknovennye differencialnye uravnenija*, Kurs lekcij, Fizicheskij fakultet MGU im. M. V. Lomonosova, Moskva, 2016, 200 pp., (in Russian).]

Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N., "Asymptotic Approximation of the Solution of the Reaction-Diffusion-Advection Equation with a Nonlinear Advective Term", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1 (2018), 18–32.**

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-18-32

Abstract. We consider a solution in a moving front form of the initial-boundary value problem for a singularly perturbed reaction-diffusion equation in a band with periodic conditions in one of the variables. Interest in solutions of the front type is associated with combustion problems or nonlinear acoustic waves. In the domain of the function which describes the moving front there is a subdomain where the function has a large gradient. This subdomain is called the internal transition layer. Boundary value problems with internal transition layers have a natural small parameter that is equal to the ratio of the transition layer width to the width of the region under consideration. The presence of a small parameter at the highest spatial derivative makes the problem singularly perturbed. The numerical solution of such problems meets certain difficulties connected with the choice of grids and initial conditions. To solve these problems the use of analytical methods is especially successful. Asymptotic analysis which uses Vasilieva's algorithm was carried out in the paper. That made it possible to obtain an asymptotic approximation of the solution, which can be used as an initial condition for a numerical algorithm. We also determined the conditions for the existence of a front type solution. In addition, the analytical methods used in the paper make it possible to obtain in an explicit form the front motion equation approximation. This information can be used to develop mathematical models or numerical algorithms for solving boundary value problems for the reaction-diffusion-advection type equations.

Keywords: reaction-diffusion-advection problem, two-dimensional moving front, internal transition layer asymptotic representation, small parameter

On the authors:

Evgeny A. Antipov, orcid.org/0000-0001-6734-683X,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Acknowledgments:

This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.

©Быцюра С. В., Левашова Н. Т., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-33-53

УДК 517.9

Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо

Быцюра С. В., Левашова Н. Т.¹

получена 20 ноября 2017

Аннотация. Рассматривается решение вида движущегося фронта сингулярно возмущенной системы уравнений типа ФицХью–Нагумо. Решение содержит внутренний переходный слой, то есть подобласть где происходит резкое изменение значений функций, описывающих решение. В начально-краевых задачах с решениями вида фронтов содержится естественный малый параметр, равный отношению ширины внутреннего переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Учет малого параметра приводит к тому, что уравнения становятся сингулярно возмущенными, тем самым задачи относятся к разряду «жестких», численное решение которых встречает определенные трудности и не всегда дает достоверный результат. В связи с этим возрастает роль аналитического исследования таких задач и доказательства существования решения с внутренним переходным слоем. В этих целях особо эффективным является использование метода дифференциальных неравенств, который состоит в построении непрерывных функций, называемых верхним и нижним решениями. При этом важную роль играет так называемое «условие квазимонотонности» функций, описывающих реактивные слагаемые. В настоящей работе приведен алгоритм построения верхнего и нижнего решений системы параболических уравнений с одномасштабным внутренним переходным слоем, при этом условие квазимонотонности отличается от аналогичного условия в ранее опубликованных работах. Приведенный алгоритм может быть в дальнейшем обобщен на более сложные системы с двухмасштабными переходными слоями или на системы с разрывными реактивными слагаемыми. Подобные исследования имеют важное практическое значение для создания математически обоснованных моделей биофизики.

Ключевые слова: система параболических уравнений, внутренний переходный слой, малый параметр, верхнее и нижнее решения, метод дифференциальных неравенств, асимптотическое представление

Для цитирования: Быцюра С. В., Левашова Н. Т., "Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 33–53.

Об авторах:

Быцюра Светлана Владимировна, orcid.org/0000-0001-7787-437X, магистр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

Интерес к параболическим системам уравнений типа реакция-диффузия возникает в связи с большим количеством различных биофизических явлений, которые можно описывать с помощью таких систем, например, возникновение пятен на шкурах животных [1], возбуждение в сердечной мышце [2], развитие урбоэкосистем [3–5]. В каждой из перечисленных моделей наибольший интерес представляют решения вида автоволновых фронтов. Такие решения описываются функциями с внутренними переходными слоями, то есть функциями, в области определения которых содержится подобласть, где происходит резкое изменение значений функций. В начально-краевых задачах с решениями вида движущихся фронтов содержится естественный малый параметр, равный отношению ширины внутреннего переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Учет малого параметра приводит к тому, что уравнения становятся сингулярно возмущенными, тем самым задачи относятся к разряду «жестких», численное решение которых встречает определенные трудности и не всегда дает достоверный результат. В связи с этим возрастает роль аналитического исследования таких задач и доказательства существования решения с внутренним переходным слоем. В этих целях особо эффективным является использование метода дифференциальных неравенств [6] и его модификаций для задач с внутренними переходными слоями [7–10]. Асимптотический метод дифференциальных неравенств состоит в построении непрерывных функций, которые называются верхним и нижним решениями, как модификаций асимптотических приближений решений по малому параметру. При этом важную роль играет так называемое «условие квазимонотонности» функций, описывающих реактивные слагаемые [6]. Отметим, что в настоящей работе приводится алгоритм построения верхнего и нижнего решений для системы уравнений, в которой условие квазимонотонности отличается от аналогичного условия в ранее опубликованных работах [10–12].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему уравнений типа ФицХью–Нагумо:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} &= g(v) + u, \quad \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial u}{\partial t} = -v + \gamma u, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T; \\
 \frac{\partial v}{\partial x}(0, t, \varepsilon) &= \frac{\partial v}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0; \quad 0 \leq t \leq T, \\
 v(x, 0, \varepsilon) &= v_{init}(x, \varepsilon), \quad u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $T > 0$, $\gamma > 0$, а функция $g(v)$ – достаточно гладкая в области I_v допустимых значений v .

1.1. Вырожденная система уравнений

Положив в (1) $\varepsilon = 0$, получим так называемую «вырожденную систему уравнений»:

$$g(v) + u = 0, \quad -v + \gamma u = 0.$$

Из второго уравнения получаем

$$u = v/\gamma.$$

Подставим это выражение для u в первое уравнение вырожденной системы, тогда получим $g(v) + v/\gamma = 0$.

Обозначим $h(v) := g(v) + v/\gamma$.

Условие А1. Пусть уравнение $h(v) = 0$ имеет ровно три изолированных корня $v = v^i \in I_v$, $i = 1, 2, 3$ причем выполнены неравенства $v^1 < v^2 < v^3$.

Условие А2. Пусть справедливо неравенство

$$\gamma g_v(v^{1,3}) - 1 > 0.$$

Заметим, что следствием условий **А1**, **А2** является выполнение неравенств

$$h_v(v^i) > 0, \quad i = 1, 3; \quad h_v(v^2) < 0. \quad (2)$$

Мы будем рассматривать решение вида движущегося фронта, локализованного в каждый момент времени в окрестности некоторой внутренней точки $x^*(t)$ отрезка $[0; 1]$, а именно пару функций (v, u) , близкую к $(v^1, v^1/\gamma)$ слева от малой окрестности точки $x^*(t)$ и к $(v^3, v^3/\gamma)$ справа от малой окрестности точки $x^*(t)$, и претерпевающую резкое изменение от значений $(v^1, v^1/\gamma)$ до значений $(v^3, v^3/\gamma)$ в окрестности точки $x^*(t)$. Эту окрестность называют внутренним переходным слоем. Считаем, что в начальный момент времени фронт уже сформирован и сосредоточен в окрестности точки $x_{00} \in (0; 1)$.

1.2. Присоединенная система

На каждой из полупрямых $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\tilde{v}(\xi, t)$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = h(\tilde{v}). \quad (3)$$

Здесь W играет роль параметра.

Это уравнение эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -W\Phi + h(\tilde{v}). \quad (4)$$

В силу неравенств (2) точки $(v^{1,3}, 0)$ являются точками покоя типа седла системы (4) на фазовой плоскости (\tilde{v}, Φ) .

Разделим второе уравнение на первое, затем домножим полученное равенство на Φ и придем к уравнению первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{v}, W)$, которое описывает фазовые траектории системы (4) на фазовой плоскости (\tilde{v}, Φ) в зависимости от параметра W :

$$\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{v}} = -W\Phi + h(\tilde{v}).$$

Потребуем выполнения следующего условия:

Условие А3. Пусть существует такое множество вещественных чисел V , что при $W \in V$ определено решение следующих двух задач Коши:

$$\begin{aligned} \Phi^{(-)} \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial \tilde{v}} &= -W\Phi^{(-)} + h(\tilde{v}), \quad v^1 < \tilde{v} \leq v^3, \\ \Phi^{(-)}(v^1, W) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi^{(+)} \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial \tilde{v}} &= -W\Phi^{(+)} + h(\tilde{v}), \quad v^1 \leq \tilde{v} < v^3, \\ \Phi^{(+)}(v^3, W) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

причем выполняются неравенства:

$$\Phi^{(-)}(\tilde{v}, W) > 0, \quad v^1 < \tilde{v} \leq v^3; \quad \Phi^{(+)}(\tilde{v}, W) > 0, \quad v^1 \leq \tilde{v} < v^3.$$

Условия существования решения задач типа (5) и (6) сформулированы в [13].

Условие **А3** гарантирует существование на фазовой плоскости (\tilde{v}, Φ) двух семейств сепаратрис $\Phi^{(-)}(\tilde{v}, W)$, $W \in V$, входящих в седло $(v^1, 0)$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{v}, W)$, $W \in V$, входящих в седло $(v^3, 0)$ при $\xi \rightarrow +\infty$.

Введем функцию

$$H_0(\tilde{v}, W) := \Phi^{(-)}(\tilde{v}, W) - \Phi^{(+)}(\tilde{v}, W). \quad (7)$$

Условие А4. Пусть существует величина $W_0 \in V$ – решение уравнения

$$H_0(v^2, W_0) = \Phi^{(-)}(v^2, W_0) - \Phi^{(+)}(v^2, W_0) = 0,$$

где значение v^2 определено в условии **А1**, и пусть выполняется неравенство

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) > 0. \quad (8)$$

Равенство $H_0(v^2, W_0) = 0$ в условии **А4** означает пересечение сепаратрис $\Phi^{(-)}(v^2, W_0)$ и $\Phi^{(+)}(v^2, W_0)$ на фазовой плоскости (\tilde{v}, Φ) .

2. Асимптотическое представление решения

В настоящей работе мы будем строить асимптотическое приближение решения третьего порядка по ε .

Положение точки $x^*(t)$ в каждый момент времени не известно. Мы будем искать его в виде асимптотического приближения

$$x^*(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots \quad (9)$$

Обозначим через W скорость движения фронта:

$$W = \frac{dx^*}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \varepsilon \frac{dx_1}{dt} + \dots = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots \quad (10)$$

Кривая $x = x^*(t, \varepsilon)$ делит область $\bar{D} := \{(x, t) \in [0; 1] \times [0; T]\}$ на плоскости (x, t) на две подобласти: $\bar{D}^{(-)} := \{(x, t) \in [0; x^*] \times [0; T]\}$ и $\bar{D}^{(+)} := \{(x, t) \in [x^*; 1] \times [0; T]\}$.

Асимптотическое представление решения задачи (1) в каждый момент времени строится отдельно в каждой из этих подобластей:

$$V = \begin{cases} v^{(-)}, & (x, t) \in \bar{D}^{(-)}, \\ v^{(+)}, & (x, t) \in \bar{D}^{(+)}; \end{cases} \quad U = \begin{cases} u^{(-)}, & (x, t) \in \bar{D}^{(-)}, \\ u^{(+)}, & (x, t) \in \bar{D}^{(+)}. \end{cases}$$

Для подробного описания решения в области переходного слоя введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{x - x^*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Каждую из функций $v^{(\mp)}$ и $u^{(\mp)}$ будем искать как сумму двух слагаемых:

$$v^{(\mp)} = v^{1,3} + Q^{(\mp)}v(\xi, t, \varepsilon), \quad u^{(\mp)} = v^{1,3}/\gamma + Q^{(\mp)}u(\xi, t, \varepsilon), \quad (11)$$

где $Q^{(\mp)}v(\xi, t, \varepsilon)$, $Q^{(\mp)}u(\xi, t, \varepsilon)$ – функции, описывающие решение в области переходного слоя. Эти функции мы будем представлять в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$Q^{(\mp)}v(\xi, t, \varepsilon) = Q_0v^{(\mp)}(\xi, t) + \varepsilon Q_1v^{(\mp)}(\xi, t) + \dots, \quad (12)$$

$$Q^{(\mp)}u(\xi, t, \varepsilon) = Q_0u^{(\mp)}(\xi, t) + \varepsilon Q_1u^{(\mp)}(\xi, t) + \dots \quad (13)$$

Функции $v^{(-)}$ и $v^{(+)}$, как и функции $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$, будем гладко сшивать в точке $x^*(t, \varepsilon)$ в каждый момент времени t , считая, что выполняются равенства

$$v^{(-)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^{(+)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^2, \quad u^{(-)}(x^*(t, \varepsilon)) = u^{(+)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^2/\gamma; \quad (14)$$

$$\frac{\partial v^{(-)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)) = \frac{\partial v^{(+)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)), \quad \frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)) = \frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)). \quad (15)$$

2.1. Функции переходного слоя

Перепишем дифференциальные операторы, входящие в уравнения (1), в переменных ξ и t :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, \\ \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t} &= \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Уравнения для коэффициентов разложений (12) и (13), функций $Q_i^{(\mp)}v(\xi, t)$, $Q_i^{(\mp)}u(\xi, t)$, $i = 0, 1, \dots$ получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по степеням малого параметра равенств

$$\frac{\partial^2 Q^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial Q^{(\mp)}v}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q^{(\mp)}v}{\partial t} = g(v^{1,3} + Q^{(\mp)}v) + (v^{1,3}/\gamma + Q^{(\mp)}u), \quad (16)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Q^{(\mp)}u}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial Q^{(\mp)}u}{\partial \xi} - \varepsilon^3 \frac{\partial Q^{(\mp)}u}{\partial t} = -Q^{(\mp)}v + \gamma Q^{(\mp)}u. \quad (17)$$

Для того, чтобы получить граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}v$, $Q_i^{(\mp)}u$, подставим суммы (11) с учетом разложений (12) и (13) в равенства (14):

$$\begin{aligned} v^1 + Q_0v^{(-)}(0, t) + \varepsilon Q_1v^{(-)}(0, t) + \dots &= v^3 + Q_0v^{(+)}(0, t) + \varepsilon Q_1v^{(+)}(0, t) + \dots = v^2, \\ v^1/\gamma + Q_0u^{(-)}(0, t) + \varepsilon Q_1u^{(-)}(0, t) + \dots &= \\ = v^3/\gamma + Q_0u^{(+)}(0, t) + \varepsilon Q_1u^{(+)}(0, t) + \dots &= v^2/\gamma \end{aligned} \quad (18)$$

и приравняем в этих суммах коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Также потребуем выполнения стандартного для функций переходного слоя условия убывания на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty, t) = 0, \quad Q_i^{(\mp)}u(\mp\infty, t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

2.1.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Объединяя в равенствах (17) коэффициенты при ε^0 , получим уравнения

$$-Q_0^{(\mp)}v + \gamma Q_0^{(\mp)}u = 0,$$

решая которые получим выражения

$$Q_0^{(\mp)}u = Q_0^{(\mp)}v/\gamma. \quad (19)$$

Приравнявая в равенствах (16) и (18) коэффициенты при ε^0 и учитывая выражения (19), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial Q_0^{(\mp)}v}{\partial \xi} &= g(v^{1,3} + Q_0^{(\mp)}v) + (v^{1,3} + Q_0^{(\mp)}v)/\gamma, \\ v^1 + Q_0v^{(-)}(0, t) &= v^3 + Q_0v^{(+)}(0, t) = v^2, \quad Q_0^{(\mp)}v(\mp\infty, t) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем обозначение

$$\tilde{v}(\xi, t) = \begin{cases} v^1 + Q_0v^{(-)}(\xi, t), & \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T; \\ v^3 + Q_0v^{(+)}(\xi, t), & \xi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (21)$$

Перепишем уравнения и условия при $\xi = 0$ в (20) с использованием обозначения (21):

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = h(\tilde{v}); \quad \tilde{v}(0, t) = v^2. \quad (22)$$

Здесь W – скорость движения фронта (10), а переменная t играет роль параметра, который входит в выражение для функции \tilde{v} через переменную $\xi(t)$. Будем решать уравнение (22) отдельно на полупрямой $\xi \leq 0$ с условием $\tilde{v}(-\infty, t) = v^1$, и на полупрямой $\xi \geq 0$ с условием $\tilde{v}(+\infty, t) = v^3$.

Уравнение (22) совпадает с уравнением (3). Введем следующие функции:

$$\begin{aligned}\Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi, t), W) &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, \quad \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T; \\ \Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi, t), W) &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}\tag{23}$$

Тем же способом, что и в пункте 1.2, перейдем от уравнения (22) к дифференциальным уравнениям первого порядка относительно функций $\Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi, t), W)$ при $\xi \leq 0$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi, t), W)$ при $\xi \geq 0$, в которых переменная t будет играть роль параметра. В каждый момент времени $t \in (0; T]$ уравнения первого порядка для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi, t), W)$ совпадают с уравнениями из задач Коши (5) и (6) соответственно. Определим эти функции как решения указанных задач Коши. Существование этих решений гарантировано условием **A3**.

Из существования функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi, t), W)$ вытекает существование решений начальных задач

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} &= \Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi, t), W), \quad \xi < 0, \quad \tilde{v}(0, t) = v^2, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} \xi &= \Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi, t), W), \quad \xi > 0, \quad \tilde{v}(0, t) = v^2,\end{aligned}$$

для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\xi \rightarrow \mp \infty} |\tilde{v}(\xi, t) - v^{1,3}| = 0.$$

Кроме того, можно доказать справедливость следующих оценок [14]:

$$|\tilde{v}(\xi, t) - v^{1,3}| < C e^{-\varkappa_0 |\xi|},$$

где C, \varkappa_0 – положительные константы.

Для функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi, t)$ (см. (21)) и $Q_0^{(\mp)}u(\xi, t)$, (см. (19)) справедливы оценки

$$Q_0^{(\mp)}v(\xi, t) < C e^{-\varkappa_0 |\xi|}, \quad Q_0^{(\mp)}u(\xi, t) < C e^{-\varkappa_0 |\xi|},$$

и аналогичные оценки имеют место для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi, t), W)$.

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\Phi^{(\mp)}(\xi, t, W) := \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi, t), W).\tag{24}$$

2.1.2. Функции переходного слоя первого порядка

Из равенств (17) в порядке ε^1 получим уравнения

$$\frac{dx^*}{dt} \frac{\partial Q_0^{(\mp)}u}{\partial \xi} = -Q_1^{(\mp)}v + \gamma Q_1^{(\mp)}u,$$

решая которые получим выражения

$$Q_1^{(\mp)}u = \frac{1}{\gamma} \left(Q_1^{(\mp)}v + W \Phi^{(\mp)}(\xi, t, W) / \gamma \right).\tag{25}$$

Здесь было учтено выражение (19) и обозначения (21) и (23).

Объединяя в равенствах (16) и (18) коэффициенты при ε^1 и учитывая выражения (25), получим следующие задачи для функций $Q_1^{(\mp)}v(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial Q_1^{(\mp)}v}{\partial \xi} &= (g_v(\tilde{v}(\xi, t)) + 1/\gamma) Q_1^{(\mp)}v + W\Phi^{(\mp)}(\xi, t, W)/\gamma^2, \\ Q_1v^{(-)}(0, t) = Q_1v^{(+)}(0, t) &= 0, \quad Q_1^{(\mp)}v(\mp\infty, t) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что функции $\Phi^{(\mp)}(\xi, t, W)$ являются решениями однородных уравнений (26). В этом нетрудно убедиться, продифференцировав по ξ уравнение (20):

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(\mp)}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \Phi^{(\mp)}}{\partial \xi} - (g_v(\tilde{v}(\xi, t)) + 1/\gamma) \Phi^{(\mp)} = 0. \quad (27)$$

Используя известные решения однородных уравнений, можно понизить порядок уравнения (26) и получить решения задач (26) в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}v(\xi, t) = \frac{W}{\gamma^2} \Phi^{(\mp)}(\xi, t, W) \int_0^\xi \frac{e^{-Ws} ds}{(\Phi^{(\mp)}(s, t, W))^2} \int_{\mp\infty}^s e^{W\eta} (\Phi^{(\mp)}(\eta, t, W))^2 d\eta.$$

2.1.3. Функции переходного слоя старших порядков

Из равенств (17) в порядке ε^i , $i = 2, 3$, можно получить выражения для функций $Q_i^{(\mp)}u$, через функции $Q_i^{(\mp)}v$, соответственно, подставить их в уравнения, которые получаются из (16) в порядке ε^i , добавить краевые условия, полученные из (18) в порядке ε^i , а также условия на бесконечности, и получить следующие задачи для функций $Q_i^{(\mp)}v(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial Q_i^{(\mp)}v}{\partial \xi} &= (g_v(\tilde{v}(\xi, t)) + 1/\gamma) Q_i^{(\mp)}v + Q_i g(\xi, t), \\ Q_i v^{(-)}(0, t) = Q_i v^{(+)}(0, t) &= 0, \quad Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty, t) = 0, \end{aligned}$$

где $Q_i g(\xi, t)$ – известные функции.

Решения этих задач можно выписать в явном виде, так же как это было сделано для функций $Q_1v^{(\mp)}(\xi, t)$.

2.2. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, разложения (9) будем определять из условий гладкого сшивания (15).

С учетом равенств (11) и разложений (12) и (13) перепишем условия сшивания производных (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) + \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) + \dots &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) + \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) + \dots; \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, t) + \frac{\partial Q_1^{(-)} u}{\partial \xi}(0, t) + \dots &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, t) + \frac{\partial Q_1^{(+)} u}{\partial \xi}(0, t) + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что из выполнения первого из этих равенств следует выполнение второго равенства в силу выражений (19), (25) и аналогичных выражений для функций $Q_i u^{(\mp)}(\xi, t)$ через функции $Q_i v^{(\mp)}(\xi, t)$ при $i = 2, 3$.

Введем функцию $H(W, \varepsilon)$:

$$H(W, \varepsilon) := H_0(v^2, W) + \varepsilon H_1(W) + \dots, \quad (28)$$

где функция $H_0(\tilde{v}, W)$ определена выражением (7), а

$$H_1(W) = \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t),$$

и т. д.

Условие (15) гладкого сшивания выражается равенством

$$H(W, \varepsilon) = 0. \quad (29)$$

В порядке ε^0 с учетом обозначений (24), условий (18) и разложения (10) это условие дает равенство

$$H_0(v^2, W_0) = \Phi^{(-)}(0, t, W_0) - \Phi^{(+)}(0, t, W_0) = 0. \quad (30)$$

Согласно условию **A4** существует величина W_0 – решение этого уравнения. Будем считать, что коэффициент $x_0(t)$ разложения (9) определяется из задачи Коши

$$\frac{dx_0}{dt} = W_0, \quad x_0(0) = x_{00},$$

где x_{00} – начальное положение фронта. Решение этой задачи: $x_0(t) = W_0 t + x_{00}$.

Запишем условия сшивания (29) в порядке ε^1 с учетом разложений (28) и (10):

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) W_1 + H_1(W_0) = 0.$$

Решение этого уравнения существует в силу неравенства (8).

Будем считать, что коэффициент $x_1(t)$ разложения (9) определяется из задачи Коши $\frac{dx_1}{dt} = W_1$, $x_1(0) = 0$. Решение этой задачи: $x_1(t) = W_1 t$.

Аналогично получим выражения для коэффициентов $x_i(t)$, $i = 2, 3$: $x_i(t) = W_i t$, где величины W_i определяются из равенств вида

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) W_i + G_i = 0,$$

а G_i – известные функции.

2.3. Асимптотическое приближение решения третьего порядка

Введем обозначение

$$X_3(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i x_i(t).$$

Составим суммы

$$\begin{aligned} V_3^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) &= v^1 + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(-)} v(\xi, t), & U_3^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) &= v^1/\gamma + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(-)} u(\xi, t), \\ & & & \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T; \\ V_3^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) &= v^3 + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\xi, t), & U_3^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) &= v^3/\gamma + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(+)} u(\xi, t), \\ & & & \xi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} V_3(x, t, \varepsilon) &= \begin{cases} V_3^{(-)}(\xi, t, \varepsilon), & 0 \leq x \leq X_3(t, \varepsilon), \quad \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ V_3^{(+)}(\xi, t, \varepsilon), & X_3(t, \varepsilon) \leq x \leq 0, \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T; \end{cases} \\ U_3(x, t, \varepsilon) &= \begin{cases} U_3^{(-)}(\xi, t, \varepsilon), & 0 \leq x \leq X_3(t, \varepsilon), \quad \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ U_3^{(+)}(\xi, t, \varepsilon), & X_3(t, \varepsilon) \leq x \leq 0, \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Построенное асимптотическое приближение решения $(V_3(x, t, \varepsilon), U_3(x, t, \varepsilon))$ по своему построению удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^4)$ всюду в области \bar{D} , за исключением кривой $x^*(t, \varepsilon)$, на которой функции V_3 и U_3 претерпевают разрывы – скачки порядка $O(\varepsilon^4)$.

3. Обоснование асимптотического представления решения

Доказательство существования решения, которое приближается парой функций $(V_3(x, t, \varepsilon), U_3(x, t, \varepsilon))$, проведем, используя асимптотический метод дифференциальных неравенств. Суть метода заключается в построении для задачи (1) двух пар непрерывных функций \bar{V} , \bar{U} и \underline{V} , \underline{U} , называемых соответственно верхним и нижним решениями и удовлетворяющих следующей системе дифференциальных неравенств:

Условие У1. Упорядоченность.

$$\underline{V} \leq \bar{V}; \quad \underline{U} \leq \bar{U}; \quad (x, t) \in [0; 1] \times (0; T].$$

Условие У2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения.

$$\begin{aligned} L_{v\varepsilon}(\bar{V}, u) &:= \varepsilon^2 \bar{V}_{xx} - \varepsilon \bar{V}_t - g(\bar{V}, x, \varepsilon) - u < 0 < L_{v\varepsilon}(\underline{V}, u), \quad \underline{U} \leq u \leq \bar{U}, \\ L_{u\varepsilon}(\bar{U}, v) &:= \varepsilon^4 \bar{U}_{xx} - \varepsilon^3 \bar{U}_t + v - \gamma \bar{U} < 0 < L_{u\varepsilon}(\underline{U}, v), \quad \underline{V} \leq v \leq \bar{V} \end{aligned}$$

для почти всех точек области $(x, t) \in [0; 1] \times (0; T]$, за исключением множеств нулевой меры, на которых верхнее и нижнее решения не являются гладкими.

Условие У3. Если верхнее решение не является гладким в некоторой точке $x = \bar{x}(t)$, в момент времени t , то выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(\bar{x}(t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(\bar{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \geq 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(\bar{x}(t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(\bar{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \geq 0;$$

аналогично, если нижнее решение не является гладким при $x = \underline{x}(t)$, то выполняются неравенства

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(\underline{x}(t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(\underline{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \leq 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(\underline{x}(t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(\underline{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \leq 0.$$

Условие У4. В граничных точках выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(0, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(0, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(0, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(0, t, \varepsilon), \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(1, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(1, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(1, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(1, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Как показано в работе [6] классическое решение $(v(x, t, \varepsilon), u(x, t, \varepsilon))$ задачи (1) существует, и для всех $(x, t) \in [0; 1] \times (0; T]$ выполняются неравенства

$$\underline{V}(x, t, \varepsilon) < v(x, t, \varepsilon) < \bar{V}(x, t, \varepsilon), \quad \underline{U}(x, t, \varepsilon) < u(x, t, \varepsilon) < \bar{U}(x, t, \varepsilon),$$

если существуют верхнее и нижнее решения задачи (1) и в начальный момент времени начальная функция заключена между этими верхним и нижним решениями:

$$\underline{V}(x, 0, \varepsilon) < v_{init}(x, \varepsilon) < \bar{V}(x, 0, \varepsilon), \quad \underline{U}(x, 0, \varepsilon) < u_{init}(x, \varepsilon) < \bar{U}(x, 0, \varepsilon), \quad x \in [0; 1].$$

3.1. Верхнее и нижнее решения

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = X_3(t, \varepsilon) - \varepsilon^3 \delta(t), \quad \bar{\xi} = \frac{x - \bar{x}(t)}{\varepsilon}, \quad \bar{W} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{dX_3}{dt} - \varepsilon^3 \frac{d\delta}{dt}; \\ \underline{x}(t) = X_3(t, \varepsilon) + \varepsilon^3 \delta(t), \quad \underline{\xi} = \frac{x - \underline{x}(t)}{\varepsilon}, \quad \underline{W} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{dX_3}{dt} + \varepsilon^3 \frac{d\delta}{dt}. \end{aligned}$$

Кривая $\bar{x}(t)$ делит область \bar{D} на подобласти $\bar{D}_{up}^{(-)} := \{(x, t) \in [0; \bar{x}(t, \varepsilon)] \times [0; T]\}$ и $\bar{D}_{up}^{(+)} := \{(x, t) \in [\bar{x}(t, \varepsilon); 1] \times [0; T]\}$, а кривая $\underline{x}(t)$ – на подобласти $\bar{D}_{low}^{(-)} := \{(x, t) \in [0; \underline{x}(t, \varepsilon)] \times [0; T]\}$ и $\bar{D}_{low}^{(+)} := \{(x, t) \in [\underline{x}(t, \varepsilon); 1] \times [0; T]\}$.

В области $\bar{D}_{up}^{(-)}$ будем строить функции $\bar{V}^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}^{(-)}(x, \varepsilon)$, в области $\bar{D}_{up}^{(+)}$ – функции $\bar{V}^{(+)}(x, \varepsilon)$ и $\bar{U}^{(+)}(x, \varepsilon)$; а нижнее решение – функции $\underline{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ и $\underline{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ будем строить соответственно в областях $\bar{D}_{low}^{(\mp)}$.

Функция $\delta(t)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия **У1** и **У3** для верхнего и нижнего решений. Верхнее и нижнее решения строятся путем модификации асимптотических представлений решения (V_3, U_3) в порядке ε^2 :

$$\begin{aligned}\bar{V}^{(\mp)} &= V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\beta^{(\mp)} + \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + Re^{-\varkappa \rho^{(\mp)}} \right), \\ \bar{U}^{(\mp)} &= U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\alpha^{(\mp)} + \bar{q}_3^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + Re^{-\varkappa \rho^{(\mp)}} \right), \\ \underline{V}^{(\mp)} &= V_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(-\beta^{(\mp)} + \underline{q}_3^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t) - Re^{-\varkappa \rho^{(\mp)}} \right), \\ \underline{U}^{(\mp)} &= U_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(-\alpha^{(\mp)} + \underline{q}_3^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) - Re^{-\varkappa \rho^{(\mp)}} \right).\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь через $U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon), V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon)$ обозначены суммы (31), в которых аргумент ξ заменен на $\bar{\xi}$, а через $U_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon), V_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon)$ – суммы (31), в которых аргумент ξ заменен на $\underline{\xi}$; коэффициенты R и \varkappa – положительные постоянные, $\rho^{(-)} = \frac{x}{\varepsilon}$, $\rho^{(+)} = \frac{1-x}{\varepsilon}$.

Величины $\alpha^{(\mp)}$ и $\beta^{(\mp)}$ представляют собой модификацию регулярной части. Они определяются как решения системы уравнений

$$\gamma \alpha^{(\mp)} - \beta^{(\mp)} = A; \quad -\alpha^{(\mp)} + g_v(v^{1,3}) \beta^{(\mp)} = B, \quad (33)$$

где A и B – положительные константы, которые выберем достаточно большими, чтобы выполнялось условие **У2**. Решая систему, получим

$$\alpha^{(\mp)} = \frac{A g_v(v^{1,3}) + B}{\gamma g_v(v^{1,3}) - 1}, \quad \beta^{(\mp)} = \frac{A + \gamma B}{\gamma g_v(v^{1,3}) - 1}.$$

В силу условия **A2** величины $\alpha^{(\mp)}$ и $\beta^{(\mp)}$ положительны.

Функции $\bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t), \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t), \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t), \underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t)$ являются решением следующей системы уравнений:

$$-\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + \gamma \bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) = 0, \quad (34)$$

$$-\underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t) + \gamma \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_2^{(\mp)} v}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{W} \frac{\partial \bar{q}_2^{(\mp)} v}{\partial \bar{\xi}} - g_v(\bar{v}(\bar{\xi}, t)) \bar{q}_2^{(\mp)} v - \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) + 2 \frac{\delta(t)}{\gamma} \Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{q}_2^{(\mp)} v}{\partial \underline{\xi}^2} + \underline{W} \frac{\partial \underline{q}_2^{(\mp)} v}{\partial \underline{\xi}} - g_v(\underline{v}(\underline{\xi}, t)) \underline{q}_2^{(\mp)} v - \bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) - 2 \frac{\delta(t)}{\gamma} \Phi^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \bar{W}) = 0. \quad (37)$$

Заметим, что $\underline{\xi} = \bar{\xi} + O(\varepsilon^2)$.

Сложим уравнения (34) и (35) отдельно для функций с верхним индексом «-» и с верхним индексом «+» и также сложим уравнения (36) и (37). Тогда получим:

$$\begin{aligned}- \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + \underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t) \right) + \gamma \left(\bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) \right) + O(\varepsilon^2) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v + \underline{q}_2^{(\mp)} v \right) + \frac{dX_3}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v + \underline{q}_2^{(\mp)} v \right) - \\ - g_v(\bar{v}(\bar{\xi}, t)) \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + \underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t) \right) - \left(\underline{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \bar{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) \right) + O(\varepsilon^2) &= 0.\end{aligned}\quad (38)$$

Положим

$$q_2^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t) = -\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^2), \quad q_2^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t) = -\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (39)$$

тогда каждое из равенств (38) окажется выполненным с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Используя равенства (39) и уравнения (34), перепишем уравнение (36) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_2^{(\mp)}v}{d\xi^2} + \bar{W} \frac{\partial \bar{q}_2^{(\mp)}v}{d\bar{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t))\bar{q}_2^{(\mp)}v + \frac{1}{\gamma}\bar{q}_2^{(\mp)}v + 2\frac{\delta(t)}{\gamma}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}) + O(\varepsilon^2) = 0.$$

Сравнивая последние уравнения с (27), убеждаемся, что их решениями являются функции $-\delta(t)\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W})$.

Положим

$$\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi}) = -\delta(t)\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}), \quad \underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi}) = \delta(t)\Phi^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \underline{W}), \quad (40)$$

$$\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi}) = -\delta(t)\gamma^{-1}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}), \quad \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi}) = \delta(t)\gamma^{-1}\Phi^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \underline{W}). \quad (41)$$

Функции $\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t)$, $\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t)$, $\underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t)$, $\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t)$ являются решением следующей системы уравнений:

$$-\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) + \gamma\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t) = 0, \quad (42)$$

$$-\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t) + \gamma\underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t) = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{W} \frac{\partial \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \bar{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t))\bar{q}_3^{(\mp)}v - \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t) - (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} + \\ + 2\delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, t) - g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) \cdot Q_1^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) \cdot \bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) + de^{-\lambda|\bar{\xi}|} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \underline{\xi}^2} + \underline{W} \frac{\partial \underline{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \underline{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\underline{\xi}, t))\underline{q}_3^{(\mp)}v - \bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t) + (g_v(\tilde{v}(\underline{\xi}, t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} - \\ - 2\delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial \underline{\xi}}(\underline{\xi}, t) - g_{vv}(\tilde{v}(\underline{\xi}, t)) \cdot Q_1^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t) \cdot \underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t) - de^{-\lambda|\underline{\xi}|} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь d и λ – положительные величины, которые выбираются таким образом, чтобы было выполнено условие **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

Сложим уравнения (42) и (43) отдельно для функций с верхним индексом «-» и функций с верхним индексом «+», а также уравнения (44) и (45), учтем равенство (39) и получим для сумм $(\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t) + \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t))$, $(\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) + \underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t))$ такую же систему уравнений, что и (38).

Положим

$$q_3^{(\mp)}v(\underline{\xi}, t) = -\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^2), \quad q_3^{(\mp)}u(\underline{\xi}, t) = -\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^2). \quad (46)$$

Используя эти равенства, перепишем уравнение (44) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{W} \frac{\partial \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial \bar{\xi}} - (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi})) - \gamma^{-1})\bar{q}_3^{(\mp)}v = \\ = -2\delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, t) + q_3 F^{(\mp)}(\bar{\xi}, t) - de^{-\lambda|\bar{\xi}|} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где

$$q_3 F^{(\mp)}(\bar{\xi}, t) = (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} + g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) \cdot Q_1^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) \cdot \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t).$$

Будем решать уравнение для $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$ с условиями

$$\bar{q}_3^{(\mp)} v(0, t) + \beta^{(\mp)} = p, \quad \bar{q}_3^{(\mp)} v(\mp\infty, t) = 0.$$

Константу p выберем таким образом, чтобы выполнялось условие **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В силу выполнения условия **A2** для каждого вещественного значения W существует пара функций $\Psi^{(-)}(\bar{\xi}, t)$ и $\Psi^{(+)}(\bar{\xi}, t)$ – решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}^2} + W \frac{\partial \Psi^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}} - (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) - \gamma^{-1}) \Psi^{(\mp)} = 0,$$

для которых справедливы следующие оценки [16, 17]:

$$|\Psi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t)| \leq C e^{-\kappa|\bar{\xi}|},$$

где C и κ – некоторые положительные величины.

Зная решения однородного уравнения, можно, используя стандартные методы понижения порядка, получить функции $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$ в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) &= (p - \beta^{(\mp)}) \frac{\Psi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t)}{\Psi^{(\mp)}(0, t)} + \Psi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t) \times \\ &\times \int_0^{\bar{\xi}} \frac{e^{-\bar{W}s} ds}{(\Psi^{(\mp)}(s, t))^2} \int_{\mp\infty}^s e^{\bar{W}\eta} \Psi^{(\mp)}(\eta, t) \left(-2\delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)} u}{\partial \eta}(\eta, t) + q_3 F^{(\mp)}(\eta, t) - d e^{-\lambda|\eta|} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (47)$$

Заметим, что выбирая достаточно большие числа p и d и достаточно малое число λ , можно добиться того, чтобы функции $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$ принимали строго положительные значения при $\bar{\xi} \leq 0$ или $\bar{\xi} \geq 0$ соответственно.

3.2. Проверка дифференциальных неравенств

Покажем, что для построенных пар функций \bar{V}, \bar{U} и $\underline{U}, \underline{V}$ выполняются условия **У1–У5**.

Проверка условия **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В каждый момент времени рассмотрим три области, где разность верхнего и нижнего решений выражается различным образом:

$$\bar{V} - \underline{V} = \begin{cases} \bar{V}^{(-)} - \underline{V}^{(-)}, & 0 \leq x < \bar{x}(t), t \in [0, T], \\ \bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)}, & \bar{x}(t) \leq x \leq \underline{x}(t), t \in [0, T], \\ \bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)}, & \underline{x}(t) < x \leq 1, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим отрезок $\bar{x}(t) \leq x \leq \underline{x}(t)$. В этом случае

$$0 \leq \bar{\xi} \leq 2\varepsilon^2\delta(t); \quad -2\varepsilon^2\delta(t) \leq \underline{\xi} \leq 0,$$

а для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение:

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)} &= v^3 + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} \right) - \\ &- v^1 - \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^3 \left(\underline{q}_3^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \beta^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

На рассматриваемом отрезке преобразуем часть слагаемых из (48) следующим образом:

$$\begin{aligned} &v^3 + Q_0^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - v^1 - Q_0^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(-)} v(\underline{\xi}, t) = \\ &= v^3 + Q_0^{(+)} v(0, t) + \Phi^{(+)}(0, t, W_0) \bar{\xi} - \varepsilon^2 \delta(t) \Phi^{(+)}(0, t, W_0) - v^1 - Q_0^{(-)} v(0, t) - \\ &- \Phi^{(-)}(0, t, W_0) \underline{\xi} - \varepsilon^2 \delta(t) \Phi^{(-)}(0, t, W_0) - \varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) (\bar{\xi} - \varepsilon^2 \delta) + O(\varepsilon^4) = \\ &= \Phi(0, t, W_0) (\bar{\xi} - \underline{\xi}) - 2\varepsilon^2 \delta(t) \Phi(0, t, W_0) - \varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) (\bar{\xi} - \varepsilon^2 \delta) + O(\varepsilon^4) = \\ &= -\varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) (\bar{\xi} - \varepsilon^2 \delta) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Здесь были использованы выражения (40) для функций $\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$, $\underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t)$ условия при $\xi = 0$ задачи (20), равенство

$$\bar{\xi} - \underline{\xi} = 2\varepsilon^2\delta(t), \quad (49)$$

равенство (30), выражение (7) и обозначено $\Phi(0, t, W_0) := \Phi^{(-)}(0, t, W_0) = \Phi^{(+)}(0, t, W_0)$. Учитывая условия при $\xi = 0$ задач (26), а также то, что на рассматриваемом отрезке $\bar{\xi} = O(\varepsilon^2)$ и $\underline{\xi} = O(\varepsilon^2)$, получаем оценку

$$\varepsilon \left(Q_1^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_1^{(-)} v(\underline{\xi}, t) \right) = \varepsilon \left(\frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}}(0, t) \bar{\xi} - \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \underline{\xi}}(0, t) \underline{\xi} \right) + O(\varepsilon^4),$$

аналогично

$$\sum_{i=2}^3 \varepsilon^i \left(Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_i^{(-)} v(\underline{\xi}, t) \right) = O(\varepsilon^4).$$

Подставляя полученные оценки в выражение (48) для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области и учитывая равенство (46), получим равенство

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)} &= -\varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) (\bar{\xi} - \varepsilon^2 \delta) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}}(0, t) \bar{\xi} - \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \underline{\xi}}(0, t) \underline{\xi} \right) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \bar{q}_3^{(-)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} + \beta^{(-)} \right) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Выберем величины p и d в выражении (47) достаточно большими, а λ – достаточно малой, чтобы правая часть последнего выражения была положительна. Это возможно, поскольку на рассматриваемом отрезке $\bar{\xi} = O(\varepsilon^2)$ и $\underline{\xi} = O(\varepsilon^2)$. Тогда условие $\bar{V} - \underline{V} > 0$ окажется выполненным при $\bar{x}(t) \leq x \leq \underline{x}(t)$, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим теперь множество $\underline{x}(t) \leq x \leq 1$, $t \in [0, T]$. На этом множестве для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)} &= v^3 + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} + Re^{-\lambda \rho^{(+)}} \right) - \\ &- v^3 - \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^3 \left(\underline{q}_3^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \beta^{(+)} - Re^{-\lambda \rho^{(+)}} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Преобразуем часть слагаемых последнего равенства следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_0^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_0^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(+)} v(\underline{\xi}, t) &= \\ = \Phi^{(+)} \left(\bar{\xi}, t, \frac{dX_3}{dt} \right) (\bar{\xi} - \underline{\xi}) - 2\varepsilon^2 \delta(t) \Phi^{(+)} \left(\bar{\xi}, t, \frac{dX_3}{dt} \right) + O(\varepsilon^4) &= O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Здесь были использованы выражения (40) и равенство (49).

Подставляя полученные оценки в выражение (50) для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области и учитывая равенство (46), приходим к равенству

$$\bar{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)} = \varepsilon \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, t) (\bar{\xi} - \underline{\xi}) + \varepsilon^3 \left(2\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + 2\beta^{(+)} \right) + O(\varepsilon^4).$$

Выберем величины p и d в выражении (47) достаточно большими, а λ – достаточно малой, чтобы правая часть последнего выражения была положительна. Тогда условие $\bar{V} - \underline{V} > 0$ окажется выполненным при $\underline{x}(t) \leq x \leq 1$, $t \in [0, T]$.

Доказательство справедливости неравенства $\bar{V} - \underline{V} > 0$ при $0 \leq x \leq \bar{x}(t)$, $t \in [0, T]$ проводится так же, как и при $\underline{x}(t) \leq x \leq 1$, $t \in [0, T]$.

Упорядоченность функций \bar{U} и \underline{U} следует из вида U -компонент верхнего и нижнего решений (см. (32)), а также выражений (19), (25), аналогичных выражений для функций $Q_i^{(\mp)} u$, $i = 2, 3$, которые могут быть получены из равенств (17) в порядках ε^2 и ε^3 соответственно, а также равенств (41).

Проверим выполнение условия **Y2**. Заметим, что это условие выполняется, если справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} L_{u\varepsilon}(\bar{U}, \bar{V}) &:= \varepsilon^4 \bar{U}_{xx} - \varepsilon^3 \bar{U}_t + \bar{V} - \gamma \bar{U} < 0 < L_{u\varepsilon}(\underline{U}, \underline{V}) \quad (x, t) \in [0; 1] \times (0; T], \\ L_{v\varepsilon}(\bar{V}, \underline{U}) &:= \varepsilon^2 \bar{V}_{xx} - \varepsilon \bar{V}_t - g(\bar{V}, x, \varepsilon) - \underline{U} < 0 < L_{v\varepsilon}(\underline{V}, \bar{U}), \quad (x, t) \in [0; 1] \times (0; T]. \end{aligned}$$

Подставляя в оператор $L_{u\varepsilon}(\bar{U}, \bar{V})$ функции \bar{U} , \bar{V} , получим

$$\begin{aligned} L_{u\varepsilon}(\bar{U}, \bar{V}) &= \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} \left(Q_0^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + W \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(Q_0^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + \\ &+ V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) - \gamma U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \gamma \bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + \\ &+ \varepsilon^3 \left(\beta^{(\mp)} - \gamma \alpha^{(\mp)} + \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \gamma \bar{q}_3^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon^3 A + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенства (17), уравнения (34), (42) и первое из равенств (33).

Теперь подставим в оператор $L_{v\varepsilon}(\bar{V}, \underline{U})$ функции \bar{V} , \underline{U} :

$$\begin{aligned} L_{v\varepsilon}(\bar{V}, \underline{U}) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + W \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) - g \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) - U_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + W \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - g_v \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) \right) + \\ &+ \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + W \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - g_v \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \underline{q}_3^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) - \right. \\ &\left. - g_v \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) \beta^{(\mp)} + \alpha^{(\mp)} \right) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

В правой части добавим и вычтем слагаемые $g_v(v^{1,3})\beta^{(\mp)}$, учтем также равенства

$$\begin{aligned} g \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) + U_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon) &= g \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) + U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) - U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + \\ &+ U_3^{(\mp)}(\underline{\xi}, t, \varepsilon) = g \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) + U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) - \\ &- 2\varepsilon^2 \delta(t) \gamma^{-1} \Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}) - 2\varepsilon^3 \delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)} u}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^4), \\ L_{v\varepsilon}(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon), U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon)) &= O(\varepsilon^4), \\ g_v \left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) \right) \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) &= \left(g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) + \varepsilon g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) Q_1^{(\mp)} v \right) \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} L_{v\varepsilon}(\bar{V}, \underline{U}) &= \\ &\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + W \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) \cdot \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \underline{q}_2^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\delta(t)}{\gamma} \Phi^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \bar{W}) \right) + \\ &+ \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) + W \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) \cdot \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \underline{q}_3^{(\mp)} u(\underline{\xi}, t) - \right. \\ &\left. - (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) - g_v(v^{1,3})) \beta^{(\mp)} + 2\delta(t) Q_1^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) - g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi}, t)) \cdot Q_1^{(\mp)} v \cdot \bar{q}_2^{(\mp)} v \right) + \\ &+ \varepsilon^3 (-g_v(v^{1,3})\beta^{(\mp)} + \alpha^{(\mp)}) + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon^3 (B + de^{-\lambda|\xi|}) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Здесь мы учли уравнения (36) и (44) для функций $\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$ и $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$ и второе равенство (33). Аналогично проверяется справедливость условий **Y2** для нижнего решения.

Проверим выполнение условия **У3** на производную для верхнего решения.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}^{(-)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{V}^{(+)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} (\Phi^{(-)}(0, t, \bar{W}) - \Phi^{(+)}(0, t, \bar{W})) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \varepsilon^{i-1} \left(\frac{\partial Q_i^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial Q_i^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{q}_2^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial \bar{q}_2^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{q}_3^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial \bar{q}_3^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Преобразуем первые три слагаемых в правой части, используя условие сшивания (29) в порядках ε^i , $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (\Phi^{(-)}(0, t, \bar{W}) - \Phi^{(+)}(0, t, \bar{W})) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon^{i-1} \left(\frac{\partial Q_i^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial Q_i^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) \right) &= \\ &= \varepsilon^2 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) \frac{d\delta}{dt} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

где функция $H_0(\tilde{v}, W)$ определена равенством (7). Из первого равенства (40) и условия **A4** следует, что

$$\frac{\partial \bar{q}_2^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial \bar{q}_2^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) = O(\varepsilon).$$

Используя явные выражения (47) для функций $\bar{q}_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t)$, можно представить разность производных этих функций при $\xi = 0$ в виде

$$\frac{\partial \bar{q}_3^{(-)} v}{\partial \xi}(0, t) - \frac{\partial \bar{q}_3^{(+)} v}{\partial \xi}(0, t) = K(t)\delta(t) + \bar{F}(t) + O(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} K(t) &= -\frac{2}{\Psi^{(-)}(0, t)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 e^{W_0 \xi} \Psi^{(-)}(\xi, t) \frac{\partial Q_1^{(-)} u}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi + \frac{2}{\Psi^{(+)}(0, t)} \int_{+\infty}^0 e^{W_0 \xi} \Psi^{(+)}(\xi, t) \frac{\partial Q_1^{(+)} u}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

а функция $\bar{F}(t)$ не зависит от δ .

Определим функцию $\delta(t)$ как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) \frac{d\delta}{dt} + K(t)\delta(t) = \sigma, \quad \delta(0) = \delta_0,$$

где σ и δ_0 – достаточно большие положительные числа.

В силу неравенства (8) из условия **A4** функция $\delta(t)$ принимает положительные значения при $t \geq 0$.

При таком выборе функции $\delta(t)$ для разности производных верхнего решения в точке $\bar{x}(t)$ в каждый момент времени получаем выражение

$$\frac{\partial \bar{V}^{(-)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{V}^{(+)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sigma + \varepsilon^2 \bar{F}(t) + O(\varepsilon^3).$$

Выбирая величину σ достаточно большой, можно добиться выполнения каждого из неравенств условия **У3**.

Условие **У4** оказываются выполненным за счет слагаемых $Re^{-\kappa\rho(\mp)}$.

4. Основной результат

Опираясь на результат, полученный в [6], заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия **A1–A4**. Пусть начальные функции задачи (1), $(v_{init}(x, \varepsilon), u_{init}(x, \varepsilon))$ – гладкие при $x \in [0; 1]$ и заключены между верхним и нижним решениями (32) в начальный момент времени. Тогда при достаточно малых значениях ε задача (1) имеет единственное классическое решение $(v(x, t, \varepsilon), u(x, t, \varepsilon))$, для которого пара функций $(V_3(x, t, \varepsilon), U_3(x, t, \varepsilon))$ является равномерным в \bar{D} асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^4)$:

$$|v(x, t, \varepsilon) - V_3(x, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^4 C e^{-\kappa|\xi|}, \quad |u(x, t, \varepsilon) - U_3(x, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^4 C e^{-\kappa|\xi|},$$

где C и κ – положительные константы, не зависящие от ε .

Заключение

В настоящей работе приведен алгоритм построения верхнего и нижнего решений системы параболических уравнений с одномасштабным внутренним переходным слоем. Этот алгоритм может быть в дальнейшем обобщен на более сложные системы с двухмасштабными переходными слоями или на системы с разрывными реактивными слагаемыми. Подобные исследования имеют важное практическое значение для создания математически обоснованных моделей биофизики.

Список литературы / References

- [1] Murray J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2003.
- [2] FitzHugh R. A., “Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane”, *Biophys. J.*, **1**:6 (1961), 445–466.
- [3] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., “Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред”, *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Yakovenko L. V., “A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium”, *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473.

- [4] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. и др., “Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах”, *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 2016, № 6, 39–45; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A. et al., “Autowave self-organization in heterogeneous natural–anthropogenic ecosystems”, *Moscow University Physics Bulletin*, **71:6** (2016), 562–568.
- [5] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Семина А. Е., “Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах”, *Математическая биология и биоинформатика*, **12:1** (2017), 186–197; [Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Semina A. E., “The Model of Structurization of Urban Ecosystems as the Process of Self-Organization in Active Media”, *Math. Biol. Bioinf.*, **12:1** (2017), 186–197, (in Russian).]
- [6] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.
- [7] Неведов Н. Н., “Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость”, *Дифференц. уравнения*, **36:2** (2000), 262–269; English transl.: Nefedov N. N., “An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability”, *Differential Equations*, **36:2** (2000), 298–305.
- [8] Волков В. Т., Неведов Н. Н., “Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46:4** (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., “Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **46:4** (2006), 585–593.
- [9] Левашова Н. Т., Петровская Е. С., “Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки”, *Ученые записки физического факультета Московского университета*, **1:3(11)** (2014), 1–13; [Levashova N. T., Petrovskaya E. S., “Application of the differential inequalities method for justification of asymptotics of the solution of a two ordinary differential equations system in the form of a step-like contrast structure”, *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, **1:3(11)** (2014), 1–13 (in Russian).]
- [10] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **51:3** (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations”, *Differential Equations*, **51:3** (2015), 342–361.
- [11] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52:11** (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52:11** (2012), 1526–1546.
- [12] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53:9** (2013), 1427–1447; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **53:9** (2013), 1239–1259.
- [13] Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A., *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of mathematical monographs, **140**, American Mathematical Soc., 1994.
- [14] Давыдова М. А., Захарова С. А., Левашова Н. Т., “Об одной модельной задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57:9** (2017), 1548–1559; English transl.: Davydova M. A., Zakharova S. A., Levashova N. T., “On one model problem for the reaction–diffusion–advection equation”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **57:9** (2017), 1528–1539.

- [15] Бутузов В. Ф., Неделько И. В., “Контрастная структура типа ступеньки в системе двух сингулярно возмущенных параболических уравнений”, *Матем. моделирование*, **13**:12 (2001), 23–42; [Butuzov V. F., Nedelko I. V., “Step-type contrast structure in a system of two singularly perturbed parabolic equations”, *Matem. Mod.*, **13**:12 (2001), 23–42, (in Russian).]
- [16] Omel’chenko O., Recke L., “Boundary layer solutions to singularly perturbed problems via the implicit function theorem”, *Asymptotic Analysis*, **62**:3–4 (2009), 207–225.
- [17] Palmer K. J., “Exponential dichotomies for almost periodic equations”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **101**:2 (1987), 293–298.

Bytsyura S. V., Levashova N. T., "Upper and Lower Solutions for the FitzHugh–Nagumo Type System of Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 33–53.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-33-53

Abstract. We consider a moving front solution of a singularly perturbed FitzHugh–Nagumo type system of equations. The solution contains an internal transition layer, that is, a subdomain where a sharp change in the values of the functions describing the solution occurs. In initial-boundary value problems with moving front solutions, there naturally exists a small parameter that is equal to the ratio of the inner transition layer width to the width of the considered region. Taking into account this small parameter leads to the fact that the equations become singularly perturbed, thus the problems are classified as “hard”, the numerical solution of which meets certain difficulties and does not always give a reliable result. In connection with this, the role of an analytical investigation of the existence of a solution with an internal transition layer increases. For these purposes the use of differential inequalities method is especially effective. The method consists in constructing continuous functions, which are called upper and lower solutions. An important role is played by the so-called “quasimonotonicity condition” for functions which describe reactive terms. In this paper, we present an algorithm for constructing the upper and the lower solutions of a parabolic system with a single-scale internal transition layer. It should be mentioned that the quasimonotonicity condition in the present paper differs from the analogous condition in previous publications. The above algorithm can be further generalized to more complex systems with two-scale transition layers or to systems with discontinuous reactive terms. The study is of great practical importance for creating mathematically grounded models in biophysics.

Keywords: system of parabolic equations, internal transition layer, small parameter, upper and lower solutions, differential inequalities method, asymptotic representation

On the authors:

Svetlana V. Bytsyura, orcid.org/0000-0001-7787-437X, past master,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sv.bytsyura@physics.msu.ru

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Acknowledgments:

¹This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.

©Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-54-62

УДК 517.9

Инвариантные характеристики вынужденных колебаний балки с продольным сжатием

Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М.

получена 18 ноября 2017

Аннотация. Рассматриваются колебания упругой балки с продольным сжатием. Такая балка может быть реализована из двух упругих стальных полос, соединённых на свободных концах. Сжатие в балке происходит за счет натянутой нити. Возбуждение колебаний осуществляется воздействием переменного магнитного поля на магнит, установленный на конце балки. Регистрировался закон движения при изменении частоты гармонического воздействия. В результате натурального эксперимента был получен большой массив данных, представляющих собой как упорядоченные периодические колебания, так и неупорядоченные колебания, характерные для динамических систем с хаотическим поведением. Для изучения инвариантных числовых характеристик аттрактора соответствующей динамической системы вычислялись корреляционный интеграл и корреляционная размерность, а также β -статэнтропия. Объемный численный эксперимент показал, что вычисление β -статэнтропии предпочтительнее расчёта корреляционного показателя. На основе разработанных алгоритмов построена зависимость β -статэнтропии от частоты внешнего воздействия. Эта зависимость может служить эффективным инструментом для оценки адекватности математической модели вынужденных колебаний балки с потерей устойчивости.

Ключевые слова: балка с продольным сжатием, устойчивость, бифуркации, уравнение Дуффинга, аттрактор Уэды, хаотические колебания, энтропия, ляпуновские показатели

Для цитирования: Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М., "Инвариантные характеристики вынужденных колебаний балки с продольным сжатием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 54–62.

Об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, ведущий научный сотрудник, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Лоханин Михаил Владимирович, старший преподаватель, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: lokhanimv@mail.ru

Сиротин Дмитрий Михайлович, старший лаборант-исследователь, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: hhiks@yandex.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Описание эксперимента. Постановка задачи

Механические и электро-механические системы с хаотическим поведением достаточно давно находятся в сфере пристального интереса как теоретиков, так и создателей экспериментальных устройств с хаотическим поведением. Вместе с тем, в последнее время активно изучаются балочные колебательные системы с несколькими минимумами потенциала под воздействием внешних периодических сил. Магнито-эластическим балкам с эйлеровой неустойчивостью посвящена довольно значительная литература, сошлемся лишь на статьи [1, 2] и классическую книгу по теории колебаний [3], а также на недавнюю статью [4].

В ходе выполненного авторами натурального эксперимента рассматривались колебания упругой балки с продольным сжатием. Балки такого типа могут быть реализованы на основе пары стальных полос, соединённых на свободных концах и сжатых в продольном направлении натянутой кевларовой нитью. На свободном конце при помощи отверстий в накладках и полосах крепятся шторка из алюминиевой фольги, служащая основным элементом сенсора отклонения балки, и алюминиевая стойка с маленьким SmCo_5 магнитом, который, взаимодействуя с магнитным полем катушки, является источником силового воздействия, их масса достаточно мала (менее 10% от массы полос) и практически не влияет на движение системы. Через отверстия в пластинах проходят болты, которые крепят всю конструкцию к массивной (≈ 5 кг) стальной плите и сжимают верхнюю и нижнюю пластины, фиксируя тем самым заделанные концы (Рис. 1).

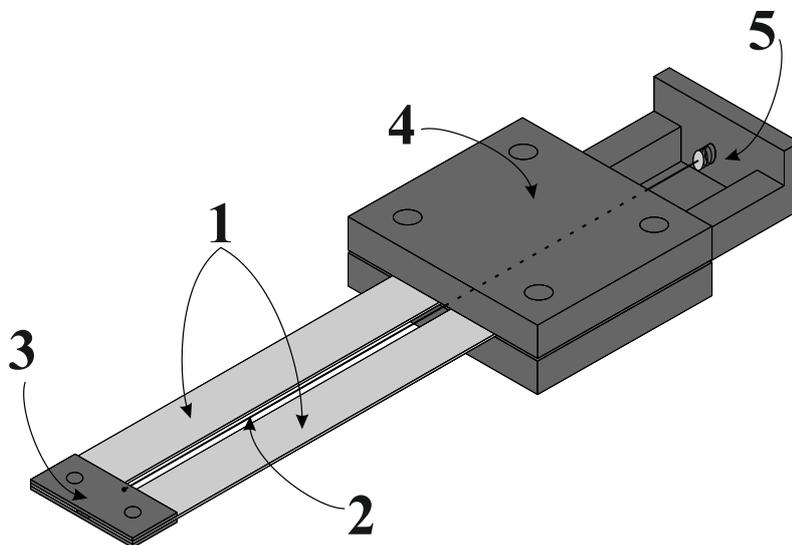


Рис. 1. Конструкция экспериментального устройства:

- 1 — упругие стальные полосы; 2 — кевларовая нить; 3 — накладки, соединяющие полосы;
4 — пластины, фиксирующие конструкцию; 5 — пружинный механизм натяжения нити.
На свободном конце крепятся шторка из алюминиевой фольги (основной элемент сенсора отклонения) и маленький магнит

Fig.1. Design of experimental device:

- 1 — elastic steel strips; 2 — Kevlar thread; 3 — overlays connecting strips; 4 — plates that fix the structure; 5 — spring mechanism of thread tension. At the free end, a curtain made of aluminum foil (the main element of the deflection sensor) and a small magnet

Электронные устройства, которые приводят балку в движение и регистрируют отклонение конца балки, базируются на измерительной карте DAS-16, работающей в составе компьютера и имеющей аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, а также таймеры. Программно 512 чисел, представляющих собой точки одного периода синусоиды, выводятся на цифро-аналоговый преобразователь и через усилитель на катушку, которая создает магнитное поле и, взаимодействуя с магнитом, определяет закон изменения силы, действующей на балку. Темп вывода этих точек определяется таймером и задает частоту силового воздействия. После каждой смены числа в цифро-аналоговом преобразователе аналого-цифровой преобразователь производит измерение положения шторки, перекрывающей оптический канал между источником света (мощный инфракрасный светодиод) и фотоприемником по сигналу фотоприемника, который записывается в массив в оперативной памяти компьютера. При многократном повторении описанной процедуры накапливается числовой массив, представляющий собой закон вынужденных колебаний балки.

Полученный числовой массив позволяет выявить динамические особенности колебательных режимов балки при различных значениях частоты внешнего сигнала. Рассматривая полученные данные как проявления некоторой динамической системы поставим задачу определения инвариантных числовых характеристик аттрактора этой системы. В связи с этим возникает необходимость обработки массива данных и определения этих характеристик. Второй, более сложной задачей, является построение математической модели данного колебательного процесса. В качестве критерия, по которому можно сравнивать поведение модельной динамической системы и экспериментальные данные, могут выступать как раз инвариантные числовые характеристики аттракторов соответствующих систем.

2. Числовые характеристики экспериментальных данных

В первую очередь рассмотрим проблему визуализации полученных в эксперименте данных. Для каждой из частот внешнего воздействия в ходе эксперимента получался массив данных, представляющий собой набор целых положительных чисел. Для получения более наглядных результатов среди них вычислялся минимум и максимум и выполнялось нормирование так, чтобы они все принадлежали отрезку $[-1, 1]$, далее к ним применялся сглаживающий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{2k+1} \left(x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-2k) \right),$$

где $k = 10$. Затем из обработанных данных формировался набор векторов (x_n, x_{n+p}) . Отображая эти пары на плоскости, получаем псевдофазовый портрет системы. Экспериментальный подбор величины p показал, что наиболее информативно фазовые портреты системы выглядят при $p = 75$. В зависимости от частоты внешнего воздействия псевдофазовые траектории могут выглядеть как упорядоченные периодические колебания, а также как системы с хаотическим поведением. При этом удается показать, что переход от периодических колебаний к хаотическим осуществляется через бифуркацию удвоения периода. На рис. 2а — 2б показаны результаты экспериментов с частотами внешнего воздействия 12.0192 Гц и 10.7759 Гц соответственно,

нетрудно видеть, что на рис. 2b период колебательного режима примерно двойной по сравнению с изображенным на рис. 2a.

На рис. 2c — 2d приведены псевдофазовые траектории для частот 8.9286 Гц и 8.2237 Гц соответственно, в этом случае экспериментальные данные демонстрируют неупорядоченное поведение. Перейдем теперь к задаче оценки степени неупорядоченности колебаний и вычислению соответствующих инвариантных характеристик.

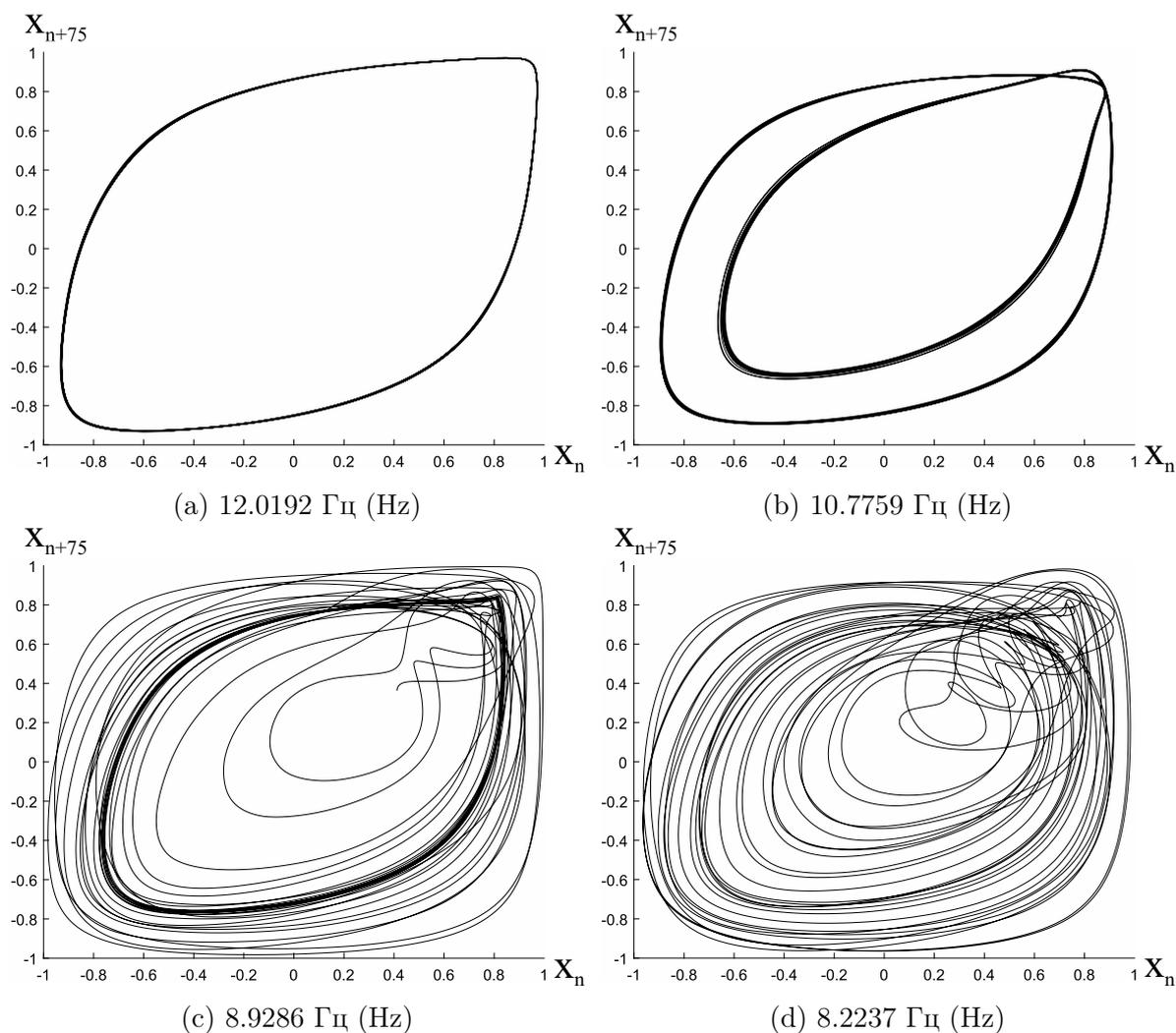


Рис. 2. Фазовые портреты при различной частоте внешнего воздействия
Fig.2. Phase portraits at various frequencies

Сложность колебательных режимов для частот воздействия меньше, чем 8.9 Гц, подтверждается приведенными на рис. 3 итерациями отображения последования Пуанкаре через период внешнего воздействия. Нетрудно видеть, что для изучения геометрической структуры аттрактора задачи получено недостаточное число итераций отображения Пуанкаре. В связи с этим вычислялся целый спектр инвариантных числовых характеристик, в частности, вычислялись корреляционный интеграл, корреляционная размерность, а также β -статэнтропия.

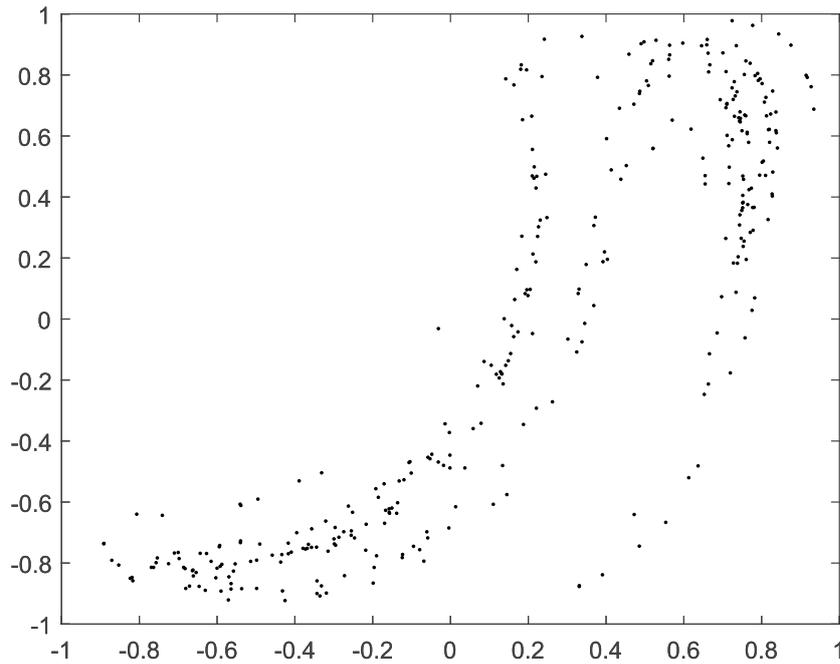


Рис. 3. Отображения последования Пуанкаре для внешнего воздействия с частотой 8.6806 Гц

Fig.3. Poincaré map for external influences at the frequency 8.6806 Hz

Численные эксперименты показали, что вычисление β -статэнтропии является наиболее предпочтительным критерием хаотичности. В соответствии с алгоритмом, изложенным в работе [5], β -статэнтропия вычисляется по следующим формулам:

$$\eta_n^{(k)}(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta r_n^{(k)}(\beta)}{k(r_n^{(k+1)}(\beta) - r_n^{(k)}(\beta))}, & \beta \neq 0, \\ \frac{1}{k(r_n^{(k)}(0) - r_n^{(k+1)}(0))}, & \beta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$r_n^{(k)}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \gamma \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right),$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^\beta, & \beta \neq 0, \\ -\ln t, & \beta = 0, \end{cases}$$

кроме того, $\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j)$ — k -е минимальное расстояние от точки ξ_j , а $\rho(\cdot, \cdot)$ — некоторая метрика в пространстве состояний. Наиболее наглядные результаты получились с применением формулы (1) при $\beta = 0$, $k = 0$ (Таблица 1). Периодическим колебаниям в данном случае соответствуют нулевые значения этой величины, а хаотическим — положительные.

Полученные численные результаты позволяют сделать предположение, что в качестве феноменологической модели для представленных экспериментальных результатов может служить уравнение Дуффинга с внешним воздействием, которое

Таблица 1. Показатели β -статэнтропии при $\beta = 0, k = 0$
 Table 1. β -statentropy for $\beta = 0, k = 0$

	η_n
13.0208, ..., 9.1912 Гц	0
8.9286 Гц	0.1386
8.6806 Гц	0.1372
8.4459 Гц	0.136
8.2237 Гц	0.1351
8.0128 Гц	0.132
7.8125 Гц	0.1291
7.6220 Гц	0.1039
7.4405, ..., 6.9444 Гц	0

часто называется генератором Уэды [6]. Отметим, что итерации отображения последования Пуанкаре, приведённые в [6], схожи с полученными изображениями для экспериментальных данных (Рис. 3).

3. Феноменологическая модель

Предполагаемая модель является в значительной степени феноменологической. Рассуждения, аналогичные приведенным ниже, могут быть найдены в статьях [8–11]. Для построения модельного уравнения делается два наиболее важных допущения. Во-первых, движение упругой балки подменяется движением материальной точки в некотором силовом поле. Это может быть оправдано тем, что высшие собственные частоты системы лежат далеко от минимальной частоты. Во-вторых, вид потенциальной функции выбирался из следующих соображений: она должна иметь максимум при отклонении $x = 0$ и два минимума при $x = \pm x_0$, то есть положение равновесия при $x = 0$ неустойчиво, а равновесия при $x = \pm x_0$ — устойчивы. Простейшая реализация такого потенциала задается полиномом четвёртой степени вида

$$U(x) = Ax^4 - Bx^2. \quad (2)$$

Выписывая уравнение баланса сил, имеем уравнение

$$m\ddot{x} = F = F_{pot} + F_{diss} + F_{ext} = -\frac{dU}{dx} - \eta\dot{x} + F_{ext}, \quad (3)$$

где m — масса, F_{pot} — потенциальная сила, F_{diss} — сила трения и F_{ext} — внешняя сила. Учитывая вид потенциала (2), имеем

$$F_{pot} = -4Ax^3 + 2Bx = -4Ax\left(x^2 - \frac{B}{2A}\right) = -4Ax(x^2 - x_0^2),$$

причем $x = \pm x_0 = \pm\sqrt{\frac{B}{2A}}$ — точки устойчивого равновесия. В свою очередь, считаем, что сила внешнего воздействия F_{ext} задается формулой:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t),$$

тем самым, уравнение (3) записывается в виде

$$\ddot{x} = -\frac{\eta}{m}\dot{x} - \frac{4A}{m}(x^2 - x_0^2) + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t). \quad (4)$$

Выберем для переменной x новый масштаб $y = x/x_0$, тогда

$$\ddot{y} = -\frac{\eta}{m}\dot{y} - \frac{4Ax_0^2}{m}y(y^2 - 1) + \frac{F_0}{mx_0}\cos(\omega t). \quad (5)$$

Рассмотрим колебания вблизи одной из точек $y = \pm 1$. Выполняя замену $y = 1 + \zeta$ или $y = -1 + \zeta$ и полагая внешние силы отсутствующими, линеаризуем полученное уравнение в нуле. В результате уравнение малых свободных колебаний возле точек равновесия будет иметь вид

$$\ddot{\zeta} = -\frac{\eta}{m}\dot{\zeta} - \frac{8Ax_0^2}{m}\zeta.$$

Частота этих колебаний оказывается равной

$$\omega_0^2 = \frac{8Ax_0^2}{m}.$$

Это позволяет пронормировать время $\tau = \omega_0 t$, в результате чего получаем уравнение

$$\ddot{y} = -\frac{\eta}{m\omega_0}\dot{y} - \frac{1}{2}y(y^2 - 1) + \frac{F_0}{mx_0\omega_0^2}\cos(\Omega\tau), \quad (6)$$

или в более привычной форме уравнение Дуффинга с внешним воздействием:

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{1}{2}y(y^2 - 1) = f\cos(\Omega\tau), \quad (7)$$

где $\alpha = \eta\omega_0/m$ — параметр потерь, $f = F_0/(mx_0\omega_0^2)$ — параметр интенсивности внешнего воздействия, $\Omega = \omega/\omega_0$ — частота внешнего воздействия, нормированная на частоту малых свободных колебаний.

Модельное уравнение (7) довольно подробно изучено. Начиная со статьи [6] с его помощью исследуются задачи, функция потенциала которых имеет два симметричных минимума (см. [2, 4, 10]). В этом уравнении при изменении параметров реализуется хорошо известный фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу через цепочку бифуркаций удвоения. Это обстоятельство позволяет предложить следующий способ подбора параметров задачи (7) так, чтобы свойства аттрактора динамической системы (7) и экспериментальной модели, описанной в пункте 1, были близки. С этой целью в области, где реализуется фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу, фиксируются параметры α и f уравнения (7). Затем определяется частота Ω , при которой происходит первое удвоение периода, эта величина сопоставляется с частотой, при которой происходит удвоение периода в экспериментальной системе. Далее определяются значения Ω , при которых (7) имеет хаотический аттрактор. Эти значения можно определить на основе вычисления старшего ляпуновского показателя (используется алгоритм из [7]). Наконец, для значений частот, соответствующих эксперименту (см. таблицу 1), у аттрактора динамической системы (7)

вычисляется показатель β -статэнтропии. Степень удачности выбора параметров α и f будет определяться близостью значений β -статэнтропии модельной системы и экспериментальной реализации.

Описанный алгоритм авторы планируют применить к уравнению (7) и имеющимся экспериментальным данным, поскольку он может служить эффективным инструментом для оценки адекватности математической модели вынужденных колебаний балки с потерей устойчивости.

Список литературы

- [1] Moon F.C. and Holmes P.J., “A magnetoelastic strange attractor”, *Journal of Sound and Vibration*, **65**:2 (1979), 275 – 296.
- [2] Tam Jee Ian, Holmes Philip, “Revisiting a magneto-elastic strange attractor”, *Journal of Sound and Vibration*, **333**:6 (2014), 1767–1780.
- [3] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, **42**, Springer, 1983.
- [4] Kumar K.Aravind, Ali Shaikh Faruque, Arockiarajan A., “Magneto-elastic oscillator: Modeling and analysis with nonlinear magnetic interaction”, *Journal of Sound and Vibration*, **393** (2017), 265–284.
- [5] Тимофеев Е. А., “Статистически оцениваемые инварианты мер”, *Алгебра и анализ*, **17**:3 (2005), 204–236; English transl.: Timofeev E. A., “Invariants of measures admitting statistical estimates”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:3 (2006), 527–551.
- [6] Yoshisuke Ueda, “Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing’s equation”, *Nagoya University Institute of Plasma Physics, Japan*, 1978, № IPPJ–341.
- [7] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; English transl.: Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor”, *Differ. Equ.*, **41**:2 (2005), 284–289.
- [8] Смирнов Л. В., *Вывод уравнений динамики упругих систем*, Учебное пособие, ННГУ, Н. Новгород, 1997, 15 с.; [Smirnov L.V., *Vyvod uravneniy dinamiki uprugikh sistem*, Uchebnoe posobie, UNN, Nizhniy Novgorod, 1997, 15 pp., (in Russian)].
- [9] Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В., “Динамика упругого продольного нагруженного стержня при потере устойчивости”, *Проблемы прочности и пластичности*, **76**:3 (2014), 205–216; [Kapitanov D.V., Ovchinnikov V.F., Smirnov L.V., “The dynamics of an axially loaded elastic bar after loss of stability”, *Problems of strength and plasticity*, **76**:3 (2014), 205–216, (in Russian)].
- [10] Саранин В.А., “О хаотическом поведении электростатического маятника при параметрическом воздействии”, *Вестник Пермского Университета. Серия: Физика*, **27–28** (2014), 18–23; [Saranin V.A., “About chaotic behaviour of an electrostatic pendulum at parametrical influence”, *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, **27–28** (2014), 18–23 (in Russian)].
- [11] Лоханин М.В., Шибалова Ю.В., “Сжатый упругий мостик в качестве элемента энергонезависимой памяти”, *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные и технические науки*, 2014, №1, 34–37; [M. V. Lokhanin, Ju. V. Shibalova, “Buckling beam as nonvolatile memory cell”, *Vestnik Yaroslavskego gosudarstvennogo universiteta im. P.G. Demidova. Seriya Yestestvennyye i tekhnicheskkiye nauki*, 2014, №1, 34–37 (in Russian)].

Glyzin S. D., Lokhanin M. V., Sirotin D. M., "Invariant Characteristics of Forced Oscillations of a Beam with Longitudinal Compression", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 54–62.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-54-62

Abstract. Oscillations of an elastic beam with longitudinal compression are considered. The beam consists of two steel strips connected on free ends and fixed on opposite ones. Compression is achieved by a strained string. Excitation of oscillations is performed by exposure of alternating magnetic field on a magnet placed on the loose end. The law of motion with a change in the frequency of the harmonic action is registered. As a result of the full-scale experiment a large set of data is obtained. This set contains ordered periodic oscillations as well as disordered oscillations specific to dynamical systems with chaotic behaviour. To study the invariant numerical characteristics of the attractor of the corresponding dynamical system, a correlation integral and a correlation dimensionality as well as β -statentropy are calculated. A large numerical experiment showed that the calculation of β -statentropy is preferable to the calculation of the correlation index. Based on the developed algorithms the dependence of β -statentropy on the frequency of the external action is constructed. The constructed dependence can serve as an effective tool for measuring the adequacy of the mathematical model of forced oscillations of buckling beam driven oscillations.

Keywords: buckling beam, stability, bifurcations, Duffing's equation, Ueda attractor, chaotic oscillations, entropy, Lyapunov exponents

On the authors:

Sergey D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Lokhanin Mikhail Vladimirovich, senior lecturer,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: lokhaninmv@mail.ru

Sirotin Dmitry Mikhailovich, senior laboratory assistant researcher,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,
e-mail: hhiks@yandex.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. 14-21-00158).

©Горюнов В. Е., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-63-70

УДК 517.9

Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова

Горюнов В. Е.

получена 20 ноября 2017

Аннотация. В работе рассматривается задача математического моделирования окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, в основе которых лежит широко известный механизм реакции Белоусова. Процесс взаимодействия основных компонентов в такой реакции может быть интерпретирован феноменологически близкой к ней моделью «хищник – жертва». В связи с этим рассматривается параболическая краевая задача, состоящая из трех уравнений вольтерровского типа, которая представляет собой математическую модель этой реакции. Сначала проводится локальное исследование окрестности нетривиального состояния равновесия системы, определяется критический параметр, при котором в окрестности нетривиального решения колебательным образом теряется устойчивость. С помощью стандартных замен строится нормальная форма изучаемой системы, приводится вид ее коэффициентов, по которым определяется качественное поведение модели, кроме того, построено их графическое представление в зависимости от параметров задачи. Полученная нормальная форма позволяет доказать теорему о существовании орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла, ответвляющегося от состояния равновесия, и найти его асимптотику. Для выяснения границ применимости найденной асимптотики проводится сравнение амплитуд колебаний одной из компонент периодического решения, полученных на основе асимптотических формул и путем численного интегрирования модельной системы. Наряду с основным случаем бифуркации Андронова–Хопфа рассмотрены различные комбинации значений коэффициентов нормальной формы, получающиеся при изменении параметров исследуемой системы, и изучено соответствующее им поведение решений вблизи рассматриваемого состояния равновесия. Далее рассмотрена задача о диффузионной потере устойчивости полученного на первом этапе пространственно однородного цикла. Найдено критическое значение параметра диффузии, при котором этот цикл распределенной системы теряет устойчивость.

Ключевые слова: реакция Белоусова, параболическая система, диффузия, нормальная форма, асимптотика, бифуркация Андронова–Хопфа

Для цитирования: Горюнов В. Е., "Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 63–70.

Об авторе:

Горюнов Владимир Евгеньевич, orcid.org/0000-0002-0512-6986, старший лаборант-исследователь, ИЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: salkar@ya.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Введение

Интересующая нас реакция была открыта Б.П. Белоусовым в 1951 г., но широкую известность она получила значительно позже — в сокращенном виде результаты исследований колебательной реакции были опубликованы через 8 лет в ведомственном сборнике, выходявшем небольшим тиражом (см. [1]), а подробная статья на эту тему вышла лишь спустя 30 лет (см. [2]). Экспериментальный анализ данной реакции и первая соответствующая математическая модель были опубликованы в работах А.М. Жаботинского (см. [3]).

Мы изучаем достаточно упрощенную математическую модель с точки зрения состава компонентов реакции. Связь между рассматриваемыми нами веществами, вступающими в реакцию Белоусова, а именно: бромистой кислотой HBrO_2 , церием Ce^{4+} и бромидом Br^- (см. [3]), — наглядно можно описать следующей схемой (см. рис. 1), где знак “+” означает, что наличие одного вещества способствует появлению другого, а знак “−” свидетельствует об угнетении одного вещества другим. Исходя из феноменологической близости получившейся схемы взаимодействия веществ к задаче «хищник – жертва», в [4] для описания этой реакции была предложена система дифференциальных уравнений, а в [5] система была модифицирована для более точного моделирования протекающих химических процессов.

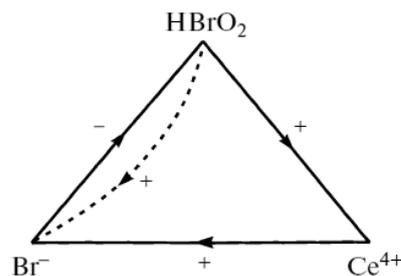


Рис. 1. Условная схема взаимодействия веществ в моделируемой реакции
 Fig. 1. The nominal scheme of substances interaction in the modeling reaction

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= D_1 \Delta x + r_1(1 + a(1 - z) - x)x, & \left. \frac{\partial x}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \dot{y} &= D_2 \Delta y + r_2(x - y)y, & \left. \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \dot{z} &= D_3 \Delta z + r_3(\alpha x + (1 - \alpha)y - z)z, & \left. \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ отвечают за плотности концентраций $\text{HBrO}_2, \text{Ce}^{4+}$ и Br^- соответственно, $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t > 0$; Δ — оператор Лапласа; Ω — ограниченная плоская область с гладкой границей $\partial \Omega$ и мерой, равной единице, ν — направление

внешней нормали к $\partial\Omega$; параметры $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$ положительны; $\alpha \in (0, 1)$; $(D_1, D_2, D_3) = d(D_1^0, D_2^0, D_3^0)$, $d > 0$.

Наша задача состоит в нахождении условия потери устойчивости предельного цикла в окрестности нетривиального состояния равновесия системы (1) при значении параметра a , близком к критическому a_{cr} , и изменении параметров диффузии. Для этого мы должны предварительно построить асимптотику этого цикла. Отметим, что в [5] для случая $a \gg 1$ соответствующий цикл был исследован с помощью метода большого параметра.

Введем для дальнейшего анализа вспомогательные обозначения: $r = r_1 + r_2 + r_3$, $p = r_1 r_2 r_3$, $q = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$. Локальный анализ задачи (1) будет выполняться вблизи состояния равновесия $(1, 1, 1)$, поскольку при

$$a > a_{cr} = (qr - p)/(r_1 r_3 (r_2 - \alpha r)) \quad (2)$$

система без диффузионных слагаемых теряет устойчивость колебательным образом.

2. Локальный анализ окрестности состояния равновесия $(1, 1, 1)$ при a , близком к критическому

Уточним постановку задачи для данного случая. Рассмотрим задачу для пространственно однородного решения системы (1), в которой будем считать, что $a = a_{cr} + \varepsilon$, где ε — положительный малый параметр, $a_{cr} > 0$ определяется формулой (2), и при этом значении состояние равновесия $(1, 1, 1)$ колебательным образом теряет устойчивость. Для этого сделаем замены: $x = u + 1$, $y = v + 1$, $z = w + 1$. Получившаяся система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r_1(u + 1)(-u - (a_{cr} + \varepsilon)w), \\ \dot{v} &= r_2(v + 1)(u - v), \\ \dot{w} &= r_3(w + 1)(\alpha u + (1 - \alpha)v - w). \end{aligned} \quad (3)$$

Выполнив в (3) стандартную замену метода нормальных форм (см., например, [6]), решение будем искать в виде

$$(u, v, w)^T = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau)e^{i\omega\tau}h + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} U_2(t, \tau) + \dots, \quad (4)$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в тех же скобках выражению; $\tau = \varepsilon t$ — медленное время; $U_j(t, \tau)$ ($j \geq 1$) — тригонометрические полиномы по t ; $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ — собственный вектор матрицы линеаризованной системы (3), соответствующий собственному числу $i\omega$, $\omega = \sqrt{q + r_1 r_3 a \alpha}$; медленно меняющаяся комплексная амплитуда $\xi(\tau)$ подлежит определению.

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ на третьем шаге из условия разрешимости задачи для U_2 в классе тригонометрических полиномов приходим к уравнению на $\xi(\tau)$:

$$\xi' = (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi,$$

у которого имеется автомодельное решение вида $\xi = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ удовлетворяют следующим уравнениям: $\rho' = \varphi_0 \rho + d_0 \rho^3$, $\varphi' = \psi_0 + c_0 \rho^2$. Здесь ρ определяет амплитуду, а φ — поправку к частоте колебаний. Параметры φ_0 , ψ_0 и d_0 имеют вид:

$$\varphi_0 = r_1 r_3 (r_2 - \alpha r)^2 / (2(r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p))),$$

$$\psi_0 = p(r_2 r - \alpha(r^2 - q + \alpha r_1 r_3)) / (2\sqrt{r_2(q - \alpha r_1 r_3) / (r_2 - \alpha r)}(r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + 4p))),$$

$$d_0 = r_2^3 r (1 - \alpha)^2 (r_1 + r_2)^4 (r_1 + r_3)^2 (r_2 + r_3)^3 ((1 + \alpha)r_1 + (\alpha - 3)r_2 + (3\alpha - 1)r_3) \cdot (q - r_1 r_3 \alpha)^2 / (2r_3^2 (r_2 - \alpha r)^3 (r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p))(r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p))).$$

В дальнейшем нас будет интересовать только амплитуда колебательного режима, поэтому c_0 в силу громоздкости здесь приводить не будем.

Для случая $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ зависимость φ_0 и d_0 от параметра α представлена на рис. 2. Здесь сплошная линия обозначает зону положительных значений, а пунктирная — зону отрицательных значений.

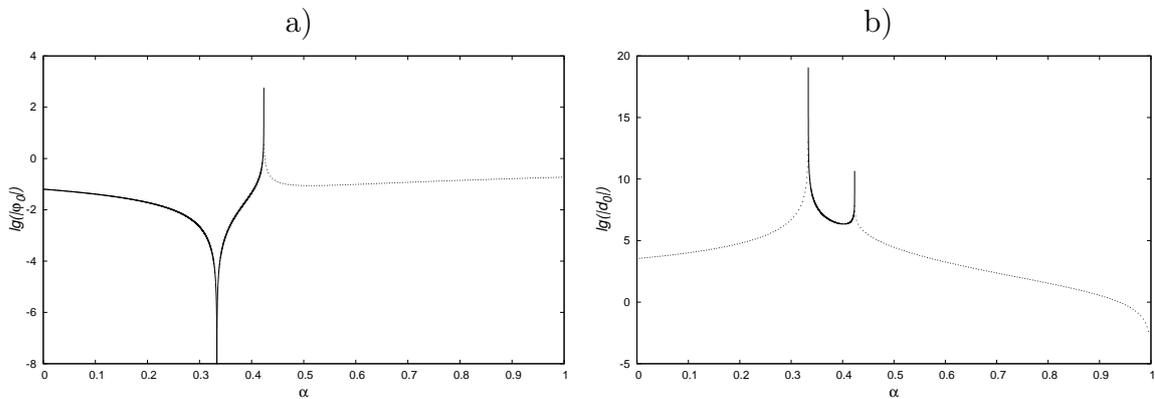


Рис. 2. Зависимость φ_0 (а) и d_0 (б) от α при $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$, $r_3 = 3.0$
 Fig. 2. Dependence of φ_0 (a) and d_0 (b) on α at $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$, $r_3 = 3.0$

Основываясь на формулах для φ_0 и d_0 и учитывая требование положительности параметра $a > a_{cr}$, мы можем выделить следующие множители, которые определяют знаки этих величин: $r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p)$, $r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p)$, $\alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3$. Учитывая, что при $\varphi_0 > 0$ и $d_0 < 0$ реализуется стандартная бифуркация Андронова–Хопфа (см. [6]), сформулируем основное утверждение данного пункта.

Теорема 1. Пусть выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha r > 0, \quad r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p) > 0, \\ r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p) > 0, \quad \alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а также $a = a_{cr} + \varepsilon$, где a_{cr} определяется формулой (2). Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует ответвляющийся от него орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл системы (3) с асимптотикой (4).

В случае, если $\varphi_0 > 0$ и $d_0 > 0$, нулевое состояние равновесия системы (3) жестко теряет устойчивость, к нему при $a < a_{cr}$ приближается неустойчивый цикл, который

при $a = a_{cr}$ сливается с данным состоянием равновесия и отбирает у него устойчивость. Такая бифуркация реализуется у системы (3), если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha r > 0, \quad r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p) > 0, \\ r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p) > 0, \quad \alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Множества, определяемые условиями (5) или (6), непусты, поскольку реализуются, например, при $r_1 = 1.0, r_2 = 1.0, r_3 = 2.0, \alpha = 0.2$ и $r_1 = 4.0, r_2 = 1.0, r_3 = 1.0, \alpha = 0.1$ соответственно.

Отметим, что величина амплитуды колебаний предельного цикла системы определяется значением $\sqrt{-\varepsilon\varphi_0/d_0}$. С целью выяснения границ применимости теоремы 1 был проведен расчет амплитуды колебаний для фиксированного набора параметров по аналитическому результату и в численном эксперименте. Через A_{num} обозначим амплитуду, полученную численным путем. Исходя из таблицы 1 нетрудно заметить, что асимптотические формулы сохраняют точность в широких пределах изменения параметра ε .

Таблица 1. Значения амплитуд колебаний цикла при $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$
Table 1. Values of the cycle oscillation amplitudes at $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$

α	ε	$\sqrt{-\varepsilon\varphi_0/d_0}$	A_{num}
0.1	0.01	0.22090794	0.22116161
0.1	0.1	0.69869911	0.69937442
0.3	0.01	0.08908736	0.08855718
0.3	0.1	0.28086436	0.28004238

3. Диффузионная потеря устойчивости пространственно однородного цикла краевой задачи (1)

Дальнейшие рассуждения будем проводить в случае $\varphi_0 > 0$ и $d_0 < 0$, т.е. если выполнены неравенства (5). Предположим, что

$$D_1 = \varepsilon d D_1^0, \quad D_2 = \varepsilon d D_2^0, \quad D_3 = \varepsilon d D_3^0. \quad (7)$$

Тогда методами локального анализа можно найти значение d , при котором построенный нами пространственно однородный цикл с асимптотикой (4) теряет устойчивость. Для определения такого критического значения d_* и природы пространственно неоднородного цикла, ответвляющегося от однородного, мы будем действовать по аналогии с выкладками статей [7–10].

Выполнив в краевой задаче (1) с условием (7) замену

$$(u(t, s), v(t, s), w(t, s))^T = \sqrt{\varepsilon}(h e^{i\omega t} \xi(\tau, s) + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau, s) + \varepsilon^{3/2} U_2(t, \tau, s) + \dots, \quad (8)$$

приходим к квазинормальной форме вида:

$$\xi' = d(Dh, g)\Delta\xi + (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

где $\xi \equiv \xi(\tau, s)$, вектор g такой, что $(h, g) = 1$, а матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем в (9) следующие замены: $\xi = \eta\sqrt{-\varphi_0/d_0}\exp(i\psi_0\tau)$, $\tau^* = \varphi_0\tau$ и проведя переобозначение $\tau = \tau^*$, получим уравнение Гинзбурга–Ландау вида

$$\eta' = \mu(1 - ic_1)\Delta\eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2\eta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

где $\mu = d\operatorname{Re}(Dh, g)/\varphi_0$, $c_1 = -\operatorname{Im}(Dh, g)/\operatorname{Re}(Dh, g)$, $c_2 = c_0/d_0$.

Относительно уравнения (10) известно, что его грубым режимам соответствуют, при достаточно малых ε , грубые режимы исходной системы (1) с условием (7) той же устойчивости [11].

Уравнение (10) имеет однородный цикл

$$\eta = \exp(-ic_2\tau + i\gamma), \quad \gamma = \operatorname{const}. \quad (11)$$

В точечной модели цикл (11) является орбитально асимптотически устойчивым. Для исследования устойчивости этого цикла в случае распределенной модели дополним (10) комплексно сопряженной краевой задачей

$$\bar{\eta}' = \mu(1 + ic_1)\Delta\bar{\eta} + \bar{\eta} - (1 - ic_2)|\bar{\eta}|^2\bar{\eta}, \quad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

После этого выполним замены

$$\eta = (1 + h_1)\exp(-ic_2\tau), \quad \bar{\eta} = (1 + h_2)\exp(ic_2\tau), \quad (13)$$

где $h_1 \equiv h_1(\tau, s)$, $h_2 \equiv h_2(\tau, s)$, и отбросим нелинейные слагаемые, в результате чего приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1' &= \mu(1 - ic_1)\Delta h_1 - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_1}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \\ h_2' &= \mu(1 + ic_1)\Delta h_2 - (1 - ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_2}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

к которой, в свою очередь, в случае, когда область Ω — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, применяем метод Фурье по системе функций $\cos(k\pi s) \cdot \cos(m\pi s)$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В результате убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (11) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$- \begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} - (k^2 + m^2)\pi^2\mu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

причем k и t не обращаются в нуль одновременно. Анализ матриц (15) приводит к выводу о том, что цикл (11) краевой задачи (10) устойчив (неустойчив) при $d - d_* > 0$ (< 0), где

$$d_* = \frac{2\varphi_0(c_1c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2) \operatorname{Re}(Dh, g)}. \quad (16)$$

С учетом положительности параметра φ_0 из (16) следует, что для появления диффузионной неустойчивости цикла необходимо выполнение условия

$$(c_1c_2 - 1) / \operatorname{Re}(Dh, g) > 0. \quad (17)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7) и (17), тогда при всех достаточно малых $\varepsilon = a - a_{cr}$ краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл, асимптотика которого задается формулой (4), причем этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при $d > d_*$ и неустойчив при $d < d_*$, где d_* определяется формулой (16).

При прохождении параметра d через критическое значение $d = d_*$ пространственно однородный цикл дивергентным образом теряет устойчивость, и от него ответвляются четыре симметричных пространственно неоднородных цикла. Численный анализ, которому планируется посвятить отдельную публикацию, показал, что динамические свойства этих циклов (среднее значение по пространству, минимумы по пространству, минимумы среднего по пространству) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным циклом, в то же время при достаточно малом коэффициенте диффузии d задача имеет устойчивые режимы сложной структуры с физически более осмысленными свойствами (см. для сравнения [10]).

Список литературы / References

- [1] Белоусов Б. П., “Периодически действующая реакция и ее механизм”, *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.*, 1959, 145–147; [Belousov B. P., “Periodicheski deystvuyushchaya reaktsiya i ee mekhanizm”, *Sbornik referatov po radiatsionnoy meditsine za 1958*, 1959, 145–147, (in Russian).]
- [2] Белоусов Б. П., “Периодически действующая реакция и ее механизм”, *Автоволновые процессы в системах с диффузией*, Горький, 1981, 176–186; [Belousov B. P., “A periodic reaction and its mechanism”, *Autowave Processes in Systems with Diffusion*, Gorkiy, 1981, 176–186, (in Russian).]
- [3] Жаботинский А. М., *Концентрационные автоколебания*, Наука, М., 1974, 180 с.; [Zhabotinskiy A. M., *Kontsentratsionnye avtokolebaniya*, Nauka, Moskva, 1974, 180 pp., (in Russian).]
- [4] Колесов Ю. С., *Проблема адекватности экологических уравнений*, Деп. в ВИНТИ № 1901-85, 1985; [Kolesov Yu. S., *Problema adekvatnosti ekologicheskikh uravneniy*, Dep. VINITI 1901-85, 1985, (in Russian).]
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:8 (2011), 1400–1418; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation oscillations and diffusion chaos in the Belousov reaction”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:8 (2011), 1307–1324.

- [6] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, ЯргУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalne metody analiza dinamicheskikh sistem*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2006., 92 pp., (in Russian).]
- [7] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Конечномерные модели диффузионного хаоса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:5 (2010), 860–875; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:5 (2010), 816–830.
- [8] Glyzin S.D., “Dimensional characteristics of diffusion chaos”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 452–469.
- [9] Glyzin S. D., Shokin P. L., “Diffusion chaos in the reaction–diffusion boundary problem in the dumbbell domain”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:7 (2016), 625–635.
- [10] Glyzin S., Goryunov V., Kolesov A., “Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:5 (2017), 898–905.
- [11] Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х., “Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией”, *Матем. сб.*, **130(172)**:4(8) (1986), 488–499; English transl.: Vasil’eva A. B., Kashchenko S. A., Kolesov Yu. S., Rozov N. Kh., “Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 491–503.

Goryunov V. E., "The Andronov–Hopf Bifurcation in a Biophysical Model of the Belousov Reaction", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 63–70.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-63-70

Abstract. We consider the problem of mathematical modeling of oxidation-reduction oscillatory chemical reactions based on the Belousov reaction mechanism. The process of the main components interaction in such a reaction can be interpreted by a “predator – prey” model phenomenologically similar to it. Thereby, we consider a parabolic boundary value problem consisting of three Volterra-type equations, which is a mathematical model of this reaction. We carry out a local study of the neighborhood of the system non-trivial equilibrium state, define a critical parameter, at which the stability is lost in this neighborhood in an oscillatory manner. Using standard replacements, we construct the normal form of the considering system and the form of its coefficients defining the qualitative behaviour of the model and show the graphical representation of these coefficients depending on the main system parameters. On the basis of it, we prove a theorem on the existence of an orbitally asymptotically stable limit cycle, which bifurcates from the equilibrium state, and find its asymptotics. To identificate the limits of found asymptotics applicability, we compare the oscillation amplitudes of one periodic solution component obtained on the basis of asymptotic formulas and by numerical integration of the model system. Along with the main case of Andronov–Hopf bifurcation, we consider various combinations of normal form coefficients obtained by changing the parameters of the studied system, and the corresponding to them solutions behaviour near the equilibrium state. In the second part of the paper, we consider the problem of the diffusion loss of stability of a spatially homogeneous cycle obtained in the first part. We find a critical value of diffusion parameter, at which this cycle of distributed system loses the stability.

Keywords: Belousov reaction, parabolic system, diffusion, normal form, asymptotics, Andronov–Hopf bifurcation

On the author:

Vladimir E. Goryunov, orcid.org/0000-0002-0512-6986,
 Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,
 e-mail: salkar@ya.ru

Acknowledgments:

This work is supported by the Russian Science Foundation (project № 14-21-00158).

©Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-71-82

УДК 517.929

Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием

Григорьева Е. В., Кащенко С. А.¹, Глазков Д. В.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. В работе рассматривается модель оптико-электронного осциллятора, описываемая системой дифференциальных уравнений с запаздыванием. Существенной особенностью данной модели является наличие малого параметра перед одной из производных, что позволяет сделать вывод о действии процессов со скоростями разных порядков. Анализируется локальная динамика сингулярно возмущенной системы в окрестности нулевого состояния равновесия. Характеристическое уравнение линеаризованной задачи при значениях параметров, близких к критическим, имеет асимптотически большое число корней с близкой к нулю вещественной частью. Для изучения происходящих в системе бифуркаций используется метод построения специальных нормализованных уравнений для медленных амплитуд, которые описывают поведение близких к нулю решений исходной задачи. Важной особенностью этих уравнений является то, что от малого параметра они не зависят. Структура корней характеристического уравнения и порядок надкритичности определяют вид нормальной формы, которая может быть представлена уравнением в частных производных. В роли «пространственной» переменной выступает «быстрое» время, для которого выполняются условия периодичности. Отмечается высокая чувствительность динамических свойств нормализованных уравнений к изменению малого параметра, что является признаком возможного неограниченного процесса прямых и обратных бифуркаций. Также некоторые построенные уравнения обладают свойством мультистабильности.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, локальная динамика, малый параметр, асимптотика, бифуркация, нормальная форма, краевая задача

Для цитирования: Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В., "Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 71–82.

Об авторах:

Григорьева Елена Викторовна, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, г. Минск, 220070 Беларусь, e-mail: grigorieva@tut.by

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Глазков Дмитрий Владимирович, orcid.org/0000-0003-0511-5088, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.

1. Введение

Многочисленные исследования по динамике дифференциально-разностных систем были выполнены на основе уравнения Икеда [1], ставшего парадигмой для изучения нелинейных явлений в оптических устройствах с запаздывающей обратной связью. В последнее время активно рассматриваются модификации этого уравнения, содержащие члены с высшими производными и моделирующие акусто-оптические и электро-оптические системы [2, 3]. Во многих случаях экспериментально и численно наблюдались би- и мультистабильность стационарных и периодических состояний [4, 5], динамический хаос [1, 6], быстрые хаотические осцилляции на фоне медленных колебаний [7, 8]. Указанные нелинейные явления изучались численно и с привлечением теории релаксационных колебаний в системах с быстрыми и медленными переменными. Теоретически рассматривались бифуркации, приводящие к быстрым и медленным колебаниям [6].

В настоящей работе мы анализируем локальную динамику электро-оптического осциллятора в окрестности состояния равновесия на основе метода построения нормализованных уравнений для медленных амплитуд неустойчивых мод [9]. Полученные уравнения могут служить обоснованием для пространственно-временного представления (ПВП) динамики дифференциально-разностных систем. Первоначально такое представление обсуждалось на основе интуитивной интерпретации запаздывания как размера одной квазипространственной переменной [10]. Метод ПВП использовался для изучения динамики лазерных систем с несколькими запаздываниями разного масштаба [11], поляризационной динамики VECSEL-лазеров [12], неустойчивости Бенджамина Фейра [13] и других явлений в системах различной природы. В работе [14] ПВП было обосновано на основе локального анализа модели лазерной системы с большим запаздыванием в цепи оптоэлектронной обратной связи. ПВП динамики с несколькими пространственными переменными было получено для модели лазера с оптической обратной связью и большим коэффициентом управления [15].

В настоящей работе представлено последовательное обоснование ПВП динамики электрооптического осциллятора. Особенностью системы является наличие малого параметра ε при производной, что отражает действие процессов с различающимися на порядки скоростями. Мы покажем, что при малом (порядка ε^2) превышении бифуркационного значения уровня обратной связи характеристическое уравнение имеет асимптотически большое число корней с близкой к нулю действительной частью. Структура корней такова, что результирующая нормальная форма является уравнением в частных производных для функции, зависящей от «медленного» и «быстрого» времени, причем по быстрой переменной выполняются условия периодичности. Поэтому быструю переменную можно рассматривать как аналог пространственной переменной с периодическими граничными условиями. Будет показано также, что нормальная форма изменяется, если рассматриваются решения при надкритичности другого порядка малости.

2. Модель

Рассматривается модель оптико-электронного осциллятора, предложенная в [6, 7]:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{d\zeta} = y - x + \beta [\cos^2(x(\zeta - \nu) + \phi) - \cos^2 \phi], \\ \frac{dy}{d\zeta} = -x. \end{cases} \quad (1)$$

В данном случае используются обозначения из работы [7], в которой параметры ε, ν считаются малыми положительными.

В качестве фазового пространства фиксируем $C^1[-1, 0] \times C$. Система (1) после замен

$$\zeta = \nu t, \quad y = \nu z$$

преобразуется в уравнение второго порядка

$$\varepsilon \nu^{-1} \ddot{z} + \dot{z} + \nu z + \beta [\cos^2(\phi - \dot{z}(t-1)) - \cos^2 \phi] = 0. \quad (2)$$

Исследуем поведение всех решений уравнения (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. В связи с этим уравнение (2) удобно записать в виде

$$\varepsilon \nu^{-1} \ddot{z} + \dot{z} + \nu z = b_1 \dot{z}(t-1) + b_2 \dot{z}^2(t-1) + b_3 \dot{z}^3(t-1) + \dots, \quad (3)$$

где

$$b_1 = -\beta \sin(2\phi), \quad b_2 = -\beta \cos(2\phi), \quad b_3 = (2/3) \beta \sin(2\phi).$$

При локальном анализе уравнения (3) важную роль играет поведение решений линейного уравнения

$$\varepsilon \nu^{-1} \ddot{z} + \dot{z} + \nu z = b_1 \dot{z}(t-1). \quad (4)$$

Устойчивость нулевого решения (4) определяется корнями характеристического уравнения

$$\varepsilon \nu^{-1} \lambda^2 + \lambda + \nu = b_1 \lambda e^{-\lambda}. \quad (5)$$

Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов анализа поведения решений (3), заключается в том, что параметр ε предполагается достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (6)$$

В [6, 7] приведен диапазон изменения этого параметра, откуда следует, что $\varepsilon \in [10^{-6}, 10^{-3}]$, в частности, в [7] приводятся иллюстрации, соответствующие значениям $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$, $\nu = 2 \times 10^{-2}$, а также $\varepsilon = 6.47 \times 10^{-6}$, $\nu = 3.82 \times 10^{-4}$. Поэтому условие (6) отвечает существу дела.

Приведем два простых утверждения о поведении корней уравнения (5).

Пусть $|b_1| < 1$. Тогда при всех достаточно малых ε все корни уравнения (5) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым нулевое решение уравнений (4) и (3) устойчиво, и все решения с достаточно малыми начальными условиями стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $|b_1| > 1$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (5) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Отсюда следует вывод о нелокальности задачи: в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (3) не может быть аттракторов этого уравнения.

В настоящей работе предполагается, что при малых ε параметр $|b_1|$ близок к 1: для некоторого фиксированного значения b_{10} выполнено равенство

$$b_1 = b_0(1 + \varepsilon^{2\alpha} b_{10}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (7)$$

где $b_0 = 1$ или $b_0 = -1$.

В этом случае характеристическое уравнение (5) не имеет корней с положительными и отделенными от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественными частями и имеет бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k \in \mathbb{Z}$), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда вытекает, что при исследовании устойчивости нулевого решения в (3) возникает критический случай бесконечной размерности. Методика исследования таких критических случаев разработана в [9]. Применим ее для изучения решений (3) при условиях (6) и (7).

В следующем разделе рассмотрим случай, когда

$$\alpha = 1, \quad (8)$$

а в разделе 3 предполагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1. \quad (9)$$

Сразу отметим, что поведение решений в условиях (8) и (9) существенно отличается.

2. Исследование уравнения (3) при условии (8)

Сначала приведем асимптотические формулы для таких корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнение (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно введем одно обозначение. Рассмотрим величину $\nu \varepsilon^{-1/2}$ и через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такое выражение, которое при условии $b_0 = 1$ дополняет эту величину до целого, кратного 2π , а при условии $b_0 = -1$ дополняет ту же величину до целого, нечетно кратного π .

Для $\lambda_k(\varepsilon)$ имеют место асимптотические представления

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\nu/\sqrt{\varepsilon} + i(\theta + \omega_k) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^{3/2}\lambda_{k2} + \varepsilon^2\lambda_{k3} + \dots, \quad (10)$$

в которых $\omega_k = 2\pi k$,

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} &= -i \frac{2(\theta + \omega_k)}{\nu}, & \lambda_{k2} &= i \frac{(\theta + \omega_k)^2}{\nu^2}, \\ \lambda_{k3} &= -\frac{2(\theta + \omega_k)^2}{\nu^2} - 4i(\theta + \omega_k) - i \frac{(\theta + \omega_k)^3}{\nu^3} + b_{10}. \end{aligned}$$

Решения линейного уравнения (4), отвечающие корням $\lambda_k(\varepsilon)$, можно записать в виде формального ряда

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t) + c.c., \quad (11)$$

где через с.с. обозначено выражение, комплексно сопряженное предыдущему слагаемому. Преобразуем правую часть равенства (11). Для этого положим

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(i2\pi kt). \quad (12)$$

Тогда из (10), (11) получаем, что

$$u = \exp(i[\nu\varepsilon^{-1/2} + \theta - 2\varepsilon\nu^{-1} + \varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2} + O(\varepsilon^{5/2})]t)\xi(r) + c.c., \quad (13)$$

а для аргумента r имеем равенство

$$r = [1 - 2\varepsilon\nu^{-1} + 2\varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2} + O(\varepsilon^{5/2})]t. \quad (14)$$

Отметим, что коэффициенты ξ_k в формуле (12) имеют смысл амплитуд перед соответствующими гармониками.

Согласно методике из [9], предполагаем, что при исследовании поведения нелинейного уравнения (3) базовой остается формула (11), с тем лишь отличием, что амплитуды являются медленно меняющимися функциями t .

Положим $\tau = \varepsilon^{3/2}t$ и будем предполагать, что $\xi_k = \xi_k(\tau)$.

Решения уравнения (3) согласно (11) ищем в виде формального ряда

$$u = \varepsilon^{5/4}[\xi(\tau, r) \exp(i\Omega(\varepsilon)t) + c.c.] + \varepsilon^{3/2}u_2(t, \tau, r) + \varepsilon^{9/4}u_3(t, \tau, r) + \dots \quad (15)$$

Здесь $\Omega(\varepsilon) = \nu\varepsilon^{-1/2} + \theta - 2\varepsilon\nu^{-1} + \varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2}$, $\xi(\tau, r)$ – подлежащая определению комплексная «амплитуда», а функции $u_j(t, \tau, r)$ периодичны по первому с периодом $2\pi/\Omega$ и третьему с периодом 1 аргументам. Подставим (15) в (3) и будем в получившемся формальном тождестве приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Тогда на втором шаге, собирая коэффициенты при ε^2 , для функции

$$u_2(t, \tau, r) = u_{20}(\tau, r) + u_{21}(\tau, r) \exp(2i\Omega(\varepsilon)t) + \bar{u}_{20}(\tau, r) \exp(-2i\Omega(\varepsilon)t) \quad (16)$$

получим соотношения

$$u_{20}(\tau, r) = \nu b_2 |\xi(\tau, r)|^2, \quad u_{21}(\tau, r) = \frac{1}{3} \nu b_2 \xi^2(\tau, r). \quad (17)$$

На следующем шаге, собирая коэффициенты при ε^3 , получим уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем соотношение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \alpha_0 \xi + d |\xi|^2 \xi, \quad (18)$$

которое удовлетворяет периодическим краевым условиям

$$\xi(\tau, r+1) = \xi(\tau, r). \quad (19)$$

Здесь

$$\alpha_2 = -i/\nu^2, \quad \alpha_1 = 2\theta/\nu^2, \quad \alpha_0 = i\theta^2/\nu^2, \quad d = \nu(3b_3 - 4ib_2^2/3).$$

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Фиксируем произвольно значение $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, и пусть последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ определяется из условия $\theta(\varepsilon) = \theta_0$. Пусть краевая задача (18), (19) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $r \in [0, 1]$ решение $\xi_0(\tau, r)$. Тогда при всех достаточно больших n уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{5/2})$ решение, для которого*

$$u_0(\tau, \varepsilon_n) = \varepsilon_n^{5/4} [\xi_0(\varepsilon_n t, r) \exp(i\Omega(\varepsilon_n)t) + c.c.] + \varepsilon_n^{3/2} u_2(t, \varepsilon_n t, r).$$

Здесь выражение для r – формула (14) при $\varepsilon = \varepsilon_n$, а для u_2 – формулы (16), (17) при $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\xi = \xi_0$.

В силу того, что $\text{Re}\alpha_2 = \text{Im}\alpha_1 = \text{Re}\alpha_0 = 0$, утверждение теоремы 1 мало информативно: в краевой задаче реализуется (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) критический случай бесконечной размерности. Поэтому для получения более содержательного результата необходимо учесть следующие по порядку ε слагаемые в линейной части:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \alpha_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \alpha_0 \xi + \sqrt{\varepsilon} \left[\beta_3 \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^3} + \beta_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \beta_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \beta_0 \xi \right] + d|\xi|^2 \xi, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 1/\nu^3, & \beta_2 &= (2\nu + 3i\theta)/\nu^3, \\ \beta_1 &= -(4 + 4\nu^{-2} - 3\theta^2\nu^{-3}), & \beta_0 &= b_{10} - 2\theta^2\nu^{-2} - i4\theta + i\theta^3\nu^{-3}. \end{aligned}$$

Для изучения динамических свойств краевой задачи (20), (19) воспользуемся той же методикой. Сначала упростим уравнение (20), произведя замены

$$\rho = r + \alpha_1 \tau, \quad \eta = \xi \exp(\alpha_0 \tau).$$

В итоге приходим к уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + \sqrt{\varepsilon} [\beta_3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \rho^3} + \beta_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + \beta_1 \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \beta_0 \eta] + d|\eta|^2 \eta, \quad (21)$$

которое удовлетворяет условию

$$\eta(\tau, \rho+1) = \eta(\tau, \rho). \quad (22)$$

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2}. \quad (23)$$

Решения (23), (22) представим в виде формального ряда из периодических по t функций

$$\eta(\tau, \rho, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \exp(i2\pi k\rho - i\alpha_2(2\pi k)^2\tau).$$

Поэтому решение краевой задачи (21), (22) можно искать в виде

$$\eta(\tau, s, \rho) = \sqrt{\varepsilon} z_1(\tau, s, \rho) + \varepsilon z_2(\tau, s, \rho) + \dots, \quad (24)$$

где $s = \sqrt{\varepsilon}\tau$, зависимость от ρ – 1-периодическая,

$$z_1(\tau, s, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{1k}(s) \exp(i2\pi k\rho - i\alpha_2(2\pi k)^2\tau). \quad (25)$$

На этом пути однако можно получить только бесконечную систему ОДУ для нахождения амплитуд $z_{1k}(s)$. Для того, чтобы записать эту бесконечную систему в «компактной» форме, воспользуемся результатами из [9].

Введем в рассмотрение функцию

$$w(s, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{1k}(s) \exp(i2\pi k\rho) \quad (26)$$

с теми же коэффициентами $z_{1k}(s)$, что и в (25). В том случае, когда удастся определить $w(s, \rho)$, получим все коэффициенты Фурье $z_{1k}(s)$ этой функции, а значит, определим функцию $z_1(\tau, s, \rho)$ согласно (25). Отметим также, что при $\tau = 2\pi m\alpha_0^{-1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ выражения для $z_1(\tau, s, \rho)$ и $w(s, \rho)$ совпадают.

Введем еще несколько обозначений. Пусть

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \exp(i2\pi k\rho).$$

Положим

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\rho) d\rho.$$

Через $N(\varphi)$ обозначим бесконечномерный вектор

$$N(\varphi) = (\dots, \varphi_{-2}e^{-i4\pi r}, \varphi_{-1}e^{-i2\pi r}, \varphi_0, \varphi_1e^{i2\pi r}, \varphi_2e^{i4\pi r}, \dots),$$

произведение таких векторов предполагаем покоординатным, т. е., например,

$$N(\varphi)\overline{N}(\varphi) = (\dots, |\varphi_{-2}|^2, |\varphi_{-1}|^2, |\varphi_0|^2, |\varphi_1|^2, |\varphi_2|^2, \dots).$$

Функцию $R(\varphi)$ определим по формулам

$$R(\varphi) = (N(\varphi), N(\varphi)\overline{N}(\varphi)).$$

Наконец, функцию $F(\varphi)$ определим формулой

$$F(\varphi) = \varphi(3M(|\varphi|^2) + 2R(\varphi)).$$

Рассмотрим краевую задачу для $w(s, \rho)$:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \beta_3 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial s} + \beta_0 w + dF(w), \quad (27)$$

$$w(\tau, \rho+1) = w(\tau, \rho). \quad (28)$$

Основной результат состоит в том, что краевая задача (27), (28) играет роль нормальной формы для уравнения (3). Для формулировки соответствующего утверждения понадобится еще несколько обозначений. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Через ε_n обозначим последовательность

$$\varepsilon_n = \nu^2(2\pi n - \theta_0)^{-2} \quad n = 2, 3, \dots; \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Пусть краевая задача (27), (28) при $\theta = \theta_0$ имеет ограниченное при $s \rightarrow \infty$, $\rho \in [0, 1]$ решение $w_0(s, \rho)$ с коэффициентами Фурье w_{0k} , $k \in Z$. Тогда уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{5/2})$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{7/4} [\exp([i\Omega(\varepsilon) - \varepsilon\alpha_0]t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{0k}(\varepsilon^{3/2}t) \exp(i2\pi k\rho - \varepsilon i\alpha_2(2\pi k)^2 t) + c.c.],$$

$$\rho = [1 + \varepsilon(\alpha_1 - 2\nu^{-1}) + 2\varepsilon^{3/2}\theta_0]t.$$

3. О динамических свойствах решений уравнения (3) при условии (9)

В этом разделе коротко остановимся на изучении структуры некоторых совокупностей решений (3) при условии (9). Соответствующие построения опираются на результаты работ [16–18]. Здесь рассмотрим только один класс структур, определяющих свойства асимптотических по невязке решений уравнения (3).

Введем некоторые обозначения. Фиксируем произвольно вещественное значение $\omega \neq 0$. Через $\theta \in [0, 2\pi)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного 2π выражение $\omega\varepsilon^{\alpha-1}$ ($\alpha-1 < 0$). Тогда некоторую совокупность корней $\lambda_k(\varepsilon)$, $k \in Z$, характеристического уравнения (5) можно представить в виде

$$\lambda_k(\varepsilon) = iL_0(\varepsilon) + o(\varepsilon) + i2\pi kL_1(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{\alpha-1})] + (i2\pi k)^2 L_2(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{2\alpha})] + (i2\pi k)^3 L_3(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{3\alpha})] + \varepsilon^{2\alpha} b_{10} + o(\varepsilon^{2\alpha}), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} L_0(\varepsilon) &= \nu/\sqrt{\varepsilon} + \theta + \varepsilon 2\theta\nu^{-1}, \\ L_1(\varepsilon) &= \varepsilon^{\alpha-1}\omega(1-\varepsilon\nu^{-1}) + \theta, \\ L_2(\varepsilon) &= \varepsilon^{2\alpha-1/2}\omega^2\nu^{-2}[i - 2\varepsilon^{1/2}], \\ L_3(\varepsilon) &= \varepsilon^{3\alpha-1}i\omega^3\nu^{-3}. \end{aligned}$$

Корни $\lambda_k(\varepsilon)$ характеристического уравнения определяют решения $\xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$ уравнения (3). Рассматривая в (3) выражение

$$u = \varepsilon^{\alpha-1/4} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(\tilde{\lambda}_k(\varepsilon)t) + c.c. \right) + \varepsilon^{3\alpha-7/4} u_2 + \dots, \quad (30)$$

в котором $\tau = \varepsilon^{2\alpha} t$, производя стандартные действия, получим систему уравнений относительно $\xi_k(\tau)$. Линейная часть этой системы, очевидно, определяется асимптотикой (29) корней $\lambda_k(\varepsilon)$. Первое слагаемое в правой части (30) удобно преобразовать. Положим

$$\xi(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi k i r).$$

Тогда получим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(\tilde{\lambda}_k(\varepsilon)t) = \exp(iL_0(\varepsilon)t)\xi(\tau, r),$$

$$r = L_1(\varepsilon)t, \quad \tau = \varepsilon^{2\alpha-1/2}t.$$

Учитывая эти соотношения, систему уравнений для $\xi_k(\tau)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \nu^{-2}\omega^2(i+2\varepsilon^{1/2})\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \nu^{-3}\omega^3\varepsilon^{\alpha-1/2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial r^3} + b_{10}\xi + dF(\xi), \quad (31)$$

где ξ удовлетворяет условию (19).

Эта краевая задача при $\varepsilon=0$ и без учета функции $F(\xi)$ является линейной, и все корни характеристического уравнения для нее чисто мнимые. Применим к краевой задаче (31), (19) ту же, что и в разделе 1, методику. Положим

$$\xi = \varepsilon^{\frac{(\alpha-1/2)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau_1) \exp(i2\pi k r - 2i\nu^{-2}\omega^2(2\pi k)^2\tau) + c.c. + \varepsilon^{\frac{3(\alpha-1/2)}{2}} h_3(\tau_1, \tau, r) + \dots, \quad (32)$$

где $\tau_1 = \varepsilon^{\alpha-1/2}\tau$, $h_3(\tau_1, \tau, r)$ периодична по τ и r .

Тогда для функции $\eta(\tau_1, r)$, где

$$\eta(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau_1) \exp(i2\pi k r),$$

а $\eta_k(\tau_1)$ те же, что и в (32), получим краевую задачу

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau_1} = \nu^{-3}\omega^3\frac{\partial^3 \eta}{\partial r^3} + 2\nu^{-2}\omega^2\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \varepsilon^{1/2}b_{10}\eta + dF(\eta). \quad (33)$$

И здесь при $\varepsilon=0$ и при $F \equiv 0$ получаем линейную краевую задачу с чисто мнимым спектром. Поэтому положим

$$\eta = \varepsilon^{1/4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(\tau_2) \exp(i2\pi k r - i\nu^{-3}\omega^3(2\pi k)^3\tau_1) + c.c. + \varepsilon^{3/4}W_3(\tau_2, r) + \dots, \quad (34)$$

где $\tau_2 = \varepsilon^{1/2}\tau_1$, $W_3(\tau_2, r)$ периодична по r .

Тогда для функции

$$w(\tau_2, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(\tau_2) \exp(i2\pi k r),$$

с теми же, что и в (34) коэффициентами $w_k(\tau_2)$, получаем краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial \tau_2} = 2\nu^{-2}\omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + b_{10}w + dF(w), \quad (35)$$

$$w(\tau_2, r+1) = w(\tau_2, r). \quad (36)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Фиксируем произвольно вещественное значение $\omega \neq 0$. Пусть краевая задача (35), (36) при $\theta = \theta_0$ имеет ограниченное при $\tau_2 \rightarrow \infty$, $r \in [0, 1]$ решение $w_0(\tau_2, r)$ и*

$$w_0(\tau_2, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{k0}(\tau_2) \exp(i2\pi kr).$$

Тогда уравнение (3) при условиях (6), (9) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^{(6\alpha-1)/4})$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{(6\alpha-1)/4} \exp([i\nu\varepsilon^{-1}(1+o(1))]t) \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{k0}(\tau_2) \exp(i2\pi k\rho - 2i\nu^{-2}\omega^2(2\pi k)^2\tau - i\nu^{-3}\omega^3(2\pi k)^3\tau_1) + c.c.,$$

где

$$r = [\varepsilon^{\alpha-1}\omega(1-\varepsilon\nu^{-1}) + \theta]t, \quad \tau_1 = \varepsilon^{\alpha-1/2}\tau, \quad \tau_2 = \varepsilon^{1/2}\tau_1.$$

4. ВЫВОДЫ

Для определения главной части решений уравнения (3) построены специальные нелинейные краевые задачи, играющие роль нормальных форм и не содержащие малый параметр. Их нелокальная динамика определяет локальное поведение решений исходного уравнения.

Показано, что структура решений исходного уравнения (3) состоит из суперпозиции быстро осциллирующих функций и решений нелинейных краевых задач – нормальных форм. Это открывает возможность надежного численного анализа, поскольку быстро осциллирующие составляющие найдены аналитически.

Нормальные формы являются нелинейными краевыми задачами параболического типа. Их динамические свойства, а значит, и динамика исходного уравнения (3) могут быть сложными (см, например, [16–18]).

Присутствие в нормальных формах выражения $\theta(\varepsilon)$ говорит о высокой чувствительности динамических свойств к изменению параметра ε : при $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина бесконечно много раз изменяется от 0 до 1, а значит, возможен неограниченный при $\varepsilon \rightarrow 0$ процесс прямых и обратных бифуркаций.

Нормализованные уравнения, приведенные в разделе 2, содержат континуальный параметр ω . При различных значениях этого параметра имеем различные установившиеся решения. Это означает, что при росте надкритичности – поправки $\varepsilon^{2\alpha}b_{10}$ к параметру b_{10} – резко увеличивается количество установившихся решений уравнения (3), т. е. имеет место явление мультистабильности.

Интересно отметить следующее: в работе по решению нелинейных краевых задач явно построены главные приближения решения уравнения с запаздыванием (3). На основе полученных формул можно решать обратные задачи: для нахождения решений указанного класса нелинейных параболических уравнений использовать решения уравнения с запаздыванием.

Список литературы / References

- [1] Ikeda K., Matsumoto K., “High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **29**:1–2 (1987), 223–235.
- [2] Vallée R., Marriott C., “Analysis of an Nth-order nonlinear differential-delay equation”, *Phys. Rev. A*, **39**:1 (1989), 197–205.
- [3] Kouomou C. [et al.], “Chaotic breathers in delayed electro-optical systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:20 (2005), 203903.
- [4] Weicker L. [et al.], “Multirhythmicity in an optoelectronic oscillator with large delay”, *Phys. Rev. E*, **91**:1 (2015), 012910.
- [5] Weicker L. [et al.], “Strongly asymmetric square waves in time-delayed system”, *Phys. Rev. E*, **86**:5 (2012), 055201(R).
- [6] Peil M. [et al.], “Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators”, *Phys. Rev. E*, **79**:2 (2009), 026208.
- [7] Talla Mbé J.H. [et al.], “Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems”, *Phys. Rev. E*, **91**:1 (2015), 012902.
- [8] Marquez B.A. [et al.], “Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback”, *Phys. Rev. E*, **94**:6 (2016), 062208.
- [9] Kaschenko I.S., Kaschenko S.A., “Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**:11 (2015), 1550142.
- [10] Giacomelli G., Politi A., “Relationship between Delayed and Spatially Extended Dynamical Systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:15 (1996), 2686–2689.
- [11] Yanchuk S., Giacomelli G., “Dynamical systems with multiple long-delayed feedbacks: Multiscale analysis and spatiotemporal equivalence”, *Phys. Rev. E*, **92**:4 (2015), 042903.
- [12] Marconi M. [et al.], “Vectorial dissipative solitons in vertical-cavity surface-emitting lasers with delays”, *Nature Photonics*, **9**:7 (2015), 450–455, DOI: 10.1038/nphoton.2015.92.
- [13] Pimenov A. [et al.], “Dispersive time-delay dynamical systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **118**:19 (2017), 193901.
- [14] Bestehorn M., Grigorieva, E.V., Haken H., Kaschenko, S.A., “Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **145**:1–2 (2000), 110–129.
- [15] Grigorieva E.V., Kaschenko I.S., Kaschenko S.A., “Dynamics of Lang–Kobayashi equations with large control coefficient”, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **15**:4 (2012), 403–409.
- [16] Ахромеева Т.С. [и др.], *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992, 544 с.; Akhromeeva T.S. i dr., *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyy kaos*, Nauka, Moskva, 1992, 544 pp.
- [17] Кашенко И.С., “Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **48**:12 (2008), 2141–2150; Kashchenko I.S., “Local dynamics of equations with large delay”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **48**:12, 2172–2181.

- [18] Кащенко И.С., “Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **437**:6 (2011), 743–747; Kashchenko I.S., “Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **83**:2011, 258–261.

Grigorieva E. V., Kashchenko S.A., Glazkov D. V., "Features of the Local Dynamics of the Opto-Electronic Oscillator Model with Delay", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 71–82.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-71-82

Abstract. We consider electro-optic oscillator model which is described by a system of the delay differential equations (DDE). The essential feature of this model is a small parameter in front of a derivative that allows us to draw a conclusion about the action of processes with different order velocities. We analyse the local dynamics of a singularly perturbed system in the vicinity of the zero steady state. The characteristic equation of the linearized problem has an asymptotically large number of roots with close to zero real parts while the parameters are close to critical values. To study the existent bifurcations in the system, we use the method of the behaviour constructing special normalized equations for slow amplitudes which describe of close to zero original problem solutions. The important feature of these equations is the fact that they do not depend on the small parameter. The root structure of characteristic equation and the supercriticality order define the kind of the normal form which can be represented as a partial differential equation (PDE). The role of the "space" variable is performed by "fast" time which satisfies periodicity conditions. We note fast response of dynamic features of normalized equations to small parameter fluctuation that is the sign of a possible unlimited process of direct and inverse bifurcations. Also, some obtained equations possess the multistability feature.

Keywords: differential equation, local dynamics, small parameter, asymptotics, bifurcation, normal form, boundary value problem

On the authors:

Elena V. Grigorieva, Prof.,
Belarus Economic State University,
26 Partizanski Av., Minsk 220070, Belarus, e-mail: grigorieva@tut.by

Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, Prof.,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Dmitry V. Glazkov, orcid.org/0000-0003-0511-5088, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:

This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1.

© Давыдова М. А., Захарова С. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-83-91

УДК 517.9

Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности

Давыдова М. А., Захарова С. А.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. На основе модифицированного асимптотического метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств исследуется вопрос о существовании устойчивых по Ляпунову стационарных решений с внутренними слоями уравнения нелинейной теплопроводности в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры. Обсуждаются основные условия существования таких решений, построение асимптотического приближения решения произвольного порядка точности, алгоритм определения положения поверхности перехода, в окрестности которой локализован внутренний слой контрастной структуры, и обоснование формальных построений. Основная трудность связана с описанием поверхности перехода. Предлагается эффективный алгоритм определения положения поверхности перехода, который развивает наш подход в описании многомерных задач на более сложный случай сбалансированной нелинейности. Результат может быть использован для создания численного алгоритма, основанного на применении асимптотического анализа с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя решения. В качестве иллюстрации рассматривается задача на плоскости, которая позволяет визуализировать численные расчеты. Сравниваются численные и асимптотические решения нулевого порядка при различных значениях малого параметра.

Ключевые слова: нелинейная теплопроводность, уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры, асимптотические методы

Для цитирования: Давыдова М. А., Захарова С. А., "Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:1 (2018), 83–91.

Об авторах:

Давыдова Марина Александровна, orcid.org/0000-0002-9255-7353, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2., 119992 Москва, Россия, e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

Захарова Светлана Александровна, orcid.org/0000-0002-3421-1311, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 2., 119992 Москва, Россия, e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. № 16-01-00437.

Введение

Исследование процессов распространения тепла при большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности. В работах

Г.И. Баренблатта, Я.Б. Зельдовича, С.П. Курдюмова, А.А. Самарского и др. (см., например, [1]) найдены точные аналитические решения некоторых задач нелинейной теплопроводности, анализ свойств которых позволяет обнаружить ряд нелинейных эффектов при распространении тепловых возмущений в средах с нелинейными характеристиками. В настоящей работе на основе современных методов асимптотического анализа строится асимптотическое решение одной сингулярно возмущенной задачи нелинейной теплопроводности в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры. В частности, такая зависимость имеет место при химических реакциях, экзо- и эндотермических процессах, протекающих в нагретой среде.

1. Постановка задачи. Основные условия существования контрастных структур

Распространение теплового возмущения в однородном твердотельном образце с нелинейными характеристиками в случае, когда мощность тепловых источников велика, описывается нелинейной сингулярно возмущенной задачей для уравнения типа реакция-диффузия-адвекция [2] в безразмерных переменных

$$\varepsilon^2(\Delta u - A(u)(\nabla u)^2 - u_t) = B(u, x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3, \quad t \in (0, T],$$

где первые два слагаемых в левой части уравнения описывают механизм нелинейной теплопроводности, правая часть уравнения описывает процесс энерговыделения, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $A(u)$, $B(u, x)$ достаточно гладкие в области определения.

Стационарное распределение температуры определяется как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\Delta u - A(u)(\nabla u)^2) &= B(u, x), \quad x \in D \subset R^3, \\ u(x, \varepsilon) &= g(x), \quad x \in S, \end{aligned} \quad (1)$$

которая в данной работе исследуется на наличие решений с внутренними переходными слоями в соответствии с условиями и алгоритмами работы [3].

Основным требованием, в рамках которого рассматривается задача (1), является условие на изолированные решения $u = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$ вырожденного уравнения $B(u, x) = 0$, которое состоит в следующем: $B_u(\varphi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, $B_u(\varphi_2(x), x) < 0$ при $x \in D \cup S$.

Определим множество $\{\overline{\Omega}\}$ достаточно гладких замкнутых поверхностей в области D с локальными координатами (r, θ_1, θ_2) в малой δ -окрестности каждой поверхности [3]. При описании контрастных структур важную роль играет присоединенная система

$$\partial \tilde{v} / \partial \xi = A(\tilde{u}) \tilde{v} \sum_{k=1}^3 (l^k(r, \theta))^2 + B(\tilde{u}, r, \theta), \quad \partial \tilde{u} / \partial \xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad (2)$$

где r и θ рассматриваются как параметры (набор параметров θ_1, θ_2 для краткости обозначим θ), $l^k(r, \theta)$ – известные функции [3]. Для каждой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$ определим функцию

$$H(r, \theta) \equiv \tilde{v}^+(0, r, \theta) - \tilde{v}^-(0, r, \theta) =$$

$$= -\frac{\int_{\varphi_1(r, \theta)}^{\varphi_3(r, \theta)} 2B(\xi, r, \theta) \exp\left(2 \sum_{k=1}^3 (l^k(r, \theta))^2 \int_{\xi}^{\varphi_2(r, \theta)} A(\eta) d\eta\right) d\xi}{\tilde{v}^+(\varphi_2(r, \theta), r, \theta) - \tilde{v}^-(\varphi_2(r, \theta), r, \theta)}, \quad (r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta},$$

где $\bar{\Theta}$ – область изменения координаты θ на некоторой поверхности из множества $\{\bar{\Omega}\}$, $\tilde{v}^{\pm}(\xi, r, \theta) > 0$ – решения системы (2) с дополнительными условиями

$$\tilde{u}^{\mp}(\mp\infty, r, \theta) = \varphi_i(r, \theta), \quad i = 1, 3, \quad \tilde{v}^{\mp}(\mp\infty, r, \theta) = 0. \quad (3)$$

Условие $H(r, \theta) \equiv 0$, $r \in [-\delta, \delta]$, $\theta \in \bar{\Theta}$ выделяет критический случай, или случай сбалансированной нелинейности, обсуждению которого посвящается настоящая работа.

Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры получается стандартно в результате C^1 -сшивания на поверхности перехода Ω двух асимптотик погранслоного типа [4]

$$u^- = \bar{u}^-(x, \varepsilon) + Qu^-(\xi, \theta, \varepsilon),$$

$$u^+ = \bar{u}^+(x, \varepsilon) + Pu(\rho, \theta, \varepsilon) + Qu^+(\xi, \theta, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\bar{u}^-(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon\bar{u}_1^-(x) + \dots$, $\bar{u}^+(x, \varepsilon) = \varphi_3(x) + \varepsilon\bar{u}_1^+(x) + \dots$ – регулярные ряды, описывающие решение вне ε -окрестности границы S и области локализации внутреннего слоя контрастной структуры, $Pu(\rho, \theta, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \theta) + \varepsilon\Pi_1 u(\rho, \theta) + \dots$ – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы S , $\rho = \bar{r}/\varepsilon$, (\bar{r}, η) – аналог переменных (r, θ) в некоторой окрестности поверхности S [4]. Разложения $Qu^{\pm}(\xi, \theta, \varepsilon) = Q_0 u^{\pm}(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1 u^{\pm}(\xi, \theta) + \dots$ описывают пограничные слои по разные стороны от поверхности Ω , положение которой определяется условием $u(x, \varepsilon) = \varphi_2(x)$, $x \in \Omega$, а уравнение в локальной системе координат, введенной в δ -окрестности некоторой поверхности $\Omega_0 \subset \{\bar{\Omega}\}$ известным способом [3], ищется в виде

$$r = \varepsilon\lambda_1(\theta) + \varepsilon^2\lambda_2(\theta) + \dots \equiv \lambda^*(\theta, \varepsilon), \quad (5)$$

при этом погранслоная переменная ξ определяется стандартно: $\xi = (r - \lambda^*(\theta, \varepsilon))/\varepsilon$.

Критерий выбора поверхности Ω_0 сформулирован в работе [3]. Положение этой поверхности в случае задачи (1) определяется уравнением, которое следует из усло-

вия C^1 -сшивания асимптотик на поверхности Ω [3]:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2A(\tilde{u})\tilde{v}^2(\xi, \theta) \sum_{k=1}^3 l^k(0, \theta) \frac{\partial l^k}{\partial r}(0, \theta) + B_r(\tilde{u}, 0, \theta) \right) p(\xi, \theta) \tilde{v}(\xi, \theta) \xi d\xi + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} 2A(\tilde{u})p(\xi, \theta) \tilde{v}^2(\xi, \theta) \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^2 l^k(0, \theta) q_j^k(0, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta_j}(\xi, \theta) d\xi - \\ & - k(0, \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \theta) \tilde{v}^2(\xi, \theta) d\xi = 0, \quad \theta \in \Theta_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где Θ_0 – область изменения координаты θ на поверхности Ω_0 ; $\tilde{u}(\xi, \theta)$, $\tilde{v}(\xi, \theta)$ решение системы (2) с условиями (3) при $r = 0$, $\theta \in \Theta_0$, которое описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении; $q_j^k(r, \theta)$ – известные функции [3]; $k(0, \theta)$ – сумма главных кривизн поверхности Ω_0 в точке с координатой θ ;
 $p(\xi, \theta) = \exp \left(-2 \sum_{k=1}^3 (l^k(0, \theta))^2 \int_0^\xi A(\tilde{u}) \tilde{v}(\eta, \theta) d\eta \right)$.

С использованием условия C^1 -сшивания асимптотик (4) на поверхности Ω получаем периодические дифференциальные задачи относительно функций $\lambda_n(\theta)$ для уравнений вида

$$M(\theta)\lambda_n(\theta) - \Phi_{n+1}(\theta) = 0, \quad \theta \in \Theta_0, \quad n \geq 1, \quad (7)$$

где $M(\theta)$ – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка [3]. Разрешимость периодических задач для уравнения (7) обеспечивается условием существования положительного главного собственного значения спектральной задачи для оператора $M(\theta)$ с условием периодичности решения по переменной θ [5].

При описании пограничного слоя, локализованного в окрестности поверхности S , в нулевом приближении приходим к нелинейной задаче относительно функции $\Pi_0 u(\rho, \eta)$, разрешимость которой обеспечивается следующим ограничением на поведение функции $g(x)$:

$$\int_{\varphi_3(0, \eta)}^{g(0, \eta)} B(\xi, 0, \eta) \exp \left(2 \sum_{k=1}^3 (d^k(0, \eta))^2 \int_{\xi}^{g(0, \eta)} A(\lambda) d\lambda \right) d\xi > 0, \quad (8)$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ – криволинейные координаты на поверхности S , функции $d^k(\bar{r}, \eta)$ определяются по аналогии с функциями $l^k(r, \theta)$ [3].

Существование устойчивых по Ляпунову стационарных решений с асимптотикой (4) обусловлено свойствами функции $B(u, x)$ и доказывается с использованием идей асимптотического метода дифференциальных неравенств [6,7]. Справедлива следующая оценка остаточного члена $|u(x, \varepsilon) - U_n^\pm(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}$ равномерно в области $D \cup S$, где $U_n^\pm(x, \varepsilon)$ – частичные суммы n -го порядка рядов (4).

2. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу на плоскости, допускающую визуализацию численных расчетов:

$$\varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{1}{2} t g u (\nabla u)^2 \right) = u(u^2 - 1) e^{x_1^2 + x_2^2}, \quad D := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$u(x, \varepsilon) = 1.2, \quad x \in S := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Пусть кривая Ω_0 , в ε -окрестности которой локализован внутренний слой, относительно некоторой полярной системы координат с полюсом внутри области D описывается уравнениями:

$$x_1 = R \cos \theta, \quad x_2 = R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (10)$$

$R = \text{const}$. Связь декартовых и локальных координат в окрестности кривой Ω_0 дается формулами [3]:

$$x_1 = (R + r) \cos \theta, \quad x_2 = (R + r) \sin \theta, \quad r \in [-\delta, \delta] \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

при этом $l^1(r, \theta) = \cos \theta$, $l^2(r, \theta) = \sin \theta$, $k(r, \theta) = (R + r)^{-1}$, $q_1^1(r, \theta) = -\sin \theta / (R + r)$, $q_1^2(r, \theta) = \cos \theta / (R + r)$.

Задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}^\pm}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} (\tilde{v}^\pm)^2 t g \tilde{u}^\pm + e^{(R+r)^2} \tilde{u}^\pm ((\tilde{u}^\pm)^2 - 1), & \frac{\partial \tilde{u}^\pm}{\partial \xi} &= \tilde{v}^\pm, \\ \tilde{u}^\pm(0, r, \theta) &= 0, & \tilde{u}^\pm(\pm\infty, r, \theta) &= \pm 1, \end{aligned} \quad (11)$$

имеют решения, которым на фазовой плоскости (\tilde{u}, \tilde{v}) при $\tilde{v} > 0$ соответствуют сепаратрисы седла $(-1; 0)$ и $(1; 0)$:

$$\tilde{v}^\pm(\tilde{u}^\pm, r) = \sqrt{\frac{2e^{(R+r)^2}}{\cos \tilde{u}^\pm} \int_{\pm 1}^{\tilde{u}^\pm} \eta(\eta^2 - 1) \cos \eta d\eta} = \sqrt{2e^{(R+r)^2}} \Psi(\tilde{u}^\pm), \quad (12)$$

где $\Psi(u) = \sqrt{(u^3 - 7u) t g u + (3u^2 - 7) + (6 \sin 1 + 4 \cos 1) \cos^{-1} u}$. Следовательно, $\tilde{v}^+(0, r) - \tilde{v}^-(0, r) = 0$ при любом $r \in [-\delta, \delta]$, что означает реализацию критического случая.

Кривая Ω_0 описывается уравнениями (10), где R определяется как решение конечного уравнения, которое следует из уравнения (6):

$$R^2 \int_{-1}^1 u(u^2 - 1) (\cos u - 1) \int_0^u \frac{d\lambda}{\Psi(\lambda)} du - \int_{-1}^1 \Psi(u) (\cos u - 1) du = 0 \quad (13)$$

Численное решение уравнения (13) дает значение

$$R = 0.32$$

Задача (11) при $r = 0$ и $R = 0.32$ описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении, так что справедлива квадратурная формула

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2e^{R^2}}} \int_0^{\tilde{u}(\xi)} \frac{du}{\Psi(u)}, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

которая следует из формулы (12). Здесь $\tilde{u}(\xi) = -1 + Q_0 u^-(\xi)$, $\xi \leq 0$, $\tilde{u}(\xi) = 1 + Q_0 u^+(\xi)$, $\xi \geq 0$.

Коэффициенты уравнения (5) не зависят от переменной θ и определяются как решения конечного уравнения

$$M\lambda_n - \Phi_{n+1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (14)$$

где

$$M = -\frac{1}{\sqrt{6\sin 1 + 4\cos 1 - 7}} (3R^2 + 1) \int_{-1}^1 u(u^2 - 1)(\cos u - 1) \int_0^u \frac{d\lambda}{\Psi(\lambda)} du + \\ + \frac{1}{R} (1 - 2R) \int_{-1}^1 (\cos u - 1) \Psi(u) du,$$

Φ_{n+1} – известные значения. В результате численного счета находим, что $M = 5.12$.

В окрестности границы области S в нулевом приближении решение описывается квадратурной формулой

$$\rho = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \int_{1.2}^{\bar{u}(\rho)} \frac{du}{\Psi(u)}, \quad 0 \leq \rho < \infty,$$

где $\bar{u}(\rho) = 1 + \Pi_0 u(\rho)$.

Численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$ представлены на рис. 1. На рис. 2 представлены сечения численных решений и соответствующих им асимптотических решений нулевого порядка некоторой вертикальной плоскостью. Эффективность асимптотического метода возрастает с уменьшением параметра ε .

Результат может быть использован для создания численного алгоритма, основанного на применении асимптотического анализа с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя контрастной структуры [8,9].

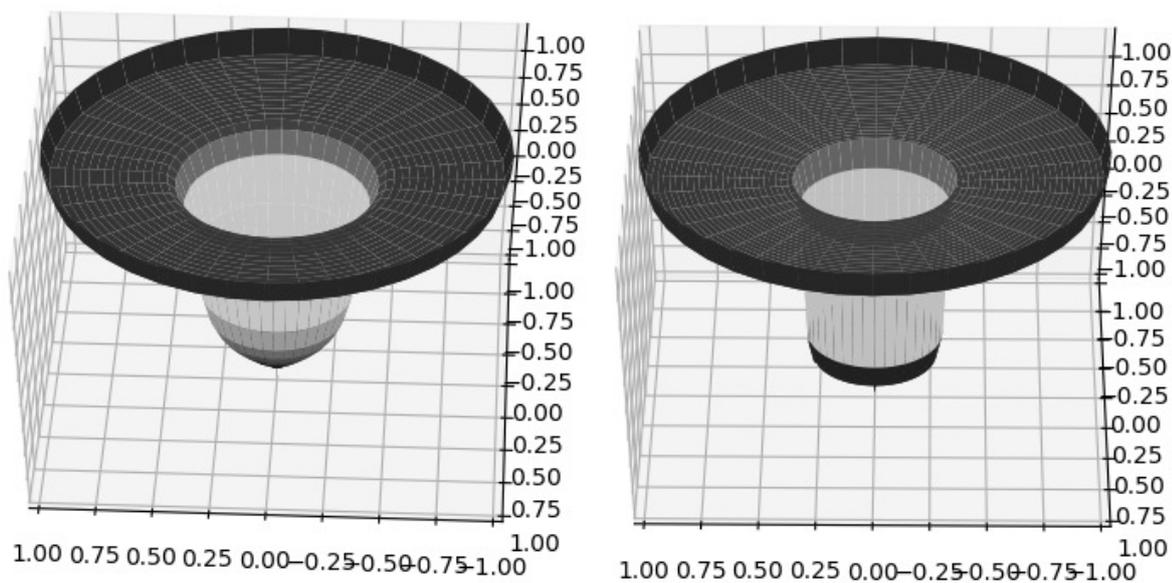


Рис. 1. Численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$
Fig. 1. Numerical solutions of the problem (9) for $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$

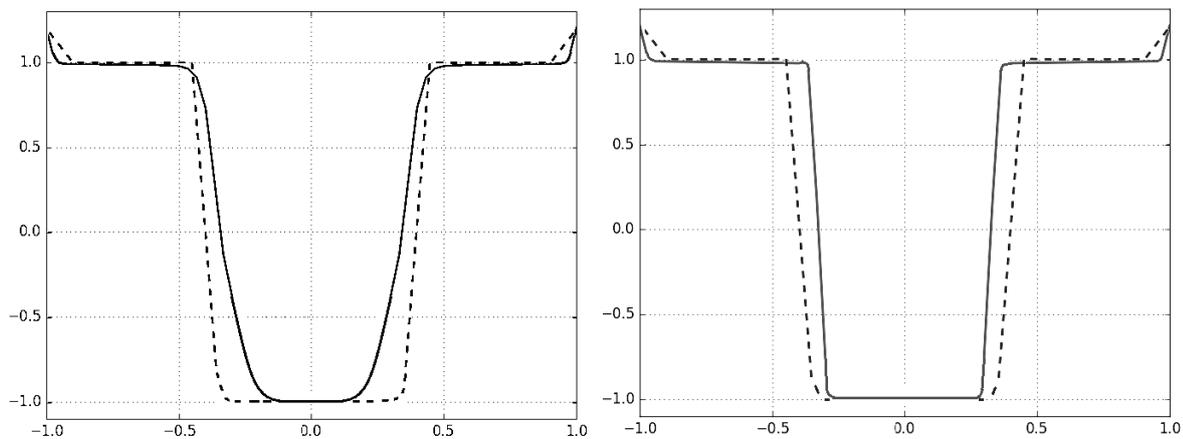


Рис. 2. Асимптотические и численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$ в сечении вертикальной плоскостью
Fig. 2. Asymptotic and numerical solutions of the problem (9) for $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$ in a cross-sectional vertical plane

Список литературы / References

- [1] Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., *Процессы в открытых диссипативных системах (графическое исследование эволюции тепловых структур)*, М., Знание, 1988; [Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Samarskii A. A., *Processes in the open dissipative systems: Graphical study of the evolution of thermal structures*, Moskva, Znanye, 1988, (in Russian).]
- [2] Davydova M. A., Nefedov N. N., “Existence and Stability of Contrast Structures in Multidimensional Singularly Perturbed Reaction-Diffusion-Advection Problems”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 277 – 285.
- [3] Давыдова М. А., Неведов Н. Н., “Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:1** (2017), 31–38; [Davydova M. A., Nefedov N. N., “Existence and Stability of the Solutions with Internal Layers in Multidimensional Problems of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Balanced Nonlinearity”, *Modeling and analysis of the information systems*, **24:1** (2017), 31–38, (in Russian).]
- [4] Davydova M. A., “Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems”, *Math Notes*, **98:6** (2015), 909–919.
- [5] Nefedov N. N., Sakamoto K., “Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity”, *Hiroshima Mathem. Journal*, **33:3** (2003), 391–432.
- [6] Неведов Н. Н., “Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущенных задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае”, *Дифференц. уравнения*, **32:11** (1996), 1529–1537; English transl.: Nefedov N. N., “The method of differential inequalities for nonlinear singularly perturbed problems with contrast structures of step type in the critical case”, *Differ. Equ.*, **32:11** (1996), 1526–1534.
- [7] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Неведов Н. Н., “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, **268**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 268–283; English transl.: Vasil’eva A. B., Butuzov V. F., Nefedov N. N., “Singularly perturbed problems with boundary and internal layers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **268**, SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2010, 258–273.
- [8] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., “Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23:3** (2016), 334–341.
- [9] Volkov V. T., Nefedov N. N., “Asymptotic-numerical investigation of generation and motion of fronts in phase transition models”, *Lecture Notes in Computer Science*, **8236** (2013), 524–531.

Davydova M. A., Zakharova S. A., "On a Singularly Perturbed Problem of the Nonlinear Thermal Conductivity in the Case of Balanced Nonlinearity", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 83–91.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-83-91

Abstract. On the basis of the modified asymptotic method of boundary functions and the asymptotic method of differential inequalities, the question of the existence of Lyapunov-stable stationary solutions with internal layers of the nonlinear heat equation in the case of nonlinear dependence of the power of thermal sources from temperature is investigated. The main conditions of the existence of such solutions are discussed. We construct an asymptotic approximation of an arbitrary-order accuracy to such solutions and suggest an efficient algorithm for constructing an asymptotic approximation to the localization surface of the transition layer. To justify the constructed formal asymptotics, we use an

asymptotic method of differential inequalities. The main complexity is related to the description of the transition surface in whose neighborhood the internal layer is localized. We use a more efficient method for localizing the transition surface, which permits one to develop an approach to a more complicated case of balanced nonlinearity. The results can be used to create a numerical algorithm which uses the asymptotic analyses to construct space-non-uniform meshes while describing internal layer behaviour of the solution. As an illustration, we consider a problem on the plane that allows us to visualize the numerical calculations. Numerical and asymptotic solutions of zero order are compared for different values of the small parameter.

Keywords: nonlinear heat conductivity, reaction-diffusion-advection equations, contrast structures, asymptotic methods

On the authors:

Marina A. Davydova, orcid.org/0000-0002-9255-7353, PhD,
M.V. Lomosov Moscow State University,
1-2 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: m.davydova@physics.msu.ru
Svetlana A. Zakharova, orcid.org/0000-0002-3421-1311, graduate student,
M.V. Lomosov Moscow State University,
1-2 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, № 16-01-00437.

©Куликов А. Н., Куликов Д.А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-92-101

УДК 517.9

Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями

Куликов А. Н.¹, Куликов Д.А.²

получена 15 ноября 2017

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для одной из первоначальных редакций широко известного в математической физике уравнения Курамото–Сивашинского. Изучены локальные бифуркации в окрестности пространственно однородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Показано, что потеря устойчивости однородными состояниями равновесия приводит к появлению двумерного локального аттрактора, все решения на котором, кроме одного пространственно неоднородного состояния, – периодические функции времени. Спектр частот данного семейства периодических решений заполняет всю числовую ось, и все они неустойчивы в смысле определения А.М. Ляпунова в метрике фазового пространства (пространства начальных условий) соответствующей начально-краевой задачи. В качестве фазового пространства был выбран естественный для данной краевой задачи вариант функционального пространства Соболева. Для периодических решений, заполняющих двумерный аттрактор, приведены асимптотические формулы. При анализе бифуркационной задачи были использованы методы анализа бесконечномерных динамических систем: метод интегральных (инвариантных) многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм Пуанкаре, а также асимптотические методы. При этом анализ бифуркаций для периодической краевой задачи был сведен к анализу структуры окрестности нулевого решения однородной краевой задачи Дирихле для рассматриваемого в работе уравнения.

Ключевые слова: уравнение Курамото–Сивашинского, периодическая краевая задача, локальные бифуркации, устойчивость, аттрактор, асимптотические формулы

Для цитирования: Куликов А. Н., Куликов Д.А., "Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:1 (2018), 92–101.

Об авторах:

Куликов Анатолий Николаевич, orcid.org/0000-0003-0251-9562, канд. ф.-м. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, orcid.org/0000-0002-6307-0941, канд. ф.-м. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Благодарности:

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.

²Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

Введение

В работе рассмотрена одна из наиболее традиционных версий уравнения Курамото–Сивашинского (УКС) [1–3]. Для этого уравнения изучается периодическая краевая задача (КЗ). Этой задаче было посвящено достаточно большое число исследований [4–10]. Рассматривался вопрос о локальных бифуркациях. Большинство таких работ опиралось на использование редукции КЗ к конечномерной динамической системе. Как правило, для такой редукции использовался один из вариантов метода Галеркина (см., например, [5]). Далее анализу подвергалась полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений, и для нее изучались локальные бифуркации. Как правило, результатом такого анализа было выявление условий, при реализации которых имеют место либо бифуркации Андронова–Хопфа, либо Тьюринга–Пригожина, т.е. выявлялись условия, при которых у конечномерной динамической системы могут быть найдены циклы или пространственно неоднородные решения.

Анализ данной задачи, но без использования метода Галеркина или других методов редукции задачи к ее конечномерному аналогу выявил возможность бифуркации двумерного локального аттрактора, решения на котором – периодические функции времени, и все эти решения в силу классического определения А.М. Ляпунова неустойчивы. Данные результаты получены на основе применения строго математически обоснованных методов анализа бесконечномерных динамических систем. Возможность такой бифуркации отмечалась и ранее, при изучении иных динамических систем [11–12]. Результаты, изложенные ниже, составили основу доклада авторов на конференции “Новые тенденции в нелинейной динамике”, проходившей 5–7 октября 2017 г. [13].

1. Постановка математической задачи

Рассмотрим периодическую КЗ

$$w_\tau + \alpha w_{\xi\xi\xi\xi} + \beta w_{\xi\xi} + 2\gamma w w_\xi = 0, \quad (1)$$

$$w(\tau, \xi + 2H) = w(\tau, \xi), \quad (2)$$

где $\alpha > 0, H > 0, \beta, \gamma > \in R$. Дифференциальное уравнение в частных производных (1) принято называть уравнением Курамото–Сивашинского (см., например, [1–3]). Замены

$$\xi = \frac{xH}{\pi}, \quad \tau = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{H}{\pi}\right)^4 t, \quad w = \left(\frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\pi}{H}\right)^3\right) u$$

позволяют переписать КЗ в нормированном виде, сократив число параметров в уравнении. Далее в работе будет изучаться КЗ

$$u_t + u_{xxxx} + b u_{xx} + (u^2)_x = 0, \quad (3)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (4)$$

где $b = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{H}{\pi}\right)^2$. В записи уравнения учтено, что $(u^2)_x = 2uu_x$.

Отметим некоторые свойства, характерные для решений КЗ (3), (4).

Во-первых, $u(t, x) = \text{const}$ является ее решением. Во-вторых, если $u(t, x)$ – ее решение, то

$$M_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx = c \quad (c \in R).$$

Действительно, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} dx = 0$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} dx = 0$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_x^2 dx = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u dx = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u dx = c.$$

Положим в КЗ (3), (4)

$$u(t, x) = c + v(t, x), \quad c \in R, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t, x) dx = 0.$$

В результате последней замены КЗ (3), (4) можно свести к вспомогательной КЗ

$$v_t = Av - (v^2)_x, \quad (5)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = 0. \quad (6)$$

В КЗ (5), (6) линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A = A(c)$ определен равенством

$$A(c)v = -v_{xxx} - bv_{xx} - 2cv_x$$

и зависит от параметра $c \in R$. Подчеркнем, что величина c произвольна. ЛДО $A(c)$, определенный на достаточно гладких функциях $p(x)$, удовлетворяющих условиям (6), является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $H_0 : f(x) \in H_0$, если

$$1) f(x + 2\pi) = f(x), \quad 2) f(x) \in L_2(-\pi, \pi), \quad 3) M_0(f) = 0.$$

Далее, через H_k будем обозначать гильбертово пространство, состоящее из тех 2π периодических функций $f(x)$, у которых существуют обобщенные производные до порядка k включительно, принадлежащие $L_2(-\pi, \pi)$. Норму в H_k можно определить равенством

$$\|f\|_{H_k}^2 = \|f\|_{L_2}^2 + \|f'\|_{L_2}^2 + \dots + \|f^{(k)}\|_{L_2}^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Наконец, $H_{k,0} \subset H_k$ и состоит из тех $f(x) \in H_k$, для которых $M_0(f) = 0$. Если теперь КЗ (3), (4) дополнить начальным условием

$$u(0, x) = f(x) \in H_{4,0}, \quad (7)$$

то смешанная (начально краевая) задача (5), (6), (7) локально корректно разрешима и ее решения формируют локальный полупоток

$$f(x) \rightarrow f_t(x) \rightarrow u(t, x) \in H_{4,0} \text{ при любом } t > 0.$$

Отметим, что КЗ (5), (6) имеет нулевое состояние равновесия. В частности, в работе будут рассмотрены вопросы о поведении решений при $t \rightarrow \infty$ вспомогательной КЗ (5), (6) с начальными условиями $f(x) \in Q(r) \subset H_{4,0}$. Здесь через $Q(r)$ обозначен шар радиуса r с центром в нуле фазового пространства решений КЗ (5), (6), т.е. шар с центром в нуле гильбертова пространства $H_{4,0}$.

2. Линеаризованная краевая задача

В этом разделе рассмотрим линеаризованный вариант КЗ (5), (6), т.е. КЗ

$$v_t = Av, \quad v = v(t, x), \quad (8)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = 0, \quad (9)$$

где ЛДО $A = A(c)$ был определен в предыдущем разделе.

Стандартным образом можно проверить, что КЗ

$$-p^{(IV)} - bp'' - 2cp' = \lambda p, \quad p(x + 2\pi) = p(x), \quad M_0(p) = 0$$

имеет нетривиальные решения

$$p(x) = p_n(x) = \exp(inx), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

если $\lambda_n = \lambda_n(c) = -n^4 + bn^2 + i\sigma n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, а $\sigma = -2c$.

Подчеркнем, что $\tau_n = \operatorname{Re}\lambda_n(c) = -n^4 + bn^2$ и не зависит от c . В нашем случае c играет роль параметра и от c зависит только $\operatorname{Im}\lambda_n(c)$. Отметим, также, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = -\infty$. Семейство собственных функций рассматриваемого ЛДО $\exp(inx)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ формирует полную ортогональную систему в сепарабельном гильбертовом пространстве H_0 . Из этих замечаний вытекает справедливость утверждения.

Лемма. *Решения КЗ (8), (9) асимптотически устойчивы, если $b < 1$, и неустойчивы при $b > 1$. Если $b = 1$, то они устойчивы.*

При $b < 1$ асимптотически устойчиво нулевое решение нелинейной КЗ (5), (6), и оно неустойчиво при $b > 1$. При $b = 1$ реализуется критический случай об устойчивости нулевого решения КЗ. При таком выборе b $\lambda_{\pm}(c) = \pm i\sigma$, $\sigma = -2c$. Этой паре собственных значений соответствуют собственные функции $\exp(\pm ix)$. Для остальных собственных значений ЛДО $A(c)$ справедливы неравенства $\operatorname{Re}\lambda_n(c) \leq -12$, $n = \pm 2, \pm 3, \dots$

3. Основной результат

Рассмотрим нелинейный КЗ (3), (4) и (5), (6) при $b = 1 + \gamma\varepsilon$. В данном разделе удобно считать, что $\gamma = \frac{1}{12}$. Такой выбор постоянной γ мотивирован удобством при формулировке основного результата.

Теорема 1. Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (5), (6) при любом $c \in R$ имеет единственный устойчивый предельный цикл $l(c, \varepsilon)$, принадлежащий достаточно малой окрестности $Q(r)$. При этом все решения с достаточно малыми начальными условиями со скоростью экспоненты приближаются к $l(c, \varepsilon)$ в смысле нормы фазового пространства. Для решений, формирующих такой цикл, справедлива асимптотическая формула

$$v_p(t, x, c, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma t + \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{12} \sin(2x + 2\sigma t + 2\varphi_0) + \frac{\varepsilon^{3/2}}{288} \sin(3x + 3\sigma t + 3\varphi_0) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (10)$$

где $\sigma = -2c, \varphi_0 \in R$.

При $c = 0$ получаем не цикл, а одномерное инвариантное многообразие, заполненное пространственно неоднородными состояниями равновесия КЗ (5), (6). В ситуации общего положения ($c \neq 0$) реализуется бифуркационная теорема Андронова–Хопфа. Особенностью анализа КЗ (5), (6) является зависимость уравнения (5) от параметра c . Она имеет цикл при любом $c \neq 0$, и от c зависит только период $T = T(c) = \frac{\pi}{|c|}$. Доказательство теоремы 1 достаточно стандартно. Детальных пояснений требует вывод формулы (10), а также уже отмеченный факт о характере зависимости от параметра c . Это будет сделано в следующем разделе (т.е. в п. 4).

Очевидно, что равенство

$$u_p(t, x, c, \varphi_0, \varepsilon) = c + v_p(t, x, c, \varphi_0, \varepsilon) \quad (11)$$

определяет двухпараметрическое семейство периодических решений основной КЗ (3), (4), если $b = 1 + \frac{\varepsilon}{12}$. Двухпараметрическое семейство решений (11) формирует двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$, которое с геометрической точки зрения является прямым произведением цикла $l(c, \varepsilon)$ и прямой. Все остальные решения из малой его окрестности приближаются к $V_2(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты, показатель которой не зависит от c (напомним, что $Re\lambda_n(c)$ не зависит от c). Итак, $V_2(\varepsilon)$ – локальный аттрактор для решений КЗ (3), (4).

С другой стороны, все решения $u_p(t, x, c, \varepsilon) \in V_2(\varepsilon)$ индивидуально неустойчивы в норме пространства H_4 . Действительно, рассмотрим два различных решения из семейства периодических решений (11), т.е. $u_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon)$ и $u_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)$ ($c_1 \neq c_2$) и выделим "главные" части в асимптотическом представлении для этих двух решений

$$\begin{aligned} u_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) &= w_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) + o(\varepsilon), \quad u_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) = w_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) + o(\varepsilon), \\ w_1(t, x) &= w_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) = c_1 + \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma_1 t + \varphi_1), \quad \sigma_1 = -2c_1, \\ w_2(t, x) &= w_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) = c_2 + \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma_2 t + \varphi_2), \quad \sigma_2 = -2c_2. \end{aligned}$$

Положим $\Delta w = w_1 - w_2$. Тогда

$$\|\Delta w\|_{H_4}^2 = \|\Delta w\|_{L_2}^2 + \|(\Delta w)_x\|_{L_2}^2 + \|(\Delta w)_{xx}\|_{L_2}^2 + \|(\Delta w)_{xxx}\|_{L_2}^2 + \|(\Delta w)_{xxxx}\|_{L_2}^2.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\|\Delta w\|_{L_2}^2 = 2\pi(c_1 - c_2)^2 + 4\varepsilon\pi \sin^2\left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).$$

Для остальных слагаемых вычисления аналогичны, т.е. в результате получаем, что

$$\|\Delta w\|_{H_4}^2 = 2\pi(c_1 - c_2)^2 + 20\varepsilon\pi \sin^2\left((c_2 - c_1)t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).$$

Без нарушения общности будем считать, что $c_2 > c_1$ ($c_2 - c_1 > 0$). Положим

$$t_k = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}{c_2 - c_1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty.$$

При так выбранных t_k справедливо неравенство

$$\|\Delta w\|_{H_4}^2 \geq 20\varepsilon\pi \text{ или } \|w\|_{H_4} \geq 2\sqrt{5\pi\varepsilon}.$$

Следовательно, при достаточно малых ε ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$) справедливо неравенство

$$\|u_p(t_k, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) - u_p(t_k, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)\|_{H_4} \geq 2\sqrt{5\pi\varepsilon}.$$

С другой стороны, при достаточно малых $\Delta c = c_2 - c_1$ и $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\|u_p(t_k, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) - u_p(t_k, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)\|_{H_4} < \delta,$$

где δ – сколь угодно малая положительная постоянная. Последнее замечание доказывает, что любое решение из семейства (11) неустойчиво.

4. Вспомогательная краевая задача

В данном разделе рассмотрим еще одну вспомогательную КЗ

$$w_t = B(\varepsilon)w - (w^2)_y, \quad w = w(t, y), \quad (12)$$

$$w(t, 0) = w(t, \pi) = w_{yy}(t, 0) = w_{yy}(t, \pi) = 0, \quad (13)$$

которая представляет и самостоятельный интерес. Здесь $y \in [0, \pi]$, ЛДО $B(\varepsilon)g(y) = -g^{(IV)}(y) - \left(1 + \frac{\varepsilon}{12}\right)g''(y)$, область определения которого содержит достаточно гладкие функции $g(y)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$g(0) = g(\pi) = g''(0) = g''(\pi) = 0.$$

Спектр ЛДО $B(\varepsilon)$ состоит из счетного набора собственных значений $\lambda_n(\varepsilon) = -n^4 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{12}\right)n^2$, которым соответствуют собственные функции $e_n(y) = \sin ny$. Все собственные числа данного ЛДО действительны и однократны. В частности, $\lambda_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{12}$, т.е. $\lambda_1(0) = 0$. Нелинейная КЗ (12), (13) имеет нулевое состояние равновесия, для которого реализуется случай, близкий к критическому простого нулевого собственного значения. В окрестности нулевого решения КЗ (12), (13) существует одномерное инвариантное многообразие $M_1(\varepsilon)$. Остальные решения из достаточно малой

окрестности нулевого решения КЗ (12), (13) приближаются к $M_1(\varepsilon)$ с течением времени со скоростью экспоненты. Динамику решений на $M_1(\varepsilon)$ определяет скалярное уравнение первого порядка (нормальная форма – НФ)

$$\dot{z} = \varepsilon\Psi(z, \varepsilon) = \varepsilon\psi(z) + o(\varepsilon), \quad z = z(t). \quad (14)$$

Решения на $M_1(\varepsilon)$ можно и целесообразно искать в следующем виде:

$$w(t, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(z, y) + \varepsilon w_2(z, y) + \varepsilon^{3/2}w_3(z, y) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (15)$$

где $z = z(t)$ решения НФ (14), $w_1(z, y) = z \sin y$, а функции $w_k(y, z), k = 2, 3, 4, \dots$ принадлежат следующему классу функций: $f(z, y) \in W$, если

- 1) при фиксированном z функция $f(z, y) \in W_2^4[0, \pi]$;
- 2) имеет непрерывные частные производные относительно z и $f_k(0, y) = 0$;
- 3) удовлетворяет краевым условиям шарнирного опирания (13);
- 4) справедливы равенства $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(z, y) \sin y dy = 0$.

После подстановки суммы (15) в КЗ (12), (13) и приравнивания членов при одинаковых степенях ε ($\varepsilon, \varepsilon^{3/2}, \dots$) получаем неоднородные КЗ для определения членов суммы (15)

$$B_0 w_2 = \Phi_2(z, y), \quad w_2(z, 0) = w_2(z, \pi) = w_{2yy}(z, 0) = w_{2yyy}(z, \pi) = 0, \quad (16)$$

$$B_0 w_3 = \Phi_3(z, y), \quad w_3(z, 0) = w_3(z, \pi) = w_{3yy}(z, 0) = w_{3yyy}(z, \pi) = 0, \quad (17)$$

где ЛДО $B_0 w_k = -w_{yyyy} - w_{yy}, k = 2, 3$. Производные $z(t)$ следует вычислять в силу уравнения (14), т.е. НФ. Поэтому

$$\Phi_2(z, y) = 2(w_1^2)_y = z^2 \sin 2y, \quad \Phi_3(z, y) = 2(w_1 w_2)_y + \frac{1}{12}(w_1)_{yy} + \psi(z) \sin y.$$

Анализ разрешимости КЗ (16), (17) показал, что

$$w_2 = -\frac{1}{12}z^2 \sin 2y, \quad w_3 = \frac{1}{288}z^3 \sin 3y, \quad \psi(z) = \frac{1}{12}(z - z^3).$$

Рассмотрим теперь укороченный вариант НФ (14), т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{12}(z - z^3),$$

которое имеет три состояния равновесия: $S_0 : z = 0$; $S_+ : z = 1$; $S_- : z = -1$. При этом нулевое состояние равновесия S_0 неустойчиво, а нетривиальные состояния равновесия S_+ и S_- асимптотически устойчивы. Справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (12), (13) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия*

$$\begin{aligned} S_+ : w_+(y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \sin y - q_1 \varepsilon \sin 2y + q_2 \varepsilon^{3/2} \sin 3y + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_- : w_-(y, \varepsilon) &= -\varepsilon^{1/2} \sin y - q_1 \varepsilon \sin 2y - q_2 \varepsilon^{3/2} \sin 3y + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

$$\text{где } q_1 = \frac{1}{12}, q_2 = \frac{1}{288}.$$

Отметим, что справедливо равенство

$$w_-(y, \varepsilon) = -w_+(\pi - y, \varepsilon),$$

т.е. с "физической" точки зрения мы имеем одно и то же состояние равновесия, но в иной системе координат. Поэтому далее речь пойдет о состоянии равновесия S_+ .

Продолжим функцию $w_+(y, \varepsilon)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ по нечетности, а затем на всю числовую ось по периодичности с периодом 2π . Тогда вновь полученная функция $v_+(y, \varepsilon)$ будет состоянием равновесия краевой задачи

$$v_t + v_{yyyy} + \left(1 + \frac{1}{12}\varepsilon\right)v_{yy} + (v^2)_y = 0, \quad (18)$$

$$v(t, y + 2\pi) = v(t, y), \quad M_0(v) = 0. \quad (19)$$

При проверке используется то обстоятельство, что уравнение (18) инвариантно для нечетных функций. Действительно, если $v(t, y)$ нечетная функция переменной y , то все слагаемые левой части уравнения (18) сохраняют это свойство.

Рассмотрим теперь семейство функций $v_p(t, x, c, \varepsilon) = v_+(x + \sigma t + \varphi_0, \varepsilon)$, где $\sigma = -2c$, которое является при каждом c и φ_0 периодическим решением вспомогательной КЗ (5), (6) с сохранением устойчивости состояния равновесия S_+ в следующем смысле: периодическое решение $v_p(t, x, c, \varepsilon)$ орбитально асимптотически устойчиво. Последний фрагмент данного раздела завершает доказательство справедливости формулы (10). Отметим также, что состояние равновесия $w_-(y, \varepsilon)$, конечно, приводит к тому же семейству периодических решений. Состояниям равновесия $v_+(y, \varepsilon)$ и $v_-(y, z)$ КЗ (18), (19) соответствуют разные представители семейства периодических решений (10). Они отличаются величиной фазы.

В заключение отметим, что решение $v_p(t, x, c, \varepsilon)$ имеет период $T = 2\pi/|c|$, если $c \neq 0$ и величина T принимает любое значение из R_+ .

Список литературы / References

- [1] Kuramoto Y., *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] Sivashinsky G.I., "Weak turbulence in periodic flows", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **17:2** (1985), 243–255.
- [3] Ахмедиев Н., А. Анкевич, *Диссипативные солитоны*, Физматлит, Москва, 2008.
- [4] Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes P., "Kuramoto–Sivashinsky Dynamics on the Center–Unstable Manifold", *SIAM J. Appl. Math.*, **49:3** (1989), 676–691.
- [5] Kevrekidis I.G., Nicolaenko B., Scovel J.C., "Back in the saddle again: A computer assisted study of the Kuramoto–Sivashinsky equation", *SIAM J. Appl. Math.*, **50:3** (1990), 760–790.
- [6] Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R., "Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16:2** (1985), 155–183.
- [7] Changpin Li, Zhonghua Y., "Bifurcation of two-dimensional Kuramoto–Sivashinsky equation", *Appl. Math.- JCU*, **13:3** (1998), 263–270.

- [8] Куликов А. Н., Куликов Д. А., “Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52:5** (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A. N., Kulikov D. A., “Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52:5** (2012), 800–814.
- [9] Куликов А. Н., Куликов Д. А., “Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского”, *Вестник МИФИ*, **3:4** (2014), 408–415; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., “Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in two boundary value problems for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Vestnik MIFI*, **3:4** (2014), 408–415, (in Russian).]
- [10] Kulikov A. N., Kulikov D. A., “Inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219:2** (2016), 173–183.
- [11] Куликов А. Н., “Аттракторы двух краевых задач для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения”, *Нелинейная динамика*, **4:1** (2008), 57–68; [Kulikov A. N., “The attractors of two boundary value problems for a modified nonlinear telegraph equation”, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **4:1** (2008), 57–68, (in Russian).]
- [12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., “Пример аттрактора, состоящего из неустойчивых по Ляпунову периодических траекторий”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **15:2** (2008), 94–95; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., “Primer attraktora, sostoyashchego iz neustoychivykh po Lyapunovu periodicheskikh traektoriy”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15:2** (2008), 94–95, (in Russian).]
- [13] Куликов А. Н., Куликов Д. А., “Уравнение Курамото–Сивашинского. Существование аттрактора, все решения на котором неустойчивы”, *Тезисы докладов международной научной конференции “Новые тенденции в нелинейной динамике”*, ЯрГУ, Ярославль, 2017, 50–51; [Kulikov A. N., Kulikov D. A., “The existence of attractor formed by the unstable solutions”, *Abstracts of international conference reports “New Trends in Nonlinear Dynamics”*, JarGU, Jaroslavl, 2017, 50–51, (in Russian).]

Kulikov A. N., Kulikov D. A., “The Kuramoto–Sivashinsky equation. A Local Attractor Filled with Unstable Periodic Solutions”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 92–101.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-92-101

Abstract. A periodic boundary value problem is considered for one version of the Kuramoto–Sivashinsky equation, which is widely known in mathematical physics. Local bifurcations in a neighborhood of the spatially homogeneous equilibrium points in the case when they change stability are studied. It is shown that the loss of stability of homogeneous equilibrium points leads to the appearance of a two-dimensional attractor on which all solutions are periodic functions of time, except one spatially inhomogeneous state. A spectrum of frequencies of the given family of periodic solutions fills the entire number line, and they are all unstable in a sense of Lyapunov definition in the metric of the phase space (space of initial conditions) of the corresponding initial boundary value problem. It is chosen the Sobolev space as the phase space. For the periodic solutions which fill the two-dimensional attractor, the asymptotic formulas are given. In order to analyze the bifurcation problem it was used analysis methods for infinite-dimensional dynamical systems: the integral (invariant) manifold method, the Poincaré normal form theory, and asymptotic methods. The analysis of bifurcations for periodic boundary value problem was reduced to analysing the structure of the neighborhood of the zero solution of the homogeneous Dirichlet boundary value problem for the considered equation.

Keywords: the Kuramoto–Sivashinsky equation, periodic boundary value problem, local bifurcations, stability, attractor, asymptotic formulas

On the authors:

Anatoli N. Kulikov, orcid.org/0000-0003-0251-9562, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Dmitri A. Kulikov, orcid.org/0000-0002-6307-0941, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Acknowledgments:

¹This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1.

²The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-01-00672.

©Марушкина Е. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-102-111

УДК 517.9

Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью

Марушкина Е. А.

получена 30 октября 2017

Аннотация. Изучается динамика ассоциации, состоящей из трех одинаковых колебательных элементов. Структура связи между осцилляторами предполагается вещательной, т.е. один из элементов системы односторонним образом воздействует на два других, которые, в свою очередь, взаимодействуют друг с другом. Важным свойством связи между осцилляторами является наличие в ней запаздывания по времени, что, очевидным образом, часто встречается в приложениях. Изучаемая система моделирует ситуацию из популяционной динамики, когда популяции слабо связаны между собой, например, разделены географически. При этом одна из популяций может влиять на обе оставшиеся, которые в свою очередь способны влиять друг на друга, но не влияют на первую. Каждый отдельный осциллятор представлен логистическим уравнением с запаздыванием (уравнением Хатчинсона). В работе выполнен локальный асимптотический анализ данной системы в случае близости параметров осцилляторов к значениям, при которых происходит бифуркация Андронова–Хопфа, кроме того, предполагаются малыми коэффициенты связи в системе. В этой ситуации к нашей задаче применим известный метод нормальных форм, который позволяет свести изучение динамики системы в некоторой окрестности единичного состояния равновесия к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на устойчивом интегральном многообразии. Для построенной нормальной формы найдены простейшие режимы, полученные с использованием симметрии задачи, и условия их устойчивости. С учетом полученных формул численно проанализированы фазовые перестройки, происходящие в системе. Показано, что запаздывание в цепи связи осцилляторов существенно влияет на качественное поведение решений системы.

Ключевые слова: уравнение Хатчинсона, вещательная связь, запаздывание, метод нормальных форм, асимптотика, устойчивость, бифуркация

Для цитирования: Марушкина Е. А., "Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 102–111.

Об авторе:

Марушкина Елена Александровна, orcid.org/0000-0001-9183-6484, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Благодарности:

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60039 мол_а_дк.

1. Постановка задачи

Проблема предсказания сложного коллективного поведения ассоциаций связанных осцилляторов различной природы является одной из наиболее важных задач в настоящее время. Сети, составленные из нескольких взаимодействующих осцилляторов, представляют собой универсальный модельный объект, находящий применение в различных областях науки и техники. В работах [1–3] построен полный набор сетей из трех элементов с различной структурой связи между ними. В статье [4] методами большого параметра изучены системы вида

$$\dot{N}_j = r(f(N_j(t-1)))N_j + D(N_{j-1} + N_{j+1} - 2N_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $N_0 \equiv N_1$, $N_{n+1} \equiv N_n$, r — параметр, а достаточно гладкая функция $f(N)$ обладает следующими предельными свойствами: $f(0) = 1$ и $f(u) \rightarrow -a$ ($a > 0$), при $u \rightarrow +\infty$.

Одним из вариантов этой системы является задача

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r(f(N_1(t-1)))N_1, \\ \dot{N}_2 &= r(f(N_2(t-1)))N_2 + D(N_1 + N_3 - 2N_2), \\ \dot{N}_3 &= r(f(N_3(t-1)))N_3 + D(N_1 + N_2 - 2N_3) \end{aligned} \quad (2)$$

с вещательным взаимодействием осцилляторов. Задача (2) рассматривалась в предположении, что r — велико.

Возможность аналитического асимптотического исследования системы (2) также имеется при условии близости ее параметров к критическим в задаче об устойчивости состояния равновесия системы (2).

Предполагая дополнительно, что $f'(0) = -1$, и полагая, что в цепи связи имеется дополнительное запаздывание, приходим к задаче, близкой к системе, состоящей из трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r(1 - N_1(t-1))N_1, \\ \dot{N}_2 &= r(1 - N_2(t-1))N_2 + D(N_1(t-h) + N_3(t-h) - 2N_2), \\ \dot{N}_3 &= r(1 - N_3(t-1))N_3 + D(N_1(t-h) + N_2(t-h) - 2N_3). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой задаче $N_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ можно интерпретировать как плотности численности трех близких популяций, $r > 0$ — мальтузианский коэффициент линейного роста. Величина $D > 0$ отвечает за интенсивность взаимодействия между популяциями. Параметр $h > 0$ представляет собой запаздывание в цепи связи. Всюду далее предполагается, что связь между популяциями слабая, т.е. параметр D мал. Отметим, что влияние запаздывания в цепи связи между осцилляторами рассматривалось также в статьях [5, 6].

Система (3) моделирует ситуацию, когда популяции слабо связаны между собой, например, разделены географически. При этом одна из популяций может влиять на обе оставшиеся, которые в свою очередь способны влиять друг на друга, но не влияют на первую.

Уравнение Хатчинсона, впервые предложенное в [7], является простейшим способом учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. Изучению уравнения Хатчинсона посвящено большое количество

публикаций, в частности, задача диффузионного взаимодействия осцилляторов типа уравнения Хатчинсона исследовалась в [8–10]. А в статье [11] рассмотрена модель слабого конкурентного взаимодействия близких видов. В настоящей работе изучается динамика системы из трех уравнений Хатчинсона со слабой вещательной связью между ними. Локальная динамика трех осцилляторов общего вида, связанных вещательным образом без запаздывания, рассмотрена ранее в [12]. В настоящей работе исследуется влияние запаздывания, введенного в цепь связи, на динамику изучаемой системы.

При помощи стандартной замены $N_j = 1 + u_j$ исходная система (3) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_1(t-1)(1+u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_2(t-1)(1+u_2) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_3(t-h) - 2u_2), \\ \dot{u}_3 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_3(t-1)(1+u_3) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр r выбран равным $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, при этом если $\varepsilon = 0$, то в спектре устойчивости системы (4) имеется пара чисто мнимых собственных чисел $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ кратности 3, которой соответствуют три линейно независимые собственные функции. Связь D взаимодействия между видами выбрана слабой, пропорциональной малому параметру $0 < \varepsilon \ll 1$.

При помощи локального асимптотического анализа и иллюстрирующего его численного эксперимента изучим периодические и квазипериодические решения системы (4).

2. Построение нормальной формы

В силу вещательности связи между осцилляторами первое уравнение системы (4) может быть решено отдельно от двух оставшихся. Асимптотика его устойчивого периодического решения хорошо известна и выписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{2}{3\pi - 2}\right)t + c\right) + \\ &+ \varepsilon \frac{4\sqrt{5}}{3\pi - 2} \cos\left(\left(\pi - \varepsilon \frac{4}{3\pi - 2}\right)t - \gamma + 2c\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma = \arctan(1/2)$, а c — произвольная константа (см., например, [13]).

Для дальнейшего локального анализа системы (4) воспользуемся стандартной заменой метода нормальных форм в виде, изложенном в работе [13]:

$$u_j(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j1}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_{j2}(t, \tau) + \dots, \quad (6)$$

где $z_j(\tau)$ — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$, ($j = 2, 3$).

Последовательно приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ и, учитывая разложение

$$z_j(\tau - \varepsilon) = z_j(\tau) - \varepsilon z_j'(\tau) + \dots,$$

а также асимптотику (5), получаем при $\sqrt{\varepsilon}$ верное тождество.

На втором шаге алгоритма при ε возникает система уравнений на $u_{j1}(t, \tau)$, состоящая из двух не связанных друг с другом уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{21} &= -\frac{\pi}{2}u_{11}(t-1) + \frac{\pi}{2}(z_2^2 e^{i\pi t} + \bar{z}_2^2 e^{-i\pi t}), \\ \dot{u}_{31} &= -\frac{\pi}{2}u_{21}(t-1) + \frac{\pi}{2}(z_3^2 e^{i\pi t} + \bar{z}_3^2 e^{-i\pi t}), \end{aligned} \quad (7)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{21} &= \frac{2-i}{5}z_2^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}_2^2 e^{-i\pi t}, \\ u_{31} &= \frac{2-i}{5}z_3^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}_3^2 e^{-i\pi t}. \end{aligned} \quad (8)$$

На третьем шаге алгоритма из условий разрешимости задач для $u_{j2}(t, \tau)$ в классе 4-периодических по t функций получим следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z_2' &= iz_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10}z_2|z_2|^2 + d\left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_3 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_2\right), \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z_3' &= iz_3 + \frac{(1-3i)\pi}{10}z_3|z_3|^2 + d\left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_2 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_3\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для нормальной формы (9) имеет место стандартное утверждение (см., например, [13]) о соответствии ее грубых режимов решениям исходной системы (4) той же устойчивости с асимптотикой (5), (6). Следует, однако, отметить, что в случае, если система (9) обнаруживает сложное хаотическое поведение, такую теорему обосновать не удастся. В связи с этим уместно применение численных методов.

Перейдем в системе (9) к полярным переменным, выполнив для этого замену: $z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2, 3$. После подстановки получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)(\rho_2' + i\varphi_2' \rho_2) &= i\rho_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10}\rho_2^3 + d\left(\rho_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}h)} + \rho_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}h)} - 2\rho_2\right), \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)(\rho_3' + i\varphi_3' \rho_3) &= i\rho_3 + \frac{(1-3i)\pi}{10}\rho_3^3 + d\left(\rho_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_3 - \frac{\pi}{2}h)} + \rho_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\pi}{2}h)} - 2\rho_3\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее обозначим $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, $\beta = \varphi_3 - \varphi_1$ и $h^* = \pi h/2$. Приравнявая действительные и мнимые части уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}\rho_2 + \frac{\pi(2-3\pi)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_2^3 + \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1(\cos(\alpha + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\alpha + h^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_3(\cos(\beta - \alpha - h^*) + \frac{\pi}{2}\sin(\beta - \alpha - h^*)) - 2\rho_2\right), \\ \rho_3' &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}\rho_3 + \frac{\pi(2-3\pi)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_3^3 + \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1(\cos(\beta + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\beta + h^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_2(\cos(\beta - \alpha + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\beta - \alpha + h^*)) - 2\rho_3\right), \\ \alpha' &= \frac{-2}{2-3\pi} + \frac{4}{\pi^2 + 4} - \frac{\pi(\pi + 6)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_2^2 - \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1\rho_2^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\alpha + h^*) + \right.\right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\alpha + h^*)\right) + \rho_3\rho_2^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta - \alpha - h^*) - \sin(\beta - \alpha - h^*)\right) - \pi\right), \\ \beta' &= \frac{-2}{2-3\pi} + \frac{4}{\pi^2 + 4} - \frac{\pi(\pi + 6)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_3^2 - \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1\rho_3^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta + h^*) + \right.\right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\beta + h^*)\right) + \rho_2\rho_3^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta - \alpha + h^*) + \sin(\beta - \alpha + h^*)\right) - \pi\right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\cos(\alpha + h^*) \pm \frac{\pi}{2} \sin(\alpha + h^*) = \sqrt{1 + \pi^2/4} \cos(\alpha + h^* \pm \delta),$$

$$\sin(\alpha + h^*) \mp \frac{\pi}{2} \cos(\alpha + h^*) = \sqrt{1 + \pi^2/4} \sin(\alpha + h^* \pm \delta),$$

где $\delta = -\arctan(\pi/2)$. Тогда, выполнив замену $\rho_j = \sqrt{\frac{10}{3\pi-2}}\xi_j$ и замену времени $\tau = \frac{2\pi}{\pi^2+4}s$, получим нормальную форму, записанную в амплитудных и фазовых переменных:

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_2 - \xi_2^3 + d^* (\cos(\alpha - \delta^*) + \xi_3 \cos(\beta - \alpha + \delta^*) - 2\xi_2 \cos(\delta^* + h^*)), \\ \xi_3' &= \xi_3 - \xi_3^3 + d^* (\cos(\beta - \delta^*) + \xi_2 \cos(\beta - \alpha - \delta^*) - 2\xi_3 \cos(\delta^* + h^*)), \\ \alpha' &= b(1 - \xi_2^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta^*) - \frac{\xi_3}{\xi_2} \sin(\beta - \alpha + \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \\ \beta' &= b(1 - \xi_3^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi_3} \sin(\beta - \delta^*) + \frac{\xi_2}{\xi_3} \sin(\beta - \alpha - \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$, $d^* = d\sqrt{\pi^2 + 4}/\pi$, $\delta^* = \delta - h^*$.

Отметим, что система (4) имеет инвариантную плоскость $u_2 = u_3$, на которой вырождается в систему, моделирующую однонаправленное воздействие одного осциллятора u_1 на другой (u_2 или u_3). В полученной нормальной форме (11) этому многообразию соответствует плоскость, определяемая равенствами $\xi_2 = \xi_3$, $\alpha = \beta$. На этой плоскости система (11) упрощается до системы

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 + d^* \cos \delta^* - 2d^* \cos(\delta^* + h^*) - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta^*), \\ \alpha' &= b(1 - \xi^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta^*) - \sin \delta^* + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\xi = \xi_2 = \xi_3$.

Изучим динамику системы (12), отыскав ее простейшие режимы и условия их устойчивости.

3. Динамика двумерной системы

Рассмотрим сначала случай $h^* = 0$. В этой ситуации система (12) сводится к виду

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 - d^* \cos \delta - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta), \\ \alpha' &= b(1 - \xi^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta) + \sin \delta \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу 2π -периодичности правых частей системы (13) по переменной α , ее качественное поведение будем рассматривать на фазовом цилиндре.

Для нахождения состояний равновесия системы (13) приравняем правые части уравнений к нулю:

$$\begin{aligned} \xi(1 - d^* \cos \delta - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta) &= 0, \\ b(1 - \xi^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta) + \sin \delta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая переменную α , приходим к следующему уравнению на переменную $\eta = \xi^2$:

$$(\eta - 1)(\eta^2(1 + b^2) + \eta(2d^*(\cos \delta + b \sin \delta) - (1 + b^2)) + d^{*2}) = 0. \quad (15)$$

Анализ уравнения (15) позволяет отыскать все состояния равновесия системы (13). В частности, выполнено следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $d^* > d_0$, где $d_0 = (5\sqrt{\pi^2 + 4}(1 + \sqrt{10}))/9(3\pi - 2)$. Тогда система (13) имеет единственное состояние равновесия $(1, 0)^T$. Если же $0 < d^* < d_0$, то, кроме этого состояния равновесия, имеются еще два: $(\xi_{2,3}, \alpha_{2,3})^T$, где $\xi_{2,3} = \sqrt{\eta_{2,3}}$, $\alpha_{2,3} = \delta + \arccos(\xi_{2,3}(-1 + d^* \cos \delta + \xi_{2,3}^2)(d^*)^{-1})$, а $\eta_{2,3}$ определяются по формулам:

$$\eta_{2,3} = \frac{d^*(-2 + 3\pi) + 5\sqrt{4 + \pi^2} \mp \sqrt{-9d^{*2}(2 - 3\pi)^2 + 10d^*(-2 + 3\pi)\sqrt{4 + \pi^2} + 25(4 + \pi^2)}}{10\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

Устойчивость полученных состояний равновесия системы (13) определяется матрицей линейной части

$$\begin{pmatrix} 1 - d^* \cos \delta - 3\xi^{*2} & -d^* \sin(\alpha^* - \delta) \\ 2\xi^*b + d^*\xi^{*-2} \sin(\alpha^* - \delta) & -d^*\xi^{*-1} \cos(\alpha^* - \delta) \end{pmatrix}.$$

В ходе анализа указанной выше матрицы были получены условия устойчивости для каждого из трех состояний равновесия. Выполнены следующие утверждения.

Лемма 2. Состояние равновесия $(1, 0)^T$ устойчиво при $d^* > d_1 = \frac{2\sqrt{\pi^2 + 4}}{3\pi - 2}$.

Лемма 3. Состояние равновесия $(\xi_2, \alpha_2)^T$ устойчиво при $d_1 < d^* < d_0$, где $d_{кр.} = (-(4 - 6\pi)\sqrt{\pi^2 + 4} + 2\sqrt{416 - 288\pi + 500\pi^2 - 72\pi^3 + 99\pi^4})/(2(20 - 12\pi + 18\pi^2))$.

Лемма 4. Состояние равновесия $(\xi_2, \alpha_2)^T$ теряет устойчивость колебательным образом с рождением устойчивого цикла (бифуркация Андронова-Хопфа) при $d^* = d_{кр.}$.

Лемма 5. Состояние равновесия $(\xi_3, \alpha_3)^T$ рождается неустойчивым при $d^* = d_0$, и при $d^* = d_1$ сливается с состоянием равновесия $(1, 0)^T$, отбирая у него устойчивость.

Отметим, что $d_{кр.} < d_1 < d_0$. Это позволяет выяснить характер и последовательность бифуркаций, происходящих на фазовом цилиндре системы (13). На основе Лемм 1 – 5 и дополняющего их численного анализа получен полный сценарий фазовых перестроек, происходящих при уменьшении параметра d^* :

1. При значениях параметра $d^* > d_0 \approx 1.1599$ глобально устойчивым является единственное, с точностью до добавки к переменной α периода, состояние равновесия $\xi_1 = 1, \alpha_1 = 0$ (см. лемму 1 и фазовый портрет на рис. 1, построенный при $d = 1.9$).
2. При $d^* = d_0$ рождается пара состояний равновесия $(\xi_2, \alpha_2)^T$ и $(\xi_3, \alpha_3)^T$, первое из которых устойчиво, а второе — неустойчиво (см. лемму 2 и иллюстрацию на рис. 2).

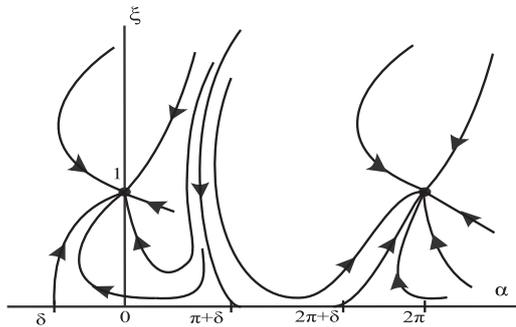


Рис. 1. Фазовый портрет при $d^* = 1.9$
 Fig.1. Phase portrait at $d^* = 1.9$

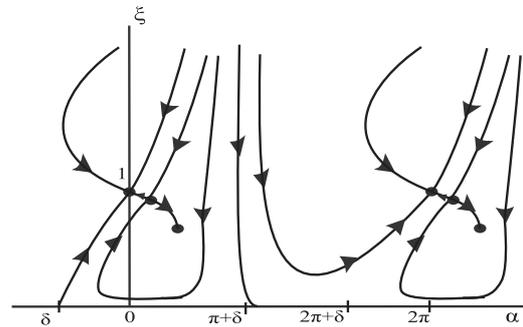


Рис. 2. Фазовый портрет при $d^* = 1.1$
 Fig.2. Phase portrait at $d^* = 1.1$

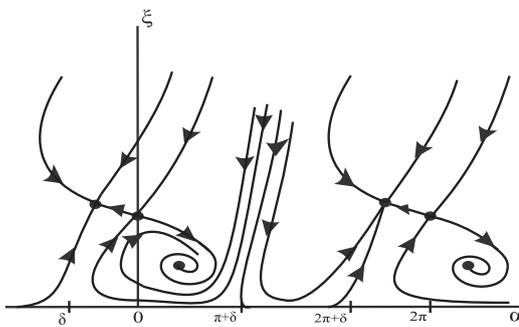


Рис. 3. Фазовый портрет при $d^* = 0.9$
 Fig.3. Phase portrait at $d^* = 0.9$

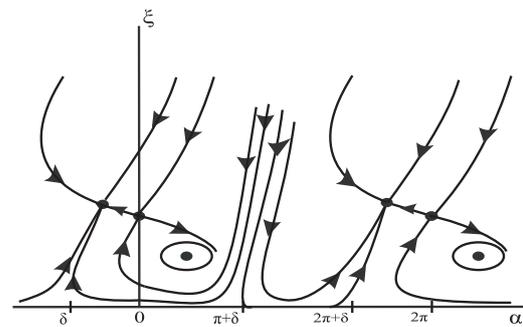


Рис. 4. Фазовый портрет при $d^* = 0.8$
 Fig.4. Phase portrait at $d^* = 0.8$

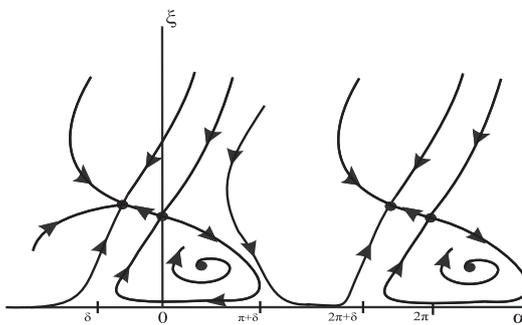


Рис. 5. Фазовый портрет при
 $d^* = 0.68$
 Fig.5. Phase portrait at $d^* = 0.68$

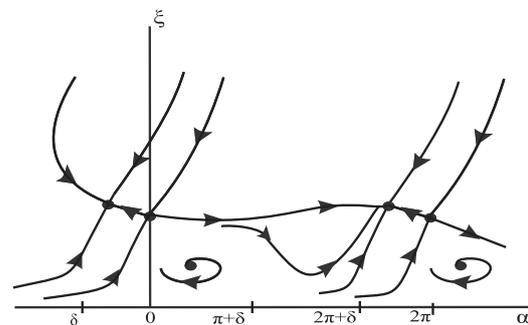


Рис. 6. Фазовый портрет при $d^* = 0.5$
 Fig.6. Phase portrait at $d^* = 0.5$

3. В дальнейшем при уменьшении значения параметра d^* до критического $d_1 \approx 1.0033$ неустойчивая неподвижная точка $(\xi_3, \alpha_3)^T$ сливается с состоянием равновесия $(1, 0)^T$ и отбирает его устойчивость (см. лемму 5 и фазовый портрет на рис. 3).
4. При $d_{кр.} \approx 0.8536$ состояние равновесия $(\xi_2, \alpha_2)^T$ теряет устойчивость с рождением устойчивого цикла (бифуркация Андронова–Хопфа) (на рис. 4 изображен фазовый портрет системы (13) при $d = 0.8$ с родившимся в результате бифуркации Андронова–Хопфа циклом, см. лемму 4).
5. При дальнейшем изменении параметра d^* устойчивый цикл, родившийся из точки $(\xi_2, \alpha_2)^T$, увеличивается в размерах и при $d_S \approx 0.6717$ (определено численно) сливается с петлей сепаратрисы седловой точки $(1, 0)^T$ и исчезает. На рис. 5 эта ситуация проиллюстрирована при $d = 0.68$, которое близко к критическому значению d_S .
6. При $0 < d^* < 0.6717$ система имеет устойчивое состояние равновесия $(\xi_3, \alpha_3)^T$ и пару неустойчивых неподвижных точек $(\xi_2, \alpha_2)^T$ и $(1, 0)^T$ (см. рис. 6).

Рассмотрим теперь случай $h^* \neq 0$. Тогда состояния равновесия системы (12) определяются из алгебраической системы

$$\begin{aligned} \xi(1 + d^* \cos \delta^* - 2d^* \cos(\delta^* + h^*) - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta^*) &= 0, \\ b(1 - \xi^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta^*) - \sin \delta^* + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из обоих уравнений α , получаем для определения амплитудной переменной следующее кубическое уравнение:

$$\eta^3 + a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3 = 0,$$

где $\eta = \xi^2$, а коэффициенты a_j вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d^*(4 - 6\pi) - 10\sqrt{4 + \pi^2} + d^*(-2 + 3\pi)(\cos h^* + 3 \sin h^*)}{5\sqrt{4 + \pi^2}}, \\ a_2 &= \frac{(-2 + 3\pi)^2 + (6 + \pi)^2 + d^{*2}(-2 + 3\pi)^2(5 - 4 \cos h^*)}{10(4 + \pi^2)} - \\ &\quad - \frac{2d^*(-2 + 3\pi)\sqrt{4 + \pi^2}(-2 + \cos h^* + 3 \sin h^*)}{10(4 + \pi^2)}, \\ a_3 &= \frac{-d^{*2}(2 - 3\pi)^2}{10(4 + \pi^2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при относительно малых положительных значениях параметра h^* утверждения Лемм 1–5 и соответственно сценарий фазовых перестроек качественно не меняются, за одним лишь исключением — пункты 5 и 6 сценария должны быть переформулированы следующим образом:

5. Устойчивый цикл, родившийся из состояния равновесия $(\xi_2, \alpha_2)^T$, увеличивается в размерах и при $d^* = d_S(h)$ сливается с петлей сепаратрисы седловой точки $(1, 0)^T$. При этом рождается цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Это означает, что у системы (12) имеется устойчивое решение с периодической амплитудной переменной $\xi(t)$ и бегущей фазовой переменной $\alpha(t)$.
6. При дальнейшем уменьшении параметра d^* цикл, охватывающий фазовый цилиндр, исчезает и, как и при $h = 0$, остается устойчивым лишь одно состояние равновесия $(\xi_3, \alpha_3)^T$.

Подводя общий итог, следует отметить, что общий сценарий фазовых перестроек при относительно небольших значениях запаздывания сохраняется. Однако при достаточно малых d^* появляется существенная особенность, состоящая в наличии у нормальной формы цикла с бегущей фазовой переменной. Учитывая утверждение о соответствии между грубыми режимами нормальной формы и исходной задачи, приходим к выводу, что у системы (4) при $h \neq 0$ могут существовать двухчастотные колебания с набегом рассогласования фазы между ведущим и ведомыми осцилляторами.

Список литературы / References

- [1] Uri Alon, “Network motifs: theory and experimental approaches”, *Nature Reviews Genetics*, **8**:6 (2007), 450–461.
- [2] Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., et al., “Network motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks”, *Science*, **298**:5594 (2002), 824–827.
- [3] Yechiam Yemini, *The Topology of Biological Networks*, Computer Science Department, Columbia University, 2004.
- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи математических наук*, **70**:3(423) (2015), 3–76; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [5] Глызин С. Д., Киселева Е. О., “Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:2 (2010), 133–143; [Glyzin S. D., Kiseleva E. O., “The account of delay in a connecting element between two oscillators”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:2 (2010), 133–143 (in Russian)].
- [6] Глызин С. Д., Солдатова Е. А., “Фактор запаздывания и десинхронизация колебаний связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:3 (2010), 134–143; [Glyzin S. D., Soldatova E. A., “The factor of delay in a system of coupled oscillators FitzHugh–Nagumo”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:3 (2010), 134–143, (in Russian)].
- [7] Hutchinson G. E., “Circular causal system in ecology”, *Ann. N.-Y. Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [8] Глызин С. Д., “Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия»”, *Дифференциальные уравнения*, **33**:6 (1997), 805–811; English transl.: Glyzin S. D., “Dynamical properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem”, *Differential Equations*, **33**:6 (1997), 808–814.
- [9] Глызин С. Д., “Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией”, *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений*, 1986, 112–127; [Glyzin S. D., “Stationaryuue

- rezhimy odnoy konechnoraznostnoy approksimatsii uravneniya Khatchinsona s diffuziyey”, *Kachestvennyye i priblizhennyye metody issledovaniya operatornykh uravneniy*, 1986, 112–127, (in Russian)].
- [10] Глызин С. Д., “Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона”, *Модел. и анализ информ. систем*, **14:3** (2007), 29–42; [Glyzin S. D., “A registration of age groups for the Hutchinson’s equation”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **14:3** (2007), 29–42, (in Russian)].
- [11] Горчакова Е. В., “Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18:1** (2011), 68–74; [Gorchakova E. V., “Dynamics of weak interaction in a system of similar species”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **18:1** (2011), 68–74, (in Russian)].
- [12] Толбей А. О., “Локальная динамика трех осцилляторов со связью вещательного типа”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19:3** (2012), 105–112; [Tolbey A. O., “Local Dynamics of Three Coupled Oscillators with a Feedback Loop”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **19:3** (2012), 105–112, (in Russian)].
- [13] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, ЯрГУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2006, 92 pp., (in Russian)].

Marushkina E. A., "Periodic and Quasiperiodic Solutions in the System of Three Hutchinson Equations with a Delayed Broadcast Connection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 102–111.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-102-111

Abstract. The dynamics of an association of three coupled oscillators is studied. The link between the oscillators is a broadcast connection, that is, one element unilaterally effects the other two, which in turn interact with each other. An important property of the relation among the oscillators is the presence of a delay that obviously can often be found in applications. The studied system simulates the situation of population dynamics when populations are weakly connected, for example, are divided geographically. In this case one population can affect the other two, which in turn can influence each other but not the first one. Each individual oscillator is represented by the logistic equation with a delay (Hutchinson’s equation). Local asymptotic analysis of this system is done in the case of proximity of oscillator parameters to the values at which the Andronov-Hopf bifurcation occur, also the coupling coefficient in the system are assumed to be small. The method of normal forms is used. The study of the dynamics of the system in some neighborhood of a single equilibrium state is reduced to a system of ordinary differential equations on a stable integral manifold. For the construction of a normal form were found elementary modes obtained by using the symmetry of the problem, and the conditions for their stability. Taking into account the obtained asymptotic formulas, the phase reorganizations occurring in the system are numerically analyzed. It is shown that the delay in the communication circuits of the oscillators significantly affects the qualitative behaviour of the system solutions.

Keywords: Hutchinson’s equation, broadcasting connection, delay, normal forms, asymptotics, stability, bifurcation

On the author:

Elena A. Marushkina, orcid.org/0000-0001-9183-6484, PhD, Researcher
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Acknowledgments:

The reported study was funded by RFBR, according to the research project No. 16-31-60039 mol_a_dk.

©Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-112-124

УДК 517.9

Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений

Мельникова А. А.¹, Дерюгина Н. Н.

получена 30 ноября 2017

Аннотация. Работа направлена на исследование решений типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик в пространственно неоднородных средах. Система уравнений содержит малые параметры в разных степенях при дифференциальном операторе, что означает различие характерных скоростей протекания процессов для каждой из компонент. Исследование проведено с помощью методов теории контрастных структур, что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой, определить зависимость скорости фронта от времени, получить асимптотическое приближение решения нулевого и первого порядков по малому параметру. Приближенное решение позволяет подобрать параметры модели таким образом, чтобы результат соответствовал наблюдаемым процессам, объяснять и описывать особенности решений с резкими градиентами, создавать модели, обладающие устойчивыми решениями, тем самым облегчая задачу получения численных результатов. Известно, что численный эксперимент для пространственно двумерных моделей требует значительных вычислительных мощностей, применения методов параллельного программирования и не позволяет эффективно анализировать и модифицировать модели. В данной работе получено асимптотическое приближение решения, требующее обоснования, которое может быть проведено по методу дифференциальных неравенств. Метод дифференциальных неравенств в данном случае предполагает построение верхнего и нижнего решений задачи на основе асимптотики. Область применения математической модели – описание автоволновых решений в задачах экологии, биофизики, физики горения, химической кинетики.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, урбэко-система, автоволновое решение, внутренний переходный слой, система реакция-диффузия.

Для цитирования: Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н., "Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 112–124.

Об авторах:

Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, ассистент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: melnikova@physics.msu.ru.

Дерюгина Наталья Николаевна, orcid.org/0000-0002-7804-3065, магистрант, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: derunat@gmail.com.

Благодарности:

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00437, 18-31-00204, 18-01-00424, 18-01-00865).

Введение

В работе исследованы решения типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик в пространственно неоднородных средах. Физическая интерпретация решения типа фронта – фронт горения или фронт концентрации в химической реакции. Рассматриваемая система содержит малые параметры в разных степенях при дифференциальном операторе, что означает различие характерных скоростей протекания процессов для компонент системы.

Исследование системы проведено с помощью методов теории контрастных структур [1], [2], [3], что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой, определить скорость фронта в зависимости от времени и координаты по кривой фронта, получить асимптотическое приближение решения нулевого и первого порядков по малому параметру.

Применение теории контрастных структур к описанию и обоснованию решений сингулярно возмущенных задач для параболических уравнений и систем уравнений в различных постановках, в том числе и с периодическими условиями, рассматривалось ранее, например, в работах [4], [5], [6]. Движение плоского фронта для задачи с уравнением реакция-адвекция-диффузия описано в статье [7]. Соответствующая системе эллиптическая задача рассмотрена в работе [8].

Приведем пример применения двухкомпонентной параболической системы в задачах экологии. В работах [9], [10] предложена модель урбоэкосистемы, в которой город представляется как активная среда, где взаимодействуют некие факторы – социально-экономические или экологические по типу активатор-ингибитор. Взаимодействие приводит к распространению городской инфраструктуры на большую территорию. В определенный момент этот процесс останавливается за счет действия ингибирующих факторов. Создание подобной модели предполагает определение условий существования решений типа фронта в окрестности замкнутой кривой – границы города. Асимптотика типа фронта для одномерного случая модели урбоэкосистемы получена в работе [11].

Приближенное решение позволяет подобрать параметры модели таким образом, чтобы результат соответствовал наблюдаемым процессам.

Заметим, что численный эксперимент для пространственно двумерных моделей требует значительных вычислительных мощностей и применения методов параллельного программирования (см. работу [12]) и не позволяет эффективно анализировать и модифицировать модель. Область применения исследуемой системы в моделировании не ограничивается задачами экологии. Разработанные методы анализа и получения приближенных решений систем параболических уравнений могут применяться для исследования подобных моделей из других областей науки. Двумерный автоволновой фронт используется, например, в модели формирования окраса в живой природе [13].

Асимптотическое приближение требует обоснования, которое может быть проведено по методу дифференциальных неравенств, как в работах [7], [8].

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для системы параболических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \Delta u - \varepsilon^4 u_t = f(u, v, x, t, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon^2 v_t = g(u, v, x, t, \varepsilon), \\ x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in (0; +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

с краевыми условиями Неймана на границе области и с периодическими условиями по переменной t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad t \in (0; +\infty), \\ u(x, t) = u(x, t + T), \quad v(x, t) = v(x, t + T), \quad x \in D, \quad t \in (0; +\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ — малый параметр, Δ — оператор Лапласа, D — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D , $T > 0$, f и g — достаточно гладкие T -периодические функции в области $\{(u, v, x, t, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times \bar{D} \times (0; +\infty) \times (0; \varepsilon_0]\}$, I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к ∂D .

Предполагаем, что выполнены условия:

A1. Уравнение $f(u, v, x, t, 0) = 0$ при $(v, x, t) \in I_v \times \bar{D} \times (0; +\infty)$ имеет относительно u ровно три корня $u = \varphi^{(-)}(v, x, t)$, $u = \varphi^{(+)}$ (v, x, t), $u = \varphi^0(v, x, t)$, такие, что $\varphi^{(-)}(v, x, t) < \varphi^0(v, x, t) < \varphi^{(+)}$ (v, x, t) и $f_u(\varphi^{(\pm)}(v, x, t), v, x, t, 0) > 0$, $f_u(\varphi^0(v, x), v, x, t, 0) < 0$.

A2. Каждое из уравнений $h^{(\pm)}(v, x, t) := g(\varphi^{(\pm)}(v, x, t), v, x, t, 0) = 0$, при $x \in \bar{D}$ имеет относительно v единственное решение $v = v^{(\pm)}(x, t) \in I_v$, причем во всей области $(x, t) \in \bar{D} \times (0; +\infty)$ выполнены неравенства $v^{(-)}(x, t) < v^{(+)}$ (x, t) и $h_v^{(\pm)}(v^{(\pm)}(x, t), x, t) > 0$.

В соответствии с условиями A1 и A2 вырожденная система (1) (то есть система (1) при $\varepsilon = 0$) имеет относительно u два устойчивых корня $\varphi^{(-)}(v, x, t)$, $\varphi^{(+)}$ (v, x, t) и два устойчивых корня $v^{(-)}(x, t)$, $v^{(+)}$ (x, t) относительно v . В работе исследовано решение с внутренним переходным слоем, в котором происходит резкий переход от одного устойчивого корня вырожденной системы к другому. В результате образуется контрастная структура типа ступеньки. Переход происходит в окрестности некоторой замкнутой кривой C , лежащей внутри области D . Будем считать, что внутри кривой C решение близко к решениям $\varphi^{(+)}(\bar{v}^{(+)}, x, t)$ и $v^{(+)}$ (x, t) вырожденной системы, а вне кривой — к решениям $\varphi^{(-)}(\bar{v}^{(-)}, x, t)$ и $v^{(-)}(x, t)$.

Положение внутреннего переходного слоя периодически изменяется со временем. В работе изложена методика получения асимптотического приближения решения нулевого и первого порядков. Алгоритм получения асимптотики следующих порядков аналогичен алгоритму для первого порядка.

2. Метод решения

Выберем внутри области D некоторую точку $O(x_1^0; x_2^0)$ и в окрестности этой точки перейдем к полярной системе координат (ρ, θ) ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) с полюсом в точке

О по формулам $x_1 = x_1^0 + \rho \cos \theta$, $x_2 = x_2^0 + \rho \sin \theta$. Для упрощения записи будем считать $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$. В координатах (ρ, θ) кривая C задается уравнением

$$\rho = \rho_c(\theta, t) := \rho_0(\theta, t) + \varepsilon \rho_1(\theta, t). \quad (3)$$

Обозначим через $v_c = v_c(\theta, t, \varepsilon)$ значение v – компоненты решения задачи (1), (2) на кривой C в момент времени t . Будем искать $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ в виде суммы

$$v_c(\theta, t, \varepsilon) = v_0(\theta, t) + \varepsilon v_1(\theta, t). \quad (4)$$

Нулевой порядок функций $\rho_c(\theta, t, \varepsilon)$ и $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ определяется условием:

А3. Пусть система уравнений относительно v и ρ

$$\int_{v^{(-)}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)}^v h^{(-)}(v', \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) dv' + \int_v^{v^{+}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)} h^{(+)}(v', \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t) dv' = 0,$$

$$\int_{\varphi^{(-)}(v, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)}^{\varphi^{+}(v, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)} f(u, v, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t, 0) du = 0$$

имеет единственное периодическое решение $v = v_0(\theta, t)$, $\rho = \rho_0(\theta, t)$, ($0 \leq \theta < 2\pi$, $t \in (0; +\infty)$), причем функция $\rho_0(\theta, t)$ в каждый момент времени t определяет простую замкнутую гладкую кривую C_0 , лежащую внутри области D и справедливы неравенства

$$v^{(-)}(\rho_0(\theta, t) \cos \theta, \rho_0(\theta, t) \sin \theta, t) < v_0(\theta, t) < v^{(+)}(\rho_0(\theta, t) \cos \theta, \rho_0(\theta, t) \sin \theta, t).$$

Функции $\rho_1(\theta, t)$, $v_1(\theta, t)$ будут найдены в процессе построения асимптотического приближения решения первого порядка задачи (1)–(2). В дальнейшем с целью уменьшения громоздкости формул будем писать v_c вместо $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ и ρ_c вместо $\rho_c(\theta, t, \varepsilon)$.

Для описания поведения решения в переходном слое в достаточно малой окрестности кривой C вводятся локальные координаты (r, θ) . Величина $|r|$ является расстоянием от точки $x = (x_1, x_2)$ до кривой C вдоль нормали к ней, причем $r > 0$, если x лежит внутри области, ограниченной кривой C ; $r < 0$, если x лежит вне этой области; $r = 0$, если $x \in C$. Для точек, лежащих в достаточно малой окрестности кривой C , нормали, опущенные на кривую, не пересекаются. Таким образом в малой окрестности можно установить однозначное соответствие между координатами (x_1, x_2) и (r, θ) .

Переход от координат (x_1, x_2) к (r, θ) осуществляется по формулам:

$$x_1 = \rho_c(\theta, t) \cos \theta - r \cdot \sin \alpha, \quad x_2 = \rho_c(\theta, t) \sin \theta + r \cos \alpha,$$

где α – это угол между осью Ox_2 и внутренней нормалью к кривой C . Единичный вектор внутренней нормали к кривой C имеет координаты $\{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$, где

$$\sin \alpha(\theta, t) = \frac{\rho_{c\theta}(\theta, t) \sin \theta + \rho_c(\theta, t) \cos \theta}{\sqrt{\rho_{c\theta}(\theta, t)^2 + \rho_c(\theta, t)^2}}, \quad \cos \alpha(\theta, t) = \frac{\rho_{c\theta}(\theta, t) \cos \theta - \rho_c(\theta, t) \sin \theta}{\sqrt{\rho_{c\theta}(\theta, t)^2 + \rho_c(\theta, t)^2}}.$$

Вид асимптотики

Кривая C в каждый момент времени $t \in (0; +\infty)$ разделяет область \bar{D} на две подобласти \bar{D}^{in} и \bar{D}^{ex} . Область \bar{D}^{in} ограничена кривой C , а границей области \bar{D}^{ex} являются C и ∂D . Асимптотика решения задачи строится отдельно в каждой из областей \bar{D}^{in} и \bar{D}^{ex} :

$$u = \begin{cases} u^{in}(x, t), & (x, t) \in \bar{D}^{in} \times (0; +\infty), \\ u^{ex}(x, t), & (x, t) \in \bar{D}^{ex} \times (0; +\infty), \end{cases} \quad v = \begin{cases} v^{in}(x, t), & (x, t) \in \bar{D}^{in} \times (0; +\infty), \\ v^{ex}(x, t), & (x, t) \in \bar{D}^{ex} \times (0; +\infty). \end{cases}$$

Функции $u^{ex}(x, t)$, $u^{in}(x, t)$ вдали от кривой перехода C близки к функциям регулярной части $\bar{u}^{(-)}(x, t)$ и $\bar{u}^{(+)}(x, t)$. Эти функции представим суммами: $\bar{u}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, t)$. Около кривой перехода решение описывается функциями переходного слоя $Q^{(\pm)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}u(\xi, \theta, t) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}u(\xi, \theta, t)$ и $M^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon) = M_0^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t) + \varepsilon M_1^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$. В окрестности кривой C введены растянутые переменные $\xi = r/\varepsilon$ и $\sigma = r/\varepsilon^2$. Для v -компоненты функции $\bar{v}^{(\pm)}(x, t)$, $Q^{(\pm)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon)$, $M^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon)$ имеют аналогичный вид, за исключением того факта, что $M^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon) = M_0^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t) + \varepsilon M_1^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t) + \varepsilon^2 M_2^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t)$. Вблизи границы области D приближенное решение $u^{ex}(x, t)$ и $v^{ex}(x, t)$ описывается пограничными функциями $Pu(\zeta, l, t)$ и $Pv(\zeta, l, t)$ ((ζ, l) – локальные погранслои переменные в окрестности границы ∂D). Асимптотическое приближение решения первого порядка по параметру ε для каждой части u - и v -компонент представляется в виде сумм:

$$\begin{aligned} u^{ex} &= \bar{u}^{(-)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(-)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(-)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon) + \varepsilon Pu(\zeta, l, t), \\ u^{in} &= \bar{u}^{(+)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(+)}u(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(+)}u(\sigma, \theta, t, \varepsilon); \\ v^{ex} &= \bar{v}^{(-)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(-)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(-)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon) + \varepsilon Pv(\zeta, l, t), \\ v^{in} &= \bar{v}^{(+)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(+)}v(\xi, \theta, t, \varepsilon) + M^{(+)}v(\sigma, \theta, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения функций регулярной части и переходного слоя применяется алгоритм Васильевой (см. [1]) с соответствующей модификацией на системы уравнений ([3], [8]). Функции погранслоя определяются стандартно и не отличаются от стационарного случая, описанного в [8].

Асимптотические разложения u^{in} , u^{ex} и v^{in} и v^{ex} и их производные по направлению нормали к кривой C непрерывно сшиваются на этой кривой. Условия непрерывности асимптотических разложений для функций v и u имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) \Big|_{x \in C} + Q^{(\pm)}v(0, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)}v(0, \theta, t, \varepsilon) &= v_c(\theta, t, \varepsilon), \\ \bar{u}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) \Big|_{x \in C} + Q^{(\pm)}u(0, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)}u(0, \theta, t, \varepsilon) &= \varphi^0(v_c(\theta, t, \varepsilon), x, t) \Big|_{x \in C}, \end{aligned} \quad (6)$$

то есть кривая C определена условием $u(x, t) = \varphi^0(v_c, x, t)_{x \in C}$. Потребуем выполнения условия непрерывности производных функций $u^{ex}(x, t)$, $u^{in}(x, t)$ и $v^{ex}(x, t)$, $v^{in}(x, t)$:

$$\frac{\partial u^{ex}}{\partial n} \Big|_C = \frac{\partial u^{in}}{\partial n} \Big|_C, \quad \frac{\partial v^{ex}}{\partial n} \Big|_C = \frac{\partial v^{in}}{\partial n} \Big|_C. \quad (7)$$

3. Построение асимптотического приближения

3.1. Регулярная часть

Подставляя в исходную систему вместо u и v регулярную часть асимптотического приближения стандартным способом, описанным, например, в [8], получаем системы конечных уравнений для определения функций $\bar{u}(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$. Функции нулевого порядка $\bar{u}_0^{(\pm)}(x, t)$, $\bar{v}_0^{(\pm)}(x, t)$ определяются из вырожденной системы

$$\begin{cases} 0 = f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x, t), x, t, 0), \\ 0 = g(\bar{u}_0^{(\pm)}(x, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x, t), x, t, 0) \end{cases}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0^{(-)}(x, t) &= v^{(-)}(x, t); \quad \bar{v}_0^{(+)}(x, t) = v^{(+)}(x, t); \\ \bar{u}_0^{(-)}(x, t) &= \varphi^{(-)}(v^{(-)}(x, t), x, t); \quad \bar{u}_0^{(+)} = \varphi^{(+)}(v^{(+)}(x, t), x, t). \end{aligned}$$

Система уравнений для нахождения функций первого порядка $\bar{u}_1^{(\pm)}(x, t)$ и $\bar{v}_1^{(\pm)}(x, t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \bar{f}_u^{(\pm)}(x, t)\bar{u}_1^{(\pm)} + \bar{f}_v^{(\pm)}(x, t)\bar{v}_1^{(\pm)} - \bar{f}_\varepsilon^{(\pm)}(x, t) = 0; \\ \bar{g}_u^{(\pm)}(x, t)\bar{u}_1^{(\pm)} + \bar{g}_v^{(\pm)}(x, t)\bar{v}_1^{(\pm)} - \bar{g}_\varepsilon^{(\pm)}(x, t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения: $\bar{f}_u^{(\pm)}(x, t) = f_u(\bar{u}_0^{(\pm)}(x, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x, t), x, t, 0)$. И аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\pm)}(x, t)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(\pm)}(x, t)$, $\bar{g}_u^{(\pm)}(x, t)$, $\bar{g}_v^{(\pm)}(x, t)$, $\bar{g}_\varepsilon^{(\pm)}(x, t)$. Системы (8) разрешимы, так как определители систем не равны нулю по условиям (A1), (A2): $\Delta^{(\pm)} = \bar{f}_u^{(\pm)}(x, t) \cdot \bar{g}_v^{(\pm)}(x, t) - \bar{f}_v^{(\pm)}(x, t) \cdot \bar{g}_u^{(\pm)}(x, t) = \bar{f}_u^{(\pm)}(x, t) \cdot \bar{h}_v^{(\pm)}(x, t) \neq 0$.

Для упрощения записи будем обозначать функции $v(x, t)_{x \in C} = v(\rho_c \cos \theta - r \sin \alpha, \rho_c \sin \theta + r \cos \alpha, t)$ как $v(r, \rho_c, \theta, t)$ и аналогичные обозначения будем использовать для других функций векторной переменной $x = (x_1, x_2)$.

3.2. Функции переходного слоя

3.2.1. Пересчет оператора

Функции переходного слоя описывают поведение решения вблизи кривой перехода C и зависят от переменных ξ и σ . Перепишем исходный оператор задачи в этих переменных:

$$\Delta_{\xi, \theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot L_1 + \sum_{i=2} \varepsilon^{i-2} L_i; \quad \Delta_{\sigma, \theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^{i-3} N_i;$$

где L_i , N_i , $i \geq 1$ – дифференциальные операторы первого и второго порядка. В частности, оператор L_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} L_1 &= \rho_c \sin(\theta - \alpha)(\alpha_\theta + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\rho_c \rho_{ct}}{\sqrt{\rho_{c\theta}^2 + \rho_c^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} - \\ &- \left(\rho_{c\theta} \alpha_\theta \cos(\theta + \alpha) + \rho_{c\theta\theta} \sin(\theta - \alpha) + 2\rho_{c\theta} \cos(\theta - \alpha) \right) \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем систему уравнений для функций переходного слоя, используя операторы в новых переменных:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon^3 L_1 + \sum_{i=2} \varepsilon^{i+2} L_i\right) Q^{(\pm)} u &= Q^{(\pm)} f; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon L_1 + \sum_{i=2} \varepsilon^i L_i\right) Q^{(\pm)} v = Q^{(\pm)} g, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^{i+1} N_i\right) M^{(\pm)} u &= M^{(\pm)} f; \quad \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^{i-1} N_i\right) M^{(\pm)} v = M^{(\pm)} g. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} Q^{(\pm)} f &= f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} u, \bar{v}^{(\pm)}(\varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} v, \varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) - \\ &- f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon), \varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon), \\ M^{(\pm)} f &= f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} u(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)} u, \bar{v}^{(\pm)}(\varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + \\ &+ Q^{(\pm)} v(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon) + M^{(\pm)} v, \varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) - f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + \\ &+ Q^{(\pm)} u(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon), \bar{v}^{(\pm)}(\varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)} v(\varepsilon \sigma, \theta, t, \varepsilon), \varepsilon^2 \sigma, \rho_c, \theta, t, \varepsilon) \end{aligned}$$

и аналогичный смысл имеют обозначения $Q^{(\pm)} g$ и $M^{(\pm)} g$. Подробное описание этих функций было дано, например, в [8]. Под обозначением $\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon \xi, \rho_c, \theta, t, \varepsilon)$ подразумеваем $\bar{u}^{(\pm)}(\rho_c \cos \theta - \varepsilon \xi \sin \alpha, \rho_c \sin \theta + \varepsilon \xi \cos \alpha, t, \varepsilon)$, как было отмечено в конце пункта 3.1.

Уравнения для определения функций переходного слоя нулевого и первого порядка находятся приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях ε в равенствах (10). Граничные условия для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (6) в нулевом и первом порядках разложения по степеням ε (при этом функции v_c и ρ_c не раскладываются в суммы). Для всех функций переходного слоя выполняются условия равенства нулю на бесконечности:

$$\begin{aligned} Q_i^{(\pm)} u(\pm \infty, \theta, t) &= 0; \quad Q_i^{(\pm)} v(\pm \infty, \theta, t) = 0, \quad i = 0, 1; \\ M_i^{(\pm)} u(\pm \infty, \theta, t) &= 0; \quad M_i^{(\pm)} v(\pm \infty, \theta, t) = 0, \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (11)$$

3.2.2. Функции переходного слоя нулевого порядка

Функции $M_0^{(\pm)} v$ определяются из уравнений $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} M_0^{(\pm)} v = 0$, которые с учетом (11) имеют только тривиальные решения

$$M_0^{(\pm)} v(\sigma, \theta, t) = 0.$$

Функции $Q_0^{(\pm)} v$, $Q_0^{(\pm)} u$ определяются из систем уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)} v}{\partial \xi^2} &= g(\bar{u}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} u, \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} v, 0, \rho_c, \theta, t, 0), \\ 0 &= f(\bar{u}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} u, \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} v, 0, \rho_c, \theta, t, 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнений (12) с учетом условия A1 получаем уравнения для функций $Q_0^{(\pm)} u$:

$$\begin{aligned} Q_0^{(-)} u &= \varphi^{(-)}(\bar{v}_0^{(-)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(-)} v(\xi, \theta, t)) - \bar{u}_0^{(-)}(0, \rho_c, \theta, t); \\ Q_0^{(+)} u &= \varphi^{(+)}(\bar{v}_0^{(+)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(+)} v(\xi, \theta, t)) - \bar{u}_0^{(+)}(0, \rho_c, \theta, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив формулы (13) в уравнения (12), получаем задачи для нахождения функций $Q_0^{(\pm)}v$:

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}v}{\partial \xi^2} = h^{(\pm)}(\bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}v, 0, \rho_c, \theta, t) \quad (14)$$

с граничными условиями из (6) и (11):

$$Q_0^{(\pm)}v(0, \theta, t) = v_c - \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t), \quad Q_0^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0. \quad (15)$$

Задачу (14)–(15) можно свести к задаче для уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0^{(-)}v}{\partial \xi} &= \sqrt{2} \left(\int_{\bar{v}_0^{(-)}(0, \rho_c, \theta, t)}^{\bar{v}_0^{(-)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(-)}v} h^{(-)}(v, 0, \rho_c, \theta, t) dv \right)^{1/2}; \\ \frac{\partial Q_0^{(+)}v}{\partial \xi} &= \sqrt{2} \left(\int_{\bar{v}_0^{(+)}(0, \rho_c, \theta, t)}^{\bar{v}_0^{(+)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(+)}v} h^{(+)}(v, 0, \rho_c, \theta, t) dv \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (16)$$

с условием $Q_0^{(\pm)}v(0, \theta, t) = v_c - \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t)$.

Задачи для определения функций $M_0^{(\pm)}u$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 M_0^{(\pm)}u}{\partial \sigma^2} = f(\varphi^{(\pm)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0^{(\pm)}u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0), \quad (17)$$

$$M_0^{(\pm)}u(0, \theta, t) = \varphi^0(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) - Q_0^{(\pm)}u(0, \theta, t) - \bar{u}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t), \quad M_0^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0. \quad (18)$$

Переходим от уравнений (17) к уравнениям первого порядка с условиями при $\sigma = 0$ из (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0^{(-)}u}{\partial \sigma} &= \sqrt{2} \left(\int_{\varphi^{(-)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t)}^{\varphi^{(-)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0^{(-)}u} f(u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0) du \right)^{1/2}; \\ \frac{\partial M_0^{(+)}u}{\partial \sigma} &= \sqrt{2} \left(\int_{\varphi^{(+)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0^{(+)}u} f(u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0) du \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

3.2.3. Проверка условия гладкого сшивания в нулевом порядке

Заметим, что функции $Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t)$ и $M_0^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$, определяемые из задач (14)–(15) и (17)–(18), зависят от величин ρ_c и v_c как от параметров. Определим функции $\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \rho_c, v_c)$, $\Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t, \rho_c, v_c)$ соотношениями:

$$\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \rho_c, v_c) := \frac{\partial Q_0^{(\pm)}v}{\partial \xi}, \quad \Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t, \rho_c, v_c) := \frac{\partial M_0^{(\pm)}u}{\partial \sigma}. \quad (20)$$

Подставим в условия (7) непрерывности производных асимптотические приближения первого порядка, заданные как суммы функций регулярной части и переход-

ного слоя, используем обозначения (20) и запишем получившиеся равенства:

$$\begin{aligned}
 & (\Phi^{(-)}(0, \theta, t, \rho_c, v_c) - \Phi^{(+)}(0, \theta, t, \rho_c, v_c)) + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}^{(-)}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}^{(+)}}{\partial r} \right)_{r=0} + \\
 & \varepsilon \left(\frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} + \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial M^{(-)} v}{\partial \sigma} - \frac{\partial M^{(+)} v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = 0, \\
 & (\Psi^{(-)}(0, \theta, t, \rho_c, v_c) - \Psi^{(+)}(0, \theta, t, \rho_c, v_c)) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{u}^{(-)}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{u}^{(+)}}{\partial r} \right)_{r=0} + \\
 & \varepsilon \left(\frac{\partial Q^{(-)} u}{\partial \xi} - \frac{\partial Q^{(+)} u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} + \varepsilon \left(\frac{\partial M_1^{(-)} u}{\partial \sigma} - \frac{\partial M_1^{(+)} u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Запишем условия (21) в нулевом порядке по ε , учитывая разложения функций ρ_c и v_c в суммы (3) и (4):

$$\Phi^{(-)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) = \Phi^{(+)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0), \quad \Psi^{(-)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) = \Psi^{(+)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0). \tag{22}$$

Если подставить в эти равенства явные выражения (16), (19) для функций $\Phi^{(\pm)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0)$ и $\Psi^{(\pm)}(0, \theta, t, \rho_0, v_0)$ и домножить каждое уравнение на сопряженное, то получим систему равенств, совпадающую с системой из условия АЗ. Таким образом, условия сшивания производных асимптотических разложений в нулевом порядке выполнены в силу условия АЗ.

3.2.4. Функции переходного слоя первого порядка

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}^{(\pm)}(\xi, \theta, t) &= f(\bar{u}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} u(\xi, t), \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} v(\xi, t), 0, \rho_c, \theta, t, 0), \\
 \hat{f}^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) &= f(\varphi^{(\pm)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0^{(\pm)} u(\sigma, \theta, t), v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0), \\
 \tilde{h}^{(\pm)}(\xi, \theta, t) &= h(\bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} v(\xi, \theta, t), 0, \rho_c, \theta, t), \\
 \tilde{\varphi}^{(\pm)}(\xi, \theta, t) &= \varphi^{(\pm)}(\bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)} v(\xi, \theta, t), 0, \rho_c, \theta, t), \\
 \bar{\varphi}^{(\pm)}(\theta, t) &= \varphi^{(\pm)}(\bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t), 0, \rho_c, \theta, t).
 \end{aligned}$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\tilde{g}^{(\pm)}(\xi, \theta, t)$ и $\hat{g}^{(\pm)}(\sigma, \theta, t)$.

Функции $M_1^{(\pm)} v(\sigma, \theta, t)$ получаются из задач: $\frac{\partial^2 M_1^{(\pm)} v}{\partial \sigma^2} = 0$, $M_1^{(\pm)} v(\pm\infty, \theta, t) = 0$, которые имеют только тривиальные решения

$$M_1^{(\pm)} v(\sigma, \theta, t) = 0.$$

Уравнения для функций $Q_1^{(\pm)} v(\xi, \theta, t)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} Q_1^{(\pm)} v - \tilde{h}_v^{(\pm)}(\xi, \theta, t) \cdot Q_1^{(\pm)} v = -L_1 \cdot Q_0^{(\pm)} v + G_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t), \tag{23}$$

где L_1 – оператор, определенный выражением (9), а функция $G_1(\xi, \theta, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t) &= \tilde{h}_v^{(\pm)}(\xi, \theta, t) \cdot \bar{v}_1^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) - \frac{d\tilde{h}^{(\pm)}}{dx_1}(\xi, \theta, t) \cdot \xi \sin \alpha + \\
 & \frac{d\tilde{h}^{(\pm)}}{dx_2}(\xi, \theta, t) \cdot \xi \cos \alpha + \tilde{g}_\varepsilon^{(\pm)}(\xi, \theta, t) - \tilde{g}_u^{(\pm)}(\xi, \theta, t) \cdot \frac{\tilde{f}_\varepsilon^{(\pm)}(\xi, \theta, t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi, \theta, t)},
 \end{aligned}$$

где через $d\tilde{h}^{(\pm)}/dx_i$, $i = 1, 2$ обозначена полная производная функции $\tilde{h}^{(\pm)}(\xi, \theta, t)$ по x_i : $d\tilde{h}^{(\pm)}/dx_i = \tilde{h}_{x_i}^{(\pm)} + \tilde{h}_v^{(\pm)} \cdot v_{x_i}^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t)$, $i = 1, 2$.

Уравнения (23) решаются с условиями на бесконечности и граничными условиями при $\xi = 0$:

$$Q_1^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}v(0, \theta, t) + \bar{v}_1^{(\pm)}(r, \rho_c, \theta, t)|_{r=0} = 0. \quad (24)$$

Решения уравнений (23) с условиями (24) имеют вид

$$Q_1^{(\pm)}v(\xi, \theta, t) = -\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t)(\Phi^{(\pm)}(0, \theta, t))^{-1}\bar{v}_1^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + \\ + \Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t) \int_0^\xi (\Phi^{(\pm)}(\xi_1, \theta, t))^{-2} d\xi_1 \int_{\pm\infty}^{\xi_1} \Phi^{(\pm)}(\xi_2, \theta, t)(G_1^{(\pm)}(\xi_2, \theta, t) - L_1 Q_0^{(\pm)}v(\xi_2, \theta, t)) d\xi_2,$$

где функции $\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t)$ определены равенствами (20) (для сокращения записи зависимость от параметров ρ_c и v_c не указана).

Функции $Q_1^{(\pm)}u$ определяются из уравнений

$$Q_1^{(\pm)}u(\xi, t) + \bar{u}_1^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) = \tilde{\varphi}^{(\pm)}(\xi, \theta, t) \left(Q_1^{(\pm)}v(\xi, \theta, t) + \bar{v}_1^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) \right) + q_{1u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t), \quad (25)$$

где функции $q_{1u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t)$ задаются выражениями

$$q_{1u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t) = -\frac{\tilde{f}_\varepsilon^{(\pm)}(\xi, \theta, t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi, \theta, t)} + \left(\frac{d\tilde{\varphi}^{(\pm)}}{dx_1}(\xi, \theta, t) - \frac{d\bar{\varphi}^{(\pm)}}{dx_1}(\xi, \theta, t) \right) (-\xi \sin \alpha) + \\ + \left(\frac{d\tilde{\varphi}^{(\pm)}}{dx_2}(\xi, \theta, t) - \frac{d\bar{\varphi}^{(\pm)}}{dx_2}(\xi, \theta, t) \right) \xi \cos \alpha.$$

Уравнения для функций $M_1^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$ запишем в виде

$$\frac{\partial^2 M_1^{(\pm)}u}{\partial \sigma^2} - \hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) \cdot M_1^{(\pm)}u = F_1^{(\pm)}(\sigma, \theta, t), \quad (26)$$

где

$$F_1^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) = \left(\hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) \cdot \tilde{\varphi}_v^{(\pm)}(0, \theta, t) + \hat{f}_v^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) \right) \Phi^{(\pm)}(0, \theta, t) \sigma - \\ - \hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) \tilde{f}_\varepsilon^{(\pm)}(0, \theta, t) \left(\tilde{f}_u^{(\pm)}(0, \theta, t) \right)^{-1} + \hat{f}_\varepsilon^{(\pm)}(\sigma, \theta, t).$$

Условия на бесконечности к уравнениям (26) получим из (11), а начальные условия при $\sigma = 0$ – из (6):

$$M_1^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0, \quad \bar{u}_1^{(\pm)}(r, \rho_c, \theta, t)|_{r=0} + Q_1^{(\pm)}u(0, \theta, t) + M_1^{(\pm)}u(0, \theta, t) = 0.$$

Учитывая выражение (25) для функции $Q_1^{(\pm)}u(\xi, \theta, t)$ при $\xi = 0$, начальные условия можно записать в виде:

$$M_1^{(\pm)}u(0, \theta, t) = \tilde{f}_\varepsilon^{(\pm)}(0, \theta, t) \left(\tilde{f}_u^{(\pm)}(0, \theta, t) \right)^{-1}. \quad (27)$$

Выпишем решения уравнений (26) с условиями (27) и нулевыми условиями на бесконечности:

$$M_1^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t) = \Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t)(\Psi^{(\pm)}(0, \theta, t))^{-1}\tilde{f}_\varepsilon(0, \theta, t) \left(\tilde{f}_u(0, \theta, t)\right)^{-1} + \\ + \Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t) \int_0^\sigma (\Psi^{(\pm)}(\sigma_1, \theta, t))^{-2} d\sigma_1 \int_{\pm\infty}^{\sigma_1} \Psi^{(\pm)}(\sigma_2, \theta, t) F_1^{(\pm)}(\sigma_2, \theta, t) d\sigma_2,$$

где функции $\Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t)$ определены формулами (20).

Функции $M_2^{(\pm)}v(\sigma, \theta, t)$ определяются из задач

$$\frac{\partial M_2^{(\pm)}v}{\partial \sigma} = g(\varphi^{(\pm)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0u(\sigma, \theta, t), v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0) - \tilde{h}^{(\pm)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t), \\ M_2^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0.$$

3.2.5. Локализация переходного слоя в первом порядке

Из равенств (7), раскладывая ρ_c и v_c в ряды (3) и (4), в первом порядке по ε получим

$$\rho_1 \frac{\partial (\Phi^{(-)} - \Phi^{(+)})}{\partial \rho_c}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) + v_1 \frac{\partial (\Phi^{(-)} - \Phi^{(+)})}{\partial v_c}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) + \\ + \left(\frac{\partial \bar{v}_0^{(-)}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}_0^{(+)}}{\partial r} \right)_{r=0, \rho_c=\rho_0} + \left(\frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial \xi} \right)_{\xi=0, \rho_c=\rho_0, v_c=v_0} + \\ + \left(\frac{\partial M_2^{(-)}v}{\partial \sigma} - \frac{\partial M_2^{(+)}v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0, \rho_c=\rho_0, v_c=v_0} = 0, \quad (28)$$

$$\rho_1 \frac{\partial (\Psi^{(-)} - \Psi^{(+)})}{\partial \rho_c}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) + v_1 \frac{\partial (\Psi^{(-)} - \Psi^{(+)})}{\partial v_c}(0, \theta, t, \rho_0, v_0) + \\ + \left(\frac{\partial Q_0^{(-)}u}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(+)}u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0, \rho_c=\rho_0, v_c=v_0} + \left(\frac{\partial M_1^{(-)}u}{\partial \sigma} - \frac{\partial M_1^{(+)}u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0, \rho_c=\rho_0, v_c=v_0} = 0. \quad (29)$$

Определитель системы отличен от нуля в силу условия А3, поэтому из (28), (29) однозначно определяются функции $\rho_1(\theta, t)$ и $v_1(\theta, t)$.

Найдены все слагаемые сумм (5), и получено асимптотическое приближение решения задачи (1)–(2) первого порядка. Обоснование асимптотики может быть проведено по методу дифференциальных неравенств, как это сделано в работе [8]. Метод дифференциальных неравенств в данном случае предполагает построение верхнего и нижнего решений задачи на основе асимптотики.

Список литературы / References

- [1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, Москва, 1990; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnikh vozmuchenii*, Vysh. shkola, Moscow, 1990, (in Russian)]

- [2] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546.
 - [3] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations”, *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.
 - [4] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Ягремцев А. В., “Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:3 (2013), 365–376; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Yagremtsev A. V., “Contrast structures in the reaction–diffusion–advection equations in the case of balanced advection”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:3 (2013), 273–283.
 - [5] Nefedov N. N., Recke L., Schnieder K. R., “Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction–advection–diffusion equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**:1 (2013), 90–103.
 - [6] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О., “Стационарное уравнение реакции–диффузии с разрывным реактивным членом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:5 (2017), 854–866; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O., “Time-independent reaction–diffusion equation with a discontinuous reactive term”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:5 (2017), 854–866.
 - [7] Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция–диффузия”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:3 (2017), 259–279; [Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., “Moving front solution of the reaction-diffusion problem”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **24**:3 (2017), 259–279, (in Russian)].
 - [8] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:9 (2013), 1427–1447; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **53**:9 (2013), 1239–1259.
 - [9] Levashova N., Melnikova A., Semina A., Sidorova A., “Autowave mechanisms of structure formation in urban ecosystems as the process of self-organization in active media”, *Communication on Applied Mathematics and Computation*, **31**:1 (2017), 32–42.
 - [10] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. и др., “Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах”, *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 2016, №6, 39–45; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A. et al., “Autowave self-organization in heterogeneous natural–anthropogenic ecosystems”, *Moscow University Physics Bulletin*, **71**:6 (2016), 562–568.
 - [11] Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D., “Front Dynamics in an Activator-Inhibitor System of Equations”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 492–499.
 - [12] Levashova N., Muhartova J., Davydova M., “The Use of Contrast Structures Theory for the Mathematical Modelling of the Wind Field in Spatially Heterogeneous Vegetation Cover”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 464–472.
 - [13] Murray J., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer–Verlag, New York, 2003.
-

Melnikova A. A., Deryugina N. N., "Periodic Variations of an Autowave Structure in Two-dimensional System of Parabolic Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 112–124.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-112-124

Abstract. The work is aimed to study front solutions of a nonlinear system of parabolic equations in a two-dimensional region. The system can be considered as a mathematical model describing an abrupt change in physical characteristics of spatially heterogeneous media. We consider a system with small parameters raised to the different powers at a differential operator, that represents the difference of typical processes speeds for the system components. The study of the system is conducted by using the contrast structures theory methods, which allowed us to obtain conditions for the existence of front solutions contained in the neighborhood of a closed curve, to determine the front velocity depending on time and coordinate along the front curve, and to obtain the zero-order and the first-order terms of the asymptotic approximation to the solution. The scope of the system includes the description of autowave solutions in the field of ecology, biophysics, combustion physics and chemical kinetics. The approximate solution allows us to choose the model parameters so that the result corresponds to the processes observed, to explain and describe the characteristics of the solutions with sharp gradients, to create models with stable solutions and thereby to simplify the numerical analysis. Note that the numerical experiment for the two-dimensional spatial models requires a considerable amount of processing power and the use of parallel computing techniques and does not allow to effectively analyze and modify the model. In this paper, we obtain the asymptotic approximation that is to be justified, which can be done by the method of differential inequalities.

Keywords: singular perturbations, urbo ecosystem, autowave solution, internal transition layer, reaction-diffusion system

On the authors:

Alina A. Melnikova, [orcid.org//0000-0001-9019-0263](https://orcid.org/0000-0001-9019-0263), PhD,
Moscow Lomonosov State University, Physical Faculty, GSP-1, 1–2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation,
e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Natalia N. Deryugina, orcid.org/0000-0002-7804-3065, graduate student,
Moscow Lomonosov State University, Physical Faculty, GSP-1, 1–2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation,
e-mail: derunat@gmail.com

Acknowledgments:

This study was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research projects No. 16-01-00437, 18-31-00204, 18-01-00424, 18-01-00865.

©Нефедов Н. Н., Никулин Е.И., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-125-132

УДК 519

Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией

Нефедов Н. Н., Никулин Е.И.

получена 20 ноября 2017

Аннотация. Исследована сингулярно возмущенная периодическая по времени задача для параболического уравнения реакция-адвекция-диффузия со слабой линейной адвекцией. Рассмотрен случай реактивного члена в виде кубической нелинейности. На основе уже известных результатов исследуется более общая постановка задачи, причем предоставляются более слабые достаточные условия для существования решения с внутренним переходным слоем, чем в предыдущих работах. Для удобства приводятся уже известные результаты, обеспечивающие выполнение теоремы существования контрастной структуры. Обоснование существования решения с внутренним переходным слоем базируется на использовании асимптотического метода дифференциальных неравенств, основанного на модификации членов построенного асимптотического разложения. Далее устанавливаются достаточные условия для выполнения указанных требований, причем они имеют простые и лаконичные формулировки в виде алгебраического уравнения $w(x_0, t) = 0$ и условия $w_x(x_0, t) < 0$, по существу являющегося условием того, что корень $x_0(t)$ простой, и обеспечивающего устойчивость найденного решения. Функция w является функцией от известных функций, фигурирующих в реактивном и адвективном членах исходной задачи. Уравнение $w(x_0, t) = 0$ представляет собой задачу для нахождения нулевого приближения $x_0(t)$ для определения области локализации внутреннего переходного слоя. Кроме того, исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову найденного периодического решения, основанная на применении метода так называемых сжимающихся барьеров. Основной результат работы сформулирован в виде теоремы.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические задачи, периодические задачи, слабая адвекция, уравнения реакция-адвекция-диффузия, контрастные структуры, внутренние слои, фронты, асимптотические методы, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову

Для цитирования: Нефедов Н. Н., Никулин Е.И., "Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 125–132.

Об авторах: Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Никулин Егор Игоревич, orcid.org/0000-0003-3850-4960, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную периодическую по времени задачу для параболического уравнения реакция-адвекция-диффузия в случае слабой линейной адвекции

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \varepsilon a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - r(x, t)(u - \varphi(x, t))(u^2 - 1) &= 0, \\ r(x, t) > 0, \quad |\varphi(x, t)| < 1, \\ (x, t) \in D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t, \varepsilon) = -1, \quad u(1, t, \varepsilon) = 1 \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $r(x, t), a(x, t), \varphi(x, t)$ – достаточно гладкие T -периодические по t функции, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Эта задача является важным классом задач, рассмотренных в [1]. Для нее удастся сформулировать достаточные условия существования и асимптотической устойчивости решения в терминах исходных данных. Отметим, что такие задачи используются в качестве математических моделей в различных приложениях.

Аналогичная задача исследовалась в работе [3] (см. пример 3.2), в которой рассматривался случай, когда $r(x, t) \equiv 1$, а коэффициент адвекции положителен и зависит только от времени. В этой работе было доказано лишь существование решения с переходным слоем. Примененный подход не позволяет исследовать устойчивость решения и построить его асимптотику. В настоящей работе на основе результатов [1] исследуется более общая постановка задачи, причем формулируются более слабые достаточные условия существования решения с внутренним переходным слоем. Кроме того, исследуется вопрос об асимптотической устойчивости такого решения, при этом применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

2. Предположения

В работе [1] исследовалась следующая задача:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, u, x, t\right) &= 0, \\ (x, t) \in D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t, \varepsilon) = u^1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = u^2(t) \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где f, u^1, u^2 – достаточно гладкие периодические по t функции, а ε – малый параметр.

Приведем условия из [1], выполнение которых, согласно **Теореме 3.1** из этой работы, обеспечивает существование устойчивого по Ляпунову решения с внутренним переходным слоем.

(A1) Вырожденное уравнение $f(0, u, x, t)$ имеет ровно 3 корня $\varphi^{(-)}(x, t)$, $\varphi^{(0)}(x, t)$, $\varphi^{(+)}(x, t)$, кроме того, $\varphi^{(-)}(x, t) < \varphi^{(0)}(x, t) < \varphi^{(+)}(x, t)$, $f_u(0, \varphi^{(\pm)}, x, t) > 0$, $f_u(0, \varphi^{(0)}, x, t) < 0$, $(x, t) \in \bar{D}$.

Далее нам потребуется ввести так называемую присоединенную систему для уравнения (1):

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = f(\tilde{v}, \tilde{u}, x, t), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (3)$$

Условие (A1) означает, что на фазовой плоскости (\tilde{u}, \tilde{v}) присоединенной системы есть две точки покоя $(\varphi^{(-)}(x, t), 0)$ и $(\varphi^{(+)}(x, t), 0)$, причем поведение фазовых траекторий вблизи каждой из них такое же, как в случае точки покоя типа седло. Вне малой окрестности этих точек покоя поведение сепаратрис определяется следующими требованиями.

(A2) Для любого $(x, t) \in D$ сепаратриса, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}(x, t), 0)$, может быть представлена в виде $\tilde{v} = \tilde{v}^-(\xi, t, x)$, $\tilde{u} = \tilde{u}^-(\xi, t, x)$ и пересекает прямую $u = \varphi^{(0)}(x, t)$; кроме того, точка пересечения соответствует значению $\xi = 0$, а седло соответствует значению $\xi = -\infty$. Сепаратриса, входящая в седло $(\varphi^{(+)}(x, t), 0)$, может быть представлена в виде $\tilde{v} = \tilde{v}^+(\xi, t, x)$, $\tilde{u} = \tilde{u}^+(\xi, t, x)$ и пересекает прямую $u = \varphi^{(0)}(x, t)$, точка пересечения соответствует значению $\xi = 0$, и седло соответствует $\xi = \infty$. При этом $\tilde{v}^{\pm}(\xi, t, x) \neq 0$.

Таким образом,

$$\tilde{u}^{\pm}(0, x, t) = \varphi^{(0)}(x, t), \quad (4)$$

и сепаратрисы описываются уравнением (3), удовлетворяют граничному условию (4) и условиям на бесконечности:

$$\tilde{u}^{\pm}(\pm\infty, x, t) = \varphi^{(\pm)}(x, t), \quad \tilde{v}^{\pm}(\pm\infty, x, t) = 0. \quad (5)$$

Без ограничения общности предположим, что сепаратрисы лежат в верхней полуплоскости. Для каждого $(x, t) \in (-1; +1) \times R$ определим функцию

$$H(x, t) := \tilde{v}^+(0, t, x) - \tilde{v}^-(0, t, x), \quad (6)$$

где $\tilde{v}^{\pm}(\xi, t, x)$ являются решениями системы (3), удовлетворяющими условиям (5).

(A3) Уравнение $H(x, t) = 0$ имеет T -периодическое решение $x = x_0(t)$, $-1 < x_0(t) < 1$, кроме того, $\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} > 0$, $t \in R$.

Из условия (A3) следует, что существует сепаратриса, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}(x_0, t), 0)$ и входящая в седло $(\varphi^{(+)}(x_0, t), 0)$. Это условие обеспечивает разрешимость краевых задач, которые используются для описания внутреннего слоя в нулевом приближении.

Замечание 1. Как видно из схемы доказательства Теоремы 3.1 из [1], результат ее остается справедливым, если потребовать выполнение условия (A2) для x , лежащих в некоторой δ -окрестности кривой $x_0(t)$, а не на всем интервале $(-1; 1)$.

Заметим, что мы предположили, что сепаратриса лежит в верхней полуплоскости. Требование $\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} > 0$ исключает случай, когда корень $x_0(t)$ – кратный, а также случай ветвления при $x = x_0(t)$. Это требование позволяет доказать теорему существования для устойчивого решения. Нам также необходимо требование,

чтобы граничные условия принадлежали области влияния устойчивых решений вырожденного уравнения.

(A4) На фазовой плоскости системы

$$\frac{\partial v}{\partial \tau^-} = f(v, u, -1, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau^-} = v, \quad \tau^- > 0,$$

t – параметр, линия $u = u^{(-)}(t)$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $\varphi^-(-1, t)$ as $\tau^- \rightarrow \infty$ при $\tau^- \rightarrow \infty$. Для седла $\varphi^+(1, t)$ требуется абсолютно аналогичное условие.

Условие (A4) используется для построения асимптотики решения в окрестности граничных точек $x = -1$, $x = 1$.

(A5) Функция $f(v, u, x, t)$ имеет не более чем квадратичный рост по переменной v в рассматриваемой области.

3. Достаточные условия

Получим достаточные условия, при которых выполнены требования (A1)–(A5).

Присоединенная система для задачи (1) выглядит так:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = a(x, t)\tilde{v} + r(x, t)(u - \varphi(x, t))(u^2 - 1), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (7)$$

Условия (A1), (A4) и (A5), очевидно, выполнены. Остановимся подробнее на условиях (A2) и (A3).

Отметим, что аналитически получить решение задачи (7), (4), (5) при произвольном x не удастся. По этой причине функцию $H(x, t)$ в явном виде найти не предоставляется возможным. Однако оказывается, что сепаратрису, при некотором $x = x_0(t)$ соединяющую седла $S1(-1, 0)$ и $S3(1, 0)$ на фазовой плоскости (\tilde{u}, \tilde{v}) , можно найти в виде параболы $\tilde{v} = \lambda(t)(\tilde{u}^2 - 1)$.

Действительно, подставляя функцию \tilde{v} в таком виде в уравнение (3), получим

$$\left(2\lambda - \frac{r(x, t)}{\lambda}\right)\tilde{u} = a(x, t) - \frac{r(x, t)\varphi(x, t)}{\lambda}. \quad (8)$$

Если левая и правая части последнего равенства будут тождественно равны нулю для любых $\tilde{u} \in [-1; 1]$, то сепаратрису в форме параболы существует. Введем функцию

$$w(x, t) := a(x, t) + \varphi(x, t)\sqrt{2r(x, t)}. \quad (9)$$

Тогда, принимая во внимание то, что мы рассматриваем верхнюю полуплоскость, получим следующее выражение для λ :

$$\lambda(t) = -\sqrt{\frac{r(x_0(t), t)}{2}}, \quad (10)$$

а уравнение для определения $x_0(t)$ имеет вид

$$w(x_0, t) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, условие (A3), являющееся условием существования соединительной сепаратрисы между седлами $S1(-1, 0)$ и $S3(1, 0)$, сводится к условию разрешимости уравнения (11) в интервале $-1 < x_0 < 1$. В силу известной теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра, решение системы существует в достаточно малой окрестности кривой $x_0(t)$, т. е. условие (A2) с учетом **Замечания (1)** выполнено.

Теперь найдем достаточные условия выполнения условия $\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} > 0, t \in R$. Согласно [2] справедливо представление для функции $\frac{\partial H}{\partial x}$ в явном виде:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} = -\frac{1}{\tilde{v}(0, x_0, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\tilde{v}(\eta, x_0, t), \tilde{u}(\eta, x_0, t), x_0, t) \times \exp(-a(x_0, t)\eta) \tilde{v}(\eta, x_0, t) d\eta. \quad (12)$$

Для сокращения записи ниже в формулах (13) – (17), где это не указано явно, будем считать, что значение всех функций, зависящих от x , берется при аргументе $x = x_0(t)$. Сделаем преобразования:

$$\begin{aligned} f_x(\tilde{v}(\eta, x_0, t), \tilde{u}(\eta, x_0, t), x_0, t) &= a_x \tilde{v} + r_x (\tilde{u}^2 - 1) (\tilde{u} - \varphi) - \varphi_x r (\tilde{u}^2 - 1) \\ &= \tilde{v} \left(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \frac{(\tilde{u} - \varphi) r_x}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Можно показать, что решение \tilde{u} задачи (7) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi, x_0, t) = \frac{C \exp(-2\lambda\xi) - 1}{C \exp(-2\lambda\xi) + 1}, \quad C = \frac{1 + \varphi(x_0, t)}{1 - \varphi(x_0, t)}. \quad (14)$$

Выразим ξ из (14)

$$\xi = -\ln \left[\frac{1 + \tilde{u}}{1 - \tilde{u}} \frac{1 - \varphi(x_0, t)}{1 + \varphi(x_0, t)} \right]^{\frac{1}{2\lambda}}. \quad (15)$$

Подставим (13), (15) в (12) и перейдем к новой переменной интегрирования u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} &= -\frac{1}{\tilde{v}(0, x_0, t)} \int_{-1}^{+1} \lambda (u^2 - 1) \left(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \right. \\ &\left. \frac{(u - \varphi) r_x}{\lambda} \right) \exp \left[a \ln \left[\frac{1 + u}{1 - u} \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \right]^{\frac{1}{2\lambda}} \right] du \\ &= \left[\frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \right]^{\frac{a}{2\lambda}} \frac{\lambda}{\tilde{v}(0, x_0, t)} \int_{-1}^{+1} (u^2 - 1) \left(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \frac{(u - \varphi) r_x}{\lambda} \right) \left[\frac{1 + u}{1 - u} \right]^{\frac{a}{2\lambda}} du \\ &= \left[\frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \right]^{\frac{a}{2\lambda}} \frac{\lambda}{\tilde{v}(0, x_0, t)} \left[\left(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} - \frac{\varphi r_x}{\lambda} \right) I_0 + \frac{r_x}{\lambda} I_1 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $I_0 := \int_{-1}^{+1} (1 + u)^{1+\varphi} (1 - u)^{1-\varphi} du > 0$, $I_1 := \int_{-1}^{+1} (1 + u)^{1+\varphi} (1 - u)^{1-\varphi} u du$. Здесь мы использовали тот факт, что, согласно (11), $\varphi = \frac{a}{2\lambda}$. Вычисления дают, что $I_1 = \frac{\varphi}{2} I_0$, откуда, после преобразований, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x_0(t)} = \left[\frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \right]^{\varphi} \frac{\lambda}{\tilde{v}(0, x_0, t)} \left[a_x + \sqrt{2r} \varphi_x - \frac{\varphi r_x}{\sqrt{2r}} \right] I_0. \quad (17)$$

Заметим, что $w_x(x_0, t) = a_x + \sqrt{2r}\varphi_x - \frac{\varphi r_x}{\sqrt{2r}}$ стоит как множитель в правой части равенства (17) и, таким образом, определяет знак производной $\frac{\partial H}{\partial x}|_{x=x_0(t)}$. Следовательно, для того чтобы имело место неравенство из (A3), достаточно потребовать выполнения условия

$$w_x(x_0(t), t) < 0, \quad t \in R. \quad (18)$$

4. Существование и асимптотическая устойчивость решения

Из работы [1] следует, что решение задачи (1) существует, а его асимптотика, построенная по алгоритму работы [1] $Y_n(x, t, \varepsilon)$, где для построения приближения кривой локализации внутреннего слоя используется оператор $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0(t))$, приближает решение задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Исследование асимптотической устойчивости по Ляпунову для периодического решения с внутренним переходным слоем задачи (1) может быть проведено аналогично работам [5], [4].

Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(v) &:= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \varepsilon a(x, t, \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x} - r(x, t)(u - \varphi(x, t))(u^2 - 1) = 0, \\ (x, t) \in D_{t_+} &:= \{(x, t) \in R^2 : -1 < x < 1, 0 < t < \infty\}, \\ v(-1, t, \varepsilon) &= -1, \quad v(1, t, \varepsilon) = 1, \quad 0 < t < \infty, \\ v(x, 0, \varepsilon) &= v^0(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что если $v^0(x, \varepsilon) = u(x, 0, \varepsilon)$, где $u(x, t, \varepsilon)$ – решение периодической задачи (1), то и задача (19) имеет решение $v(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Пусть α_n, β_n – соответственно периодические нижнее и верхнее решения, соответствующие задаче (1), построенные по алгоритму работы [1] (путем модификации асимптотики $Y_n(x, t, \varepsilon)$). Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (19) в виде $\alpha(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))$, $\beta(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))$, где $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что $\alpha < \beta$, поэтому для выполнения вышеупомянутой теоремы достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Выражение для $N_\varepsilon\beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций f, f_u опущены, кроме первого):

$$\begin{aligned} N_\varepsilon\beta &= e^{-\lambda t} \left\{ \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial x^2} \right) - \varepsilon a \frac{\partial \beta_n}{\partial x} - f(\beta_n) \right] + \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial x} - f(u) \right] \right. \\ &\quad \left. + [f(\beta_n) - f(u) - f_u^* \cdot (\beta_n - u)] + \varepsilon^2 \lambda (\beta_n - u) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $f(u, x, t) := r(x, t)(u - \varphi(x, t))(u^2 - 1)$, символ “*” справа от функций означает, что их значение берется при аргументе $u(x, t, \varepsilon) + \theta e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))$, $0 <$

$\theta < 1$. Используя то, что $(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{n+1})$, и выбирая $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$, а γ достаточно большим, можно показать, что $N_\varepsilon \beta < 0$ при $n \geq 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon \alpha > 0$. Итак, найденное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0, \beta_0]$. Ширина области устойчивости при этом составляет $O(\varepsilon^1)$.

5. Основной результат

Подводя итог рассуждениям пунктов 3 и 4, можно сформулировать следующую теорему, являющуюся основным результатом данной работы.

Теорема 1. Пусть $r > 0$, φ , a – T -периодические по t достаточно гладкие в рассматриваемой области функции, а уравнение $w(x_0, t) = 0$ имеет решение $-1 < x_0(t) < 1$, такое, что $w_x(x_0(t), t) < 0$. Тогда для достаточно малых ε существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), являющееся периодической контрастной структурой типа ступенька, имеющее внутренний переходный слой вблизи кривой $x_0(t)$ и близкое к корням -1 и $+1$ соответственно слева и справа вдали от $x_0(t)$. Решение $u(x, t, \varepsilon)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$, имеющей ширину порядка $O(\varepsilon^1)$. Как следствие, $u(x, t, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (1) в этой области.

Список литературы / References

- [1] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., “Периодические контрастные структуры в системах типа реакция-диффузия-адвекция”, *Дифференциальные уравнения*, **46**:9 (2010), 1300–1312; English transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., “Periodic contrast structures in systems of the reaction-diffusion-advection type”, *Differential Equations*, **46**:9 (2010), 1309–1321.
- [2] Васильева А. Б., Давыдова М. А., “О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **38**:6 (1998), 938–947; English transl.: Vasil’eva A. B., Davydova M. A., “On a contrast step-like structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **38**:6 (1998), 900–909.
- [3] Васильева А. Б., “О периодических решениях параболической задачи с малым параметром при производных”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:7 (2003), 975–986; English transl.: Vasil’eva A. B., “Periodic solutions of a parabolic problem with a small parameter at the derivatives”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **43**:7 (2003), 932–944.
- [4] Nefedov N. N., Nikulin E. I., “Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **22**:2 (2015), 215–226.
- [5] Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., “Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности”, *Дифференциальные уравнения*, **53**:4 (2017), 524–537; English transl.: Nefedov N. N., Nikulin E. I. “Existence and Stability of Periodic Contrast Structures in the Reaction–Advection–Diffusion Problem in the Case of a Balanced Nonlinearity”, *Differential equations*, **53**:4 (2017), 516–529.

Nefedov N. N., Nikulin E. I., "Existence and Stability of the Periodic Solution with an Interior Transitional Layer in the Problem with a Weak Linear Advection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 125–132.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-125-132

Abstract. In the paper, we study a singularly perturbed periodic in time problem for the parabolic reaction-advection-diffusion equation with a weak linear advection. The case of the reactive term in the form of a cubic nonlinearity is considered. On the basis of already known results, a more general formulation of the problem is investigated, with weaker sufficient conditions for the existence of a solution with an internal transition layer to be provided than in previous studies. For convenience, the known results are given, which ensure the fulfillment of the existence theorem of the contrast structure. The justification for the existence of a solution with an internal transition layer is based on the use of an asymptotic method of differential inequalities based on the modification of the terms of the constructed asymptotic expansion. Further, sufficient conditions are established to fulfill these requirements, and they have simple and concise formulations in the form of the algebraic equation $w(x_0, t) = 0$ and the condition $w_x(x_0, t) < 0$, which is essentially a condition of simplicity of the root $x_0(t)$ and ensuring the stability of the solution found. The function w is a function of the known functions appearing in the reactive and advective terms of the original problem. The equation $w(x_0, t) = 0$ is a problem for finding the zero approximation $x_0(t)$ to determine the localization region of the inner transition layer. In addition, the asymptotic Lyapunov stability of the found periodic solution is investigated, based on the application of the so-called compressible barrier method. The main result of the paper is formulated as a theorem.

Keywords: singularly perturbed parabolic problems, periodic problems, weak advection, reaction-advection-diffusion equations, contrast structures, internal layers, fronts, asymptotic methods, differential inequalities, Lyapunov asymptotical stability

On the authors:

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, Dr., Professor
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Egor Ig. Nikulin, orcid.org/0000-0003-3850-4960, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Acknowledgments:

This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.

©Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. E., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-133-139

UDC 530.1

Edge States and Chiral Solitons in Topological Hall and Chern–Simons Fields

Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. E.

Received December 1, 2017

Abstract. The multi-component extension problem of the $(2 + 1)D$ -gauge topological Jackiw–Pi model describing the nonlinear quantum dynamics of charged particles in multi-layer Hall systems is considered. By applying the dimensional reduction $(2 + 1)D \rightarrow (1 + 1)D$ to Lagrangians with the Chern–Simons topologic fields, multi-component nonlinear Schrodinger equations for particles are constructed with allowance for their interaction. With Hirota’s method, an exact two-soliton solution is obtained, which is of interest in quantum information transmission systems due to the stability of their propagation. An asymptotic analysis $t \rightarrow \pm\infty$ of soliton-soliton interactions shows that there is no backscattering processes. We identify these solutions with the edge (topological protected) states – chiral solitons – in the multi-layer quantum Hall systems. By applying the Hirota bilinear operator algebra and a current theorem, it is shown that, in contrast to the usual vector solitons, the dynamics of new solutions (chiral vector solitons) has exclusively unidirectional motion. The article is published in the author’s wording.

Keywords: chiral solitons, Chern–Simons fields, topological fields, nonlinear Schrödinger equation, fractional quantum Hall effect.

For citation: Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. E., “Edge States and Chiral Solitons in Topological Hall and Chern–Simons Fields”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 133–139.

On the authors:

Agalar M. Agalarov, orcid.org/0000-0003-1083-4124, PhD.,
Head of the Department of Theoretical physics, Institute of Physics DSC RAS,
94 M.Yaragsky str., Makhachkala, 367015, Russia, e-mail: aglarow@mail.ru

Telman A. Gadzhimuradov, orcid.org/0000-0002-6332-7532, researcher,
Department of the Theoretical physics, Institute of Physics DSC RAS,
94 M.Yaragsky str., Makhachkala, 367015, Russia, e-mail: gta-1987@mail.ru

Alexander A. Potapov, orcid.org/0000-0001-9864-3546, Dr. Ph.-Math. Sc.
Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences,
11 Mokhovaya str., buil. 7, Moscow, 125009, Russia
JNU-IRE RAS Joint Laboratory of Information Technology and Fractal Processing of Signals, JiNan University,
601 Huangpu avenue, Guangzhou, 510632, China, e-mail: potapov@cplire.ru

Alexander E. Rassadin, orcid.org/0000-0002-7396-0112, Member of the Presidium Nizhny Novgorod Mathematical Society,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950, Russia e-mail: brat_ras@list.ru

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, project No 15-02-03311 A.
This work was supported by RFBR, project No 18-08-01356-a.

1. Introduction

The (2+1)D matter particles interacting with gauge topological Chern–Simons fields support solitons solutions [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Solitons are a central paradigm in many branches of present-day physics and mathematics. One of most interesting combination of the quantum and nonlinear properties of solitons arises in the (2+1)D-nonlinear Schrödinger equation gauged by a Chern–Simons fields (Jackiw–Pi model) [4, 5]. The model [4], proposed by Jackiw and Pi is described by the (2+1)D –action

$$S_{(2+1)\text{D}} = \int \left(\frac{1}{\bar{\kappa}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho + i\hbar\psi^* D_t \psi - \frac{\hbar^2}{2m} |D_i \psi|^2 - V(\rho) \right) d^3x, \quad (1)$$

where $\psi \in \mathbb{C}$ is the Schrödinger quantum field, giving rise to charged bosonic particles after second quantization. A_μ is the Chern–Simons gauge field, $V(\rho)$ is the self-interaction potential of charged particles, $\rho = \psi^* \psi$ is the particle density and $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$) is the covariant derivative. The metric tensor is $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1)$ and $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ is the Levi-Civita anti-symmetric symbol.

In context of the Landay–Ginzburg mean field theory the Langrange density of model (1) can be considered as the model to describe the *edge states* (chiral solitons) of the Integer Quantum Hall Effects in monolayer systems [6]. In this case the scalar field ψ is the order parameter and the constant $\bar{\kappa}$ is interpreted as the Hall conductivity. In the 2D-system of charged particles the Hall quantum current is given by $J_x = \sigma_{xy} E_y$, where the transverse conductivity σ_{xy} can be computed as:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int dk_x dk_y \Omega(k_x, k_y) = \frac{\gamma_B}{R_{K-90}}. \quad (2)$$

Here h is the Planck constant, $\Omega = \text{rot}A$, ($\Omega_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ is the Berry curvature), γ_B is Berry holonomy (phase), k_j is a wave-number and $R_{K-90} = (h/e^2) = 25812, 807\Omega_{90}$ is the Klitzing practical standard for Electrical Resistance, used in resistance calibrations worldwide. The quantum Hall resistance $R_H = \alpha c/2\pi$ also provides an extremely independent determination of the fine structure constant α – the quantity of fundamental importance in QED(Quantum Electro-Dynamics, c is the maximum speed at which all known form of information in the universe can travel).

As well know [2, 6] in the multi-layer systems to take place the Fractional Quantum Hall Effect due to inter-layer correlations of interacting anyons – the planar particles with unconventional statistics. So it is interesting the extension of the theory (1) to the multi-component case of matter field: $\psi \rightarrow \psi_j, j = 1, 2, \dots N$.

In this Letter we present a multi-component generalization of the Jackiw–Pi models (1). As the (2+1)D-second-order field equations associated to (1) are not integrable, it is natural to consider a dimensional reduction $L_{(2+1)\text{D}} \rightarrow L_{(1+1)\text{D}}$.

2. Lagrangian and the dimensional reduction $L_{(2+1)\text{D}} \rightarrow L_{(1+1)\text{D}}$

We start by suppressing dependence on the one space-like coordinate and redefining the gauge field as $A_2 = (mc/\hbar^2)B$, $A_1 = A_1$ and $A_0 = A_0 + (mc/\hbar^2)B$. By adding suitable

kinetic term for B-field we have reduced (1) to the following total (1+1)D-Lagrangian

$$L_{tot(1+1)} = L_{(1+1)} + L_B + L_{BF}, \quad (3)$$

where

$$L_B = \frac{g}{2\hbar} \dot{B}B', \quad L_{BF} = (2\kappa)^{-1} B \varepsilon^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Here dot/prime indicate differentiation with respect to time/space, g is the coupling constant of B-fields, $\kappa = (\hbar^2/mc)\bar{\kappa}$ is dimensionless and we have neglected the term $\partial_x(B^3/3\hbar\kappa)$ since it is a total spatial derivative. $V = V(\bar{\psi}\psi)$ is a general polynomial in the density $|\psi_j|^2$ and describes nonlinear self-actions and inter-actions between N components of matter fields ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

After elimination of the gauge fields (A_μ, B) by using its dynamic eq. and phase redefinition of ψ_j we obtain from (3) a final local-invariant Lagrangian

$$L_{(1+1)D} = \int dx \sum_{j=1}^N (i\hbar\bar{\psi}_j \partial_t \psi_j - H_j - V), \quad (5)$$

$$H_j = \frac{\hbar^2}{2m} \bar{\Pi}_j \Pi_j, \quad \Pi_j = \left(\partial_x \pm i\kappa^2 \sum_k^N \rho_k \right) \psi_j, \quad \rho_k = \bar{\psi}_k \psi_k.$$

So the Euler–Lagrange equation reads

$$\left(i\partial_\tau + D_\zeta^2 - g\kappa^2 \sum_k^N J_k \right) \psi_j = \frac{\partial V}{\partial \bar{\psi}_j}. \quad (6)$$

Here $\tau = \hbar^{-1}t$ and $\zeta = x(\hbar^2/2m)^{-1/2}$ is the normalized time and space variables, $D_\zeta = \partial_\zeta + ig\kappa^2\rho$ is the gauge covariant derivative, $\kappa = (\hbar^2/mc)\bar{\kappa}$ is the Hall dimensionless constant which are connected to the Berry phase γ_B and called as a Chern (number) topological invariant. At the same times the factor κ is defined by Hall conductivity: $\sigma_{xy} = (e^2/h)\nu = \kappa/2\pi$, where ν is the filled factor of Landau energy levels. In the Integer QHE (IQHE) $-\nu \in \mathbb{Z}$. In the Fractional QHE (FQHE) $-\nu \in \mathbb{Q}$.

The particle density $\rho = \sum_k^N \rho_k$ and the total current $J = \sum_k^N J_k$, where $J_k = \frac{1}{2i}(\bar{\psi}_k D_\zeta \psi_k - \psi_k \overline{D_\zeta \psi_k})$, satisfy the *continuity equation*: $\rho_{,\tau} + J_{,\zeta} = 0$. Jackiw and Pi found that the dynamics of model (1) is not Lorentz-invariant [1, 2, 3, 4]. Also it is not Galileo-invariant. Another interesting fact is the nontrivial gauge analogy between (1+1)D multi-component model (6) and standard nonlinear Schrödinger equations with $SU(m, n)$ group symmetry [7, 8]. A simple analysis allows us to describe an exact solution for system Eqs. (6).

3. Nonlinear Schrödinger equation and two-component chiral solitons

Let us first assume that $V = 0$. Now if we define a nonlocal transformation [5, 9]

$$\psi_j = \exp \left[-ig\kappa^2 \int_0^\zeta d\zeta' \rho(\zeta') \right] \tilde{\psi}_j \quad (7)$$

and use also the continuity Eq. we obtain modified multi-component nonlinear Schrödinger equation (the sign tilde omit below)

$$iL_0\psi_j = 2g\kappa^2 \left(\sum_k^N J_k \right) \psi_j, \quad (L_0 = \partial_\tau - i\partial_{\zeta\zeta}) \quad (8)$$

with a current-nonlinearity

$$J_k = \frac{1}{2i} (\bar{\psi}_k \psi_{k,\zeta} - \psi_k \bar{\psi}_{k,\zeta}). \quad (9)$$

This is to be contrasted with the familiar multi-component (vector) $U(m, n)$ nonlinear Schrödinger equation [7, 10]:

$$-iL_0\psi_j = 2 \left(\sum_k^N \lambda_k |\psi_k|^2 \right) \psi_j, \quad (10)$$

where to take place the usual charge density nonlinearity $|\psi_k|^2 = \rho_k$. At the same times we note that our Eq. (8) is nothing but the multi-component (vector) generalization of Aglietti et al eq. [5].

Influenced by the known solutions [7] to Eq. (10), we can be obtained an exact solution to Eq. (8) by the Hirota bilinear method [10, 11]:

$$\psi_j = G_j/H, \quad H \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

In the simple case $N = 2$ the solution to (8) which has one soliton for each component is given by

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{\sigma_1} (1 + a_{22} b_{12} \exp(\sigma_2 + \bar{\sigma}_2)) \\ \gamma_2 e^{\sigma_2} (1 + a_{11} b_{21} \exp(\sigma_1 + \bar{\sigma}_1)) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where the Hirota function has the form

$$H = 1 + \sum_k^2 a_{kk} e^{\sigma_k + \bar{\sigma}_k} + a_{11} a_{22} b_{12} b_{21} e^{\sigma_1 + \bar{\sigma}_1 + \sigma_2 + \bar{\sigma}_2} \quad (13)$$

with

$$\sigma_\mu = k_\mu \zeta + i k_\mu^2 \tau, \quad a_{nn} = \frac{\lambda_n |\gamma_n|^2}{(k_n + \bar{k}_n)^2}, \quad b_{nm} = \frac{k_n - k_m}{k_n + \bar{k}_m}, \quad (14)$$

and $\bar{a} = a^*$ (*-complex conjugation). The parameters k_j related to the amplitudes, width and velocity of the j -th soliton [7, 10].

4. Asymptotic $\tau \rightarrow \pm\infty$ analysis of the two-soliton solutions

Evidently that the two-soliton solution (12) describe a process of soliton - soliton scattering for the inter-component interaction. The asymptotic ($\tau \rightarrow \pm\infty$) analysis show that

$$\psi_j(\zeta, \tau \rightarrow \pm\infty) = \sum_n^N C_j^{n\pm} \operatorname{sech} \left[\frac{U_j}{2} (\zeta - V_n \tau + \zeta_{nj}^\pm) \right] e^{i\Theta_{nj}}, \quad (15)$$

where $U_n = 2\text{Re } k_n$ and $V_n = 2\text{Im } k_n$ are the inverse width and velocity of n -th soliton, respectively,

$$\zeta_{11}^- = \ln \frac{a_{11}}{k_{11}}, \quad \zeta_{22}^- = \ln \frac{a_{22} |b_{21}|^2}{k_{22}}, \quad \zeta_{22}^+ = \ln \frac{a_{22}}{k_{22}}, \quad \zeta_{11}^+ = \ln \frac{a_{11} |b_{12}|^2}{k_{11}}$$

is the soliton phase before (–) and after (+) the interaction. The soliton amplitudes C_j^{m-} and C_j^{m+} are related to one another as

$$C_j^{n+} = T_j^n C_j^{n-}, \quad T_1^1 = \frac{b_{12}}{|b_{12}|}, \quad T_2^2 = \frac{b_{21}}{|b_{21}|}. \quad (16)$$

It is seen that $IT_j^n I^2 = I$ and the interaction-induced phase shifts of solitons $\Delta_j = \zeta_{jn}^+ - \zeta_{jn}^-$ obey the Sudzuki-Zakharov-Shabat condition: $\zeta_{11}\Delta_1 - \zeta_{22}\Delta_2$ (conservation law for the soliton center of mass) [7, 8]. Now for establishing the integrability property of the our system (8) we propose a following theorem

Theorem: *If the current (9) satisfy to condition $J_k = V_k \rho_k / 2$, then the form (12) is an exact two-soliton solution of Eq. (8).*

Proof of theorem: The proof this theorem is ordinary. Using the Hirota bilinear operator D , defined as $D(U \cdot V) = (DU)V - U(DV)$, by direct computation the current (9) on the basis of the form (12) we find

$$J_k = \frac{i}{2} \frac{D_\zeta G_k \circ G_k}{H^2} = \frac{1}{2} V_k |\psi_k|^2 \quad (17)$$

iff the condition $\text{Im}(k_n - k_m) = 0$ is satisfied.

5. Conclusion

As (17), the our Eq. (8) becomes identical to Eq. (10) with

$$\lambda_k = -\frac{1}{2} g \kappa^2 V_k. \quad (18)$$

The interesting pattern is follow from condition of (18): if $\lambda_k > 0$ with the gauge coupling constant fixed ($g > 0$), then the soliton in all components moves in one direction ($V_k < 0$) – it is *the chiral solitons*. This is contrasted to the usual NLS Eq. (10), whose solitons can move in both directions. Finally, we obtain one unexpected result – the $(1 + 1)D$ -multi-component chiral solitons is *NO-scattering* composite particles on the Line, as $V_1 = V_2$.

We plan to obtain edge modes solution in model (1) for the non-hermitian case, by operator dressing method [7, 12].

The results of the work were reported at the International Scientific Conference "New Trends in Nonlinear Dynamics" (Russia, Yaroslavl, YSU, October 5–7, 2017). We thank Profs. A. Mikhailov, S. Kashchenko, N. Kudryashov, V. Butuzov, N. Nefedov, D. Treschev and S. Glyzin for discussion and critical comments. We also thank mathematicians at P.G. Demidov Yaroslavl University for their warm hospitality during our visit.

References

- [1] Lee T.E., “Anomalous Edge State in a Non-Hermitian Lattice”, *Phys. Rev. Lett.*, **116**:13 (2016), 133903.
- [2] Leykam D., et. al., “Edge Modes, Degeneracies, and Topological Numbers in Non-Hermitian Systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **118**:4 (2017), 040401.
- [3] Bunkov Yu.M., Volovik G.E., “Magnon Condensation into a Q Ball in $^3\text{He}-B$ ”, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:26 (2007), 265302.
- [4] Jackiw R., Pi S. Y., “Self-Dual Chern–Simons Solitons”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **107** (1992), 1–40.
- [5] Aglietti U., et. al., “Anyons and chiral solitons on a line”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:21 (1996), 4406–4409.
- [6] Moon K., et. al., “Spontaneous interlayer coherence in double-layer quantum Hall systems: Charged vortices and Kosterlitz-Thouless phase transitions”, *Phys. Rev. B.*, **51**:8 (1995), 5138–5170.
- [7] Agalarov A. M., Magomedmirzaev R. M., “Nontrivial class of composite $U(\sigma + \mu)$ vector solitons”, *JETP Letters*, **76**:7 (2002), 414–418.
- [8] Novikov S., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E., *Theory of solitons: the inverse scattering method*, Springer Science, 1984.
- [9] Faddeev L., Jackiw R., “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:17 (1988), 1692–1694.
- [10] Agalarov A., Zhulego V., Gadzhimuradov T., “Bright, dark, and mixed vector soliton solutions of the general coupled nonlinear Schrödinger equations”, *Phys. Rev. E.*, **91**:4 (2015), 042909.
- [11] Hirota R., *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [12] Zakharov V. E., Mikhailov A. V., “Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method”, *JETP*, **47**:6 (1978), 1017–1027.

Агаларов А. М., Гаджимурадов Т. А., Потапов А. А., Рассадин А. Э., "Краевые состояния и киральные солитоны в топологических полях Черна–Саймонса–Холла", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 133–139.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-133-139

Аннотация. Рассматривается проблема многокомпонентного расширения $(2 + 1)D$ -калибровочной топологической модели Jackiw–Pi, описывающей нелинейную квантовую динамику заряженных частиц в многослойных системах Холла. Применяя размерную редукцию $(2 + 1)D \rightarrow (1 + 1)D$ к лагранжианам с топологическими полями Черна–Саймонса, мы построили многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера для частиц с учетом их взаимодействия. Используя метод Хироты, получили точное двухсолитонное решение, представляющее интерес для квантовых систем передачи информации в силу устойчивости их распространения. Асимптотический $t \rightarrow \pm\infty$ анализ солитон-солитонных взаимодействий показывает, что процессов обратного рассеяния нет. Мы отождествляем эти решения с краевыми (топологически защищенными) состояниями – киральными солитонами – в многослойных квантовых системах Холла. Применяя билинейную операторную алгебру Хироты и теорему тока, мы показали, что в отличие от обычных векторных солитонов динамика новых решений (киральных векторных солитонов) имеет исключительно однонаправленное движение. Статья публикуется в авторской редакции.

Ключевые слова: векторные киральные солитоны, поле Черна–Саймонса, топологическое поле, нелинейное уравнение Шредингера, дробный квантовый эффект Холла.

Об авторах:

Агаларов Агалар Магомед-Закиевич, orcid.org/0000-0003-1083-4124, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором Теоретической физики, Институт физики ДНЦ РАН, ул. М. Ярагского, 94, г. Махачкала, 367015, Россия, e-mail: aglarow@mail.ru

Гаджимурадов Тельман Алимагомедович, orcid.org/0000-0002-6332-7532, мл. науч. сотр., Институт физики ДНЦ РАН, ул. М. Ярагского, 94, г. Махачкала, 367015, Россия, e-mail: gta-1987@mail.ru

Потапов Александр Алексеевич, orcid.org/0000-0001-9864-3546, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр., Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, корп. 7, г. Москва, 125009, Россия
Президент совместной китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов, просп. Хуанг Пу, 601, Университет ДжиНан, Гуанджоу, Китай, 510632, e-mail: potapov@cplire.ru

Рассадин Александр Эдуардович, orcid.org/0000-0002-7396-0112, член Правления, Нижегородское математическое общество, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: brat_gas@list.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-02-03311 А.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-08-01356-а.

Вычислительная геометрия

©Невский М. В., Ухалов А. Ю., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-140-150

УДК 514.17+517.51+519.6

О минимальном коэффициенте поглощения для n -мерного симплекса

Невский М. В., Ухалов А. Ю.

получена 20 июля 2017

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0, 1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Положим $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Величину $\xi(S)$ будем называть коэффициентом поглощения куба Q_n симплексом S . В статье приводятся новые оценки для минимального коэффициента поглощения для симплекса, содержащегося в Q_n , т. е. величины $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Эта величина и её аналоги, в частности, имеют приложения при оценивании норм интерполяционных проекторов. Общие оценки ξ_n были ранее получены в работах первого автора. Всегда $n \leq \xi_n < n+1$. Если существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$. Лучшая из известных общих оценок сверху имеет вид $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ ($n > 2$). Существует не зависящая от n константа $c > 0$, такая что для любого симплекса $S \subset Q_n$, имеющего максимальный объём, выполняются неравенства $c\xi(S) \leq \xi_n \leq \xi(S)$. Это мотивирует применение для оценивания ξ_n сверху симплексов максимального объёма в Q_n . Для построения набора вершин такого симплекса могут применяться максимальный 0/1-определитель порядка n или максимальный $-1/1$ -определитель порядка $n+1$. В работе вычисляются коэффициенты поглощения для симплексов максимального объёма, построенных с использованием специальной процедуры из известных максимальных $-1/1$ -определителей. Для ряда значений n с помощью этого подхода удалось понизить верхние границы ξ_n , полученные теоретическим путём. Приводятся лучшие известные оценки ξ_n сверху для $n \leq 118$.

Ключевые слова: n -мерный симплекс, n -мерный куб, гомотетия, коэффициент поглощения, интерполяция, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О минимальном коэффициенте поглощения для n -мерного симплекса", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:1 (2018), 140–150.

Об авторах:

Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент, НОМЦ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Российская Федерация, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, канд. физ.-мат. наук, НОМЦ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Российская Федерация, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Благодарности:

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1

1. Введение

В настоящей статье $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0, 1]^n$. Через $C(Q_n)$ обозначается пространство непрерывных функций $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$.

Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ понимается совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 , или линейных функций на \mathbb{R}^n . Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , с которыми выполняется $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$.

Пусть S — невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n . Через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Под $d_i(S)$ будем понимать i -й осевой диаметр S , представляющий собой максимальную длину отрезка из S , параллельного i -й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом [13], [14].

Введём в рассмотрение величину $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Число $\xi(S)$ будем называть *коэффициентом поглощения (absorption index)* симплексом куба Q_n . Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}, \quad \xi'_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n, \text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)\}.$$

Здесь и далее $\text{ver}(G)$ есть совокупность вершин многогранника G . Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS . Очевидно, $\xi(S) = \alpha(S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n , т. е. каждая грань этого симплекса содержит вершину Q_n .

Пусть $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ — вершины симплекса S , $1 \leq j \leq n+1$. В дальнейшем существенную роль играет невырожденная матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство $\text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которого составляют j -й столбец \mathbf{A}^{-1} , т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Числа $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами* точки x относительно S . Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа*, соответствующими симплексу S . По поводу свойств λ_j см. [5, гл. 1].

В [4] установлено равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1)$$

Как доказано в [5], в случае $Q_n \not\subset S$ справедлива формула

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (2)$$

Для любого невырожденного симплекса S

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (3)$$

Это равенство доказано в [12] (см. также [5]).

Ниже мы предполагаем, что $S \subset Q_n$. Тогда для $i = 1, \dots, n$ выполняется неравенство $d_i(S) \leq 1$. Из (3) вытекает, что

$$n \leq \alpha(S) \leq \xi(S). \quad (4)$$

Тем самым, для n -мерного невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ коэффициент поглощения ограничен снизу числом n . Поэтому для любого n

$$\xi'_n \geq \xi_n \geq n. \quad (5)$$

Первым автором доказано (см. [5, теорема 3.2.2]), что при $n > 2$

$$\xi'_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1}. \quad (6)$$

Верхняя граница получается из рассмотрения симплекса S^* с вершинами $(0, 1, \dots, 1)$, $(1, 0, \dots, 1)$, \dots , $(1, 1, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 0)$. При $n > 2$ верно $\xi(S^*) = \frac{n^2 - 3}{n - 1}$, откуда и следует (6). При $n \geq 3$ симплекс S^* обладает следующим свойством, отмеченным в [9, лемма 3.3]: замена любой вершины S^* на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. При $n = 2, 3, 4$ (и только в этих случаях) S^* является симплексом максимального объёма в Q_n . Если $n \geq 2$, то $d_i(S^*) = 1$, поэтому $\alpha(S^*) = n$. Таким образом, $\alpha(S^*) < \xi(S^*)$. Симплекс S^* , следуя [9], будем называть *жестким (rigid)*.

Так как $\xi_1 = \xi'_1 = 1$, $\xi_2 = 2.34\dots$, $\xi'_2 = 3$, то из (5)–(6) имеем

$$n \leq \xi_n < n + 1, \quad n \leq \xi'_n \leq n + 1.$$

Равенство $\xi'_n = n + 1$ выполняется только при $n = 2$. Итак, $\xi_n \asymp n$, $\xi'_n \asymp n$.

Число m будем называть *числом Адамара*, если существует матрица Адамара порядка m . (О матрицах Адамара см., например, [8], [9].) Если $n + 1$ — число Адамара, то $\xi_n = \xi'_n = n$ (различные доказательства даны в [5, § 3.2], [7, теорема 3]). Для таких и только таких n существует правильный симплекс S , для которого $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$. Как отмечено в [5], для этого симплекса $\xi(S) = n$, что и даёт $\xi_n = \xi'_n = n$. Из (4) и (3) получается $\alpha(S) = n$ и $d_i(S) = 1$. Последние равенства следуют также из того, что правильный симплекс S имеет максимальный объём в Q_n , поэтому все осевые диаметры такого симплекса равны 1. Это свойство симплексов максимального объёма, доказанное Лассаком [10], может быть выведено и из (3).

Приведём полученные ранее оценки чисел ξ_n для конкретных n . К 2009 г. первым автором было установлено, что

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\dots, \quad \xi_3 = 3, \quad 4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\dots,$$

$$5 \leq \xi_5 \leq 5.5, \quad 6 \leq \xi_6 \leq 6.6, \quad \xi_7 = 7.$$

Вычисления, проделанные вторым автором, позволили улучшить оценки для ξ_4 и ξ_6 . Именно, в [6] доказано, что $\xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\dots$, и высказано предположение, что указанная верхняя граница совпадает с точным значением ξ_4 . В [7] отмечается, что $\xi_6 < 6.0166$, т. е. $0 \leq \xi_6 - 6 < 0.0166$. Кроме того, в [7, следствие 1] доказано, что

точное значение ξ_5 равно 5. Это означает, что существуют значения n , такие что $n + 1$ не является числом Адамара и, тем не менее, $\xi_n = n$. Минимальное такое n равно 5.

Пусть $x^{(j)} \in Q_n$ — вершины невырожденного симплекса S . Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по системе узлов $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $1 \leq j \leq n + 1$. Имеет место аналог интерполяционной формулы Лагранжа: $Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x)$. Норма проектора P как оператора

из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть вычислена по формуле $\|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$.

Обозначим через θ_n минимальную величину $\|P\|$. Для любого симплекса S и соответствующего проектора P в [3] установлены неравенства

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1.$$

Из них следует, что

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1.$$

Как показано в [5, гл. 3], имеет место эквивалентность $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Там же систематизированы многочисленные соотношения для θ_n и ξ_n . Отметим здесь следующее утверждение (см. [5, следствие 3.6.1]).

Теорема 1. Пусть S — симплекс максимального объёма в Q_n , P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S . Тогда с универсальными константами имеют место соотношения $\|P\| \asymp \theta_n$, $\xi(S) \asymp \xi_n$.

Точными по порядку n оценками сверху для симплекса максимального объёма и соответствующего проектора являются неравенства [5, теоремы 3.2.1, 3.5.1]

$$\xi(S) \leq n + 2, \quad \|P\| \leq \min \left(n + 1, \frac{4\sqrt{e}}{3} \sqrt{n+2} + 1 \right). \quad (7)$$

В связи с теоремой 1 представляется целесообразным оценить θ_n и ξ_n с использованием симплексов максимального объёма. Действительно, для целого ряда значений n такие вычисления позволяют улучшить оценки сверху, полученные теоретическим путём. Для чисел θ_n , $1 \leq n \leq 20$, эти результаты были описаны в статье [2], см. также [5, § 3.9]. В настоящей статье мы представим результаты оценивания указанным методом чисел ξ_n для $n \leq 118$. Кроме того, мы укажем лучшие верхние границы этих чисел, известные на момент написания статьи.

2. Об одном соответствии между $-1/1$ -матрицами и $0/1$ -матрицами

Под a/b -матрицей будем понимать матрицу, каждый элемент которой равен одному из двух чисел a или b . Через h_n и g_n обозначим максимальные величины определителей $0/1$ и $-1/1$ -матриц порядка n соответственно. Пусть ν_n — максимальная

величина объёма n -мерного симплекса, содержащегося в Q_n . Эти числа связаны соотношениями $g_{n+1} = 2^n h_n$, $h_n = n! \nu_n$, см. [9, теорема 2.1].

Максимальные 0/1-определители порядка n позволяют построить симплекс максимального объёма в Q_n . Дополним набор строк такого определителя нулевой строкой. Симплекс S с вершинами в получившихся точках, очевидно, принадлежит Q_n и имеет максимальный объём. Действительно, составим для симплекса S матрицу \mathbf{A} порядка $n + 1$ так, как сказано в п. 1. Тогда

$$\text{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} = \frac{h_n}{n!} = \nu_n.$$

Ненулевые вершины n -мерного симплекса максимального объёма в Q_n можно получить и из столбцов максимального 0/1-определителя порядка n . Построенный симплекс S максимального объёма в соответствии с теоремой 1 является почти-экстремальным в смысле определений ξ_n и θ_n — для него $\xi(S) \asymp \xi_n$, $\|P\| \asymp \theta_n$. Подробности этого подхода описаны в [5, гл. 3].

Покажем, что 0/1-матрицы с максимальным определителем могут быть получены некоторым способом из экстремальных $-1/1$ -матриц. Пусть \mathbf{X} — невырожденная $-1/1$ -матрица порядка $n + 1$, \mathbf{T} — 0/1-матрица порядка n . Предположим, что эти матрицы связывает последовательность следующих шагов.

1. Каждый столбец \mathbf{X} , начинающийся с -1 , умножается на -1 .
2. Каждая строка новой матрицы, начинающаяся с -1 , также умножается на -1 . Матрицу порядка $n + 1$, которая получится в результате выполнения шагов 1–2, обозначим через \mathbf{Y} . У этой $-1/1$ -матрицы первый столбец и первая строка целиком состоят из 1.
3. Пусть \mathbf{Z} — подматрица порядка n матрицы \mathbf{Y} , стоящая в строках и столбцах с номерами $2, \dots, n + 1$. В этой матрице производится следующая замена элементов: 1 заменяется на 0, а -1 на 1. Получившаяся 0/1-матрица порядка n , по определению, есть \mathbf{T} .

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$|\det(\mathbf{T})| = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{2^n}. \quad (8)$$

Если $|\det(\mathbf{X})| = g_{n+1}$, то $|\det(\mathbf{T})| = h_n$.

Доказательство. Приведём рассуждение, данное в [2]. Оно базируется на идеях статьи [9, п. 2]. Пусть S_1 — $(n + 1)$ -мерный симплекс, одна вершина которого является нулевой, а остальные задаются строками \mathbf{Y} ; S_2 — n -мерный симплекс, одна вершина которого есть $(1, \dots, 1)$, а остальные соответствуют строкам \mathbf{Z} ; наконец, пусть S_3 — n -мерный симплекс, одна вершина которого есть 0, а остальные соответствуют строкам \mathbf{T} . Используя связь между определителями и объёмами, запишем

$$\text{vol}(S_1) = \frac{|\det(\mathbf{Y})|}{(n + 1)!} = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{(n + 1)!}. \quad (9)$$

Не нулевые вершины S_1 принадлежат грани $x_1 = 1$ куба $[-1, 1]^n$, поэтому высота этого симплекса, опущенная из нулевой вершины, равна 1. Далее, симплекс S_2 конгруэнтен грани симплекса S_1 , лежащей на указанной грани куба. Из формулы для объёма симплекса следует, что

$$\text{vol}(S_1) = \frac{\text{vol}(S_2)}{n+1}. \quad (10)$$

Замены чисел, отмеченные в шаге 3, есть результат аффинного преобразования куба $[-1, 1]^n$ в куб $[0, 1]^n$, при котором вершина $(1, \dots, 1)$ первого куба переходит в вершину $(0, \dots, 0)$ второго куба. При этом преобразовании меры множеств умножаются на 2^{-n} . Так как S_3 есть образ S_2 , то

$$\text{vol}(S_3) = \frac{\text{vol}(S_2)}{2^n}. \quad (11)$$

Наконец,

$$\text{vol}(S_3) = \frac{|\det(\mathbf{T})|}{n!}. \quad (12)$$

Применяя последовательно (12), (11) и (10), получим:

$$|\det(\mathbf{T})| = n! \text{vol}(S_3) = \frac{n! \text{vol}(S_2)}{2^n} = \frac{(n+1)! \text{vol}(S_1)}{2^n} = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{2^n}.$$

Равенство (8) установлено. Если $|\det(\mathbf{X})| = g_{n+1}$, то $|\det(\mathbf{T})| = 2^{-n}g_{n+1} = h_n$. \square

Третий и второй шаги описанной процедуры допускают обращение. В результате выполнения обратной процедуры из 0/1-матрицы \mathbf{T} порядка n получается $-1/1$ -матрица \mathbf{Y} порядка $n+1$, первая строка и первый столбец которой состоят из 1. Точно так же, как равенство (8), устанавливается соотношение $|\det(\mathbf{Y})| = 2^n |\det(\mathbf{T})|$. Если $|\det(\mathbf{T})| = h_n$, то $|\det(\mathbf{Y})| = g_{n+1}$.

Располагая информацией о максимальном $-1/1$ -определителе порядка n и действуя описанным выше способом, можно найти вершины симплекса S максимального объёма в Q_n . Вычислив для S коэффициент поглощения $\xi(S)$, получим оценку $\xi_n \leq \xi(S)$. Если при некотором n значение $\xi(S)$ меняется в зависимости от имеющегося выбора S , то в качестве верхней границы ξ_n естественно взять минимальное из найденных значений $\xi(S)$.

3. Уточнение оценок ξ_n

Описанная в предыдущем пункте процедура была применена нами для уточнения оценок ξ_n при $8 \leq n \leq 118$. Использовались данные о максимальных $-1/1$ -определителях, приведенные на сайте <http://www.indiana.edu/~maxdet/>. На указанном сайте представлены максимальные $-1/1$ -определители до порядка 119 включительно. Следует отметить, что среди перечисленных определителей имеются и такие, максимальность которых пока не доказана, а для некоторых порядков определители вообще не приводятся. Нельзя также утверждать, что при каждом n известны все неэквивалентные матрицы, для которых значение определителя максимально.

Таблица 1: Оценки ξ_n ($8 \leq n \leq 55$)
 Table 1: Estimates of ξ_n ($8 \leq n \leq 55$)

n	$\xi_n \leq$		n	$\xi_n \leq$		n	$\xi_n \leq$	
8	$\frac{61}{7} = 8.71 \dots$	AB	24	$\frac{339}{14} = 24.21 \dots$	B	40	$\frac{1808}{45} = 40.17 \dots$	B
9	$\frac{28}{3} = 9.33 \dots$	B	25	$\frac{379}{15} = 25.26 \dots$	B	41	$\frac{8479}{205} = 41.36 \dots$	B
10	$\frac{97}{9} = 10.77 \dots$	A	26	$\frac{4853}{182} = 26.66 \dots$	B	42	$\frac{40204}{945} = 42.54 \dots$	B
11	11	H	27	27	H	43	43	H
12	$\frac{184}{15} = 12.26 \dots$	B	28	$\frac{781}{27} = 28.92 \dots$	A	44	$\frac{1933}{43} = 44.95 \dots$	A
13	$\frac{529}{39} = 13.56 \dots$	B	29	$\frac{5963}{203} = 29.37 \dots$	B	45	$\frac{2493}{55} = 45.32 \dots$	B
14	$\frac{193}{13} = 14.84 \dots$	A	30	$\frac{2981}{98} = 30.41 \dots$	B	46	$\frac{2113}{45} = 46.95 \dots$	A
15	15	H	31	31	H	47	47	H
16	$\frac{163}{10} = 16.3$	B	32	$\frac{1600}{49} = 32.65 \dots$	B	48	$\frac{2301}{47} = 48.95 \dots$	A
17	$\frac{296}{17} = 17.41 \dots$	B	33	$\frac{543}{16} = 33.93 \dots$	A	49	$\frac{689}{14} = 49.21 \dots$	B
18	$\frac{321}{17} = 18.88 \dots$	AB	34	$\frac{5237}{152} = 34.45 \dots$	B	50	$\frac{1162}{23} = 50.52 \dots$	B
19	19	H	35	35	H	51	51	H
20	$\frac{596}{29} = 20.55 \dots$	B	36	$\frac{875}{24} = 36.45 \dots$	B	52	$\frac{2701}{51} = 52.96 \dots$	A
21	$\frac{219}{10} = 21.9$	A	37	$\frac{4139}{111} = 37.28 \dots$	B	53	$\frac{36707}{689} = 53.27 \dots$	B
22	$\frac{481}{21} = 22.90 \dots$	A	38	$\frac{2309}{60} = 38.48 \dots$	B	54	$\frac{2017}{37} = 54.51 \dots$	B
23	23	H	39	39	H	55	55	H

Таблица 2: Оценки ξ_n ($56 \leq n \leq 103$)
 Table 2: Estimates of ξ_n ($56 \leq n \leq 103$)

n	$\xi_n \leq$		n	$\xi_n \leq$		n	$\xi_n \leq$	
56	$\frac{394}{7} = 56.28 \dots$	B	72	$\frac{5181}{71} = 72.97 \dots$	A	88	$\frac{7741}{87} = 88.97 \dots$	A*
57	$q = 57.61 \dots$	B	73	$\frac{48128}{657} = 73.25 \dots$	B	89	$\frac{3959}{44} = 89.97 \dots$	A*
58	$\frac{31455}{539} = 58.35 \dots$	B	74	$\frac{2458}{33} = 74.48 \dots$	B	90	$\frac{1538}{17} = 90.47 \dots$	B
59	59	H	75	75	H	91	91	H
60	$\frac{1985}{33} = 60.15 \dots$	B	76	$\frac{5773}{75} = 76.97 \dots$	A	92	$\frac{8461}{91} = 92.97 \dots$	A
61	$\frac{11219}{183} = 61.30 \dots$	B	77	$\frac{2963}{38} = 77.97 \dots$	A	93	$\frac{4323}{46} = 93.97 \dots$	A
62	$\frac{21299}{341} = 62.46 \dots$	B	78	$\frac{4081}{52} = 78.48 \dots$	B	94	$\frac{5857}{62} = 94.46 \dots$	B
63	63	H	79	79	H	95	95	H
64	$\frac{4093}{63} = 64.96 \dots$	A	80	$\frac{3937}{49} = 80.34 \dots$	B	96	$\frac{9213}{95} = 96.97 \dots$	A
65	$\frac{33949}{520} = 65.28 \dots$	B	81	$\frac{3653}{45} = 81.17 \dots$	B	97	$\frac{18863}{194} = 97.23 \dots$	B
66	$\frac{5918}{89} = 66.49 \dots$	B	82	$\frac{8990}{109} = 82.47 \dots$	B	98	$\frac{4234}{43} = 98.46 \dots$	B
67	67	H	83	83	H	99	99	H
68	$\frac{4621}{67} = 68.97 \dots$	A	84	$\frac{42406}{501} = 84.64 \dots$	B	100	$\frac{714817}{7110} = 100.53 \dots$	B
69	$\frac{2379}{34} = 69.97 \dots$	A	85	$\frac{152113}{1785} = 85.21 \dots$	B	101	$\frac{51097}{505} = 101.18 \dots$	B
70	$\frac{3313}{47} = 70.48 \dots$	B	86	$\frac{1643}{19} = 86.47 \dots$	B	102	$\frac{19555}{191} = 102.38 \dots$	B
71	71	H	87	87	H	103	103	H

Таблица 3: Оценки ξ_n ($104 \leq n \leq 118$)
 Table 3: Estimates of ξ_n ($104 \leq n \leq 118$)

n	$\xi_n \leq$		n	$\xi_n \leq$	
104	$\frac{10813}{103} = 104.98\dots$	A*	112	$\frac{6727}{60} = 112.11\dots$	B
105	$\frac{5511}{52} = 105.98\dots$	A	113	$\frac{25591}{226} = 113.23\dots$	B
106	$\frac{7021}{66} = 106.37\dots$	B	114	$\frac{24247}{212} = 114.37\dots$	B
107	107	H	115	115	H
109	$\frac{107131}{981} = 109.20\dots$	B	116	$\frac{13453}{115} = 116.98\dots$	A*
110	$\frac{22627}{205} = 110.37\dots$	B	117	$\frac{132583}{1131} = 117.22\dots$	B
111	111	H	118	$\frac{8641}{73} = 118.36\dots$	B

Для уточнения оценок ξ_n на основе максимальных (или предположительно максимальных) определителей были построены симплексы максимального (или предположительно максимального) объёма в Q_n . Как следует из теоремы 2, в качестве вершин симплекса максимального объёма можно взять строки матрицы \mathbf{T} и дополнить их нулевой вершиной $(0, \dots, 0)$.

Как отмечалось в п. 1, для симплекса S максимального объёма в Q_n выполняются равенства $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$. Поэтому, если для некоторого симплекса $\hat{S} \subset Q_n$ и некоторого i выполняется $d_i(\hat{S}) < 1$, то объём \hat{S} не максимален. Проверка условий $d_i(S) = 1$ осуществлялась для всех симплексов S , полученных из матриц \mathbf{T} . Для единственной приведённой на сайте матрицы порядка 101 не все осевые диаметры соответствующего симплекса оказались равными 1. Среди осевых диаметров, кроме 1, встретились также значения $\frac{711}{719}$ и $\frac{237}{245}$. Это означает, что приведённый $-1/1$ -определитель порядка 101 не является максимальным.

Перейдём к описанию полученных результатов. Наиболее точные из найденных верхних границ ξ_n содержатся в таблицах 1, 2 и 3.

Наряду со значением n и верхней границей ξ_n мы приводим также сведения о способе получения данной оценки. При этом мы используем следующие обозначения:

- А — оценка получена из неравенства (6). Использование максимального симплекса не позволило улучшить эту оценку.
- В — приводится наименьшее значение $\xi(S)$, полученное из рассмотрения од-

ного или нескольких симплексов максимального объёма в Q_n . Это значение меньше, чем правая часть (6).

- АВ — полученное для максимальных симплексов значение $\xi(S)$ совпадает с правой частью (6).
- Н — число $n + 1$ является адамаровым. Приводится точное значение $\xi_n = n$.
- A^* — использовано неравенство (6), так как для данного n на сайте не приводится ни одного максимального определителя.

Для $n = 57$ в таблице 2 использовано обозначение $q = \frac{34018994107517188105}{590424166322794597}$.

Все приведённые оценки ξ_n получены из рассмотрения симплексов, вершины которых совпадают с вершинами куба Q_n . Следовательно, эти значения являются верхними границами не только для ξ_n , но и для ξ'_n .

Для вычислений и подготовки таблиц использовался набор программ на языке Wolfram Language (см., например, [1] и [11]).

Список литературы / References

- [1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]
- [2] Невский М. В., Хлесткова И. В., “К вопросу о минимальной линейной интерполяции”, *Современные проблемы математики и информатики*, **9**, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2008, 31–37; [Nevskij M. V., Khlestkova I. V., “K voprosu o minimalnoi lineinoi interpolyacii”, *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, **9**, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2008, 31–37, (in Russian).]
- [3] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]
- [4] Невский М. В., “Об одном свойстве n -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n -dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.
- [5] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, (in Russian).]
- [6] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical characteristics of a simplex and their estimates”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619, (in Russian).]
- [7] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 94–110, (in Russian).]
- [8] Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusetts) – Toronto – London, 1967, (in English).]

- [9] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.
- [10] Lassak M., “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21:3** (1999), 449–462.
- [11] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O’Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.
- [12] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46:2** (2011), 301–312.
- [13] Scott P. R., “Lattices and convex sets in space”, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.
- [14] Scott P. R., “Properties of axial diameters”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39:3** (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On Minimal Absorption Index for an n -Dimensional Simplex", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 140–150.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-140-150

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$ and let Q_n be the unit cube $[0, 1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS denote the homothetic copy of S with center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ . Put $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. We call $\xi(S)$ an absorption index of simplex S . In the present paper, we give new estimates for the minimal absorption index of the simplex contained in Q_n , i. e., for the number $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. In particular, this value and its analogues have applications in estimates for the norms of interpolation projectors. Previously the first author proved some general estimates of ξ_n . Always $n \leq \xi_n < n + 1$. If there exists an Hadamard matrix of order $n + 1$, then $\xi_n = n$. The best known general upper estimate has the form $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ ($n > 2$). There exists a constant $c > 0$ not depending on n such that, for any simplex $S \subset Q_n$ of maximum volume, inequalities $c\xi(S) \leq \xi_n \leq \xi(S)$ take place. It motivates the use of maximum volume simplices in upper estimates of ξ_n . The set of vertices of such a simplex can be constructed with application of maximum 0/1-determinant of order n or maximum $-1/1$ -determinant of order $n + 1$. In the paper, we compute absorption indices of maximum volume simplices in Q_n constructed from known maximum $-1/1$ -determinants via a special procedure. For some n , this approach makes it possible to lower theoretical upper bounds of ξ_n . Also we give best known upper estimates of ξ_n for $n \leq 118$.

Keywords: n -dimensional simplex, n -dimensional cube, homothety, absorption index, interpolation, numerical methods

On the authors:

Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
Centre of Integrable Systems, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Y. Ukhalov, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,
Centre of Integrable Systems, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Acknowledgments:

This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1