



**МОДЕЛИРОВАНИЕ И
АНАЛИЗ
ИНФОРМАЦИОННЫХ
СИСТЕМ**

Том 7 № 1 2000

Ярославский государственный
университет имени П.Г.Демидова

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
имени П.Г.Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 7 №1 2000

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

Главный редактор
В.А.СОКОЛОВ

Редакционная коллегия
О.Л.Бандман, В.А.Бондаренко, В.Ш.Бурд, М.Г.Дмитриев,
А.В.Зафиевский, Ю.Г.Карпов, С.А.Каценко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Левин,
И.А.Ломазова, В.В.Майоров, В.Э.Малышкин, В.А.Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А.Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14
E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в редакторе LaTeX.

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т.7, №1. 2000

О новом применении схемы центрированных отсечений <i>Бузинов А.А., Левин А.Ю. –</i>	3
Потоковый нейрон с альтернативными синапсами <i>Лукьянов А.В. +</i>	8
Об одной задаче А. Бездека <i>Карасёв Р.Н.</i>	18
Планирование оптимальных путей плоских роботов на основе использования волновой нейросетевой архитектуры <i>Лебедев Д.В.</i>	30
Программное и позиционное управления некоторыми системами массового обслуживания <i>Филатова Л.Ю.</i>	39
Самоорганизация в слабо неоднородной полносвязной сети нейронных клеточных автоматов возбуждительного типа <i>Шабаршина Г.В. +</i>	44
Асимптотические свойства одного класса игр со случайными исходами <i>Фролов А.К.</i>	50

Лицензия ЛР №020319 от 30.12.96. Корректор А.А.Аладьева
Подписано в печать 21.04.99. Формат 60x88¹/₈. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 6,43. Уч.-изд.л. 3,8. Тираж 100 экз. 105⁻

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

УДК 517.977.5 : 519.854.62

О новом применении схемы центрированных отсечений

Бузинов А.А., Левин А.Ю.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Данная статья представляет собой комментарий по поводу развития вычислительных методов для задачи оптимального быстродействия, включая результаты, полученные в самое последнее время и дающие основание для пересмотра некоторых сложившихся стереотипов. Обсуждается также история вопроса.

1. Теория оптимального управления сформировалась как самостоятельная область около полувека назад. Пятидесятые годы - это, так сказать, период "штурма и натиска", когда было проявлено много энергии, энтузиазма и оптимизма. Ведущее участие в создании нового направления приняли отечественные математики во главе с Л.С.Понтрягиным и американские во главе с Р.Беллманом. Одной из основных задач, привлекавших наибольшее внимание, была задача оптимального линейного быстродействия (ЗОЛБ) [1,2]. Каждая из сторон достигла здесь определенных успехов, но эффективный метод решения ЗОЛБ (размерности $n > 2$) в то время так и не был найден.

Основным достижением отечественной математики был, безусловно, принцип максимума Понтрягина и его сотрудников [1,2], дающий, кстати, для ЗОЛБ необходимое и достаточное условие оптимальности управления. Можно отметить следующий любопытный факт. На первых страницах знаменитой монографии [1], содержащей доказательство этого принципа, ЗОЛБ приводится как наиболее яркий пример задачи нового типа, имеющей важные технические приложения, но недоступной для прежних методов: решение ее новыми методами, как сказано, будет изложено в третьей главе. Обещание это, однако, остается невыполненным: ни в третьей, ни в других главах такого решения нет. Правда, наряду с принципом максимума, уделяется много внимания решению ЗОЛБ второго порядка; но для решения ЗОЛБ произвольного порядка необходимо найти еще некоторый вектор ψ_0 (начальных данных соответствующего решения сопряженной системы). О том, как искать этот вектор (при $n > 2$) в [1] ничего не говорится (если не принимать всерьез рекомендацию применения "метода проб"). Напрашивается вывод, что авторам не удалось найти сколько-нибудь эффективный алгоритм поиска ψ_0 .

Много занимались данной проблемой американские математики, которые, в частности, свели ее к минимизации некоторой функции $-F(p)$ ($p \in \mathbb{R}^n$), которую назовем функцией Нейштадта (определение ее можно найти, напр., в [2, с.141]). Оказалось, что $-F(p)$ одноэкстремальна (в широком смысле слова - минимум может достигаться сразу на целом конусе). Это внушало естественную надежду, что методы градиентного спуска (см., напр., [3,4]) - традиционный и проверенный инструмент - приведут к эффективным алгоритмам. Надежда, однако, не оправдалась: поведение функции Нейштадта вблизи точки минимума оказалось сложным, и лучшие из предложенных градиентных схем (в частности, алгоритм Итона), как правило, сходились весьма медленно (исключая случай $n = 2$; эта оговорка далее опускается). В.Г.Болтянский в книге [2] модифицировал метод Нейштадта - Итона и предложил свою версию градиентного спуска, по его мнению, быстро сходящуюся. Сходимость, действительно, доказана автором. Что же касается быстроты, то эта гипотеза оказалась слишком оптимистической.

Среди известных математиков, занимавшихся этими проблемами, упомянем еще Н.Н.Красовского. В монографии [5] рассмотрен ряд задач оптимального управления, в том числе и ЗОЛБ. Здесь предложен свой подход к ЗОЛБ, состоящий, приблизительно говоря, в решении последовательности вспомогательных более "удобных" задач. Подробностей в [5] нет, но, по-видимому, данный подход не оказался эффективным: ни в справочной монографии [6], ни в главе "Алгоритмы оптимального управления" справочника [7] он не упоминается.

Итак, Беллман был прав, когда в докладе на Московском математическом конгрессе (1966), упомянув о большом интересе, вызванном ЗОЛБ, он так характеризовал ситуацию: "Существует много хитроумных приемов приближенного решения этой, казалось бы, простой задачи, но ее ни в коей мере нельзя считать укрощенной". Фактически он признал, что эффективного алгоритма для ЗОЛБ не найдено. Надо сказать, что слова Беллмана оставались в силе до самого последнего времени.

В отечественной литературе смену настроений отразила упоминавшаяся уже справочная монография Р.П.Федоренко [6], где дается критический обзор применению численных методов в оптимальном управлении (на то время). Из ЗОЛБ здесь рассмотрена лишь простая задача третьего порядка (выбранная

рядом математиков в качестве эталонной). И даже здесь нет речи о "быстро сходящихся" алгоритмах и т.п.; наоборот, подчеркнута значительность возникающих трудностей.

Все сказанное не означает, конечно, что в 70-х годах наступило разочарование в оптимальном управлении; теоретические аспекты этого направления - в частности, связи с функциональным анализом, с выпуклым анализом и т.д. - успешно исследовались и развивались (см., напр., [8]). С другой стороны, принцип максимума все чаще стал трактоваться как чисто теоретический результат, не имеющий серьезного прикладного значения для решения конкретных ЗОЛБ (и ряда других задач). Стали усиленно пропагандироваться "прямые" методы, не использующие принципа максимума (у прямых методов есть свои существенные недостатки, рассмотрение которых не входит в нашу задачу).

Что же касается самой ЗОЛБ, то после всех описанных перипетий создание для нее эффективного алгоритма обрело репутацию, образно говоря, "NP-трудной" задачи. И за последующие 20 лет в этом отношении мало что произошло. Однако недавно ситуация резко изменилась. Чтобы пояснить происшедшее, на время отойдем от оптимального управления.

2. С середины 60-х годов в выпуклом программировании стали появляться алгоритмы нового типа, относящиеся к т.н. схеме центрированных отсечений. Это - метод центров тяжести [9,10], модифицированный метод центров тяжести (он же метод эллипсоидов, он же метод описанных эллипсоидов) [11,12], метод вписанных эллипсоидов [13], различные версии метода симплексов [14,15] и др. По своей "идеологии" эти методы радикально отличаются от методов градиентного спуска. Общей чертой этих алгоритмов является быстрое сокращение объемов локализаторов, т.е. областей, содержащих искомую точку минимума. Для методов схемы отсечений не возникает ни проблемы выбора шага (как в алгоритмах градиентного спуска), ни проблемы выбора качественного начального значения (как в методе Ньютона). Метод центров тяжести и метод вписанных эллипсоидов являются оптимальными по порядку числа итераций для решения задачи с требуемой точностью.

При применении методов данной группы характерна экспоненциальная или близкая к экспоненциальной (по числу итераций) скорость убывания объемов локализаторов. Так, для метода центров тяжести объемы локализаторов $|V_0|, |V_1|, |V_2|, \dots$ удовлетворяют неравенству

$$|V_k| < (1 - e^{-1})^k |V_0| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Здесь k - номер итерации или, что то же самое, номер отсечения. (На каждой итерации вычисляется значение функции и ее градиента в некоторой точке, после чего проводится отсечение.) Соображения, связанные с выпуклостью, позволяют трансформировать эту оценку в оценку того же типа для погрешностей по функционалу.

Под выпуклым программированием в широком смысле можно понимать методы минимизации квазивыпуклых функций на выпуклом множестве. (Напомним, что функция G называется квазивыпуклой, если выпуклы все множества вида: $G(x) \leq c$). Существенно, что схема отсечений применима и в этом случае (при ненулевых значениях градиентов); изменяются лишь некоторые моменты, связанные с оценкой погрешности. Для ЗОЛБ это важно, поскольку функция Нейштадта $-F(x)$, не будучи выпуклой, является квазивыпуклой.

Идея замены методов градиентного спуска методами отсечений при решении ЗОЛБ была предложена еще в [16] (конкретнее, предлагалась одна из версий, основанная на приближенном вычислении центров тяжести). Особого развития эта идея тогда не получила. Во-первых, она, по-видимому, осталась неизвестной большинству специалистов, во-вторых, изложение ее было довольно схематичным и доведение до реального алгоритма требовало преодоления ряда трудностей. Т.И. Енчева и А.Ю. Левин опубликовали на эту тему несколько статей, где уточнялись отдельные аспекты такого подхода (связанные с локализацией точек переключения, квазивыпуклостью $-F$ и т.п.), но полноценный алгоритм удалось разработать и реализовать заметно позднее (1999 - 2000 гг.). Как подтвердили эксперименты, с этого момента ситуация с ЗОЛБ радикально изменилась, так что слова Беллмана, наконец, утратили силу.

3. Опишем кратко результаты этих экспериментов. Решалось несколько десятков ЗОЛБ, генерируемых некоторым случайным образом, размерностей 2 - 5. Требовалось попасть в начало координат с точностью 10^{-5} . Применялись две группы методов: с одной стороны, два традиционных метода градиентного спуска (Итона и Болтянского), с другой, два метода схемы отсечений - предложенный авторами стохастический метод центров тяжести (СМЦТ) и метод описанных эллипсоидов. Между методами одной и той же группы в обоих случаях не наблюдалось больших различий в трудоемкости. Однако различие между двумя подходами (при $n > 2$) оказалось разительным.

При $n = 2$ все 4 метода работали быстро, затрачивая доли секунды машинного времени (вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Pentium S, 133 МГц); методы отсечений были здесь лишь в несколько раз быстрее традиционных. При $n = 3$ методы отсечений работали в среднем более чем в 100 раз быстрее традиционных (решая в среднем одну задачу за 3 секунды). При $n = 4$ наблюдалось ускорение уже примерно в 500 раз. При этом для ряда задач не удалось достичь требуемой точности методами первой группы за приемлемое время (так что коэффициент ускорения можно было бы оценить как 500 - 1000). Что касается задач с $n = 5$, то традиционными методами здесь не удалось решить ни одной из тестовых задач (с требуемой точностью) за приемлемое время; после нескольких часов счета вычисления прекращались. Любопытно, что для одной из задач пятого порядка было выделено около 12 часов счета; однако и после этого она еще была столь далека от решения, что для завершения понадобилось бы, по-видимому, не менее суток. (Методами отсечений эта же задача решена за 100 секунд).

4. Столь серьезное изменение ситуации влечет за собой определенную переоценку ценностей. Повсеместно рекомендуемые в литературе методы градиентного спуска при решении ЗОЛБ почти обесцениваются, их место должны теперь занять методы отсечений. Любопытно, что настоящая известность пришла к ним (особенно к методу описанных эллипсоидов) совсем по другому поводу – в связи с нашумевшим доказательством Л.Г.Хачияна (1978 год) полиномиальной сложности задачи линейного программирования. Трудно представить себе более далекую от ЗОЛБ проблему – и, тем не менее, в обоих случаях обращение к методам центрированных отсечений привело к прорыву в соответствующей области. С той разницей, что результат Хачияна носит чисто теоретический характер (его полиномиальный алгоритм оказался медленным), а в нашем случае – прикладной.

И еще о теории и практике. Когда, в связи с теоремой Хачияна, метод центров тяжести оказался на виду, многие авторы отзывались о нем как о важном лишь в теоретическом отношении (звиду свойства оптимальности) предшественнике метода эллипсоидов. В практическом же отношении метод характеризовался как "нереализуемый" из-за сложности отыскания центра тяжести многогранника (в [17] доказывалась даже NP -трудность данной задачи). Однако на самом деле центр тяжести можно вычислять приближенно, причем без заметного ухудшения качества метода. (Если, допустим, в приведенной выше оценке для объемов локализаторов константу $1 - e^{-1} \approx 0.63$ заменить на 0.7, алгоритм останется экспоненциальным и достаточно быстрым). Одной из таких версий приближенного отыскания центров тяжести (причем стохастической, что естественно) как раз и является СМЦТ - вполне реализуемый и не уступающий при решении ЗОЛБ методу эллипсоидов. По-видимому, он допускает дальнейшее улучшение, т.к. речь пока идет о первом реализованном варианте, где некоторые параметры выбраны достаточно произвольно. Вообще, выбор из схемы отсечений метода, наилучшего для ЗОЛБ (если о таком едином методе вообще можно говорить), вероятно, потребует обширных экспериментов.

Разумеется, когда речь идет лишь о свойстве полиномиальности (и, стало быть, показатель степени не имеет никакого значения), наиболее удобным является метод описанных эллипсоидов; здесь он приобрел заслуженную популярность. Различные приложения метода эллипсоидов обсуждаются, например, в обзорном докладе Л.Ловаса на математическом конгрессе в Киото [18]. Интересно, что много говоря о применениях метода эллипсоидов в различных областях математики, автор даже не упоминает такую область, как оптимальное управление. Это лишний раз подчеркивает, что и спустя 24 года после Московского конгресса связь между схемой отсечений и оптимальным управлением все еще оставалась практически неизвестной.

Говоря о переоценке ценностей, нельзя забывать и самого принципа максимума. Теперь ясно, что он является мощным практическим инструментом решения ЗОЛБ; все дело в том, чтобы рационально применять этот принцип, т.е. сочетать его с адекватными средствами выпуклого программирования.

5. Мы не описываем здесь детально новый алгоритм для ЗОЛБ (СМЦТ), так как фактически он уже изложен в [16],[19]. Остановимся лишь на нескольких моментах.

Пара соотношений (см.[2])

$$(N(p), p) = 0, \quad (N(p), \psi_0) \geq 0, \quad (p \in D)$$

(по поводу обозначений см.[2] и [16]) является по существу прямым указанием на возможность применения схемы отсечений (даже без привлечения функции Нейшгадта). Исходя из этого, в [16] предлагалось решать ЗОЛБ методом центров тяжести; там же отмечалась возможность понижения размерности. Из всех блоков намеченного в [16] алгоритма наиболее проблемным был блок приближенного определения центра тяжести локализатора. В [16] предлагалось использовать напрашивавшуюся версию метода Монте-Карло:

генерировать в очередном локализаторе большое число независимых равномерно распределенных точек и брать их среднее значение. Эта простая идея, однако, отнюдь не проста для реализации - тем более, что приходится иметь дело с последовательностью многогранников быстро убывающего объема. В СМЦТ этот блок полностью переработан: хотя и здесь не обошлось без метода Монте-Карло, но применялась другая версия - менее очевидная, но оказавшаяся вполне эффективной.

Именно, на каждой итерации СМЦТ центр тяжести x локализатора V приближенно определяется по формуле

$$x \approx x_0 + \frac{n}{n+1} \frac{\sum_{i=0}^m C\xi_i \cdot \rho^{n+1}(x_0, V, C\xi_i) / \|C\xi_i\|^{n+1}}{\sum_{i=1}^m \rho^n(x_0, V, C\xi_i) / \|C\xi_i\|^n}$$

Здесь ξ_1, ξ_2, \dots - независимые реализации случайного вектора ξ , равномерно распределенного на единичной сфере в \mathbf{R}^n ; x_0 - внутренняя точка V ; $C: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ - невырожденное линейное преобразование, $\rho(x_0, V, y)$ - расстояние от точки x_0 до границы V в направлении y .

Правая часть сходится по вероятности к x при $m \rightarrow \infty$. Слишком большие значения m неуместны, так как требуют излишних затрат времени; слишком малые же могут повести к неудовлетворительной точности. Здесь требуется оптимизационный компромисс, который может базироваться на обширных экспериментах. (Фактически пока применялась формула $m = 5 \cdot 2^n$, носящая чисто произвольный характер).

Линейные операции C меняются при переходе от одной итерации к другой по простым правилам. Роль их, приблизительно говоря, состоит в частичной нейтрализации того неприятного факта, что локализаторы, как правило, имеют тенденцию к вырождению (т.е. "сплющиваются" по некоторым измерениям).

Таков, в общих чертах, СМЦТ - по-видимому, первый из методов схемы центрированных отсечений, носящий стохастический характер.

Литература

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: ФМ, 1961.
- [2] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1978.
- [3] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- [4] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [5] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [6] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. СМБ. М.: Наука, 1978.
- [7] Справочник по теории автоматического управления /под ред. Красовского А.А. М.: Наука, 1987.
- [8] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [9] Левин А.Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклой функции // ДАН. 1965. Т.160. N 6. С. 1241-1243.
- [10] Newman D.J. Location of the maximum on unimodal surfaces // J. ACM. 1965. V.12. N 3. P. 395-398.
- [11] Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
- [12] Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.
- [13] Тарасов С.П., Хачиян Л.Г., Эрлих И.И. Метод вписанных эллипсоидов // ДАН. 1988. Т.298. С. 1081-1085.
- [14] Yamnitsky V., Levin L.A. An old linear programming algorithm runs in polynomial time // 23rd Annual Symp. on Found. of Comput. Sci. IEEE. New York, 1982. P.327-328.

- [15] Методы решения задач математического программирования и оптимального управления /под ред. Меренкова А.П. Новосибирск: Наука, 1984.
- [16] Левин А.Ю. Линейное оптимальное быстродействие и центрированные сечения //Вестник Яросл. ун-та. 1975. Вып. 12. С. 87-93.
- [17] Хачиян Л.Г. О сложности вычисления объема многогранника // Изв. АН. ТК. 1988. N 3. С. 58-59.
- [18] Ловас Л. Геометрические алгоритмы и алгоритмическая геометрия // Международный конгресс математиков в Киото (1990). М.: Мир, 1996. С. 192-218.
- [19] Бузинов А.А. О методах отсечений в линейном оптимальном быстродействии //Яросл. гос.ун-т., Препринт №2. Ярославль, 2000. С. 1-15.

УДК 621.382

Потоковый нейрон с альтернативными синапсами

Лукьянов А.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Предлагаемая в данной статье схема цифрового нейрона с альтернативными синапсами состоит только из простых логических элементов, нескольких сумматоров и нескольких генераторов случайных чисел. Это обеспечивает низкую стоимость аппаратной реализации и возможность наращивания количества синапсов.

Приводится описание схемы, математическая модель, результаты экспериментов на программной модели. Для обучения используется метод Хебба и оптимизационный алгоритм Rprop.

1. Введение

В работе предлагается схемотехническая модель нейрона с альтернативными синапсами, в котором информация представляется в виде среднего значения стохастических последовательностей (потоков). Следуя [2, 3, 4, 5], такие нейроны будем называть потоковыми.

Потоковые нейроны разрабатываются с целью уменьшения аппаратных затрат и стоимости аппаратной реализации нейронных сетей. Это позволяет создавать сети больших размеров и увеличивать число синапсов. Одним из положительных свойств потоковых нейронов также является относительная устойчивость к ошибкам передачи данных. Потоковые нейроны были разработаны на основе биологических данных о возможности передачи информации между нейронами в виде серий импульсов определенной плотности [6, 8, 7].

В статье [3] рассматривается реализация потокового нейрона, в котором число генераторов случайных битов пропорционально числу синапсов нейрона. В работе [4] число генераторов случайных битов было сокращено до $\log_2 N$, где N — количество синапсов.

В статье [1] предлагалась схема потокового нейрона, в которой имеется малое число генераторов случайных битов, не зависящее от количества синапсов. На выход этого нейрона поступает последовательность значений из множества $\{-1, 0, 1\}$.

В данной статье рассматривается модификация этого потокового нейрона, в котором на выход поступает две последовательности y_t^+ и y_t^- , для положительных и отрицательных значений. Каждый синапс имеет два весовых коэффициента, соответствующих положительным и отрицательным значениям, поступающим на вход нейрона. Следуя [9], такие нейроны будем называть А-нейронами или нейронами с альтернативными синапсами. В той же статье показано, что А-нейроны в среднем обладают лучшими классифицирующими способностями по сравнению с обычными нейронами. Формальная модель А-нейрона была разработана на основе биологических данных о существовании пар согласованно функционирующих нейронов [14, 16, 15], важную роль этих нейронных структур отмечает Ю. Д. Кропотов в [10, 11, 12, 13].

Исследуется точная математическая модель данного потокового А-нейрона, для обучения используется метод Хебба и оптимизация на приближенной линейной модели. Результаты обучения на приближенной модели проверяются с помощью точного вычисления функции нейрона, а также на программной модели. Для тестирования нейрона на программной модели используется задача ассоциативной памяти на полностью связанной сети.

2. Основные элементы нейрона

На вход рассматриваемого нейрона поступают $2N$ последовательностей $(x_{i1}^+, \dots, x_{it}^+, \dots)$ и $(x_{i1}^-, \dots, x_{it}^-, \dots)$, где $x_{it}^+, x_{it}^- \in \{0, 1\}$, $i \in \{1 \dots N\}$, t — дискретное время. Выполняется условие $x_{it}^+ x_{it}^- = 0$. Имеется $2N$ синаптических коэффициентов $w_1^+, w_1^-, \dots, w_N^+, w_N^-$, два пороговых коэффициента w_0^+, w_0^- и регистр z , в котором накапливается некоторое суммарное значение. На выход нейрона подаются две последовательности $(y_1^+, \dots, y_t^+, \dots)$ и $(y_1^-, \dots, y_t^-, \dots)$, где $y_t^+, y_t^- \in \{0, 1\}$, формируемые в соответствии со знаком значения регистра z и коэффициентом разреженности b .

Синаптические и пороговые коэффициенты w_i^+ и w_i^- кодируются w' битами и битом знака, регистр z кодируется $(z' + w' + 2)$ битами и представляется в форме дополнения до 1. Коэффициент b кодируется b' битами. Будем считать, что величины принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} w_i^+, w_i^- &\in \{-2^{w'} + 1, \dots, 2^{w'} - 1\}, \\ z &\in \{-2^{z'+w'+1}, \dots, 2^{z'+w'+1} - 1\}, \\ b &\in [0; 1). \end{aligned}$$

В состав нейрона всего входит:

- 1) $(2N + 2)$ регистров разрядности $w' + 1$, один регистр разрядности $z' + w' + 2$, один регистр разрядности b' .
- 2) порядка $4Nw'$ битовых логических элементов;
- 3) две шины квази-суммирования разрядности w' ;
- 4) четыре сумматора разрядностей $w' + 1$, $w' + 2$, $w' + 3$ и $z' + w' + 2$;
- 5) b' генераторов случайных битов и порядка b' битовых логических элементов.

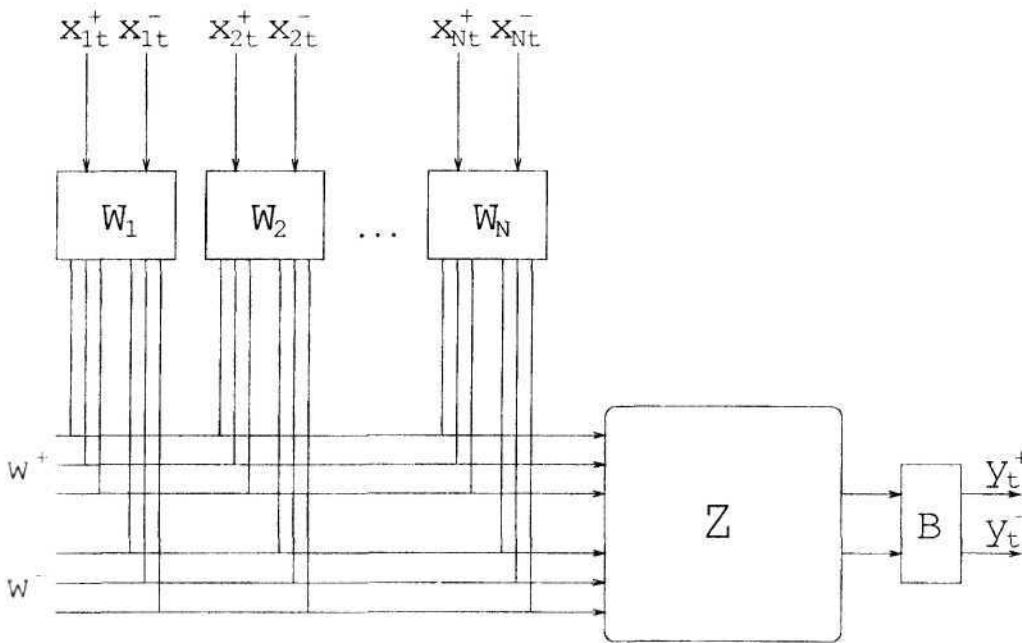


Рис. 1. Схема нейрона

На рис. 1 изображена схема описываемого нейрона. Блоки $W_1 - W_N$ содержат регистры с синаптическими коэффициентами $(w_1^+, w_1^-, \dots, w_N^+, w_N^-)$ и устройства выбора. Блок Z содержит регистры z , w_0^+ и w_0^- , а также ряд сумматоров. Блок B содержит регистр b и осуществляет вероятностную фильтрацию.

3. Описание работы нейрона

Введем необходимые обозначения. Определим функцию $\text{bit}_k w$, которая принимает значение k -го бита отрицательного числа w . Пусть

$$w = \sum_i 2^{i-1} b_i, \quad b_i \in \{0, 1\}.$$

Тогда положим

$$\text{bit}_k w = b_k.$$

Определим следующие функции знака:

$$\begin{aligned} \text{sgn}^+(z) &= \begin{cases} 0, & \text{если } z < 0; \\ 1, & \text{если } z \geq 0, \end{cases} \\ \text{sgn}^-(z) &= \begin{cases} 1, & \text{если } z < 0; \\ 0, & \text{если } z \geq 0, \end{cases} \\ \text{sgn}(z) &= \text{sgn}^+(z) - \text{sgn}^-(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Будем использовать операцию $\{x\}$ как округление к ближайшему целому.

Опишем работу нейрона в момент времени t .

На входы нейрона поступают значения x_{it}^+ и x_{it}^- , $i \in \{1, \dots, N\}$.

В зависимости от входных значений x_{it}^+ , x_{it}^- и знаков синаптических коэффициентов w_i^+ и w_i^- , на одну из шин квази-суммирования подается значение $|w_i^+|$ или $|w_i^-|$. Обозначим поступающие из блока \mathbf{W}_i в момент времени t на положительную шину значения $w_i^+(t)$, а на отрицательную шину — $w_i^-(t)$:

$$\begin{aligned} w_i^+(t) &= x_{it}^+ |w_i^+| \text{sgn}^+(w_i^+) + x_{it}^- |w_i^-| \text{sgn}^+(w_i^-), \\ w_i^-(t) &= x_{it}^+ |w_i^+| \text{sgn}^-(w_i^+) + x_{it}^- |w_i^-| \text{sgn}^-(w_i^-), \\ \text{bit}_k w_i^+(t) &= x_{it}^+ \text{bit}_k |w_i^+| \text{sgn}^+(w_i^+) + x_{it}^- \text{bit}_k |w_i^-| \text{sgn}^+(w_i^-), \\ \text{bit}_k w_i^-(t) &= x_{it}^+ \text{bit}_k |w_i^+| \text{sgn}^-(w_i^+) + x_{it}^- \text{bit}_k |w_i^-| \text{sgn}^-(w_i^-), \end{aligned} \quad (2)$$

$$k \in \{1, \dots, w'\}. \quad (3)$$

Следует заметить, что в вышеприведенных выражениях сумма может быть заменена на побитовое $\langle\langle \text{ИЛИ} \rangle\rangle$ так как хотя бы одно из двух слагаемых равно нулю, а умножение — на операцию $\langle\langle \text{И} \rangle\rangle$, так как $x_{it}^\pm, \text{sgn}^\pm(w_i^\pm) \in \{0, 1\}$

Биты значений $w^+(t)$ и $w^-(t)$, получаемые на шинах в момент времени t , будут равны:

$$\begin{aligned} \text{bit}_k w^+(t) &= \bigvee_{i=1}^N \text{bit}_k w_i^+(t), \\ \text{bit}_k w^-(t) &= \bigvee_{i=1}^N \text{bit}_k w_i^-(t), \\ k &\in \{1, \dots, w'\}. \end{aligned}$$

Значения $w^+(t)$ и $w^-(t)$ поступают на вход блока \mathbf{Z} . На шаге t значение регистра z изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= z_t - \left[z_t 2^{-z'} \right] + \Delta z_t, \\ \Delta z_t &= w^+(t) - w^-(t) + w_0^+ \text{sgn}^+(z_t) - w_0^- \text{sgn}^-(z_t). \end{aligned} \quad (4)$$

Переполнение регистра z невозможно, так как:

$$\begin{aligned} \Delta z &\leq 2^{w'+1} - 2, \\ \max(z - \left[z 2^{-z'} \right] + \Delta z) &= \max(z - \left[z 2^{-z'} \right]) + \max(\Delta z) = \\ &= 2^{z'+w'+1} - 1 - 2^{w'+1} + 2^{w'+1} - 2 = \\ &= 2^{z'+w'+1} - 3 \leq 2^{z'+w'+1} - 1. \end{aligned}$$

Аналогично для нижнего предела.

На выход блока \mathbf{Z} подаются значения $\text{sgn}^+(z_t)$ и $\text{sgn}^-(z_t)$, определяемые в соответствии с (1). Эти значения поступают в блок \mathbf{B} .

Будем называть $S_t = \text{sgn}(z_t)$ состоянием нейрона в момент времени t .

На выход блока **B** с вероятностью b подаются значения $0, 0$, и с вероятностью $(1-b)$ значения $\text{sgn}^+(z_t)$ и $\text{sgn}^-(z_t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{y_t^+ = 0 \wedge y_t^- = 0\} &= b, \\ \mathbf{P}\{y_t^+ = \text{sgn}^+(z_t) \wedge y_t^- = \text{sgn}^-(z_t)\} &= 1 - b, \end{aligned}$$

При выполнении условия $w_i^- = -w_i^+$ данный нейрон эквивалентен описанному в статье [1].

4. Значения на выходе нейрона

Оценим вероятности $\mathbf{P}\{z_t \geq 0\}$ и $\mathbf{P}\{z_t < 0\}$ при заданном распределении случайных величин x_{it}^+, x_{it}^- и заданных значениях w_i^+, w_i^- .

Пусть величины x_{it}^+, x_{it}^- независимы для всех i и t . Тогда, учитывая (2), (3), получаем:

$$\begin{aligned} P_k^+ &= \mathbf{P}\{\text{bit}_k w^+(t) = 1\} = 1 - \prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{x_{it}^+ w_i^+ \text{bit}_k |w_i^+| \leq 0\} \mathbf{P}\{x_{it}^- w_i^- \text{bit}_k |w_i^-| \leq 0\}, \\ P_k^- &= \mathbf{P}\{\text{bit}_k w^-(t) = 1\} = 1 - \prod_{i=1}^N \mathbf{P}\{x_{it}^+ w_i^+ \text{bit}_k |w_i^+| \geq 0\} \mathbf{P}\{x_{it}^- w_i^- \text{bit}_k |w_i^-| \geq 0\}, \\ k &\in \{1, \dots, w'\}. \end{aligned}$$

Соответственно, математическое ожидание w^+, w^- :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}w^+ &= \sum_{k=1}^{w'} 2^{k-1} P_k^+, \\ \mathbf{M}w^- &= \sum_{k=1}^{w'} 2^{k-1} P_k^-, \\ \mathbf{M}w &= \mathbf{M}w^+ - \mathbf{M}w^- = \sum_{k=1}^{w'} 2^{k-1} (P_k^+ - P_k^-). \end{aligned}$$

Имеется несколько случаев, зависящих от значений w_0^+ и w_0^- :

- 1) при $\mathbf{M}w + w_0^+ \geq 0$ и $\mathbf{M}w - w_0^- \geq 0$, $\mathbf{P}\{z_t \geq 0\} \geq 1/2$, $\mathbf{M}z_t \geq 0$ при достаточно большом t ;
- 2) при $\mathbf{M}w + w_0^+ \leq 0$ и $\mathbf{M}w - w_0^- \leq 0$, $\mathbf{P}\{z_t \geq 0\} \leq 1/2$, $\mathbf{M}z_t \leq 0$ при достаточно большом t ;
- 3) при $\mathbf{M}w + w_0^+ < 0$ и $\mathbf{M}w - w_0^- > 0$ значение z_t колеблется около 0, при этом

$$\mathbf{P}\{z \geq 0\} \approx \frac{\mathbf{M}w - w_0^-}{-\mathbf{w}_0^+ - \mathbf{w}_0^-};$$

- 4) при $\mathbf{M}w + w_0^+ > 0$ и $\mathbf{M}w - w_0^- < 0$ регистр z имеет два стационарных состояния, больше и меньше нуля, при небольших t значение z_t будет сильно зависеть от начального состояния регистра z .

При выполнении условия $w_0^+ = -w_0^-$ можно легко вычислить $\mathbf{M}z_t$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}z_t &= 2^{z'} \mathbf{M}\Delta z + \mathbf{O}((1 - 2^{-z'})^t) = \\ &= 2^{z'} (w_0^+ + \mathbf{M}w) + \mathbf{O}((1 - 2^{-z'})^t). \end{aligned}$$

Вычислим $\mathbf{M}w$ в одном частном случае, необходимом для обучения. Пусть

$$\begin{aligned} \pi_i^+ &= \mathbf{P}\{x_{it}^+ = 0\}/b, \\ \pi_i^- &= \mathbf{P}\{x_{it}^- = 0\}/b, \end{aligned}$$

и выполняется условие $(\pi_i^+ = 1 \wedge \pi_i^- = 0) \vee (\pi_i^+ = 0 \wedge \pi_i^- = 1)$. Тогда значение \mathbf{Mw} можно получить следующим образом (предполагая $0^0 = 1$):

$$\begin{aligned} N_k^+ &= \sum_{i=1}^N \pi_i^+ \text{bit}_k |w_i^+| \text{sgn}^+(w_i^+) + \sum_{i=1}^N \pi_i^- \text{bit}_k |w_i^-| \text{sgn}^+(w_i^-), \\ N_k^- &= \sum_{i=1}^N \pi_i^+ \text{bit}_k |w_i^+| \text{sgn}^-(w_i^+) + \sum_{i=1}^N \pi_i^- \text{bit}_k |w_i^-| \text{sgn}^-(w_i^-), \\ \mathbf{Mw} &= \sum_{k=1}^{w'} 2^{k-1} (b^{N_k^-} - b^{N_k^+}). \end{aligned} \tag{5}$$

5. Ассоциативная память на сети Хопфилда

Для демонстрации возможностей потокового А-нейрона рассмотрим задачу ассоциативной памяти на сети Хопфилда.

Сеть состоит из N нейронов, выход каждого нейрона поступает на входы всех остальных нейронов, связь на себя отсутствует. Требуется обучить данную сеть на некоторое заданное множество изображений $\{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^P\}$, $\mathbf{X}^m = (\mathbf{X}_1^m, \dots, \mathbf{X}_N^m)$, $\mathbf{X}_i^m \in \{-1, 1\}$.

Для успешного обучения необходимо выполнение условия устойчивости, то есть обученная сеть, начальное состояние которой было установлено в соответствии с любым эталонным изображением, остается в этом состоянии в течение достаточно длительного времени. Желательно, чтобы при наличии помех на изображении сеть возвращалась бы в состояние, соответствующее исходному изображению без помех с достаточно большой вероятностью.

Обозначим синаптические коэффициенты j -того нейрона w_{ij}^\pm , входные последовательности — x_{ij}^\pm , выходные — y_{ij}^\pm . На синапс с коэффициентом w_{ij}^\pm поступает выходная последовательность i -того нейрона y_{ij}^\pm . Выполняется условие $w_{jj}^\pm = 0$.

Будем обучать каждый нейрон независимо. Обозначим обучаемый нейрон индексом j . Требуется найти коэффициенты w_{ij}^\pm ($0 \leq i \leq N$), такие что

$$\text{sgn}(W(\mathbf{X}^m) + \mathbf{w}_0^+ \text{sgn}^+(\mathbf{X}_j^m) - \mathbf{w}_0^- \text{sgn}^-(\mathbf{X}_j^m)) = \text{sgn}(X_j^m) \quad (\forall m \in \{1, \dots, P\}), \tag{6}$$

где $W(\mathbf{X}^m)$ вычисляется в соответствии с (5), полагая

$$\begin{aligned} \pi_i^+ &= \text{sgn}^+(X_i^m), \\ \pi_i^- &= \text{sgn}^-(X_i^m). \end{aligned}$$

На первом шаге обучения вычисляются величины w_{ij}^\pm , ($1 \leq i \leq N$) методом Хебба или методом оптимизации. На втором шаге вычисляются величины w_0^\pm следующим способом:

$$\begin{aligned} w_0^+ &= \left[2^{w'} \xi - \min_{X_j^m > 0} W(\mathbf{X}^m) \right], \\ w_0^- &= \left[\max_{X_j^m < 0} W(\mathbf{X}^m) - 2^{w'} \xi \right], \end{aligned}$$

где ξ — небольшое положительное число. От значения ξ зависит, насколько легко нейрон меняет состояние.

6. Обучение по Хеббу

Обучение по стандартному Хеббу без использования альтернативных синапсов:

$$\begin{aligned} w_{ij}^+ &= \left[\frac{2^{w'} - 1}{P} \sum_{m=1}^P X_j^m X_i^m \right], \\ w_{ij}^- &= -w_{ij}^+. \end{aligned}$$

Обучение с помощью модифицированного метода Хебба, описанного в [1], без альтернативных синапсов (здесь $0/0=0$):

$$a_{ij}^+ = \frac{\sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^+(X_i^m)}{\sum_{m=1}^P \operatorname{sgn}^+(X_i^m)},$$

$$a_{ij}^- = \frac{\sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^-(X_i^m)}{\sum_{m=1}^P \operatorname{sgn}^-(X_i^m)},$$

$$w_{ij}^+ = \left[(2^{w'} - 1)(a_{ij}^+ - a_{ij}^-) / 2 \right],$$

$$w_{ij}^- = -w_{ij}^+.$$

Обучение с помощью стандартного метода Хебба, с использованием альтернативных синапсов (описано в [9]):

$$w_{ij}^+ = \left[\frac{2^{w'} - 1}{P} \sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^+(X_i^m) \right],$$

$$w_{ij}^- = \left[\frac{2^{w'} - 1}{P} \sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^-(X_i^m) \right].$$

Обучение с помощью модифицированного метода Хебба, с использованием альтернативных синапсов (здесь $0/0=0$):

$$w_{ij}^+ = \left[(2^{w'-1}) \frac{\sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^+(X_i^m)}{\sum_{m=1}^P \operatorname{sgn}^+(X_i^m)} \right],$$

$$w_{ij}^- = \left[(2^{w'-1}) \frac{\sum_{m=1}^P X_j^m |X_i^m| \operatorname{sgn}^-(X_i^m)}{\sum_{m=1}^P \operatorname{sgn}^-(X_i^m)} \right].$$

7. Оптимизационное обучение

Для обучения нейрона без А-синапсов будем оптимизировать функцию E :

$$E(\omega) = \sum_{m=1}^P (s(f(\mathbf{X}^m, \omega)) - \mathbf{X}_j^m)^2,$$

$$f(\chi, \omega) = \sum_{i=1}^N \chi_i \omega_i,$$

$$s(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

После нахождения локального минимума ω^* весовые коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$w_i^+ = \left[\frac{(2^{w'} - 1) \omega_i^*}{\max_k |\omega_k^*|} \right],$$

$$w_i^- = -x_i^+.$$

Для обучения Λ -нейрона будем оптимизировать функцию E_a :

$$E_a(\omega^+, \omega^-) = \sum_{m=1}^P \left(s(f_a(\mathbf{X}^{m(+)}, \mathbf{X}^{m(-)}, \omega^+, \omega^-)) - \mathbf{X}_j^m \right)^2,$$

$$f_a(x^+, x^-, \omega^+, \omega^-) = \sum_{i=1}^N x_i^+ \omega_i^+ + \sum_{i=0}^N x_i^- \omega_i^-,$$

$$\mathbf{X}^{m(+)} = (X_1^m \operatorname{sgn}^+(X_1^m), \dots, X_N^m \operatorname{sgn}^+(X_N^m)),$$

$$\mathbf{X}^{m(-)} = (X_1^m \operatorname{sgn}^-(X_1^m), \dots, X_N^m \operatorname{sgn}^-(X_N^m)).$$

$$s(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

После нахождения локального минимума ω^{+*} , ω^{-*} весовые коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$w_i^+ = \left[\frac{(2^{w'} - 1) \omega_i^{+*}}{\max_k |\omega_k^{+*}|} \right],$$

$$w_i^- = \left[\frac{(2^{w'} - 1) \omega_i^{-*}}{\max_k |\omega_k^{-*}|} \right].$$

При оптимизации используется алгоритм Rprop [18].

8. Результаты эксперимента

Моделировалась полносвязная сеть 8×8 , решавшая задачу восстановления изображения по образцу с помехами.

Сеть обучалась вышеописанными методами на 10 заглавных буквах латинского алфавита A-J, заданных матрицами 8×8 из стандартного шрифта. Изображения приведены в [1].

На основе предыдущих экспериментов были выбраны следующие параметры: $w' = 8$, $z' = 7$, $b = 0.8$.

К каждому эталонному изображению случайным образом добавлялись помехи, состояние нескольких клеток изображения менялось на противоположное. Первая помеха выбиралась по номеру эксперимента, остальные — случайным образом. Сеть работала максимум 10000 шагов, при совпадении состояния сети с оригинальным изображением моделирование прекращалось, так как каждое эталонное изображение является устойчивым состоянием сети. Для каждой буквы эта процедура повторялась сериями по 64 раза, после каждой серии оценивалось среднеквадратичное отклонение, моделирование прекращалось по условию $\sigma < 0.01$. Таким образом, среднеквадратичное отклонение вероятности восстановления исходного изображения составляет 1%, для среднего по всем 10 буквам — около 0.3%. По правилу 3σ можно считать, что средний результат по 10 буквам имеет погрешность не более 1%.

В таблицах 1-6 приведены результаты экспериментов с разными методами обучения обычных нейронов и Λ -нейронов. Указано количество восстановлений исходного изображения в процентах по отношению к общему количеству экспериментов.

Результаты экспериментов показывают, что эффективность потоковых Λ -нейронов зависит от способа обучения, в случае стандартного метода Хейбба эффективность даже ухудшается. В случае модифицированного метода Хейбба и при оптимизационном обучении потоковые Λ -нейроны показывают лучшие результаты по сравнению с обычными потоковыми нейронами.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	88.4	95.5	93.0	88.9	96.7	96.7	92.1	94.8	89.0	93.7	92.87
2 (3.1%)	75.5	91.7	85.0	78.3	92.9	91.9	83.4	89.0	79.6	85.2	85.24
3 (4.7%)	60.7	86.0	77.2	68.8	89.0	88.6	75.2	83.2	70.6	73.8	77.32
4 (6.3%)	48.4	81.1	69.1	56.6	85.0	85.0	66.2	74.4	61.0	61.3	68.81
5 (7.8%)	35.9	73.7	60.0	46.3	79.8	80.7	55.8	67.6	52.9	48.2	60.11
6 (9.4%)	25.8	68.0	50.2	36.4	74.0	77.3	47.4	59.0	45.2	36.3	51.94
7 (10.9%)	18.0	59.8	40.9	27.6	65.3	71.2	38.9	51.0	39.5	27.2	43.92
8 (12.5%)	14.1	53.5	30.9	20.1	58.0	66.3	29.9	41.9	32.7	19.0	36.64
9 (14.0%)	9.0	43.4	22.0	13.0	50.1	60.3	21.8	34.9	28.7	11.5	29.46
10 (15.7%)	5.7	36.9	15.7	8.7	40.8	53.6	14.0	26.7	23.9	6.3	23.25

Таблица 1. Результат эксперимента при обучении по Хеббу без А-синапсов, $\xi = 0.005$.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	95.8	85.9	86.1	84.3	96.7	91.7	83.8	92.3	90.5	87.8	89.48
2 (3.1%)	92.1	73.1	72.9	70.1	92.7	84.7	67.3	82.6	81.0	77.4	79.40
3 (4.7%)	87.6	60.0	60.0	55.3	91.2	77.5	54.0	75.6	71.2	65.6	69.80
4 (6.3%)	83.0	48.6	48.7	44.4	87.1	69.5	41.5	65.9	64.8	56.4	60.97
5 (7.8%)	78.7	38.8	37.5	33.1	84.2	63.8	31.7	58.1	55.6	45.6	52.72
6 (9.4%)	73.9	28.6	28.4	25.3	79.8	56.8	23.5	49.8	49.4	36.2	45.17
7 (10.9%)	65.8	21.9	21.1	15.6	75.5	51.2	16.8	43.1	43.2	28.9	38.32
8 (12.5%)	60.8	15.4	14.1	10.9	70.7	45.3	11.5	36.6	37.5	22.9	32.58
9 (14.0%)	54.4	10.6	8.8	7.5	64.3	39.6	7.2	29.1	32.6	15.8	27.00
10 (15.7%)	48.3	7.7	5.2	4.6	59.9	34.3	5.1	23.5	28.6	11.1	22.83

Таблица 2. Результат эксперимента при обучении по методу Хебба для А-нейрона, $\xi = 0.005$.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	100	91.9	93.4	97.2	95.9	98.4	90.7	100	100	98.2	96.58
2 (3.1%)	99.5	83.5	87.6	93.4	91.9	96.2	79.6	100	100	95.0	92.67
3 (4.7%)	100	75.7	78.1	89.5	86.1	96.2	70.2	100	100	93.0	88.88
4 (6.3%)	100	68.7	70.7	85.7	80.6	93.1	62.2	100	100	89.8	85.07
5 (7.8%)	100	59.3	64.6	80.3	76.1	90.8	51.8	100	100	85.8	80.86
6 (9.4%)	99.5	51.3	57.5	75.1	70.4	88.8	43.6	100	100	81.6	76.78
7 (10.9%)	96.1	45.2	49.8	68.7	66.5	86.2	34.6	100	100	78.0	72.50
8 (12.5%)	95.5	37.5	42.4	63.5	59.7	84.1	28.5	100	100	73.8	68.51
9 (14.0%)	91.2	32.0	34.6	55.4	56.8	82.7	22.3	98.2	100	69.4	64.27
10 (15.7%)	88.7	26.3	31.0	49.4	50.1	80.0	17.8	100	100	64.3	60.77

Таблица 3. Результат эксперимента при обучении по модифицированному методу Хебба без А-синапсов, $\xi = 0.05$.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	100	93.2	96.9	100	97.0	98.4	95.2	100	100	98.4	97.92
2 (3.1%)	100	86.1	93.6	100	94.7	96.6	89.3	100	100	97.2	95.75
3 (4.7%)	100	80.7	87.4	100	92.1	94.7	83.6	100	100	95.2	93.37
4 (6.3%)	100	72.7	83.9	98.8	88.4	93.4	77.9	100	100	92.2	90.73
5 (7.8%)	100	66.2	78.8	96.6	85.3	89.2	72.9	100	100	90.1	87.91
6 (9.4%)	100	58.9	73.5	95.5	83.9	86.0	67.4	100	100	86.4	85.17
7 (10.9%)	100	52.5	68.2	92.2	78.9	83.1	59.8	100	98.8	81.3	81.49
8 (12.5%)	98.0	47.8	61.8	88.9	76.4	80.0	55.3	100	96.9	78.2	78.33
9 (14.0%)	96.6	40.9	58.1	82.1	73.4	74.2	50.5	98.4	92.9	72.6	73.97
10 (15.7%)	95.7	35.8	52.9	77.5	72.2	70.4	44.1	98.2	85.9	66.2	69.89

Таблица 4. Результат эксперимента при обучении по модифицированному методу Хебба для А-нейрона, $\xi = 0.05$.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	98.8	99.5	100	100	98.2	100	98.8	100	98.8	100	99.41
2 (3.1%)	96.1	100	100	100	96.2	100	100	100	100	100	99.23
3 (4.7%)	94.2	96.5	97.0	98.8	94.9	100	95.1	98.4	95.5	100	97.05
4 (6.3%)	92.1	95.0	100	98.2	90.9	100	95.1	97.4	91.8	100	96.04
5 (7.8%)	88.8	93.9	94.6	95.3	88.4	100	92.3	93.9	88.9	96.7	93.29
6 (9.4%)	85.5	90.4	91.0	93.5	86.0	97.5	90.0	92.1	84.9	95.4	90.63
7 (10.9%)	82.3	87.6	87.9	93.6	80.1	95.8	88.4	89.3	80.2	92.3	87.76
8 (12.5%)	78.7	84.0	84.7	89.9	78.8	94.6	82.9	84.5	73.8	91.2	84.30
9 (14.0%)	73.8	78.7	80.9	84.5	73.4	92.8	81.9	80.3	69.0	87.6	80.31
10 (15.7%)	68.9	75.0	75.3	80.2	69.3	89.4	79.1	76.8	61.2	83.5	75.89

Таблица 5. Результат эксперимента при оптимизационном обучении без А-синапсов, $\xi = 0.05$.

Кол-во помех	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Среднее
1 (1.6%)	100	100	100	100	98.4	100	100	100	100	100	99.84
2 (3.1%)	100	100	100	100	96.4	100	99.5	100	100	100	99.59
3 (4.7%)	100	99.5	100	100	95.6	100	98.8	100	98.0	100	99.19
4 (6.3%)	100	100	100	100	93.5	100	100	100	93.7	100	98.72
5 (7.8%)	100	100	99.5	100	91.5	100	97.8	99.2	90.0	100	97.80
6 (9.4%)	100	100	100	99.5	89.3	100	97.0	99.2	83.2	100	96.82
7 (10.9%)	100	100	100	100	87.5	98.8	96.4	100	76.8	100	95.95
8 (12.5%)	98.8	97.8	100	98.2	85.4	100	95.4	95.5	69.1	100	94.03
9 (14.0%)	99.2	96.1	97.8	97.8	82.9	100	94.4	94.7	60.0	99.5	92.23
10 (15.7%)	97.8	94.4	95.3	94.9	80.3	98.4	92.2	93.6	50.5	100	89.74

Таблица 6. Результат эксперимента при оптимизационном обучении А-нейрона, $\xi = 0.05$.

Литература

- [1] Лукьянов А.В. Схемотехническая модель цифрового нейрона, работающая со средним значением стохастического потока // Моделирование и анализ информационных систем. 1999. Т. 6, № 1. С. 29–35.
- [2] Tomlinson M.S., Walker D.J. DNNA: A digital neural networks architecture // Proc. Int. Neural Networks Conf. (INNC-90). 1990. V. 2. P. 589–592.
- [3] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Цифровая реализация потокового нейрона // Радиотехника и электроника. 1995. № 11. С. 1652–1660.
- [4] Маматов Ю.А., Булычев С.Ф., Карлин А.К. и др. Схемотехнические модели построения вероятностных нейронов на базе цифровой техники // Микроэлектроника. 1996. Т. 25. № 1. С. 3–8.
- [5] Тимофеев Е.А. Моделирование нейрона, передающего информацию плотностью потока импульсов // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 190–199.
- [6] Соколов Е.Н., Вайткявичус Г.Г. Нейроинтеллект. От нейрона к нейрокомпьютеру. М.: Наука. 1989. 240 с.
- [7] Бернс Б. Неопределенность в нервной системе. М.: Мир, 1969. 252 с.
- [8] Экклс Дж. Физиология синапсов. М.: Мир, 1966. 396 с.
- [9] Короткин А.А., Панкратов А.В. Классифицирующие свойства нейронов с альтернативными синапсами // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль. 1997. Вып. 4. С. 118–123.
- [10] Кропотов Ю.Д. Мозговая организация восприятия и памяти: гипотеза о программировании действий // Физиология человека. 1989. Т. 15. № 3. С. 19–27.
- [11] Кропотов Ю.Д. Нейроинформатика: Основы, современное состояние и перспективы // Физиология человека. 1989. Т. 15. С. 130–149.
- [12] Кропотов Ю.Д., Пономарев В.А. Нейрофизиология целенаправленной деятельности // СПб.:Наука. Санкт-Петербург изд. фирма, 1993. 171 с.
- [13] Кропотов Ю.Д., Пахомов С.В. Математическое моделирование механизмов обработки сигналов нейронными популяциями в головном мозге: Сообщ. II. Влияние синаптической пластичности на свойства нейронной сети с локальными связями в стационарном режиме // Физиология человека. 1994. Т. 10. С. 405–410.
- [14] Wässle H., Boycott B.B., Illing R.B. Morphology and mosaic of on- and off-beta cells in the cat retina and some functional considerations // Proc. Roy. Soc. London. B. 1981. V. 212. P. 177–195.
- [15] Friesen W.O. Antifacilitation and facilitation in the cardiac ganglion of the spiny lobster *Punulirus interruptus* // J. Comp. Physiol. 1975. V. 101. P. 207–224.
- [16] Kidd M. Electron microscopy of the inner plexiform layer of the retina in the cat and pigeon // J. Anat. (Lond.). 1962. V.96. P. 179–187.
- [17] Hebb D.O. The organization of Behavior. New York: Wiley. 1949
- [18] Riedmiller M., Braun H. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm // Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN). San Francisco, 1993. P. 586–591.

УДК 514.17

Об одной задаче А. Бездека

Карасёв Р.Н.¹

Московский Физико-технический институт

e-mail: r_n_karasev@mail.ru

В статье приводится доказательство одной гипотезы А. Бездека, которая была опровергнута задачей В.В. Произволова. Доказано, что у любого выпуклого m -многогранника X в \mathbb{R}^n и для всех $\{x_i\}_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \subset \mathbb{R}^n$ можно так выбрать $\lfloor m/2 \rfloor$ гиперграней $\{F_i\}_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor}$, чтобы выпуклые оболочки $\text{conv}(\{x_i\} \cup F_i)$ попарно не имели общих внутренних точек.

1. Формулировка основных результатов

Первая теорема была сформулирована для \mathbb{R}^2 в [1] в виде гипотезы А. Бездеком. Теоремы 2 и 3 были доказаны А.В. Богомольной, Ф.Л. Назаровым, С.Е. Рукшиным (см. [2]) в \mathbb{R}^2 и намечено доказательство в общем случае. Эти результаты являлись ответом на вопрос В.В. Произволова, поставленный на конференции по комбинаторной геометрии в Батуми в 1985 году (см. [3]).

Приведем некоторые обозначения. Для $V \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим через:

- i) $\text{conv } V, \text{lin } V, \text{aff } V$ — выпуклую, линейную, аффинную оболочку V ;
- ii) $\text{int } V, \text{cl } V, \text{bd } V$ и $|V|$ — внутренность (относительная для выпуклых V), замыкание, границу и число элементов V ;
- iii) $\text{dim}_l V, \text{dim}_a V, \text{codim } V$ — линейную и аффинную размерность, коразмерность V ;
- iv) $I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ — множество индексов и S^m — группа перестановок на I_m .

Будем считать $n \geq 2$.

Пусть L_1^n — пространство линейных функций на \mathbb{R}^n . Для $f \in L_1^n$ обозначим через:

- i) $H(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ — гиперплоскость;
- ii) $H^-(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$ — открытое полупространство;
- iii) $H^+(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$ — замкнутое полупространство.

Напомним, что *многогранное множество* $X = \bigcap_{i \in I_m} H^+(f_i)$ — это пересечение конечного семейства полупространств. Ограниченное многогранное множество называется *многогранником*. Для каждого многогранного множества X в дальнейшем будем считать, что множество функций $\{f_i\}_{i \in I_m}$ такое, что $\text{codim } H(f_i) \cap X = 1$ для всех $i \in I_m$. Тогда множества $F_i = H(f_i) \cap X$, $i \in I_m$, называются *гипергранями* X . Для многогранного множества X обозначим $H_i = H^-(f_i)$, $i \in I_m$.

Теорема 1. Пусть X — многогранное множество в \mathbb{R}^n , с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$ и $\{x_i\}_{i \in I_p} \subset \mathbb{R}^n$, где $p = \lfloor m/2 \rfloor$. Тогда существует такая инъекция $\sigma : I_p \rightarrow I_m$, что

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_p.$$

Число p в теореме 1 нельзя увеличить. Для $p > \lfloor m/2 \rfloor$ в [1] построен контрпример при $n = 2$. В дальнейшем будет показано, что, если теорема 1 верна при некотором n и данных p и m , то она должна быть верна и при $n' \leq n$ и тех же p и m . Следовательно, теорема 1 не верна для $p > \lfloor m/2 \rfloor$ при всех $n \geq 2$.

Теорема 2. Пусть $\{x_i\}_{i \in I_m} \subset \mathbb{R}^n$ и X — многогранник в \mathbb{R}^n с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$. Тогда существует $\sigma \in S^m$ такая, что $X \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)})$.

Теорема 3. Пусть X — многогранное множество в \mathbb{R}^n с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$ и $\{x_i\}_{i \in I_m} \subset X$. Тогда существует $\sigma \in S^m$ такая, что

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m.$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-01-00705

Теорема 4. Пусть X — многогранное множество в \mathbb{R}^n с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$ и $\{x_i\}_{i \in I_m} \subset \mathbb{R}^n \setminus X$. Если $|\{x_i\}_{i \in I_m} \cap \bigcup_{i \in I} H_i| \geq |I|$ для всех $I \subseteq I_m$, то существует $\sigma \in S^m$ такая, что

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m,$$

и при всех $i \in I_m$

$$\text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int } X = \emptyset.$$

Метод доказательства всех этих результатов является, по существу, одним и тем же и отличным от методов работ [1] и [2].

2. Вспомогательные утверждения

Дадим сначала несколько определений.

Определение 1. Будем говорить, что множество V в линейном (аффинном) пространстве L (A) находится в *общем положении* или $V \in LGP$ ($V \in AGP$), если

$$\dim_l U = \min\{|U|, \dim_l L\} \quad (\dim_a U = \min\{|U| - 1, \dim_a A\})$$

для всех конечных $U \subseteq V$.

Нам понадобится обобщение этого стандартного определения.

Определение 2. Пусть \mathcal{F} — семейство отображений λ конечного множества I в L (A), тогда отображение $\lambda \in \mathcal{F}$ находится в *общем положении* или $\lambda \in LGP(\mathcal{F})$ ($\lambda \in AGP(\mathcal{F})$), если

$$\dim \lambda(U) = \max_{\lambda' \in \mathcal{F}} \dim \lambda'(U) \quad \text{для всех } U \subseteq I.$$

Если семейство отображений \mathcal{F} — неприводимое алгебраическое подмногообразие в L^I (A^I), то легко видеть, что $LGP(\mathcal{F})$ ($AGP(\mathcal{F})$) — открыто и всюду плотно в \mathcal{F} .

Определение 3. Многогранное множество $S \subset \mathbb{R}^n$ назовем *простым*, если или S — симплекс, или $S = \bigcap_{i \in I_m} H^+(f_i)$ и $\{f_i\}_{i \in I_m} \in LGP$, $m \leq n$.

Для двух точек $a \neq b \in \mathbb{R}^n$ обозначим:

- i) $[ab]$, (ab) — отрезок с концами в a и b и $\text{int } [ab]$;
- ii) $\langle ab \rangle$, $[ab)$ — прямую, проходящую через a и b , луч с началом a , содержащий b ;
- iii) $\rangle ab) = [ab) \setminus \{a\} \setminus (ab)$ — луч на прямой $\langle ab \rangle$ с началом в b , не содержащий a .

Определение 4. Множество $U \supseteq V$ называется *V-звездным*, если для всех $u \in U$ и $v \in V$ отрезок $[uv] \subseteq U$. Очевидно, что если:

- i) $V \neq \emptyset$, то V -звездное множество U — звездно;
- ii) множества U_i , $i \in I$, — V -звездны, то $\bigcup_{i \in I} U_i$ и $\bigcap_{i \in I} U_i$ — V -звездны;
- iii) U — V -звездно и $W \subseteq V$, то U — W -звездно.

Лемма 1. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — многогранное множество с семейством всех гиперграней $\{F_i\}_{i \in I_m}$. Тогда $X = S \cap L$, где S — некоторое простое многогранное множество в \mathbb{R}^N , L — некоторое n -мерное подпространство \mathbb{R}^N , $F_i = G_i \cap L$ и $\{G_i\}_{i \in I_m}$ — множество гиперграней S . При этом, если X — многогранник, то S — симплекс.

Это утверждение хорошо известно, см. например [4].

Лемма 2. Пусть G — конечный неориентированный граф с множеством вершин $V \subset L_1^n$ и $V \in LGP$, с множеством ребер $E = \{\epsilon_i\}_{i \in I_l}$, $l \geq |V|$, и \mathcal{F} — семейство всех отображений $g: I_l \rightarrow L_1^n$ таких, что если $f_1, f_2 \in V$ — концы $e \in E$, то $H(f_1) \cap H(f_2) \subseteq H(g(e))$. Тогда существует $\emptyset \neq W \subseteq V$ такое, что

$$\bigcap_{i=1}^l H(g(\epsilon_i)) \subseteq \bigcap_{f \in W} H(f) \quad \text{для всех } g \in LGP(\mathcal{F}).$$

Доказательство. Так как $|E| \geq |V|$, то в G есть цикл. Пусть e_{i_1}, \dots, e_{i_m} — последовательные ребра цикла, а $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_m}$ — его последовательные вершины. По условию леммы, имеем:

$$\begin{aligned} g(e_{i_1}) &= a_{11}f_{i_1} + a_{21}f_{i_2}, \quad g(e_{i_2}) = a_{22}f_{i_2} + a_{32}f_{i_3}, \dots, \\ g(e_{i_{m-1}}) &= a_{m-1,m-1}f_{i_{m-1}} + a_{mm-1}f_{i_m}, \quad g(e_{i_m}) = a_{mm}f_{i_m} + a_{1m}f_{i_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{lin}\{g(e_{i_k})\}_{k=1}^m \subseteq \text{lin}\{f_{i_k}\}_{k=1}^m \quad \text{и} \quad \text{lin}\{g(e_{i_k})\}_{k=1}^m = \text{lin}\{f_{i_k}\}_{k=1}^m,$$

если $g \in LGP(\mathcal{F})$. Но тогда

$$\bigcap_{i=1}^l H(g(e_i)) \subseteq \bigcap_{k=1}^m H(g(e_{i_k})) = \bigcap_{k=1}^m H(f_{i_k}).$$

Лемма доказана.

Доказательство следующих лемм аналогично топологическому доказательству теоремы Хелли (см. [5]).

Лемма 3. Если $\{V_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство замкнутых подмножеств симплекса S в \mathbb{R}^{d-1} с гипергранями $\{F_i\}_{i=1}^d$, что V_i — F_i -звездно и $S \subseteq \bigcup_{i=1}^d V_i$, то $\bigcap_{i=1}^d V_i \neq \emptyset$.

Докажем несколько более общее утверждение, которое является обобщением теорем Кли и Леви (см. [5]).

Лемма 4. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ — гомотопически тривиальное множество и $\{F_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство подмножеств S , что $F_J = \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$ и гомотопически тривиально для всех $J \subset I_d, J \neq I_d$. Если $\{V_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство замкнутых подмножеств S , что V_i — F_i -звездно и $S \subseteq \bigcup_{i=1}^d V_i$, то $\bigcap_{i=1}^d V_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $J \subset I_d$ и $V_J = \bigcap_{i \in J} V_i$. Так как множества V_i — F_J -звездны, то V_J также F_J -звездно. Поэтому множество V_J гомотопически тривиально, а значит, когомологические группы $H^m(V_J) = 0$ при $m > 0$.

Предположим, $\bigcap_{i=1}^d V_i = \emptyset$. По теореме Лере (см. [6]), для когомологий Чеха покрытия $\mathcal{V} = \{V_i\}$ пространства S имеем $H^i(S, \mathbb{Z}) = H^i(\mathcal{V}, \mathbb{Z})$. В частности,

$$\mathbb{Z} = H^{d-2}(\mathcal{V}, \mathbb{Z}) = H^{d-2}(S, \mathbb{Z}) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^d$ — такое семейство открытых подмножеств симплекса S в \mathbb{R}^{d-1} с гипергранями $\{F_i\}_{i=1}^d$, что: i) $U_i \cup \text{int } F_i$ — $\text{int } F_i$ -звездно; ii) $\text{int } S \subseteq \bigcup_{i=1}^d U_i$; iii) у всех $p \in \text{bd } S$ существует такая окрестность $N(p)$, что $N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i, p \in F_i} U_i$. Тогда $\bigcap_{i=1}^d U_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Можно считать S правильным симплексом. Пусть

$$U_i^k = A_i^k(U_i), \quad V_i^k = \text{cl } U_i^k,$$

где A_i^k — сжатие относительно гиперплоскости, проходящей через грань $\{F_i\}$ с коэффициентом $(1 - 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $U_i^k \subseteq U_i^{k'}$ и $V_i^k \subseteq V_i^{k'}$ при $k \leq k'$ и так как $F_i \subseteq \text{cl } U_i$, то $F_i \subseteq V_i^k$ для всех $i \in I_d$ и $k \in \mathbb{N}$. Также ясно, что

$$V_i^k \cap \text{int } S \subseteq U_i \quad \text{и} \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_i^k \cap \text{int } S = U_i.$$

Пусть $G = \bigcap_{i \in J_G} F_i$ — грань симплекса, где $J_G = \{i \in I_d : G \subseteq F_i\}$. Докажем, индукцией по $\text{codim } G$, что у $\text{int } G$ есть такая окрестность W_G , что, при некотором k ,

$$W_G \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in J_G} U_i^k.$$

Если $\text{codim } G = 1$, то $G = F_i$ для некоторого i . Тогда $U_i^k \cup \text{int } F_i$ — открытое множество в топологии пространства S и $\text{int } F_i \subseteq U_i^k \cup \text{int } F_i$.

Индукционный переход. Пусть $p \in \text{int } G$, тогда по условию леммы существует такая окрестность $N(p)$, что

$$N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{p \in F_i} U_i.$$

Можно считать, что $N(p) \cap F_i = \emptyset$, если $i \notin J_G$. Пусть L_p^\perp — плоскость такая, что

$$p \in L_p^\perp, \quad G \perp L_p^\perp \quad \text{и} \quad \text{codim } L_p^\perp = \dim_a G.$$

Возьмем в L_p^\perp сферу Σ с центром в p такую, что $\Sigma \subset N(p)$.

Очевидно, если грань G' такая, что $\Sigma \cap G' \neq \emptyset$, то $G \subset G'$ и $\dim_a G' > \dim_a G$. Поэтому, по предположению индукции, для некоторого k найдется такая окрестность $W_{G'}$ множества $\text{int } G'$, что

$$W_{G'} \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in J_{G'}} U_i^k.$$

Следовательно, $W = \bigcup_{G \subset G'} W_{G'}$ — окрестность $(\bigcup_{G' \supset G} G') \cap \Sigma$ и

$$W \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{G' \supseteq G} \bigcup_{i \in J_{G'}} U_i^k$$

при некотором k . Поэтому множество

$$Y = (\Sigma \cap \text{int } S) \setminus W = (\Sigma \setminus W) \cap \text{int } S$$

замкнуто, а значит, и компактно. Так как Y — компактно и

$$Y \subseteq N(p) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \in J_G} U_i^k,$$

то имеем $Y \subseteq \bigcup_{i \in J_G} U_i^k$, при некотором k . Поэтому, при некотором k ,

$$\Sigma \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in J_G} U_i^k.$$

Если $G \subseteq F_i$, то $U_i^k \cup \text{int } G$ — $\text{int } G$ -звездны и поэтому

$$\text{int conv}(\text{int } G \cup \Sigma) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in J_G} U_i^k.$$

Множество $\text{int conv}(\text{int } G \cup \Sigma)$ — окрестность $\text{int } G$ и индукционный переход доказан.

Таким образом, для некоторой окрестности $W \supset \text{bd } S$ и некоторого k , имеем,

$$W \cap \text{int } S \subseteq \bigcap_{i=1}^d U_i.$$

А так как $\text{int } S \setminus W$ — компактное множество, то, для некоторого k , имеем,

$$\text{int } S \setminus W \subseteq \bigcap_{i=1}^d U_i \implies \text{int } S \subseteq \bigcup_{i=1}^d U_i^k.$$

при некотором k . Но тогда, по лемме 3 и при этом k , имеем,

$$\bigcap_{i=1}^d V_i^k = Y \neq \emptyset \quad \text{и} \quad Y \cap \text{bd } S = \emptyset,$$

так как $V_i^k \cap \text{bd } S = F_i$. Поэтому $Y \subseteq \bigcap_{i=1}^d U_i$ и лемма доказана.

3. Доказательства основных утверждений

Заметим, что все теоремы достаточно доказать в случае, когда X — простое многогранное множество. По лемме 1, $X = S \cap L$, где S — простое многогранное множество, L — n -мерное подпространство \mathbb{R}^N и $F_i = F_i^S \cap L$, где $\{F_i^S\}_{i \in I_m}$ — гиперграни S .

В самом деле, теоремы 1–4 для X следуют из таких же утверждений для S . Так как

$$\text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) = L \cap \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}^S).$$

и если

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}^S) \text{ или } \text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}^S) \cap \text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}^S) = \emptyset, i \neq j.$$

то и

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \text{ или } \text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) = \emptyset, i \neq j.$$

Далее S — простое многогранное множество и $\{F_i\}_{i \in I_m}$ — его гиперграни.

Очевидно, что множество наборов $\{x_i\}_{i \in I_m}$ таких, что $\{x_i\}_{i \in I_m} \in AGP$ и $x_j \notin \text{aff } F_i$ для всех i, j , открыто и всюду плотно в множестве $A_m^N = \mathbb{R}^{Nm}$ всех наборов $\{x_i\}_{i \in I_m}$.

Пусть S — простое многогранное множество, $\{F_i\}_{i \in I_m}$ — его гиперграни,

$$I_m^3 = I_m \times I_m \times I_m, \quad \mathcal{I} = \{(i, j, k) \in I_m^3 : j > k\}, \quad \text{и } V = \{x_i\}_{i \in I_m} \subseteq \mathbb{R}^N,$$

тогда обозначим через $\mathcal{F}(S, V)$ семейство отображений $g : \mathcal{I} \rightarrow L_1^N$ таких, что

$$H(g(i, j, k)) = H(g_{ijk}) \supseteq \text{aff}(x_i, F_j \cap F_k),$$

а через $\mathcal{G}(S)$ — семейство отображений $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow L_1^N$ таких, что

$$H(\gamma_{ijk}) \supseteq F_j \cap F_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{j > k} H(\gamma_{ijk}) \neq \emptyset.$$

Ясно, что, если $g \in \mathcal{F}(S, V)$, то $g \in \mathcal{G}(S)$. Обратно, для $\gamma \in \mathcal{G}(S)$ возьмем для всех $i \in I_m$ некоторое

$$x_i \in \bigcap_{j > k} H(\gamma_{ijk}).$$

Получим $V = \{x_i\}_{i \in I_m} \subseteq \mathbb{R}^N$ такое, что $\gamma \in \mathcal{F}(S, V)$.

Если $\gamma \in LGP(\mathcal{G}(S))$, то $\dim_a \bigcap_{j > k} H(\gamma_{ijk})$ — минимальна и поэтому $|\bigcap_{j > k} H(\gamma_{ijk})| = 1$ для всех $i \in I_m$. Значит, в этом случае, γ однозначно определяет V_γ . Следовательно, множество

$$\{V_\gamma = \{x_i\}_{i \in I_m} : \gamma \in LGP(\mathcal{G}(S))\}$$

открыто и всюду плотно в множестве всех наборов A_m^N , так как \mathbb{R}^{Nm} — неприводимое алгебраическое многообразие.

Покажем, что теоремы 2–4 достаточно доказать для любого всюду плотного $B \subseteq A_m^N$. В самом деле, пусть $V = \{x_i\}_{i \in I_m} \in A_m^N$ и последовательность $V_k = \{x_i^{(k)}\}_{i \in I_m} \subseteq B$ такая, что

$$\lim_k \{x_i^{(k)}\}_{i \in I_m} = \{x_i\}_{i \in I_m},$$

и для $\{x_i^{(k)}\}_{i \in I_m}$ утверждение какой-либо из теорем 2–4 верно. Для каждого k получим некоторую перестановку (инъекцию) σ^k . Очевидно, что существует бесконечное $N \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $\sigma^k = \sigma$. Тогда

$$\text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) = \lim_k \text{conv}(\{x_i^{(k)}\} \cup F_{\sigma(i)}).$$

Если

$$x \in S \quad \text{и} \quad x \notin \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)})$$

то, при достаточно больших k ,

$$x \notin \text{conv}(\{x_i^{(k)}\} \cup F_{\sigma(i)}), \quad \text{так как } \text{conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \text{ — замкнуты.}$$

Этим случай теоремы 2 разобран.

В случае теоремы 3, если

$$x \in \text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \quad \text{при } i \neq j$$

то, при достаточно больших k ,

$$x \in \text{int conv}(\{x_i^{(k)}\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int conv}(\{x_j^{(k)}\} \cup F_{\sigma(j)}) \quad \text{при } i \neq j.$$

В случае теоремы 4, если для некоторого i

$$\text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int } S \neq \emptyset,$$

то, при достаточно больших k ,

$$\text{int conv}(\{x_i^{(k)}\} \cup F_{\sigma(i)}) \cap \text{int } S \neq \emptyset.$$

Рассмотрим следующие условия:

- (1) S — простое многогранное множество с гипергранями $\{F_i\}_{i \in I_m}$;
- (2) $V = \{x_i\}_{i \in I_m} \in AGP$ и $x_j \notin \text{aff } F_i$ для всех i, j ;
- (3) отображение $g \in LGP(\mathcal{G}(S)) \cap \mathcal{F}(S, V)$.

Заметим, что при выполнении этих условий $H(g_{ijk}) = \text{aff}(x_i, F_j \cap F_k)$, так как

$$\text{aff}(x_i, F_j \cap F_k) \subseteq H(g_{ijk}) \quad \text{и} \quad \dim_a H(g_{ijk}) = \dim_a \text{aff}(x_i, F_j \cap F_k).$$

Очевидно, что множество всех наборов $\{x_i\}_{i \in I_m}$, для которых условия (1)–(3) выполняются, всюду плотно в A_m^N . Поэтому в доказательстве теорем 2–4 будут предполагаться эти условия. При доказательстве теоремы 1 они не нужны, так как она следует из теорем 3 и 4 и поэтому она и будет доказана последней.

Доказательство теоремы 2. Можно считать, что S — симплекс, так как X — многогранник. Доказательство будем проводить индукцией по $\dim_a S$. Если $\dim_a S = 1$ — все очевидно. Разобьем доказательство на два случая в зависимости от выполнения следующего условия:

$$|\{x_j\}_{j \in I_m} \cap \bigcap_{i \in I} H_i| < m - |I| \quad \text{для всех } \emptyset \neq I \subseteq I_m. \quad (*)$$

Случай 1. Условие (*) не выполняется. Тогда существуют $I \subseteq I_m$ и $J \subseteq I_m$ такие, что

$$|J| \geq m - |I| \quad \text{и} \quad f_i(x_j) < 0 \quad \text{для всех } i, j \in J.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $|J| = m - |I|$. Пусть

$$A = \bigcap_{i \in I} F_i, \quad B = \bigcap_{i \notin I} F_i, \quad L = \text{aff } A.$$

Докажем, что

$$\text{conv}(\{x_j\} \cup B) \cap L \neq \emptyset \quad \text{для всех } j \in J.$$

Пусть p — ортогональная проекция на L^\perp (всюду далее L^\perp — подпространство \mathbb{R}^n такое, что $L \perp L^\perp$ и $\text{codim } L^\perp = \dim_a L$), тогда $p(S)$ — симплекс с вершиной $p(L) = p(A)$ и противоположной ей гипергранью $p(B)$. Имеем

$$[p(x_j)p(A)] \cap p(S) \neq \{p(A)\},$$

так как $f_i(x_j) < 0$, $f_i(A) = 0$, $i \in I, j \in J$ и для некоторой окрестности U точки $p(A)$, имеем

$$y \in U \cap p(S) \iff f_i(p^{-1}(y)) \geq 0 \quad \text{для всех } i \in I.$$

Поэтому $[p(x_j)p(A)] \cap p(B) \neq \emptyset$. Тогда имеем

$$p(L) = p(A) \in \text{conv}(\{p(x_j)\} \cup p(B)) = p(\text{conv}(\{x_j\} \cup B)) \quad \text{и} \quad \text{conv}(\{x_j\} \cup B) \cap L \neq \emptyset.$$

Для всех $j \in J$ возьмем любую $x'_j \in L \cap \text{conv}(\{x_j\} \cup B)$. Если $\dim_a A = 0$, то $J = \{j\}$ и

$$\text{conv}(\{x_j\} \cup B) \supseteq \text{conv}(A \cup B) = S.$$

В этом случае теорема доказана.

Если $\dim_a A > 0$, то для всех $j \in J$ возьмем любую $x'_j \in L \cap \text{conv}(\{x_j\} \cup B)$. Так как $\dim_a A = m - |I| - 1 = |J| - 1 < m - 1$, то, по предположению индукции, для симплекса A и множества $\{x'_j\}_{j \in J}$ существует инъекция $\sigma : J \rightarrow I_m$ такая, что

$$\bigcup_{j \in J} \text{conv}(\{x'_j\} \cup F_{\sigma(j)}^A) \supseteq A,$$

где F_j^A — гиперграни A .

Продолжим σ на $I_m \setminus J$ так, чтобы σ стала перестановкой I_m . Тогда

$$x'_j \in L \cap \text{conv}(\{x_j\} \cup B) \quad \text{и} \quad \text{conv}(\{x'_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq \text{conv}(\{x_j\} \cup B),$$

поэтому

$$\text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq \text{conv}(\{x'_j\} \cup F_{\sigma(j)}).$$

Следовательно, для всех $j \in J$, имеем

$$\text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq B \quad \text{и} \quad \bigcup_{j \in J'} \text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq A.$$

Тогда

$$\bigcup_{j \in I_m} \text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq \bigcup_{j \in J} \text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq \text{conv}(A \cup B) = S.$$

В этом случае теорема доказана.

Случай 2. Пусть условие (*) выполняется. Обозначим

$$U_i = \text{int } S \cap \bigcup_{j \in I_m} \left(\text{conv}(\{x_j\} \cup \text{int } F_i) \setminus \{x_j\} \right).$$

Очевидно, что U_i — открыты и $x \in \text{int } S \cap U_i$ тогда и только тогда, когда существуют $y \in \text{int } F_i$ и $j \in I_m$ такие, что $x \in (x_j y)$. Докажем, что $\{U_i\}_{i \in I_m}$ удовлетворяют условиям леммы 5.

Условие (i).

В самом деле, если $x \in U_i$, $y \in \text{int } F_i$, а $x' \in (xy)$, то найдется $z \in \text{int } F_i$ такая, что $x \in (x_j z)$. Тогда $(x_j x') \cap [zy] = z' \in \text{int } F_i$ и $x' \in (x_j z')$.

Условие (iii).

Пусть $p \in \text{bd } S$ и $I = \{i : p \in F_i\}$. Очевидно, что условие (iii) выполняется тогда и только тогда, когда для любой $x \in \text{int } S \cap N(p)$ существует $j \in I_m$ такое, что $\langle x_j x \rangle \cap \text{int } F_i \neq \emptyset$ для некоторого $i \in I$. Для некоторой окрестности $N(p)$ точки p , имеем,

$$S \cap N(p) = \{x \in N(p) : f_i(x) \geq 0 \quad \text{для всех } i \in I\}.$$

Пусть

$$J = \{j : \langle x_j p \rangle \cap S = \{p\}\},$$

тогда, по условию (*),

$$|I_m \setminus J| < m - |I| \implies |J| \geq |I| + 1.$$

Если $j \in I_m \setminus J$, то найдется точка $x \in \langle x_j p \rangle \setminus \{p\}$ такая, что $f_i(x) \geq 0$ для всех $i \in I$. Имеем, $f_i(x_j) < 0$, $i \in I$, так как $f_i(p) = 0$, $i \in I$ и $f_i(x_j) \neq 0$ по условию (2). Тогда

$$\{x_j\}_{j \in I_m} \bigcap_{i \in I} H_i \supseteq \{x_j\}_{j \in I_m \setminus J}.$$

Для всех $j \in I_m$ точка $y_j(x) = \langle x_j x \rangle \cap \text{bd } S$ непрерывно зависит от $x \in S$, а так как $y_j(p) = p$, $j \in J$, то найдется такая окрестность $N(p)$ точки p , что для всех $x \in N(p)$, $j \in J$ и $i \notin I$, имеем, $y_j(x) \notin F_i$. Покажем, что

$$N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Для этого нужно показать, что если $x \in N(p) \cap \text{int } S$, то $y_j(x) \in \text{int } F_i$ для некоторых $j \in J$ и $i \in I$, так как тогда $x \in (y_j x_j)$ и $x \in U_i$. Предположим противное

$$\{y_j(x)\}_{j \in J} \cap \bigcup_{i \in I} \text{int } F_i = \emptyset,$$

тогда, для всех $j \in J$,

$$y_j(x) \in F_{s(j)} \cap F_{t(j)}, \quad s(j), t(j) \in I.$$

Следовательно,

$$x \in \bigcap_{j \in J} \text{aff}(x_j, F_{s(j)} \cap F_{t(j)}).$$

Поэтому

$$\text{aff}(x_j, F_{s(j)} \cap F_{t(j)}) = H(g_{js(j)t(j)}),$$

где g_{jst} определено выше, и

$$\{\text{aff } F_{s(j)}, \text{aff } F_{t(j)}\}_{j \in J} \subseteq \{H(f_i)\}_{i \in I}.$$

Обозначим семейство отображений

$$\mathcal{G}' = \{\gamma : J \rightarrow L_1^N : H(\gamma(j)) \supseteq F_{s(j)} \cap F_{t(j)}\}.$$

Так как отображение сужения $\mathcal{G}(S) \rightarrow \mathcal{G}'$ очевидно сюръективно, то для сужения $g' : j \mapsto g_{js(j)t(j)}$ отображения $g \in LGP(\mathcal{G}(S))$ получаем, что $g' \in LGP(\mathcal{G}')$. Поэтому, по лемме 2, для графа G с вершинами $\{f_i\}_{i \in I}$ и ребрами $(f_{s(j)}, f_{t(j)})$, $j \in J$, и отображения g' , так как $|J| \geq |I|$, для некоторого i , имеем,

$$\bigcap_{j \in J} H(g'_j) \subseteq H(f_i) = \text{aff } F_i.$$

Следовательно,

$$x \in \bigcap_{j \in J} H(g'_j) \subseteq \text{aff } F_i \quad \text{и} \quad x \in \text{int } S$$

и получаем противоречие.

Условие (ii).

Аналогично предыдущему, если для некоторой точки

$$x \in \text{int } S, \quad y_j(x) \notin \text{int } F_i \quad \text{при всех} \quad i, j \in I_m,$$

то

$$x \in \bigcap_{j \in I_m} \text{aff}(x_j, \text{aff } F_{s(j)} \cap \text{aff } F_{t(j)}).$$

Применяя лемму 2 к графу G_m с вершинами $\{f_i\}_{i \in I_m}$ и с ребрами $(f_{s(j)}, f_{t(j)})$, $j \in I_m$, получаем противоречие, что $x \in \text{aff } F_i \cap \text{int } S$ для некоторого i .

Значит, по лемме 5, есть $x \in \bigcap_{i \in I_m} U_i$. Тогда для всех $i \in I_m$ найдется единственная $j = \delta(i) \in I_m$ и $y_j \in \text{int } F_i$ такие, что $x \in (x_j y_j)$. Положим $\sigma(j) = \delta^{-1}(j)$, тогда, имеем,

$$x \in \text{conv}(\{x_j\} \cup \text{int } F_{\sigma(j)}) \quad \text{для всех} \quad j \in I_m.$$

Так как

$$S \subseteq \bigcup_{j \in I_m} \text{conv}(\{x\} \cup F_{\sigma(j)}) \quad \text{и} \quad \text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \supseteq \text{conv}(\{x\} \cup F_{\sigma(j)}),$$

то $S \subseteq \bigcup_{j \in I_m} \text{conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)})$ и теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, когда S — симплекс. Обозначим

$$V_i = \{x \in S : \text{int conv}(\{x\} \cup F_i) \cap \{x_j\}_{j \in I_m} = \emptyset\}.$$

Ясно, что V_i — замкнуты и V_i — F_i -звездны, так как если $x \in V_i$, $y \in F_i$ и $x' \in [xy]$, то $\text{int conv}(\{x'\} \cup F_i) \subseteq \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$.

Предположим, что $S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} V_i$, тогда, по лемме 3, существует $x \in \bigcap_{i \in I_m} V_i$. Так как $x_j \notin \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$ для всех i и j , то для всех $j \in I_m$

$$x_j \in \text{conv}(\{x\} \cup (\text{aff } F_{s(j)} \cap \text{aff } F_{t(j)})).$$

Пусть $I = \{i : x \notin F_i\}$, тогда $s(j), t(j) \in I$ для всех j , так как иначе $x_j \in F_i$, что невозможно по условию (2). Иначе говоря,

$$x \in \bigcap_{j \in I_m} \text{aff}(x_j, \text{aff } F_{s(j)} \cap \text{aff } F_{t(j)}).$$

Аналогично доказательству теоремы 2 применим лемму 2 к графу с вершинами $\{f_i\}_{i \in I}$, ребрами $(f_{s(j)}, f_{t(j)})$, $j \in I_m$ и сужению $g'(j) = g_{j s(j) t(j)}$ отображения g . Тогда $x \in \text{aff } F_i$, $i \in I$, что противоречит определению множества I .

Значит, существует $x \in S \setminus \bigcup_{i \in I_m} V_i$. Тогда для каждого $i \in I_m$ найдется $\delta(i)$ такое, что $x_{\delta(i)} \in \text{int conv}(\{x\} \cup F_i)$. Это соответствие — биекция, так как

$$\text{int conv}(\{x\} \cup F_i) \cap \text{int conv}(\{x\} \cup F_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Положим $\sigma = \delta^{-1}$, тогда

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m,$$

так как

$$\text{int conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \subseteq \text{int conv}(\{x\} \cup F_{\sigma(j)}).$$

Пусть теперь S — не симплекс, тогда $\bigcap_{i \in I_m} F_i \neq \emptyset$. Если $\bigcap_{i \in I_m} F_i = \{v\}$, то легко видеть, что существует такая гиперплоскость H , что $S' = S \cap H$ — симплекс с гипергранями $F'_i = F_i \cap H$, $i \in I_m$.

Пусть x'_i — образ x_i при центральной проекции из точки v на H . По доказанному ранее, для $\{x'_i\}_{i \in I_m}$ и симплекса S' существует такая перестановка σ , что

$$\text{int conv}(\{x'_k\} \cup F'_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x'_l\} \cup F'_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m.$$

Возьмем конус $C_i = \text{int conv}(\{v x_i\} \cup F_{\sigma(i)})$ с вершиной v , образованный лучами, пересекающимися $\text{int conv}(\{x'_i\} \cup F'_{\sigma(i)})$ без точки v . Очевидно, что для всех $k \neq l \in I_m$ имеем

$$C_k \cap C_l = \emptyset \quad \text{и} \quad \text{int conv}(\{x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) \subseteq \text{int conv}(\{v x_i\} \cup F_{\sigma(i)}) = C_i.$$

Поэтому

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m.$$

Пусть теперь $\dim_a L > 0$, где $L = \bigcap_{i \in I_m} F_i$. Пусть p ортогональная проекция на L^\perp . Тогда $p(L)$ — точка. Как и выше, найдется такая σ , что

$$\text{int conv}(\{p(x_k)\} \cup p(F_{\sigma(k)})) \cap \text{int conv}(\{p(x_l)\} \cup p(F_{\sigma(l)})) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m.$$

Тогда очевидно, что

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m$$

и теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Для $i \in I_m$ положим

$$U_i = \{x \in \text{int } S : [x x_j] \cap \text{int } F_i \neq \emptyset \quad \text{для некоторого } j \in I_m\}.$$

Ясно, что U_i — открыты. Покажем, что $\{U_i\}_{i \in I_m}$ удовлетворяет условиям (i)-(iii) леммы 5.

Условие (i). Пусть

$$x \in U_i, \quad y \in \text{int } F_i, \quad x' \in [x y] \quad \text{и} \quad z = [x x_j] \cap \text{int } F_i.$$

Точки x' и x_j находятся с разных сторон от гиперплоскости $\text{aff } F_i$, поэтому существует $z' = [x' x_j] \cap \text{aff } F_i$, $z' \in [z y]$ и $z' \in \text{int } F_i$.

Условие (iii). Пусть

$$p \in \text{bd } S, \quad I = \{i : p \in F_i\}.$$

Докажем, что есть окрестность $N(p)$ точки p такая, что

$$N(p) \cap \text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

то есть $[x_j x] \cap \text{int } F_i \neq \emptyset$ для всех $x \in \text{int } S \cap N(p)$ и при некоторых $j \in I_m$ и $i \in I$.

Пусть $J = \{j : x_j \in \bigcup_{i \in I} H_i\}$, тогда, по условию теоремы,

$$|J| \geq |I| \quad \text{и} \quad [x_j p] \cap \text{bd } S = \{p\} \quad \text{для всех } j \in J.$$

Для всех $j \in I_m$ и $x \in S$ пусть $y_j(x)$ — самая дальняя от x точка $[x_j x] \cap \text{bd } S$. Очевидно, что $y_j(x)$ непрерывно зависят от $x \in S$, а так как $y_j(p) = p$, $j \in J$, то найдется такая окрестность $N(p)$ точки p , что для всех $x \in N(p)$, $j \in J$ и $i \notin I$, имеем $y_j(x) \notin F_i$.

Докажем, что для всех $x \in N(p) \cap \text{int } S$ найдется $i \in I$ такое, что $x \in U_i$. Предположим противное, что $y_j(x) \in F_{s(j)} \cap F_{t(j)}$ для некоторого $x \in N(p) \cap \text{int } S$ и всех $j \in J$. Тогда

$$x \in \bigcap_{j \in J} \text{aff}(x_j, \text{aff } F_{s(j)} \cap \text{aff } F_{t(j)}), \quad s(j), t(j) \in I.$$

Аналогично, как и в доказательстве теоремы 2, применяя лемму 2, получаем противоречие, так как $|J| \geq |I|$.

Условие (ii). Покажем, что $\text{int } S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} U_i$. Если $y_j(x) \notin \text{int } F_i$ для некоторой точки x при всех i и j , то $x \in \bigcap_{j \in I_m} \text{aff}(x_j, \text{aff } F_{s(j)} \cap \text{aff } F_{t(j)})$. Получили противоречие.

Если S — симплекс, то $\bigcap_{i \in I_m} U_i \neq \emptyset$ по лемме 5. Если $\bigcap_{i \in I_m} F_i = \{v\}$, то, как и выше, пусть H — гиперплоскость такая, что $S' = S \cap H$ — симплекс с гипергранями $F'_i = F_i \cap H$, $i \in I_m$. Если применить лемму 5 к S' и множествам $U'_i = U_i \cap H$, то получим, что

$$\bigcap_{i \in I_m} U'_i \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap_{i \in I_m} U_i \neq \emptyset.$$

Для $x \in \bigcap_{i \in I_m} U_i$ и для всех $i \in I_m$ имеем

$$\{y_j(x)\}_{j \in I_m} \cap \bigcap_{i \in I_m} \text{int } F_i \neq \emptyset.$$

Следовательно, существует биекция σ такая, что $y_j(x) \in \text{int } F_{\sigma(j)}$ для всех $j \in I_m$, так как

$$|\{y_j(x)\}_{j \in I_m}| = |\{\text{int } F_i\}_{i \in I_m}| \quad \text{и} \quad \text{int } F_k \cap \text{int } F_l = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m.$$

Пусть C_j — конус с вершиной x , образованный лучами $[xy]$, где $y \in \text{int } F_{\sigma(j)}$ без точки x . При $k \neq l \in I_m$, $C_k \cap C_l = \emptyset$ и $x_j \in C_j$, так как $\text{int } F_{\sigma(j)} \ni y_j(x) \in [x_j x]$. Поэтому

$$\text{int conv}(\{x_k\} \cup F_{\sigma(k)}) \cap \text{int conv}(\{x_l\} \cup F_{\sigma(l)}) = \emptyset, \quad k \neq l \in I_m,$$

так как $\text{int conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \subseteq C_j$, и при всех $j \in I_m$

$$\text{int conv}(\{x_j\} \cup F_{\sigma(j)}) \cap \text{int } S = \emptyset,$$

так как x_j и S лежат по разные стороны от $\text{aff } F_{\sigma(j)}$.

Если $\dim_a \bigcap_{i \in I_m} F_i > 0$, $L = \bigcap_{i \in I_m} F_i$, то, как при доказательстве предыдущей теоремы, возьмем проекцию p на L^\perp . Точно так же, как и в предыдущем доказательстве, теорема следует из аналогичного, уже доказанного, утверждения для проекции $p(S)$.

Доказательство теоремы 1. Для всех $I \subseteq I_m$ обозначим

$$C_I = \{x : f_i(x) \geq 0, \quad \text{для всех } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H^+(f_i) \quad \text{и} \quad \Phi_I^j = \{i \in I : f_i(x_j) < 0\}.$$

Вначале положим $I_0 = I_m$. Далее полагаем

$$I_{k+1} = I_k \setminus \bigcup_{j \in Q} \Phi_{I_k}^j,$$

если существует $Q \subseteq I_p$ такое, что

$$\{x_j\}_{j \in Q} \cap C_{I_k} = \emptyset \quad \text{и} \quad \left| \bigcup_{j \in Q} \Phi_{I_k}^j \right| < |Q|.$$

Тогда легко видеть, что $\{x_i\}_{i \in Q} \subseteq C_{I_{k+1}}$. Поэтому этот процесс закончится на некотором I_N . Пусть

$$A = \{i \in I_p : x_i \notin C_{I_N}\} \quad \text{и} \quad B = I_p \setminus A,$$

тогда, очевидно, что множества $\Phi_{I_N}^j$, $j \in A$, удовлетворяют условиям теоремы Холла о системах различных представителей [7]. При этом $|I_N| \geq m - p + 1 \geq p$, так как

$$\left| \bigcup_{j \in Q} \Phi_{I_k}^j \right| \leq |Q| - 1 = |\{x_i\}_{i \in Q}| - 1 \quad \text{и} \quad |C_{I_N} \cap \{x_i\}_{i \in I_p}| \leq p.$$

Тогда, по теореме Холла, существует инъекция $r_0 : A \rightarrow I_N$ такая, что $f_{r_0(j)}(x_j) < 0$ при $j \in A$. Пусть $J = r_0(A)$ и F_i^J , $i \in J$, — гипергрani многогранного множества C_J . Для $\{x_j\}_{j \in A}$ и C_J выполняется условие теоремы 4, так как для всех $J' \subseteq J$, имеем

$$\bigcup_{i \in J'} H_i \supseteq \{x_{r_0^{-1}(i)}\}_{i \in J'}.$$

По теореме 4 существует такая биекция $r : A \rightarrow J$, что

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{r(j_1)}^J) \cap \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{r(j_2)}^J) = \emptyset \quad \text{и} \quad \text{int conv}(\{x_j\} \cup F_{r(j)}^J) \cap \text{int } C_J = \emptyset$$

при всех $j_1 \neq j_2 \in A$, $j \in A$. Так как $F_i^J \supseteq F_i$, то

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{r(j_1)}) \cap \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{r(j_2)}) = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2 \in A.$$

Пусть $K = I_N \setminus J$, F_j^K , $j \in K$, — гипергрani C_K и $V = \{x_j\}_{j \in B}$. Ясно, что

$$V \subset C_{I_N} \subseteq C_K \quad \text{и} \quad |V| = |B| = p - |A| = p - |J| \leq |I| - |J| = |K|.$$

Возьмем произвольное $W \supseteq V$ такое, что $W \subseteq C_{I_N}$ и $|W| = |K|$.

По теореме 3 для W и C_K существует биекция $q_W : W \rightarrow K$, удовлетворяющая условию теоремы. Следовательно, равенство $q(j) = q_W(x_j)$ задает для всех $j \in B$ инъекцию $q : B \rightarrow K$. Тогда имеем

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{q(j_1)}^K) \cap \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{q(j_2)}^K) = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2 \in B.$$

Следовательно,

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{q(j_1)}) \cap \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{q(j_2)}) = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2 \in B,$$

так как $F_i^K \supseteq F_i$. Поэтому, при $j_1 \in A$, $j_2 \in B$, имеем

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{r(j_1)}) \cap \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{q(j_2)}) = \emptyset,$$

так как

$$\text{int conv}(\{x_{j_1}\} \cup F_{r(j_1)}) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus C_J \subseteq \mathbb{R}^N \setminus C_I, \quad \text{а} \quad \text{int conv}(\{x_{j_2}\} \cup F_{q(j_2)}) \subseteq C_I,$$

так как $\{x_j\}_{j \in B} \subseteq C_I$ и $F_{q(j)} \subseteq C_I$ для всех $j \in B$.

Пусть σ определена так, что $\sigma|_A = r$ и $\sigma|_B = q$. Тогда σ удовлетворяет условию теоремы.

4. Заключение

В качестве следствия из теоремы 2 докажем основную лемму работы [2]. В этой работе теорема 2 выводилась из этой леммы, но сама лемма не была доказана.

Следствие 1. Если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица такая, что $a_{ij} > 0$ для всех $i, j \in I_m$, то существует $\sigma \in S^m$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ такие, что $\lambda_j a_{\sigma(j)j} \geq \lambda_i a_{\sigma(j)i}$ для всех $i, j \in I_m$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $\sum_{j \in I_m} a_{ij} = 1$ для всех $i \in I_m$. Возьмем симплекс S с гипергранями $\{F_i\}_{i \in I_m}$ и точки $\{x_i\}_{i \in I_m} \subseteq S$ такие, что строки матрицы A являются их барицентрическими координатами относительно вершин симплекса. По теореме 2 найдется такая перестановка σ , что

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I_m} \text{conv}(\{x_{\sigma(i)}\} \cup F_i), \quad V_i = \text{conv}(\{x_{\sigma(i)}\} \cup F_i).$$

По лемме 3 существует точка $y \in \bigcap_{i \in I_m} V_i$ с барицентрическими координатами $(y_i)_{i=1}^m$. Тогда легко видеть, что

$$y \in V_i \iff y_i a_{\sigma(i)j} \leq a_{\sigma(i)i} y_j \quad \text{для всех } j \in I_m.$$

Положим $\lambda_i = \frac{y_i}{a_{ii}}$, тогда имеем

$$\lambda_i a_{\sigma(i)j} = \frac{y_i a_{\sigma(i)j}}{a_{ii}} \leq y_j = \frac{y_j a_{\sigma(j)j}}{a_{\sigma(j)j}} = \lambda_j a_{\sigma(j)j} \quad \text{для всех } i, j \in I_m.$$

Следствие доказано.

Приведем еще одно следствие теоремы 2, которое известно как олимпиадная задача.

Следствие 2. Пусть $\{C_i\}_{i \in I_m}$ — семейство углов в \mathbb{R}^2 с вершинами в нуле, $\{x_i\}_{i \in I_m} \subseteq \mathbb{R}^2$ и $\bigcup_{i \in I_m} C_i = \mathbb{R}^2$. Тогда существует $\sigma \in S^m$ такая, что

$$\bigcup_{i \in I_m} x_i + C_{\sigma(i)} = \mathbb{R}^2.$$

Доказательство легко получить из теоремы 2, если построить такой многоугольник $X \supseteq \{x_i\}_{i \in I_m}$, что для любой стороны $y_i y_{i+1}$ многоугольника X существует $j, j \in I_m$, такое, что $y_i y_{i+1} \subseteq C_j$. Затем применить теорему 2 к λX , $\lambda \geq 1$ и $\{x_i\}_{i \in I_m}$. Если $\lambda \rightarrow \infty$, то получается требуемое утверждение.

Вызывает интерес следующее обобщение этой теоремы.

Гипотеза. Пусть $\{C_i\}_{i \in I_m}$ — семейство замкнутых выпуклых конусов в \mathbb{R}^n с вершинами в нуле, $\{x_i\}_{i \in I_m} \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\bigcup_{i \in I_m} C_i = \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\sigma \in S^m$ такая, что

$$\bigcup_{i \in I_m} (x_i + C_{\sigma(i)}) = \mathbb{R}^n.$$

Автор может доказать эту гипотезу аналогично теореме 2, если $m = n + 1$. Доказательство ее в общем случае автору не известно.

С.Е. Рукшин в частной беседе сообщил, что он располагает доказательством следствия 1 индукцией по размерности и доказательством теоремы 1, отличным от доказательства этой работы.

Автор благодарен В.Л. Дольникову за содержательное обсуждение.

Литература

- [1] Bezdek A. Covering a convex polygon by triangles (manuscript).
- [2] Богомольная А.В., Назаров Ф.Л., Рукшин С.Е. Покрытие выпуклого многоугольника треугольниками с фиксированными вершинами // Мат. Заметки. 1988. Т. 43. №2. С. 191–195 и 286.
- [3] Произолов В.В. О некоторых нерешенных задачах комбинаторной геометрии // Тезисы I Всесоюзной конференции по комбинаторной геометрии. Батуми, 1985. С.54.
- [4] Бренстед. А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
- [5] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
- [6] Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
- [7] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

УДК 519.673

Планирование оптимальных путей плоских роботов на основе использования волновой нейросетевой архитектуры

Лебедев Д.В.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

В работе рассматривается задача о планировании оптимальных путей для двух плоских роботов, находящихся в общей среде, содержащей препятствия. При движении роботы должны обходить препятствия и не должны сталкиваться. В решении используется идея централизованного планирования, когда независимые перемещения каждого из роботов рассматриваются как движение совокупного робота. Применение нейронной сети волнового распространения, обладающей массивным параллелизмом, позволяет существенно сократить вычислительные затраты, связанные с планированием движения в координатном пространстве большой размерности. Приведенный подход можно рассматривать как универсальный для планирования путей роботов различных форм и степеней свободы.

1. Введение

Задачи, связанные с планированием путей автономных объектов, составляют отдельную область изучения в робототехнике и активно исследуются, поскольку имеют ряд полезных интерпретаций. Так, планирование пути является критическим моментом при конструировании автономных агентов, способных самостоятельно перемещаться, получая данные от сенсоров или систем визуального наблюдения. Кроме того, эти задачи могут применяться, например, для определения трассировки и размещения элементов на микросхемах и т.д.

В течение последнего десятилетия было предложено множество разнообразных методик планирования путей [1-5]. Для задач, связанных с планированием пути единственного робота, наиболее распространенными являются методы, основанные на построении *сети путей* [3, 4]. Согласно этому классу методов, в свободном пространстве строится связанная структура-скелет и путь образуется объединением кусочков кривых, соединяющих в итоге начальную и целевую позиции. Другие известные методы - *клеточной декомпозиции*, сводятся к разбиению свободного пространства на множество выпуклых ячеек. Поиск пути далее есть суть поиска кратчайшего пути в графе, где каждой вершине ставится в соответствие ячейка свободного пространства, а ребро включается в граф только в том случае, если ячейки имеют общую границу. Кроме подходов, описанных выше, известной методикой является подход с построением *поля потенциалов* [1, 2], часто используемый в задачах планирования пути. Он заключается в построении некоторой скалярной *функции потенциала* над рабочим пространством робота. Обычно глобальный минимум этой функции достигается в целевой позиции, а сама функция устроена так, что робот, двигаясь под воздействием поля потенциалов, притягивается к целевой позиции, одновременно отталкиваясь от препятствий, имеющих высокий положительный потенциал. Наряду с описанными подходами, *эволюционные алгоритмы* [3, 5] также показали способность к решению задач планирования пути. В этом случае планирование маршрута формулируется как глобальная оптимизационная задача, а именно в классе задач, связанных с многомерной оптимизацией, генетические алгоритмы способны осуществить эффективный поиск решения.

Традиционно подходы к планированию путей нескольких мобильных роботов подразделяют на два класса, а именно методы *централизованного* и *разделенного планирования*. Достаточно подробное их описание приведено в [6, 8]. Ключевая разница этих подходов заключается в количестве агентов, участвующих в процессе планирования пути. В случае *централизованного планирования* несколько роботов рассматриваются как составные части одного совокупного робота, и планирование осуществляется в *совокупном конфигурационном пространстве*, являющемся объединением конфигурационных пространств индивидуальных роботов. До исследования взаимодействий между роботами на движение последних не налагается никаких ограничений. При подходе с *разделенным планированием* пути для каждого робота генерируются в той или иной степени независимо, а затем рассматриваются ситуации взаимного положения роботов с учетом полученных траекторий. *Разделенное планирование*, в свою очередь, предполагает

наложение строгих ограничений на перемещение роботов до момента рассмотрения их взаимных расположений.

Централизованное планирование имеет преимущество в том, что, по крайней мере в теории, реализует *завершенное планирование*, в том смысле, что решение всегда будет обнаружено, если оно существует. *Разделенное планирование* является незавершенным и может приводить к ситуациям, когда существующее решение может быть не найдено.

С *централизованными* подходами, однако, существует практическая трудность, состоящая в том, что несмотря на завершенность, в общем случае методы имеют экспоненциальную сложность относительно размерности *совокупного конфигурационного пространства*. Это означает, что имея m роботов с k степенями свободы у каждого, планирование путей потребует экспоненциального времени порядка $m * k$. В работе [6] рассмотрена задача планирования пути для пары и тройки плоских роботов, двигающихся в среде, содержащей препятствия. Авторами предложен способ уменьшения на единицу размерности *совокупного конфигурационного пространства* для пары роботов и на два для тройки. Такое уменьшение достигается за счет принятия ряда положений, ограничивающих свободное и независимое перемещение частей совокупного робота. Метод может эффективно применяться для сред с низкой насыщенностью препятствиями.

Кроме методов *централизованного* и *разделенного* планирования в некоторых недавних работах [8, 9] авторами предложен иной подход к решению задач о планировании путей. Этот подход лежит на стыке двух вышеописанных и предполагает *ослабленную централизацию*. Идея *ослабленной централизации* состоит в том, что на движение отдельных роботов налагаются лишь слабые ограничения, и в рамках этих ограничений рассматривается движение роботов по предварительно сформированной сети путей. В работе [9] авторами предложена идея построения *супер-графа*, структуры данных, содержащей пути индивидуальных роботов, которые затем объединяются и образуют сеть путей для одного совокупного робота. В процессе планирования из структуры данных извлекаются траектории движения совокупного робота. Предложенный метод эффективно работает с плоскими роботами, которые могут поворачиваться в плоскости, и число которых не превосходит пяти. Алгоритм планирования путей нескольких роботов, удовлетворяющий принципу оптимальности, предложен в [8]. Здесь авторами рассмотрены три класса подходов к планированию путей. Кроме методов *централизованного* и *разделенного планирования*, разобрана и применена идея *ослабленной централизации* для планирования путей двух плоских роботов, перемещающихся в плоском поле.

Несмотря на завершенность предложенных авторами [8] и [9] методов, задача по-прежнему остается трудноразрешимой. Следует отметить также, что указанные алгоритмы требуют время на предварительную обработку данных перед тем, как получить решение, а следовательно, не могут быть использованы для планирования путей в реальном времени.

В данной работе предлагается алгоритм *централизованного планирования* для построения безопасных путей двух плоских роботов, двигающихся в плоском поле. В основе решения лежит использование *нейронной сети волнового распространения*. В конфигурационном пространстве совокупного робота эффективно описываются препятствия. С помощью волновой нейронной сети в этом пространстве строится числовое поле потенциалов, содержащее информацию о близости целевой конфигурации. Указывается также способ достижения роботами целевых позиций. Идея алгоритма может быть расширена на k роботов. Траектории движения могут быть получены за время порядка $O(dm)$ при числе дискретных конфигураций совокупного робота m^d , где d - размерность пространства, в котором осуществляется планирование.

2. Описание задачи и общие определения

Введем предварительно некоторые понятия.

Рабочее пространство - подмножество 2-мерного физического пространства, заданное как $W \subset R^2$.

Область препятствий - набор O запрещенных регионов в рабочем пространстве.

Конфигурация робота - набор независимых параметров, полностью определяющий положение и ориентацию любой части робота относительно некоторой зафиксированной системы координат.

Конфигурационное пространство - множество C всевозможных конфигураций робота.

Свободное конфигурационное пространство - множество C_{free} , состоящее из регионов C , не содержащих запрещенных конфигураций.

Итак, формально задача планирования путей двух роботов может быть определена следующим образом:

Пусть дано рабочее пространство $W \subset R^2$, представляющее собой прямоугольную решетку (дискретное множество точек). Имеются два плоских робота, R_1 и R_2 . Физические размеры роботов известны. В рабочем поле роботов задан набор препятствий, образующий область препятствий $O = \{O_i\} = \{(A_i, B_i)\}$. Пусть $\tau_i(t_k) = (p_i(t_k), q_i(t_k))$ определяет позицию i -го робота в момент времени t_k . Необходимо найти обходящие препятствия и не содержащие позиций взаимного столкновения пути τ_i для каждого из роботов из некоторых начальных до некоторых целевых позиций. Другими словами, необходимо определить пути τ_1 и τ_2 , лежащие полностью в свободном конфигурационном пространстве, для которых выполнено $\tau_1(t_k) \cap \tau_2(t_k) = 0$.

3. Концепция и описание решения

3.1. Подход к решению

Одной из методик для реализации процедуры планирования пути является подход, связанный с построением *поля потенциалов* над конфигурационным пространством S робота. Обычно распределение энергии поля потенциалов формирует дискретное представление рабочей среды и может использоваться для планирования пути посредством оценки соответствующего градиента. При таком подходе робот рассматривается как точка, движущаяся под воздействием потенциального поля от некоторой начальной до некоторой целевой конфигурации. Для планирования пути существует множество потенциальных полей, большинство из которых возможно описать аналитически. Как правило, такие потенциальные поля представляют собой комбинацию *потенциала притяжения*, который ведет робота к целевой конфигурации, и *потенциала отталкивания*, который заставляет робота держаться на некотором заранее установленном расстоянии от препятствий, и отдаляться от них, в случае приближения на менее чем установленное расстояние. В рассматриваемой задаче, однако, построение *числового потенциального поля* над дискретным представлением S является более эффективным. Такие числовые потенциальные поля, называемые иногда *клеточными потенциалами*, обладают рядом преимуществ, среди которых легкость реализации и быстрота исполнения. Кроме того, клеточные потенциалы оперируют напрямую с дискретными представлениями внешней среды, а следовательно, сенсорной или визуальной информацией. Распределенная природа вычисления клеточных потенциалов предполагает их параллельное выполнение в виде процесса, схожего с процессом распространения волновых фронтов. В следующем разделе описывается локально связанная нейросетевая архитектура, способная осуществить операции по распространению волновых фронтов, а значит, и сгенерировать клеточные потенциалы над дискретным представлением S .

3.2. Структура и свойства нейронной сети волнового распространения

Нейронная сеть волнового распространения представляет собой локально-связанную высоко-параллельную нейронную архитектуру, имеющую клеточное строение и способную вычислять клеточные потенциалы над дискретным представлением конфигурационного пространства (подробнее см. [1]).

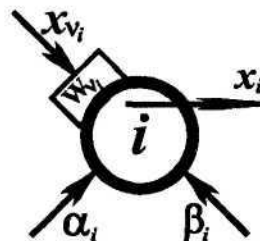


Рис. 1. Нейрон волновой сети (пояснения в тексте)

В зависимости от размерности конфигурационного пространства S (размерность можно определить как $d = \sum_{i=1}^k s_i$, где s_i -число степеней свободы i -го объекта, а k -общее число индивидуальных объектов, участвующих в планировании путей) сеть может состоять из слоя или набора слоев локально-связанных

нейронов, положение которых совпадает с дискретным представлением C (или W в случае точечного объекта). Все нейроны совместно образуют поле сети. Рис. 1 содержит структуру нейрона сети.

Каждый нейрон имеет уникальную метку i , которая является $d \times 1$ -мерным вектором и с помощью которой определяется позиция нейрона в поле сети, а следовательно, и в d -мерном C . Кроме того, i -й нейрон сети связан с $n = 2d$ соседями, образующими совместно соседство i -го нейрона, обозначенное ν_i . Поле сети, отсюда, состоит из набора перекрывающихся соседств. Пример плоского соседства показан на рис. 2.

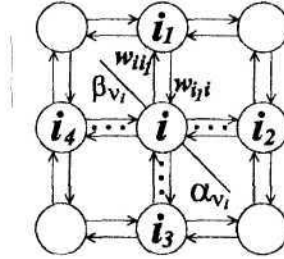


Рис. 2. Соседство нейронной сети на плоскости

Всего существует d классов таких соседств, называемых k -соседствами, где $k \in [1, d]$. Таким образом, k -соседство нейрона i состоит из нейронов, имеющих ровно k координат, отличных на единицу от координат i -го нейрона. Так, $2d-1$ -соседей являются ближайшими, а 2^d-d -соседей являются самыми дальними. Число нейронов n в ν -соседстве нейрона i называют иногда связностью поля волновой сети.

Нейронная сеть волнового распространения является динамической системой, которая полностью описывается набором векторов состояний нейронов $X_i = [x_i, w_{i_1 i}, \dots, w_{i_n i}] \in \mathbb{R}^{n+1}$. Первый элемент x_i вектора X_i есть уровень активации нейрона, являющийся вещественной скалярной величиной, представляющей выход нейрона. Оставшимися элементами являются синаптические веса или веса связей, ассоциированные с нейроном i и образующие совместно $n \times 1$ вектор $W_{\nu_i} = [w_{i_1 i} \dots w_{i_n i}]^T$. Каждый вес связи w_{ji} определяет силу синапса, соединяющего нейрон $j \in i_1, \dots, i_n$ с нейроном i . Уровни активности нейронов из ν -соседства i -го нейрона формируют совместно вектор $X_{\nu_i} = [x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}]^T$. Нейрон i считается неактивным, если $x_i = 0$, и активным, если $x_i > 0$.

Кроме того, с каждым нейроном в поле сети ассоциированы тормозящие и возбуждающие внешние входы, обозначенные соответственно α_i и β_i . Через внешние входы в сеть поступает информация о дискретном представлении W или C . Каждый нейрон сети может испытывать влияние тормозящих и возбуждающих внешних входов нейронов-соседей, образующих в совокупности векторы $\alpha_{\nu_i} = [\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n} \alpha_i]^T$ и $\beta_{\nu_i} = [\beta_{i_1} \dots \beta_{i_n} \beta_i]^T$ из \mathbb{R}^{n+1} соответственно.

Динамика волновой нейронной сети для рассматриваемой задачи определяется следующими уравнениями активации [1]:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + r \left(I(x_i^t + \alpha_i) + \beta_i + \sum_{j \in \nu_i} w_{ji}(x_j + 1) \right), \quad (1)$$

описывающими эволюцию активностей нейронов, и уравнениями обучения:

$$w_{ji}^{t+1} = w_{ji}^t + U(I(x_i^t + \alpha_i) + V_k(X_{\nu_i})), \quad (2)$$

описывающими эволюцию весов связей w_{ji} , ассоциированных с каждым нейроном-соседом $j \in \nu_i$, где $j = i_k$ и $k \in [1, n]$. Здесь функции $U(\tau)$, $r(\tau)$ и $I(\tau)$ заданы формулами:

$$U(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{для } \tau \geq 0 \\ 0, & \text{для } \tau < 0 \end{cases}, \quad r(\tau) = \begin{cases} [\tau], & \text{если } \tau \geq 0 \\ 0, & \text{если } \tau < 0 \end{cases},$$

$$I(\tau) = \begin{cases} -c, & \text{где } c \gg 0, \tau > 0 \\ 0, & \text{если } \tau \leq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где $[\tau]$ - целая часть числа. Функция $V_k(X_{\nu_i})$ определена как:

$$V_k(x_{\nu_i}) = \begin{cases} x_{i_1}, & \text{для } k = 1 \\ x_{i_k} + I(\sum_{l=1}^{k-1} x_{i_l}), & \text{для } 1 < k \leq n \end{cases}.$$

Эволюция во времени состояний всех нейронов определяется набором уравнений активации (1) и обучения (2) и зависит от аргументов функций $r(\tau)$ и $U(\tau)$. Функции $r(\tau)$ и $U(\tau)$ являются нулевыми для $\tau < 0$, что означает неотрицательность значений уровней активации нейронов и весов связей. Функции $I()$ и $V_k()$ есть, соответственно, функции торможения и приоритета.

В начальной стадии все нейроны сети являются неактивными, т.е. уровни активации нейронов и веса связей имеют нулевое значение. Функция $I()$ обеспечивает торможение в уравнениях активации и обучения, запрещая адаптацию состояния нейрона (т.е. активности нейрона и весов связей). В процессе торможения $I() \ll 0$, так что суммарные аргументы каждой из функций r и U отрицательны, и нулевые значения r и U запрещают дальнейшую эволюцию состояния нейрона. Нейроны, которые не получают внешнего торможения через функцию $I()$, называются нетормозящими. Нетормозящий нейрон может изменить свое состояние либо в результате внешнего возбуждения, либо вследствие активности его ν -соседей. Таким образом, активность в поле нейронной сети инициируется на нетормозящих нейронах, которые получают внешнее возбуждение. Другие нетормозящие нейроны становятся активными вследствие локальных итераций соответствующих им ν -соседств. Веса связей всех нейронов сети изменяются согласно набору уравнений обучения (2). Эти уравнения обучения устроены так, что лишь единственный вес связи неактивного нетормозящего нейрона, ассоциированный с активным нейроном из ν -соседства, будет изменен, а адаптация остальных весов будет запрещена. Такое поведение обусловлено функцией приоритета $V_k()$, которая использует уровни активации нейронов-соседей и выбирает лишь один определенный вес связи, который и будет изменяться. Функция приоритета $V_k()$, таким образом, "приоритизирует" ν -соседство так, что только вес связи, ассоциированный с активным соседом, имеющим максимальный приоритет, будет изменен. Это позволяет весам связей всех нейронов изменяться одновременно. Следовательно, активные нейроны, а также нейроны, получающие внешнее торможение, не будут участвовать в эволюции сети повторно.

Нейроны эволюционируют согласно уравнениям состояния, и те нетормозящие нейроны, которые получают внешнее возбуждение, становятся активными первыми. Неактивные нетормозящие ν -соседи активных нейронов избирательно изменяют затем веса связей, ассоциированные с активными соседями, и сами становятся активными. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет происходить дальнейшей эволюции в поле нейронной сети, что характеризует достижение сетью положения равновесия. В процессе эволюции сети активности нейронов распространяются в форме волн вокруг нейронов с внешним возбуждением.

3.3. Схема решения

3.3.1. Описание препятствий и движения роботов

Два плоских робота R_1 и R_2 находятся в общей среде, перемещаясь по прямоугольной решетке, содержащей препятствия. Будем рассматривать роботов в обобщенной форме, а именно, будем считать, что роботы заключены в прямоугольники с шириной P_1^{width} и высотой Q_1^{height} для первого, и с шириной P_2^{width} и высотой Q_2^{height} для второго. Позицию роботов в поле будем определять относительно положений центров прямоугольников. Число препятствий, содержащихся в поле роботов (т.е. в рабочем пространстве W), конечно. Границы поля тоже рассматриваются как препятствия. Регионы W , не содержащие препятствий, формируют свободное рабочее пространство W_{free} . Для осуществления процесса планирования необходимо отобразить рабочее пространство роботов в их конфигурационное пространство. Использование централизованного подхода к планированию путей предполагает рассмотрение индивидуальных объектов как составных частей одного совокупного. Пусть $(p_1(t), q_1(t))$ и $(p_2(t), q_2(t))$ - положения центров первого и второго роботов в момент времени t соответственно. Тогда движение точки $(p_1(t), q_1(t), p_2(t), q_2(t))$ будет означать перемещение совокупного робота. Примечательно, что для точечного объекта W и C совпадают, поскольку конфигурация объекта однозначно определяется его позицией в поле (в данной работе не рассматривается возможность поворота роботов). Таким образом, C совокупного робота состоит из произведения конфигурационных пространств индивидуальных роботов $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, и представляет собой прямоугольную область в \mathbb{R}^4 . Каждая точка или конфигурация в C определяет позиции индивидуальных роботов на прямоугольной решетке.

Препятствия, расположенные в рабочем пространстве роботов, задаются набором векторов $O = \{O_i\} = \{(A_i, B_i)\}$. Поскольку роботы не должны задевать препятствия, то необходимо выполнение следующих ограничений: $p_1(t) \neq A_i$, $q_1(t) \neq B_i$, $p_2(t) \neq A_i$, $q_2(t) \neq B_i$ для всех t . В совокупном C препятствия будут представлять собой множества, состоящие из плоскостей размерности два, покрытых четырехмерными кубами. Эти препятствия задаются уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} |p_1 - A_i| \leq 1/2 P_1^{width} \\ |q_1 - B_i| \leq 1/2 P_1^{height} \end{array} \right. \forall p_2, q_2, i, \quad \left\{ \begin{array}{l} |p_2 - A_i| \leq 1/2 P_2^{width} \\ |q_2 - B_i| \leq 1/2 P_2^{height} \end{array} \right. \forall p_1, q_1, i.$$

Набором таких ограничений исключаются конфигурации совокупного C , при которых роботы будут задевать препятствия.

Кроме того, при движении по решетке роботы не должны сталкиваться друг с другом. Для этого должны быть запрещены конфигурации роботов, приводящие к их взаимному соприкосновению. Ограничения вида

$$\left\{ \begin{array}{l} |p_1 - p_2| \leq 1/2(P_1^{width} + P_2^{width}) \\ |q_1 - q_2| \leq 1/2(Q_1^{height} + Q_2^{height}) \end{array} \right.$$

задают четырехмерный брус в \mathbb{R}^4 , включающий в себя, а следовательно, и запрещающий такие конфигурации совокупного C , принимая которые роботы касаются друг друга или находятся в позиции столкновения.

В совокупном C , таким образом, запрещается набор конфигураций совокупного робота, соответствующий ситуациям, когда индивидуальные роботы находятся в позиции взаимного столкновения или столкновения с препятствиями.

3.3.2. Генерация траекторий

Для планирования траекторий необходимо передать нейронной сети информацию о представлении рабочего пространства роботов, т.е. о расположении препятствий и целевых позиций в поле роботов. Каждой дискретной позиции совокупного C ставится в соответствие нейрон поля волновой сети. Нейроны, соответствующие препятствиям (нейроны-препятствия), получают единичный сигнал через внешние тормозящие входы, и только нейрон, соответствующий целевой позиции, получает единичное значение на внешнем возбуждающем входе. Согласно уравнениям состояния, если нейрон активен, или его тормозящий вход является ненулевым, функция $I()$ даст на выходе большую отрицательную константу. Нулевые значения функций U и r будут препятствовать дальнейшей эволюции состояния нейрона.

Изначально все нейроны поля неактивны. Активность сети инициируется на целевом нейроне (нейроне, соответствующем целевой позиции), активность которого становится равной единице. Распространение волны в поле сети начинается с возбуждения целевого нейрона. Каждый нетормозящий ν -сосед целевого нейрона изменяет значения весов, ассоциированные с последним, и становится активным со значением два. Нейронная активность распространяется в форме волнового фронта от нейрона, соответствующего целевой позиции, обходя нейроны, соответствующие препятствиям. Нейроны сети эволюционируют согласно уравнениям (1) и (2). Неактивные нетормозящие нейроны одновременно обновляют свои $n = 2d$ (где d - размерность пространства, в котором осуществляется планирование) весовых коэффициентов в соответствии с n уравнениями обучения, определяемыми (2). В действительности, функция V_k ответственна за изменение веса лишь от единственного ν -соседа $i - go$ нейрона, имеющего наибольший приоритет. Приоритет каждому из соседей $i - go$ нейрона может быть присвоен, например, с помощью числовой метки, и обход соседей может осуществляться согласно возрастанию этой метки. Активность i -го нейрона становится на единицу больше активности j -го нейрона из ν -соседства, отобранного с помощью функции приоритета V_k . Процесс генерации волны продолжается по мере того, как активность нейронов распространяется от целевого нейрона, обходя области препятствий, до тех пор, пока не будет происходить дальнейшей эволюции активности нейронов. В этот момент сеть достигает состояния равновесия. Значение активности нейронов поля в состоянии равновесия представляет собой множество достижимости целевой позиции.

3.3.3. Достижение целевых позиций

В состоянии равновесия значения активности нейронов поля сети представляют собой желаемое поле потенциалов. Путь к целевой позиции может быть получен выполнением градиентного спуска из начальной вершины. Очевидно, путь будет существовать только в том случае, если нейрон, соответствующий начальной позиции, имеет ненулевую активность. Динамика нейронной сети, осуществляющей градиентный спуск в поле потенциалов, сгенерированном волновой сетью, описывается уравнениями:

$$x_i^{t+1} = U_1 \left(I(\alpha_i) + \beta_i + \sum_{j \in \nu_i} w_{ij} U_2(x_j) \right), \quad (4)$$

характеризующими эволюцию активностей нейронов. Эти уравнения описывают динамику *градиентной сети*, схожую с динамикой нейронной сети волнового распространения. Начальными условиями для этой сети являются значения активности нейронов и значения весовых коэффициентов, сгенерированные волновой нейронной сетью. Функции U_1 и U_2 описываются следующими уравнениями:

$$U_1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{для } \tau > 0 \\ 0, & \text{для } \tau \leq 0 \end{cases}, \quad U_2(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \leq 1 \\ 0, & \text{если } \tau > 1 \end{cases}$$

Функция I здесь имеет такой же вид, как в п. 3.2, т.е. описывается формулой (3).

В процессе эволюции сети значения весовых коэффициентов не изменяются. Веса w_{ij} , связанные с нейроном i , будем называть в дальнейшем исходящими. Эта сеть имеет структуру, соответствующую структуре нейронной сети волнового распространения. Изначально активности и веса связей нейронов сети имеют значения, сгенерированные в процессе эволюции волновой сети. Значения α_i являются нулевыми для нейронов, соответствующих препятствиям, а β_i равняется единице на нейроне, соответствующем стартовой позиции, и эволюция сети, таким образом, инициируется на нейроне, ассоциированном с начальной позицией. Все нейроны поля сети одновременно обновляют значения активности согласно уравнениям (4). Нейроны, которые соответствуют препятствиям, не участвуют в эволюции сети. Если в ν -соседстве i -го нейрона отсутствует нейрон j со значением активности, равным единице, и весом w_{ij} , равным единице, то активность нейрона i примет нулевое значение. Это означает, что такие нейроны получают нулевую активность и не будут изменять значения активности до момента появления активного со значением единица соседа, вес к которому от рассматриваемого нейрона имеет единичное значение. Согласно динамике градиентной сети, нейрон, соответствующий начальной позиции, станет активным со значением активности единица. Каждый сосед этого нейрона изменяет свое выходное значение согласно (4), и лишь единственный нейрон из ν -соседства, единичный вес которого ассоциирован с активным нейроном, становится активным также со значением единица. Процесс продолжается в форме распространения волновых фронтов от нейрона, соответствующего стартовой позиции. Согласно динамике волновой сети, неактивный нетормозящий нейрон изменяет значение веса только от единственного активного ν -соседа с меньшей активностью, выбранного согласно функции приоритета V_k . Вследствие этого, активность нейронов градиентной сети, имеющих уровень активности выше чем у рассматриваемого нейрона, также станет нулевой, так как веса, ассоциированные с этими нейронами, будут нулевыми. Из оставшихся соседей, следуя тем же рассуждениям и ссылке на динамику работы волновой сети (ур. (1), (2)), активным станет только единственный нейрон из ν -соседства.

Эволюция активности нейронов будет продолжаться до тех пор, пока активность целевого нейрона вновь не станет равной единице. Последующая эволюция сети не приведет к изменению состояний нейронов. В этот момент градиентная сеть достигает положения равновесия. Необходимо заметить, что неактивные нейроны из ν -соседства целевого нейрона не будут участвовать в дальнейшей эволюции сети, поскольку их исходящие веса, ассоциированные с целевым нейроном, имеют нулевое значение.

В состоянии равновесия активными со значением единица являются нейроны, составляющие путь от начальной до целевой позиции в совокупном конфигурационном пространстве. Другие нейроны поля сети имеют нулевую активность.

Таким образом, искомым путь в поле потенциалов, сгенерированном волновой нейронной сетью, будет представлять собой последовательность активных нейронов в поле градиентной сети, а следовательно, перемещение совокупного робота из начальной точки $P^s = (p_1^s, q_1^s, p_2^s, q_2^s)$ до целевой точки $P^g = (p_1^g, q_1^g, p_2^g, q_2^g)$ вдоль полученного пути будет означать безопасное перемещение первого и второго роботов из начальных точек (p_1^s, q_1^s) и (p_2^s, q_2^s) в целевые (p_1^g, q_1^g) и (p_2^g, q_2^g) , соответственно. Пример модельной ситуации приведен на рис. 3. Там изображена решетка размером 50×50 , на которой заштрихован набор препятствий. Для прямоугольных роботов R_1 и R_2 указаны начальные A_1, B_1 и целевые A_2, B_2 позиции. Сгенерированные траектории движения роботов соединяют начальные и целевые позиции.

4. Выводы и заключения

В работе представлена система, планирующая пути на основе использования клеточных потенциалов, сгенерированных нейронной сетью волнового распространения, и последующей оценки и выделения бе-

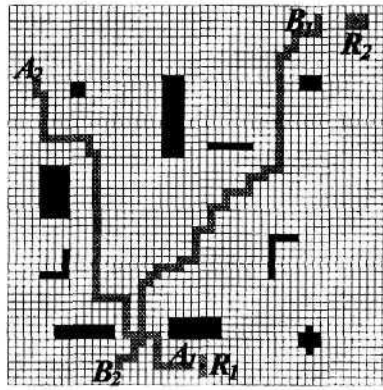


Рис. 3. Пример модельной ситуации планирования путей двух плоских роботов.

безопасных путей, если такие пути существуют. Каждой дискретной позиции в поле роботов ставится в соответствие нейрон поля сети. Для генерации клеточных потенциалов волновая сеть использует информацию о дискретном представлении рабочей среды роботов, т.е. о расположении препятствий и целевых позиций. В сгенерированном волновой сетью поле потенциалов градиентной сетью фиксируется безопасный путь (если такой существует) для совокупного робота, из которого возможно выделить безопасные пути индивидуальных роботов.

4.1. Анализ траекторий

Путь совокупного робота, выделенный в поле градиентной сети после установления ее в состояние равновесия, является оптимальным по метрике L_1 (манхэттенская метрика), которая определяется в \mathbb{R}^2 как

$$\rho(x_1, y_1, x_2, y_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Действительно, путь представляет собой последовательность смежных точек в C_{free} и ассоциируется с набором нейронов сети. Количество нейронов в этом наборе всегда минимально. Начиная с начальной позиции следующим в цепочке пути будет нейрон из ν -соседства с наименьшим значением активности, пока не будет достигнута целевая позиция. Расстояние между нейронами-соседями сети есть расстояние в метрике L_1 между точками в C , соответствующими активным нейронам цепочки. Путь, таким образом, складывается из последовательности таких расстояний между нейронами и, следовательно, является оптимальным в метрике L_1 . Отсюда следует также, что оптимальной является совокупная длина путей индивидуальных роботов.

4.2. Вычислительные затраты

Реализация желаемого поля потенциалов, будучи выполненной в параллельной среде, потребует порядка $O(dm)$ вычислений, где d - размерность конфигурационного пространства, в котором осуществляется планирование. При достаточно большом C , имея m^d дискретных конфигураций, а следовательно, столько же нейронов, волновым фронтам размерности $d - 1$ необходимо пройти практически через все C , что и потребует приблизительно $O(dm)$ вычислений.

Последовательное вычисление такого поля потребует значительно больше, а именно, порядка m^d вычислений. Примечательно, однако, то, что динамика волновой сети может быть легко реализована с помощью конвенционального программирования.

4.3. Обобщения

Можно предположить, что волновая сеть представляет довольно мощный механизм для решения различных задач, связанных с планированием путей. Существует возможность изменять структуру элемента сети, сохранив общую идею реализации волновых фронтов. Возможно также рассматривать различные конфигурационные пространства, что позволяет планировать пути для роботов разнообразных форм и с

различными степенями свободы. Форма препятствий также может быть произвольной. Поскольку волновая сеть оперирует напрямую дискретной информацией о среде, она может интегрироваться с различными системами визуального наблюдения или контроля. В соответствующей среде возможно планирование в реальном времени, если динамика сети реализована аппаратно. Идея решения может быть расширена на k роботов. Для этого достаточно перейти в пространство размерности $2k$.

4.4. Замечание

Описанная система позволяет получить решение задачи о планировании путей для практически всех представлений рабочей среды роботов, кроме некоторых вырожденных случаев.

Литература

- [1] Ashraf A. Kassim, B.V.K. Vijaya Kumar. Path Planning for Autonomous Robots Using Neural Networks // Journal of Intelligent Systems. 1997. Vol.7, N1-2. P.33-56.
- [2] Christopher I. Connolly, Roderic A. Grupen. On the Applications of Harmonic Functions to Robotics // Journal of Robotic Systems. 1993. Vol.10, N7. P.931-946.
- [3] Emmanuel Mazer, Juan Manuel Ahuactzin, Pierre Bessiere. The Ariadne's Clew Algorithm // Journal of Artificial Intelligence Research. 1998. Vol.9. P.295-316.
- [4] Nancy M. Amato, Yan Wu. A Randomized Roadmap Method for Path and Manipulation Planning // In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1996. P.113-120.
- [5] Eldershaw C., Cameron S. Motion Planning using GAs // In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference. 1999. P.1776.
- [6] Aronov B., de Berg M., van der Stappen A.F., Svestka P. Motion Planning for Multiple Robots // In Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry. 1998. P. 374-382.
- [7] Atallah M.J. Handbook on Algorithms and Theory of Computation. CRC Press. 1998. P.21.1-21.21.
- [8] LaValle S.M., Hutchinson S.A. Optimal Motion Planning for Multiple Robots Having Independent Goals // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1998. Vol.14, N6. P.912-925.
- [9] Svestka P., Overmars M.H. Coordinated Path Planning for Multiple Robots // Journal of Robotics and Autonomous Systems. 1998. Vol.23. P.125-152.
- [10] Dominik Henrich. A Review of Parallel Processing Approaches to Motion Planning // In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1996. P.3289-3294.

УДК 519.872

Программное и позиционное управления некоторыми системами массового обслуживания

Филатова Л.Ю.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Работа относится к управлению случайными процессами, точнее — к оптимальной организации систем массового обслуживания. Основные результаты — теоремы 3,4 — дополняют и уточняют ранее известное в соответствующей области.

Рассматривается система $G_k/D_k/l/(n_1, \dots, n_k)$: на l однотипных обслуживающих приборов поступает $k \geq 2$ независимых потоков требований, причем i -й поток формируется конечным источником объема n_i ; так, что каждое требование поступает (независимо от других) после пребывания в источнике случайное время с функцией распределения (ф.р.) F . Ориентированный на i -й поток прибор "разогревается" время t_i , затем мгновенно обслуживает (т.е. возвращает в i -ый источник) все требования, затем "остывает" время s_i , после чего снова готов к работе (т.е. к ориентации на тот или иной поток). Считается, что $t_i + s_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Сделаем важное уточнение. Поскольку отсутствуют какие-либо предположения относительно F , то соответствующая случайная величина, вообще говоря, обладает последействием. Поэтому принципиально различны два режима обслуживания требований.

1. Прибор обслуживает требования потока и одновременно обновляет все остающиеся в источнике требования ("блочный ремонт"; после такого ремонта в источнике все n_i требований — "новые", т.е. каждое будет поступать в поток через случайное время с ф.р. F).
2. Прибор обслуживает лишь требования потока ("выборочный ремонт"; после такого ремонта в источнике будут как "новые", так и "старые" требования. В этом случае требования будут поступать в поток через случайные времена с разными ф.р.).

У нас считается, что обслуживание идет в режиме 1. Всюду $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$.

Положим $x = x(t) = \{x_i(t)\}$ ($t \in [0, \infty)$), где $x_i(t) = n_i^{-1}y_i(t)$, $y_i(t)$ есть число требований, содержащихся в i -м источнике в момент t . Траектории случайного процесса x суть кусочно-постоянные функции; считаем их непрерывными справа. Программным (стохастическим) управлением назовем пару $\{p_{ij}\}, \{\tau_j^0\}$, где: $p_{ij} : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $\sum_{i=1}^k p_{ij} = 1$; $\tau_j^0 \geq 0$. Программное управление определяет дисциплину обслуживания требований: j -й прибор включается в момент τ_j^0 и действует непрерывно; если τ_j^n ($n = 0, 1, \dots$) есть n -й по счету момент готовности прибора, то он (прибор) ориентируется на i -й поток с вероятностью $p_{ij}(\tau_j^n)$. Позиционным (стохастическим марковским) управлением назовем пару $\{p_{ij}\}, \{\tau_j^0\}$, где: $p_{ij} : [0, \infty) \times [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]$, $p_{ij} \geq 0$, $p_{ij}(t, x) = 0$ если $x_i = 1$, $\sum_{i=1}^k p_{ij} = 1$, если $x \neq (1, \dots, 1)$; $\tau_j^0 \geq 0$. Позиционное управление определяет дисциплину обслуживания требований следующим образом:

j -й прибор включается в момент τ_j^0 ; если τ_j^n ($n = 0, 1, \dots$) есть n -й по счету момент готовности прибора, и $x(\tau_j^n) \neq (1, \dots, 1)$, то он (прибор) ориентируется на i -й поток с вероятностью $p_{ij}(\tau_j^n, x(\tau_j^n))$; если же $x(\tau_j^n) = (1, \dots, 1)$, то прибор выжидает первый момент $\tau_j^n + t$, когда для некоторого i будет $x_i(\tau_j^n + t) < 1$, в этот момент прибор ориентируется на i -й поток и полагается $\tau_j^{n+1} = \tau_j^n + t$ (если указанное i не одно, то прибор равновероятно ориентируется на соответствующие потоки. Впрочем, в невырожденных ситуациях вероятность совокупности указанных событий равна нулю). Уточним, что конкретная ориентация осуществляется вероятностным диспетчером, в который поступает лишь вектор $p_{ij} = p_{ij}(\tau_j^n, x(\tau_j^n))$, "внутренняя" же работа диспетчера не зависит ни от τ_j^n , ни от x , ни от работы диспетчера в прошлом.

Обозначим через U множество всех позиционных управлений. Далее для определенности считаем, что $x(0) = (1, \dots, 1)$ (это совершенно несущественно). Для $u \in U$ положим

$$R_i = R_i(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E x_i(t) dt, \quad R = R(u) = \min_{1 \leq i \leq k} R_i$$

(E – знак математического ожидания, R_i есть коэффициент готовности i -го источника, R – равномерный коэффициент готовности системы). Пусть U_0 есть некоторое подмножество U . Управление $u_0 \in U_0$ называем оптимальным в классе U_0 , если $R(u_0) = \sup_{u \in U_0} R(u)$. Ниже используются обозначения $\tau_i = t_i + s_i$, $\tau_0 =$

$\sum_{i=1}^k \tau_i$. Для управления $u \in U$ положим: ξ_i^m – m -й момент обслуживания (независимо от прибора) требований i -го потока ($\xi_i^0 = 0$); $m(i, T) = \min\{m : \xi_i^m \geq T\}$; $\gamma_i = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{E m(i, T)}$; $t_j = t - \tau_j^0 - \left[\frac{t - \tau_j^0}{\tau_0} \right] \tau_0$ ($[]$ здесь означают целую часть); $m_j(t) = \min \left\{ m : \sum_{i=1}^m \tau_i > t_j \right\}$; I – единичная $k \times k$ матрица.

В нижеследующих теоремах 1,2, заимствованных из [1], предполагается, что $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($\lambda, t > 0$, $F(t) = 0$ при $t < 0$).

Теорема 1. Управление $\tau_j^0 = (j-1)\tau_0/l$, $p_{ij}(t) = I(i, m_j(t))$ оптимально в классе программных. При этом

$$R = \frac{l}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} [1 - F(t)] dt \stackrel{\text{def}}{=} R_F^0. \quad (1)$$

Замечание. Полученный результат естественен и представляется интуитивно очевидным. Очевидность эта, однако, заметно уменьшается следующими двумя обстоятельствами. 1. Указанное в теореме управление (вообще говоря) не является оптимальным, если величины t_i, s_i – случайные (хотя бы даже "абсолютно независимые"). 2. В рассмотренной СМО время переориентации каждого прибора с i -го на m -й поток равнялось $s_i + t_m$. Обобщим ситуацию: пусть указанное время переориентации равняется τ_{im} ; во всем остальном СМО управляется и функционирует по вышеописанным правилам (в момент τ_j^0 j -й прибор ориентируется на какой-угодно поток — это не имеет значения; моментом готовности прибора считается момент окончания очередного акта обслуживания). В свете теоремы 1 представлялась естественной гипотеза, что (в измененной ситуации) оптимальным управлением будет следующее: $\tau_j^0 = (j-1)s/l$, j -й прибор последовательно ориентируется на потоки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k, i_1, i_2, \dots, i_k, i_1, \dots$, где $i_1, i_2, \dots, i_k, i_1$ есть замкнутый маршрут коммивояжера с матрицей $\{\tau_{im}\}$, s – протяженность маршрута. Однако попытки доказать эту гипотезу успехом не увенчались, а далее выяснилось, что гипотеза неверна.

Теорема 2. Для любого управления $u \in U$ справедливо неравенство

$$R(u) \leq R_F^0 \left(1 + \frac{1}{\tau_0} \sum_{i=1}^k \tau_i \frac{1}{n_i} \right).$$

Наша цель – исследовать возможности обобщения теорем 1,2 на случай произвольной ф.р. F .

Лемма 1. Функции $(0, \infty) \rightarrow R^1 : y \mapsto -\int_0^y [1 - F(t)] dt$, $y \mapsto -y \int_0^{1/y} [1 - F(t)] dt$ выпуклы.

Доказательство не приводится ввиду его элементарно-технического характера.

Теорема 3. Заключение теоремы 1 справедливо для любой ф.р. F .

Доказательство. Для указанного в формулировке теоремы 1 управления $\xi_i^{m+1} - \xi_i^m = \tau_0/l$, и формула (1) очевидна. Пусть $u \in U$. В силу леммы 1 и классических неравенств выпуклости для математических ожиданий (в том числе и условных) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T E x_i(t) dt &\leq \frac{1}{T} E \sum_{m=1}^{m(i, T)} \int_{\xi_i^{m-1}}^{\xi_i^m} x_i(t) dt = \frac{1}{T} E \left[E \left(\sum_{m=1}^{m(i, T)} \int_{\xi_i^{m-1}}^{\xi_i^m} x_i(t) dt \mid m(i, T) \right) \right] \\ &= \frac{1}{T} E \left[\sum_{m=1}^{m(i, T)} E \left(\int_{\xi_i^{m-1}}^{\xi_i^m} x_i(t) dt \mid m(i, T) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E \left[\sum_{m=1}^{m(i,T)} \frac{1}{T} E \left(\int_0^{\xi_i^m - \xi_i^{m-1}} [1 - F(t)] dt \middle| m(i,T) \right) \right] \\
 &\leq E \left[\sum_{m=1}^{m(i,T)} \frac{1}{T} \left(\int_0^{E[(\xi_i^m - \xi_i^{m-1}) | m(i,T)]} [1 - F(t)] dt \right) \right] \\
 &\leq E \left[\frac{m(i,T)}{T} \int_0^{\frac{T}{m(i,T)}} [1 - F(t)] dt \right] + O\left(\frac{1}{T}\right) \\
 &\leq \frac{E(m(i,T))}{T} \int_0^{\frac{T}{E m(i,T)}} [1 - F(t)] dt + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{2}
 \end{aligned}$$

Из очевидного неравенства

$$\sum_{i=1}^k \tau_i [m(i,T) - 1] \leq lT$$

получаем

$$\sum_{i=1}^k \frac{\tau_i}{\gamma_i} = \sum_{i=1}^k \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_i E m(i,T)}{T} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{\tau_i E m(i,T)}{T} \leq l,$$

так что найдется номер i , для которого $\gamma_i \geq \tau_0/l$. Переходя для этого i к нижнему пределу ($T \rightarrow \infty$) в (2), и замечая, что правая часть (2) убывает по аргументу $T/E m(i,T)$, получим

$$R_i \leq \frac{1}{\gamma_i} \int_0^{\gamma_i} [1 - F(t)] dt \leq \frac{l}{\tau_0} \int_0^{\frac{\tau_0}{l}} [1 - F(t)] dt,$$

что и доказывает теорему. □

Ситуация с обобщением теоремы 2 совсем иная.

Теорема 4. Для любых $k, l, n_i, \tau_i, \varepsilon > 0$ существуют ф.р. F и управление $u \in U$ такие, что $R_F^0 \leq \varepsilon$, $R(u) \geq 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Для простоты возьмем $k = 2, l = 1, n_1 = n_2 = n, s_1 = s_2 = 0, t_1 = t_2 = \tau_0$. Положим $\tau = N\tau_0$, N – натуральное число,

$$N \geq 2\varepsilon^{-n-1} \tag{3}$$

и возьмем $F : R^1 \rightarrow R^1$, полагая $F(t) = 1 - \varepsilon$ при $0 \leq t < \tau$, $F(t) = 1$ при $t \geq \tau$ ($F(t) = 0$ при $t < 0$). В силу теоремы 3

$$R_F^0 = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} [1 - F(t)] dt \leq \varepsilon. \tag{4}$$

Рассмотрим позиционное управление $u = (p_1, p_2)$, полагая: $p_1(t, x) = p_2(t, x) = 1/2$, если $x_1, x_2 < 1$; $p_1(t, (1, x_2)) = 0$; $p_2(t, (1, x_2)) = 1$, если $x_2 < 1$; $p_2(t, (x_1, 1)) = 0$; $p_1(t, (x_1, 1)) = 1$, если $x_1 < 1$; $p_1(t, (1, 1)) = p_2(t, (1, 1)) = 0$. Обозначим через ξ_0, ξ_1, \dots последовательные моменты времени, такие что $x_1(\xi_m) = 1, x_1(\xi_m - 0) < 1$ (на сегменте $[\xi_m + \tau, \xi_{m+1})$ будет $x_1(t) < 1$). Положим $\varrho_m = \xi_{m+1} - \xi_m - \tau$ и оценим величину $E\varrho_m$. Для $r = 1, 2, \dots$ рассмотрим события A_r , заключающиеся в том, что $x_1(\xi_m + \tau + r\tau_0) < 1$. Тогда

$$E\varrho_m = \sum_{r=1}^{\infty} rP(A_1 \dots A_{r-1} \bar{A}_r) \tag{5}$$

(\bar{A}_r – дополнение к A_r). По формуле умножения вероятностей имеем

$$P(A_1 \dots A_{r-1} \bar{A}_r) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_{r-1}|A_1 \dots A_{r-2})P(\bar{A}_r|A_1 \dots A_{r-1}) \quad (6)$$

(при $r \leq 2$ смысл равенства – естественный). Пусть B_{ir} есть событие, заключающееся в том, что в момент $\xi_m + \tau + (r-1)\tau_0$ прибор ориентируется на i -й источник ($i = 1, 2$). По формуле полной вероятности

$$P(\bar{A}_r|A_1 \dots A_{r-1}) = P(\bar{A}_r|A_1 \dots A_{r-1} B_{1r})P(B_{1r}|A_1 \dots A_{r-1}) + P(\bar{A}_r|A_1 \dots A_{r-1} B_{2r})P(B_{2r}|A_1 \dots A_{r-1}). \quad (7)$$

Из определения функции F следует, что $P(\bar{A}_r|A_1 \dots A_{r-1} B_{1r}) = \varepsilon^n$, а из определения управления (p_1, p_2) – что $P(B_{1r}|A_1 \dots A_{r-1}) \geq 1/2$. Полагая $\alpha_r = P(A_r|A_1 \dots A_{r-1})$ ($\alpha_1 = P(A_1)$), из (7) получаем

$$\alpha_r \leq 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^n. \quad (8)$$

Возвращаясь к (5), (6), имеем ($\prod_1^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$)

$$\begin{aligned} E\varrho_m &= \tau_0 \sum_{r=1}^{\infty} r(1-\alpha_r) \prod_{s=1}^{r-1} \alpha_s = \tau_0 \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{r=t}^{\infty} (1-\alpha_r) \prod_{s=1}^{r-1} \alpha_s \\ &= \tau_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{t-1} \alpha_s \right) \sum_{r=t}^{\infty} (1-\alpha_r) \prod_{s=t}^{r-1} \alpha_s \\ &= \tau_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{t-1} \alpha_s \right) \left(1 - \prod_{s=t}^{\infty} \alpha_s \right) = \tau_0 \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{t-1} \alpha_s. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) находим

$$E\varrho_m \leq \tau_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^n \right)^{t-1} = \frac{2\tau_0}{\varepsilon^n}. \quad (9)$$

Положим $m(T) = \min\{m : \xi_m \geq T\}$; тогда

$$\begin{aligned} R_1(u) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T x_1(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^{\xi_0} x_1(t) dt + \sum_{m=1}^{m(T)} \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_m} x_1(t) dt - \int_T^{\xi_{m(T)}} x_1(t) dt \right] \\ &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{m=1}^{m(T)} \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_{m-1} + \tau} x_1(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left(\sum_{m=1}^{m(T)} \tau \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau E m(T)}{T}. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, т.к. $T = \xi_0 + \sum_{m=1}^{m(T)} (\xi_m - \xi_{m-1}) = (\xi_{m(T)} - T)$, и $E\xi_0 < \infty$, то

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\xi_0 + \sum_{m=1}^{m(T)} (\tau + \varrho_{m-1}) - (\xi_{m(T)} - T) \right] \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\tau E m(T) + E \sum_{m=1}^{m(T)} \varrho_{m-1} \right] \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau E m(T)}{T} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{m=1}^{m(T)} \varrho_{m-1} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Но величина $m(T)$ ограничена: $m(T) \leq T/\tau + 1$, так что (11) и (9) дают неравенство

$$1 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau E m(T)}{T} + \frac{2\tau_0}{\tau \varepsilon^n}.$$

Теперь из (3) и (10) вытекает неравенство $R_1(u) \geq 1 - \varepsilon$. В силу равноправия процессов x_1, x_2 имеем также $R_2(u) \geq 1 - \varepsilon$. Вспоминая (4), получаем доказательство теоремы.

Литература

- [1] *Uglanov A. V., Filatova L. Yu.* On optimal organization of queueing systems with finite sources of requirements // *Seminari di Probabilita e Statistica Matematica*. Univ. di Cassino (Italy). 1998. P.64-95.

УДК 541.1+612.82

Самоорганизация в слабо неоднородной полносвязной сети нейронных клеточных автоматов возбудительного типа

Шабаршина Г.В.¹

*Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14*

Рассматривается полносвязная неоднородная сеть нейронных клеточных автоматов возбудительного типа. В системе каждый автомат имеет доступ ко всем остальным автоматам сети. Множество автоматов сети можно разбить практически произвольно на три попарно непересекающихся множества. Автоматы, принадлежащие каждому из множеств, функционируют синхронно. Последовательно и в цикле происходит генерация импульсов автоматами первого, второго, третьего, снова первого и т.д. множеств.

Введение

Многие сложные системы в природе состоят из достаточно простых подсистем, каждая из которых функционирует по простым правилам. Результат их взаимодействия – сложное поведение всей системы. Для изучения поведения таких сред важную роль играют базовые модели. Основным интерес представляют сети, построенные из одинаковых элементов, взаимодействующих друг с другом. Важнейшие из них – нейронные сети [1, 3, 4]. В основе моделей нейронных сетей лежат представления о принципах обработки информации мозгом. Как показано в работе [2], импульсный код есть способ передачи сенсорной информации.

Модели нейронных сетей основаны на синаптической теории [5, 6]. Ее главный постулат состоит в том, что реакция нейронов на последовательности поступающих импульсов зависит от эффективности синаптических входов. В моделях последние характеризуются синаптическими весами.

Работа выполнена в рамках гипотезы о волновом кодировании информации в мозге [7, 8]. Она основана на возможности согласования работы нейронов не только в пространстве, но и во времени. Нейроны обладают свойством временной селективности. Одно и то же воздействие, в зависимости от состояния, может привести или не привести к генерации импульса. По мнению Н.П. Бехтеревой [9], кодирование информации является динамическим процессом, связанным с возникновением и разрушением ансамблей когерентно работающих нейронов. Тем самым, кодирование информации сопровождается образованием волны нейронной активности, и носителем информации может являться не статическое распределение битовой величины, а колебательный режим динамической системы или ансамбля систем. Достаточно удобными объектами для организации такого рода режимов могут служить сети нейронных клеточных автоматов.

В настоящей работе исследуется колебательный режим в неоднородной сети, составленной из автоколебательных элементов – нейронных клеточных автоматов (НКА). Вопрос о колебательных режимах в однородной сети был изучен в [10]. В данной статье рассматривается общая задача о распространении импульсов по кольцевой неоднородной модульной структуре, образованной автоматами возбудительного типа.

При разработке модели НКА учтен ряд атрибутов, присущих биологическим нейронам. Аналитический подход к исследованию сети позволяет доказать основное утверждение, смысл которого состоит в следующем. Множество автоматов сети можно разбить практически произвольно на три попарно непересекающихся множества. Автоматы, принадлежащие каждому из множеств, функционируют синхронно. Последовательно и в цикле происходит генерация импульсов автоматами первого, второго, третьего, снова первого и т.д. множеств. Такие режимы естественно назвать режимами самоорганизации, так как они не требуют подстройки эффективности взаимодействия автоматов.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №98-01-00214)

1. Нейронные клеточные автоматы как формальные нейроны

На основе анализа биологических данных в работе [11] введен новый нейронный элемент - нейронный клеточный автомат (НКА). Биологические предпосылки при разработке модели клеточных автоматов, насколько нам известно, впервые были использованы Н. Винером и А. Розенблотом [12].

Состояние НКА характеризуется функцией $u(t)$ - мембранным потенциалом и $p(t)$ - пороговым значением мембранного потенциала, где t - текущий момент времени. Если в некоторый момент времени $u(t_0)$ равно $p(t_0)$, то НКА генерирует выходной сигнал $\sigma(t_0) = 1$ - мгновенный импульс (спайк) и посылает его всем связанным с ним автоматам. После генерации импульса автомат на время T_R переходит в рефрактерное состояние (состояние абсолютной невосприимчивости НКА к воздействию со стороны других автоматов). Значение мембранного потенциала в течение рефрактерного периода равно $u^0 > 0$, пороговое значение в момент генерации импульса устанавливается равным $p^0 > u^0$, в дальнейшем меняется по закону $p(t) = p^0 \exp(-p\Theta(t - t_0))$, где $\Theta > 0$, $p > 0$. Импульс, постушивший на вход НКА-приемника, не находящегося в рефрактерном состоянии, преобразуется в ступенчатую функцию (растягивается по времени). Время воздействия T_1 , если в течение этого периода НКА - приемник генерирует импульс, то воздействие прекращается. Считаем, что $T_1 < T_R$. После выхода НКА из рефрактерного состояния динамика $u(t)$ для $t = t_0 + T_R + \tau$ и до генерации импульса подчинена закону: $u(t) = u^{(0)} \exp(\Theta\tau(1 + \sum_{i=1}^n q_i \delta_i(t)))$. Здесь $\delta_i(t) = 1$, если при некотором $t_i \in [t - T_1, t]$ значение импульсного сигнала на i -ом синапсе $\sigma_i(t_i) = 1$. В противном случае, $\delta_i(t) = 0$. В формуле эволюции мембранного потенциала q_i - синаптические веса, характеризующие эффективность воздействия. Будем называть воздействие возбуждительным для $q > 0$, для $q < 0$ — тормозным. В свою очередь, назовем автомат возбуждительным, если он оказывает возбуждительное воздействие на все контролируемые нейронные клеточные автоматы.

Без внешнего воздействия нейронный клеточный автомат периодически генерирует импульсы через время T_2 , определяемое из условия

$$u^0 \exp(\Theta(T_2 - T_R)) = p^0 \exp(-p\Theta T_2).$$

Отметим, что модель сети НКА имеет общие черты с конструкцией базовой модели [13], а также с клеточными автоматами [14] и машинами клеточных автоматов [15]. Наиболее близка к ней модель биологического нейрона, построенная на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием [16]. Однако, сохраняя основные черты указанной модели, модель НКА убирает технические сложности, связанные с интегрированием системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

2. Организация полносвязной сети нейронных клеточных автоматов в кольцевую структуру из множеств синхронно функционирующих автоматов

Рассмотрим полносвязную слабо неоднородную сеть НКА, т.е. будем считать, что каждый автомат имеет доступ ко всем остальным автоматам сети, и синаптические веса друг от друга отличаются ненамного. Представим сеть автоматов в виде объединения трех непустых попарно непересекающихся множеств X_1 , X_2 , X_3 , число элементов в которых m_1 , m_2 , m_3 соответственно. Будем говорить, что автоматы множества функционируют синхронно, если они генерируют импульсы одновременно. Нас будут интересовать условия, при которых последовательно и в цикле происходит синхронная генерация импульсов автоматами первого, второго, третьего, снова первого и т.д. множеств.

Пронумеруем автоматы сети двумя индексами: первый — номер множества, которому принадлежит автомат, второй — порядковый номер автомата внутри множества.

Синаптический вес воздействия k -го элемента i -го множества на j -ый НКА l -го модуля обозначим через $q_{i,j}^{l,k}$, $i, l = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, m_i$, $j = 1, 2, \dots, m_l$.

Функционирование системы на промежутке между соседними по времени импульсами первого НКА первого множества назовем тактом прохождения волны возбуждения. Обозначим через $t_{i,j}^k$, ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, m_i$) - моменты генерации импульсов автоматами сети на k -ом такте прохождения волны.

Мы изучаем колебательные режимы, для которых на любом такте прохождения волны распределение моментов генерации импульсов автоматами сети подчинено следующим условиям.

Условие 1. Импульсы элементов внутри множеств следуют в порядке возрастания номеров элементов, и первый НКА i -го множества генерирует ненулевой выходной сигнал вслед за последним m_{i-1} -ым НКА

i – 1-го множества. Выпишем соответствующие неравенства:

$$t_{i,j+1}^k \geq t_{i,j}^k; t_{i,1}^k > t_{i-1,m_{i-1}}^k; t_{1,1}^k > t_{3,m_3}^{k-1}; \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, m_i - 1).$$

Условие 2. Автоматы из множества X_{i-1} оказывают непосредственное воздействие на автоматы из множества X_i , т.е.

$$t_{1,m_1}^k < t_{3,1}^{k-1} + T_1; t_{2,m_2}^k < t_{1,1}^k + T_1; t_{3,m_3}^k < t_{2,1}^k + T_1. \quad (2)$$

Условие 3. Каждый автомат из множества X_i выходит из рефрактерного состояния к моменту генерации импульсов элементами X_{i-1} -го множества, но не успевает спонтанно сгенерировать импульс:

$$t_{1,m_1}^{k-1} + T_R < t_{3,j}^k < t_{1,1}^{k-1} + T_2. \quad (3)$$

$$t_{2,m_2}^k + T_R < t_{1,j}^k < t_{2,1}^k + T_2. \quad (4)$$

$$t_{3,m_3}^k + T_R < t_{2,j}^k < t_{3,1}^k + T_2. \quad (5)$$

Предположим, что неравенства (1) – (5) выполнены на любом такте прохождения волны по сети. Это предположение позволяет использовать следующий алгоритм исследования динамики системы НКА. Для любого $t \in [t_{1,1}^{k-1} + T_R, t_{3,1}^{k-1}]$ мы можем вычислить значение мембранного потенциала и величину порога для первого НКА первого множества. Начиная с момента времени $t_{3,1}^{k-1}$, он оказывается под воздействием группы импульсов возбуждательных НКА множества X_3 . Учитывая, что значение мембранного потенциала в момент генерации спайка равно пороговому, можно вычислить $t_{1,1}^k$ — момент генерации нового импульса первого НКА множества X_1 . Аналогичные рассуждения позволяют установить моменты новых импульсов $t_{1,j}^k$ и $t_{2,i}^k, t_{3,i}^k$ ($i = 1, \dots, m_i, i = 1, 2, 3$), остальных автоматов множеств X_1, X_2, X_3 . Проанализировав таким образом дальнейшую динамику всех НКА сети, получим систему:

$$(t_{1,1}^k - \overline{t_3^{k-1}})(1 + p + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,1}^{3,s}) =$$

$$= (1 + p)(T_2 + t_{1,1}^{k-1} - \overline{t_3^{k-1}}) + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,1}^{3,s}(t_{3,s}^{k-1} - \overline{t_3^{k-1}}). \quad (6)$$

$$(t_{1,i}^k - \overline{t_3^{k-1}})(1 + p + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,i}^{3,s} + \sum_{r=1}^{i-1} q_{1,i}^{1,r}) =$$

$$= (1 + p)(T_2 + t_{1,i}^{k-1} - \overline{t_3^{k-1}}) + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,i}^{3,s}(t_{3,s}^{k-1} - \overline{t_3^{k-1}}) + \sum_{r=1}^{i-1} q_{1,i}^{1,r}(t_{1,r}^{k-1} - \overline{t_3^{k-1}}). \quad (7)$$

$$(t_{j,1}^k - \overline{t_{j-1}^k})(1 + p + \sum_{s=1}^{m_{j-1}} q_{j,1}^{j-1,s}) =$$

$$= (1 + p)(T_2 + t_{j,1}^{k-1} - \overline{t_{j-1}^k}) + \sum_{s=1}^{m_{j-1}} q_{j,1}^{j-1,s}(t_{j-1,s}^{k-1} - \overline{t_{j-1}^k}). \quad (8)$$

$$(t_{j,i}^k - \overline{t_{j-1}^k})(1 + p + \sum_{s=1}^{m_{j-1}} q_{j,i}^{j-1,s} + \sum_{r=1}^{i-1} q_{j,i}^{j,r}) =$$

$$= (1 + p)(T_2 + t_{j,i}^{k-1} - \overline{t_{j-1}^k}) + \sum_{s=1}^{m_{j-1}} q_{j,i}^{j-1,s}(t_{j-1,s}^{k-1} - \overline{t_{j-1}^k}) + \sum_{r=1}^{i-1} q_{j,i}^{j,r}(t_{j,r}^{k-1} - \overline{t_{j-1}^k}). \quad (9)$$

$$i = 2, \dots, m_j, j = 1, 2, 3.$$

Здесь через $\overline{t_i^k}$ обозначен усредненный момент времени генерации импульсов автоматами множества X_i т.е. $\overline{t_i^k} = \frac{\sum_{s=1}^{m_i} t_{i,s}^k}{m_i}$.

Сходимость итерационного процесса (6—9) удобно исследовать, используя обозначения для временных промежутков между моментами генерации импульсов.

Обозначим через $\xi_{1,j}^{k-1}$ — запаздывание спайка j -ого НКА первого множества относительно $\overline{t_3^{k-2}}$ усредненного времени генерации импульсов автоматами множества X_3 . Временные рассогласования между

k -1-ым моментом спайка j -ого НКА s -ого множества и $\overline{t_{s-1}^{k-1}}$ усредненным временем генерации импульсов автоматами $s-1$ -ого множества ($s = 2, 3$) обозначим через $\xi_{s,j}^{k-1}$. Через $\mu[\xi_s^{k-1}]$ обозначим среднее значение $\xi_{i,j}^{k-1}$ по данному множеству ($i = 1, 2, 3$), т.е. временное рассогласование между усредненными моментами генерации импульсов автоматами соседних по номеру множеств. Через $\xi_{i,j}^k$ и $\mu[\xi_i^k]$ обозначим соответствующие величины на следующем такте прохождения волны возбуждения по сети.

Переходя к обозначениям через временные рассогласования, формулы (6—9) можно представить в виде:

$$\xi_{1,1}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_3} q_{1,1}^{3,s}) = (1+p)(T_2 - \sum_{s=1}^3 \mu[\xi_s^{k-1}] + \xi_{1,1}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,1}^{3,s}(\xi_{3,s}^{k-1} - \mu[\xi_3^{k-1}]). \quad (10)$$

$$\xi_{1,j}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_3} q_{1,j}^{3,s} + \sum_{l=1}^{j-1} q_{1,j}^{1,l}) = (1+p)(T_2 - \sum_{s=1}^3 \mu[\xi_s^{k-1}] + \xi_{1,j}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_3} q_{1,1}^{3,s}(\xi_{3,s}^{k-1} - \mu[\xi_3^{k-1}]) + \sum_{l=1}^{j-1} q_{1,j}^{1,l} \xi_{1,l}^k. \quad (11)$$

$$\xi_{2,1}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_1} q_{2,1}^{1,s}) = (1+p)(T_2 - \sum_{s=2}^3 \mu[\xi_s^{k-1}] - \mu[\xi_1^k] + \xi_{2,1}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_1} q_{2,1}^{1,s}(\xi_{1,s}^k - \mu[\xi_1^k]). \quad (12)$$

$$\xi_{2,j}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_1} q_{2,j}^{1,s} + \sum_{l=1}^{j-1} q_{2,j}^{2,l}) = (1+p)(T_2 - \sum_{s=2}^3 \mu[\xi_s^{k-1}] - \mu[\xi_1^k] + \xi_{2,j}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_1} q_{2,j}^{1,s}(\xi_{1,s}^k - \mu[\xi_1^k]) + \sum_{l=1}^{j-1} q_{2,j}^{2,l} \xi_{2,l}^k. \quad (13)$$

$$\xi_{3,1}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_2} q_{3,1}^{2,s}) = (1+p)(T_2 - \mu[\xi_3^{k-1}] - \sum_{s=1}^2 \mu[\xi_s^k] + \xi_{3,1}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_2} q_{3,1}^{2,s}(\xi_{1,s}^k - \mu[\xi_2^k]). \quad (14)$$

$$\xi_{3,j}^k(1+p+\sum_{s=1}^{m_2} q_{3,j}^{2,s} + \sum_{l=1}^{j-1} q_{3,j}^{3,l}) = (1+p)(T_2 - \mu[\xi_3^{k-1}] - \sum_{s=1}^2 \mu[\xi_s^k] + \xi_{3,j}^{k-1}) + \sum_{s=1}^{m_2} q_{3,j}^{2,s}(\xi_{2,s}^k - \mu[\xi_2^k]) + \sum_{l=1}^{j-1} q_{3,j}^{3,l} \xi_{3,l}^k. \quad (15)$$

$$j = 2, \dots, m_i, i = 1, 2, 3.$$

Пусть $q_{i,j}^{k,l} = q^{k,l} + \delta_{i,j}^{k,l}$. Вопрос о сходимости (10—15) рассмотрим при условии $q_{i,j}^k = q^{k,l}$. Очевидно, что из (10—15) вытекает:

$$\xi_{i,j}^k - \xi_{i,j-1}^k = \frac{(1+p)(\xi_{i,j}^{k-1} - \xi_{i,j-1}^{k-1})}{1+p+\sum_{s=1}^m q_i^s}, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, m_i.$$

Тем самым с ростом номера итераций разность $\xi_{i,j}^k - \xi_{i,j-1}^k \rightarrow 0$. Это означает, что значения $\xi_{i,j}^k$ с течением времени становятся близки к $\mu[\xi_i^k]$. Тогда вопрос о сходимости отображения (10—15) сводится к проверке сходимости отображения для средних рассогласований:

$$(1+p+\sum_{s=1}^{m_3} q^{3,s})\mu[\xi_1^k] + (1+p)(\mu[\xi_2^{k-1}] + \mu[\xi_3^{k-1}]) = (1+p)T_2 \quad (16)$$

$$(1+p+\sum_{s=1}^{m_1} q^{1,s})\mu[\xi_2^k] + (1+p)(\mu[\xi_1^k] + \mu[\xi_3^{k-1}]) = (1+p)T_2 \quad (17)$$

$$(1 + p + \sum_{s=1}^{m_2} q^{2,s})\mu[\xi_3^k] + (1 + p)(\mu[\xi_1^k] + \mu[\xi_2^k]) = (1 + p)T_2 \quad (18)$$

Итерационный процесс (16–18), отражающий временные соотношения между усредненными моментами генерации импульсов на последовательных тактах прохождения волны по сети, сходится. Эти соотношения представляют собой метод Зейделя решения системы линейных уравнений с положительно определенной и симметрической матрицей.

Предельная точка процесса ξ^0 имеет координаты

$$\xi_i^0 = T_2(1 + p) / \sum_{s=1}^{m_i} q^{i,s} \left[1 + (1 + p) \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\sum_{s=1}^{m_j} q^{j,s}} \right], \quad (19)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Неравенства (1) - (5) для предельной точки имеют простой вид:

$$0 < \xi_i^0 < T_1 \quad (20)$$

$$T_R < \sum_{j=1}^3 \xi_j^0 - \xi_i^0 < T_2, (i = 1, 2, 3). \quad (21)$$

Из общей теории разностных уравнений [17] следует, что сходимость процесса не нарушается при достаточно малых изменениях параметров, т.е. можно указать такое δ , что при $|\delta_{i,j}^{k,l}| < \delta$ итерационный процесс (10—15) имеет предельную точку η^0 с координатами, мало отличающимися от координат точки ξ^0 . Предельная точка η^0 удовлетворяет неравенствам (20), (21).

Пусть начальные условия итерационного процесса выбраны в достаточно малой окрестности точки η_i^0 ($i = 1, 2, 3$). Стандартными рассуждениями можно показать, что все итерации $\xi_{i,j}^k$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, m_i$) тоже удовлетворяют (20), (21). Тем самым доказана устойчивость предельного режима. Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Пусть числа $q^{i,j}$ таковы, что значения ξ_i^0 , ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, m_i$) определенные формулами (16), удовлетворяют неравенствам (20), (21). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что в сети с синалтическими весами, удовлетворяющими неравенству $|g_{k,l}^{i,j} - q^{i,j}| < \delta$ ($i, k = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, m_i$; $l = 1, 2, \dots, m_k$), в предельном режиме промежутки времени между спайками автоматов в каждом множестве равны нулю, т.е. автоматы функционируют синхронно, а временные рассогласования η_i^0 между импульсами элементов $i - 1$ -ого и i -го множеств удовлетворяют неравенству $|\eta_i^0 - \xi_i^0| < \varepsilon$.

Заключение

Таким образом, показано, что неоднородная полносвязная сеть может организовываться в кольцо множеств синхронно функционирующих автоматов. Дадим наглядную интерпретацию полученных результатов. Пусть автоматы расположены на плоскости. Генерацию импульсов автоматами некоторого множества будем рассматривать как активацию черно-белого изображения. Сеть может бесконечно долго хранить последовательность трех визуальных образов. Ее можно рассматривать как модель хранения информации в динамическом виде.

Сеть является "гибкой" системой, позволяющей хранить разнообразные периодические последовательности. Данные среды могут быть использованы, например, в системах, осуществляющих идентификацию или частичное сопоставление периодических последовательностей. При настройке адаптивных систем, решающих задачи классификации или прогноза, также возникает необходимость периодического повторения обучающей выборки.

Системы клеточных автоматов удобно использовать для проверки гипотез относительно способов обработки и хранения информации в автоволновых средах.

Литература

- [1] Muller B., Reinhardt J. Neural Networks. An introduction // Springer-Verlag. 1990.

- [2] Adrian E.D. Electrical activity of the nervous system //Arch. Neurol. and Psychiatr. 1934. V. 34, N6. P. 1125 -1136.
- [3] Фролов Ф.Ф., Шульгина Г.И. Модель памяти на основе пластичности тормозных нейронов //Биофизика. 1983. Т. 28. С.445-480.
- [4] Шульгина Г.И., Пономарев В.Н., Резова И.Р., Фролов А.А. Влияние фоновой активности сети из возбуждательных нейроподобных элементов на проведение по ней возбуждения //ЖВНД. 1988. Т.38. З. С. 715-724.
- [5] Hebb D.O. The organization of behaviour: neuropsychological theory. N.Y.: J. Wiley and Sons, 1949. 335 p.
- [6] Экклс Дж. Физиология синапсов. М.: Мир, 1966. 395 с.
- [7] Лебедев А.Н. Память человека, ее механизмы и границы //Исследование памяти. М., Наука, 1990. С. 104—118.
- [8] Лебедев А.Н. О физиологических основах восприятия и памяти //Психол. журн. 1992. 2. С.30—41.
- [9] Бехтерева Н.П. Здоровый и больной мозг человека. М.: Наука, 1980. 208 с.
- [10] Шабаршина Г.В. Самоорганизация в полносвязной однородной сети нейронных клеточных автоматов возбуждательного типа // АиТ. 1999. Вып. 2. С. 112-119.
- [11] Шабаршина Г.В. Проведение возбуждения по кольцевой структуре нейронных клеточных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1994. N 2. С 116-121.
- [12] Винер Н., Розенблют А. Проведение импульсов в сердечной мышце // Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1961. Т. 3. С. 7-56.
- [13] Крюков В.И., Борисюк Г.Н. и др. Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге //Пуцшно, 1986. 112 с.
- [14] Малинецкий Г.Г., Шакаева М.С. Клеточные автоматы в математическом моделировании и обработке информации: Препринт ИПМ им. Келдыша РАН. 1994. 57.
- [15] Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир. 1991. 278 с.
- [16] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т.2, N 11. С. 64 -76.
- [17] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 631 с.

УДК 517.1

Асимптотические свойства одного класса игр со случайными исходами

Фролов А.К.

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Модель игровых деревьев, конечные вершины которых расположены на одном уровне, была исследована многими авторами [1-5]. Был изучен дискретный случай с конечным набором исходов игр $N = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$). При этом принималось, что исходы игр являются независимыми случайными величинами, заданными одним и тем же законом распределения. Было показано, что асимптотические значения выигрыша в начальной вершине для начинающего игрока сконцентрированы в двух противоположных точках в зависимости от того, кто заканчивает игру. Но кроме доказательства эффекта осцилляции, сами эти предельные значения в общем случае не были определены (конкретные значения указывались только для случая $n = 2$ в работах [1-2]).

Продолжая эти исследования, мы обобщили их на непрерывный случай, когда исходы игры в каждой конечной позиции являются независимыми случайными величинами заданными одной и той же непрерывной строго возрастающей функцией распределения $F_\xi(x)$. При этом доказано, что при постоянном факторе ветвления $b \geq 2$ выигрыш (в начальной позиции) для заканчивающего игрока сходится по вероятности к одному значению, которое явно вычисляется. Это является основным результатом данной работы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс игр двух лиц, которые задаются игровыми деревьями с постоянным коэффициентом ветвления $b \geq 2$, причем все финальные вершины имеют одну и ту же высоту h .

В любой финальной позиции j ($j = 1, 2, \dots, b^h$) выигрыш игрока, заканчивающего игру, есть случайная величина ξ_j . Предполагаем, что все ξ_j независимы и имеют одну и ту же непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_\xi(x)$. Естественно, реализация значений ξ_j предшествует процессу игры которая после этого становится антагонистической игрой с полной информацией.

Таким образом, используя минимаксную процедуру:

$$\max, \min, \max, \min, \dots$$

мы определим оценки для всех вершин, начиная с конечного уровня до начального. Значение в корневой вершине определит выигрыш для заканчивающего игрока.

Задача сводится к тому, чтобы найти асимптотическое значение выигрыша в начальной вершине при $h \rightarrow \infty$.

2. Асимптотическое значение выигрыша

Теорема 1. Пусть выигрыши в конечных вершинах для игрока, который заканчивает игру, являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной строго возрастающей функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда с ростом высоты игрового дерева с постоянным фактором ветвления $b \geq 2$ его выигрыши в начальной позиции сходятся по вероятности к

$$x_* = F_\xi^{-1}(p_b^*),$$

где p_b^* есть корень уравнения $p^b + p - 1 = 0$ на интервале $(0,1)$.

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать номер пары уровней $l = 0, 1, \dots$ начиная с последней пары.

Используя минимаксную процедуру с конечного уровня, мы получим последовательность функций распределений вероятностей:

$$F_0(x), F_1(x), \dots, F_l(x), F_{l+1}(x), \dots,$$

где $F_0(x) = F_\xi(x)$ равняется первоначальной функции распределения выигрышей в финальных позициях.

Как известно, новая функция распределения при взятии максимума от b независимых случайных величин заданных одной и той же функций распределений $F_\xi(x)$ равняется $f = F_\xi^b(x)$, а при взятии минимума равняется $g = 1 - (1 - F_\xi(x))^b$. Поэтому, беря суперпозицию функций $F = g \circ f$, получаем связь между $F_{t+1}(x)$ и $F_t(x)$, а именно:

$$F_{t+1}(x) = 1 - (1 - F_t^b(x))^b .$$

Обозначим $p = F_t(x)$, тогда разность

$$R(p) = F_{t+1}(x) - F_t(x) = 1 - p - (1 - p^b)^b .$$

По свойству функций распределений $0 \leq p \leq 1$. Причем $p = 0$ и $p = 1$ являются простыми корнями полинома $R(p)$, т.к. не являются корнями первой производной этого полинома

$$R'(p) = -1 + b^2(1 - p^b)^{b-1} p^{b-1} .$$

Полином $R(p)$ имеет единственный простой корень на интервале $(0,1)$, т.к. его вторая производная имеет также один корень на этом интервале

$$R''(p) = b^2(b-1)p^{b-2}(1 - p^b)^{b-2}[1 - (b+1)p] = \varepsilon(p)[1 - (b+1)p] ,$$

где $\varepsilon(p) > 0$ на интервале $(0,1)$, а $1 - (b+1)p$ принимает различные знаки на концах этого интервала.

Полином $p^b + p - 1$ имеет единственный простой корень на отрезке $[0,1]$, т.к. первая производная $bp^{b-1} + 1 > 0$ на отрезке $[0,1]$.

Если p_0 является корнем уравнения $p^b + p - 1 = 0$ на отрезке $[0,1]$, то p_0 является также корнем уравнения $R(p) = 0$. Действительно, $R(p_0) = 1 - p_0 - (1 - p_0^b)^b = 1 - p_0 - p_0^b = 0$.

Полином $R(p)$ может быть разложен на следующие множители:

$$R(p) = p(1-p)(p^b + p - 1)\omega(p) ,$$

где полином $\omega(p) > 0$ на отрезке $[0, 1]$. Причем $\omega(0) = \omega(1) = 1$, что следует из раскрытия неопределенности

$$\omega(p) = R(p)/p(1-p)(p^b + p - 1)$$

в точках $p = 0$ и $p = 1$, беря по правилу Лопиталья значение производных числителя и знаменателя в этих точках:

$$\frac{-1 + b^2(1 - p^b)^{b-1} p^{b-1}}{(1-p)(p^b + p - 1) - p(p^b + p - 1) + p(1-p)(bp^{b-1} + 1)} .$$

Последовательность $F_0(x), F_1(x), \dots, F_t(x), F_{t+1}(x), \dots$ будет монотонно убывать в точке x (возрастать) в зависимости от условия:

$$F_0(x) < p_b^* \quad (F_0(x) > p_b^*) ,$$

т.к. полином $R(p) < 0$ при $p < p_b^*$ ($R(p) > 0$ при $p > p_b^*$). Эта последовательность будет постоянна ($R(p) = 0$ при $p = p_b^*$), если $F_0(x) = p_b^*$, где p_b^* - корень уравнения $p^b + p - 1 = 0$.

В силу ограниченности всех функций распределений $F_t(x)$ монотонно убывающая (возрастающая) последовательность $F_t(x)$ необходимо имеет предел в каждой точке x . Обозначим этот предел через $A(x)$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении для $F_t(x)$ получаем

$$A(x) = 1 - (1 - A^b(x))^b ,$$

из которого следует, что значение $s = A(x)$ при каждом x удовлетворяет уравнению

$$R(s) = 1 - s - (1 - s^b)^b = 0 ,$$

которое мы рассматривали ранее.

В силу того, что первоначальная функция распределения $F_0(x)$ является непрерывной и строго возрастающей, существует единственная точка x_* , для которой $F_0(x_*) = p_b^*$.

Таким образом, предельная функция равна 0 при $x < x_*$, 1 при $x_* < x$ и p_b^* при $x = x_*$ (в общем случае, предельная функция не является функцией распределения, т.к. не выполняется одно из их свойств, а именно, полунепрерывность слева). Это означает, что выигрыш заканчивающего игрока сходится по вероятности к x_* при $h \rightarrow \infty$. Таким образом, теорема доказана.

3. Замечания

При доказательстве теоремы предполагалось, что $F_\xi(x)$ является непрерывной и строго возрастающей при всех x . Эти требования не обязательны и вводились, главным образом, ради простоты изложения. Они обеспечивали существование и единственность корня x^* уравнения

$$F_\xi(x) = p_b^* .$$

В общем случае возможны как отсутствие, так и неединственность этого корня.

Отсутствие x^* может иметь место лишь для разрывной $F_\xi(x)$, когда $F_\xi(x)$ испытывает скачок в точке $x = x^*$. Тогда следует x^* определять парой неравенств

$$F_\xi(x) < p_b^* \quad (x < x^*) , \quad F_\xi(x) > p_b^* \quad (x > x^*) .$$

Очевидно, что так определенный x^* существует и является единственным. При этом теорема, как легко видеть, остается в силе.

Осложнением другого типа является неединственность корня x^* , что может иметь место, если убрать требование строгого возрастания $F_\xi(x)$. Здесь мы сталкиваемся со следующей ситуацией: $F_\xi(x) = p_b^*$ на некотором полуинтервале $c < x \leq d$, где $c < d$. В отличие от предыдущего случая здесь формулировка теоремы должна быть изменена. Ясно, что в данном случае выигрыш заканчивающего игрока не стремится по вероятности к определенному значению. Предельное распределение его становится распределением случайной величины, принимающей значения c, d с вероятностями $p_b^*, 1 - p_b^*$ соответственно.

Таким образом, во втором варианте основной результат существенно меняется. В то же время отметим, что сама эта возможность носит исключительный характер.

4. Пример 1: нормальное распределение ξ_j

Пусть выигрыши ξ_j заканчивающего игрока в каждой конечной вершине одинаково распределены по стандартному нормальному закону $N(0, 1)$, т.е. имеют плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} ,$$

т.е. функция распределения равна $0.5 + \Phi(x)$ ($x > 0$), где $\Phi(x)$ есть функция Лапласа.

Здесь приведены мантиссы корней уравнения $p^b + p - 1 = 0$, которые приближенно подсчитаны по методу Ньютона:

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_b^*	6181	6823	7245	7549	7781	7965	8116	8243	8351

Например, корни уравнения $p^b + p - 1 = 0$ при $b = 2$ и $b = 10$ соответственно равны

$$p_2^* = 0.6181 \quad \text{и} \quad p_{10}^* = 0.8351 .$$

Исходя из теоремы, мы определим асимптотическое значение выигрыша (для начальной ситуации) x_2^* и x_{10}^* , которые определятся из уравнений:

$$F(x_2^*) = 0.5 + \Phi(x_2^*) = 0.6181 \quad , \quad F(x_{10}^*) = 0.5 + \Phi(x_{10}^*) = 0.8351 \quad .$$

Отсюда находим асимптотические значения выигрыша для игрока, заканчивающего игру,

$$x_2^* = 0.300 \quad , \quad x_{10}^* = 0.974 \quad ,$$

соответственно для $b = 2$ и $b = 10$.

5. Пример 2: дискретное распределение

Рассмотрим случай, когда случайная величина ξ равновероятно принимает одно из значений $N = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \geq 2$. В этом случае, $F_\xi(x)$ принимает лишь рациональные значения

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 .$$

Поэтому корень уравнения $F_\xi(x) = p_b^*$ заведомо не существует. В соответствии с замечаниями к теореме, изложенными выше, определяем x^* как точку перескока, удовлетворяющую неравенствам

$$F_\xi(x) < p_b^* \quad (x < x^*) , \quad F_\xi(x) > p_b^* \quad (x > x^*) .$$

В силу того, что функция $F_\xi(x)$ меняет значения только в узлах $0, 1, \dots, n-1$, то точка перескока x^* определится в узле i целой частью числа np_b^* :

$$x^* = i = [np_b^*] .$$

В частном случае $n = 2$, заканчивающий игрок асимптотически получает максимальный выигрыш, который равен 1 (т.к. $p_b^* > 0.5$ при любых $b \geq 2$ и $p^b + p - 1 < 0$ при $p = 0.5$). Этот результат независимо Pearl J. и Nau D.S. получили ранее в работах [1,2].

Общий результат, приведенный в теореме 1, позволяет в частном дискретном случае легко получить конкретные значения асимптотических выигрышей для любых n, b .

Автор выражает благодарность проф. А.Ю. Левину, под руководством которого он работает.

Литература

- [1] Pearl J., Asymptotic properties of minimax trees and game-searching procedures //Artif.Intell. 1980. V.14. P.113-138.
- [2] Nau D.S. The last player theorem //Artif.Intell. 1982. V.18. P.53-65.
- [3] Nau D.S. An investigation of the causes of pathology in game //Artif.Intell.1982. V.19. P.257-278.
- [4] Pearl J. On the nature of pathology in game searching //Artif.Intell. 1983. V.20 P.427-453.
- [5] Althoefer I. Asymptotic properties of levelregular decision trees with randomly evaluated leaves //Probab. Th. Rel. Fields. 1989. V.80. P.381-394.

Пример вставки ps-файла

Главное преимущество PostScript-файла – возможность регулировать размер по ширине с автоматической установкой его размера по вертикали. На рисунке 1 приводится график, построенный по более чем 200 000 точек.

Недостаток – его не видно при просмотре dvi-файла. Нужно делать преобразование в PostScript (команда dvips32).

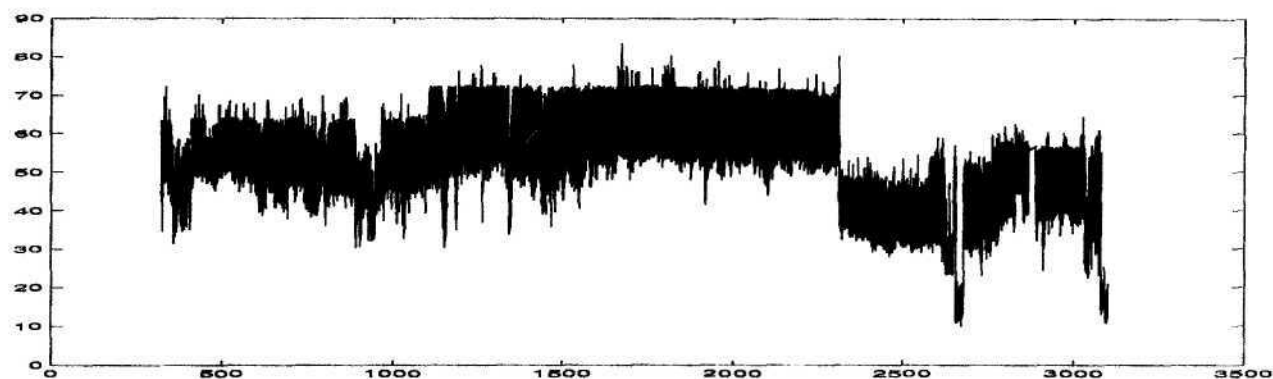


Рис. 1. График зависимости диаметра (см) Тырнаузской скважины от глубины (м).

Замечание. Наиболее просто ps-файлы графиков функций готовятся в системе MATLAB, где есть команда вывода графика в ps-файл. Так приведенный график создан следующей программой:

```
r=path;
path(p,'c:\tim\work\geo\Тырнауз');
load Caliper.txt;          % чтение пар (x,y) из текстового файла Caliper.txt
x= Caliper(:,1);          % создание массива x-ов
y= Caliper(:,2);          % создание массива y-ов
plot(x,y);                 % вывод графика на экран
print -dps CalTyr.ps       % вывод картинка в ps-файл
```

Выписка из инструкции по TeX'у (файл DVIPS.DOC)

Каждый правильно сформированный PostScript-файл содержит комментарий, указывающий местоположение на странице и размер файла.

При вставке PostScript-файла в TeX часто происходит ошибка, из-за того, что размер PostScript-файла указан в конце. Для ее исправления нужно сделать следующее.

Если просмотреть PostScript-файл (PostScript записывается в стандарте ASCII и может быть просмотрен любым редактором), то в начале файла есть строка

```
%%BoundingBox: (atend)
```

Эту строку нужно заменить на находящуюся в конце файла строку

```
%%BoundingBox: 73 210 553 589
```

Пример вставки рисунка в tex-файл

```
\begin{figure}[ht]
\epsfxsize = 0.1\textwidth      % установка размера по ширине страницы
{\hfill                         % выравнивание по центру
\epsffile{CalTyr.ps}           % вставка ps-файла
\hfill}                         % выравнивание по центру
\caption{
Подпись под рисунком.
}
\label{fig:CalTyr}
\end{figure}
```