



МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 7 № 2 2000

Ярославский государственный
университет имени П.Г.Демидова

Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет
имени П.Г.Демидова

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Том 7 №2 2000

Основан в 1999 г.
Выходит 2 раза в год

*Свидетельство о регистрации №019209 от 16.08.99
Государственного Комитета Российской Федерации по печати*

Главный редактор
В.А.Соколов

Редакционная коллегия
О.Л.Бандман, В.А.Бондаренко, В.Ш.Бурд, М.Г.Дмитриев,
А.В.Зафиевский, Ю.Г.Карпов, С.А.Кащенко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Левин,
И.А.Ломазова, В.В.Майоров, В.Э.Малышкин, В.А.Непомнящий

Ответственный секретарь
Е.А.Тимофеев

Адрес редакции: 150000, Ярославль, ул.Советская, 14

E-mail: mais@uniyar.ac.ru

Научные статьи в журнал принимаются на кафедре ТИ. Статья должна содержать УДК, аннотацию и сопровождаться набором текста в ре-

СОДЕРЖАНИЕ

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 7, № 2. 2000

Задача о равномерном назначении работ и ее обобщения – Кротаков В.А., Рублев В.С. +	3
Задача о минимальной стоимости равномерного назначения для двухкомпонентного плана – Кротаков В.А.	13
Самоорганизация полносвязной сети импульсных нейронов + Лагутина Н.С.	20
Сети W-нейронов в задаче хранения и воспроизведения периодических последовательностей бинарных векторов + Майоров В.В., Шабаршина Г.В. +	26
Клеточная нейронная сеть в задаче фильтрации двумерного сигнала Карлин А. К., Короткин А. А., Стрелков Н. А.	38
Высокомодовый параметрический резонанс Пендюк А.Д.	44
Аттракторы простейшей модели задачи хищник - хищник - жертва Перетрухин А.Г. –	46
Инвариантные относительно сдвигов и поворотов функции на изображениях, построенных на основе треугольной решетки Парфенов П. Г.	49

Работа издана при содействии федеральной целевой программы "Интеграция"

Лицензия ЛР №020319 от 30.12.96. Корректор А.А.Аладьева
Подписано в печать 21.12.2000. Формат 60x88¹/₈. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 6,43. Уч.-изд.л. 3,8. Тираж 100 экз. 28

Отпечатано на ризографе. Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова, 150 000, Ярославль, ул.Советская, 14

УДК 519.854.2

Задача о равномерном назначении работ и ее обобщения

В.А. Кропанов, В.С. Рублев

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Задаче о равномерном назначении работ и некоторым из ее обобщений посвящены работы [1] – [3], в которых результаты исследований одного из авторов либо были депонированы, либо анонсировались направления последующих исследований. Данная работа является первой публикацией не только обоснования части полученных ранее результатов, но и новых обобщений этой задачи.

1. Задача о равномерном назначении работ

1.1. Постановка задачи

В течение определенного периода из m дней n работников должны выполнить определенный объем работы, задаваемый вектором

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$

числа работ на каждый день. Возможности каждого работника на каждый день этого периода задаются матрицей R (из 0 и 1) размерности $n \times m$, элемент которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый работник может работать в } j\text{-ый день} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый работник не может работать в } j\text{-ый день.} \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия достаточности числа работников на каждый день (корректности задачи):

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} \geq s_j \quad (j \in \overline{1, m}). \quad (1)$$

Обязательные назначения задаются матрицей $n \times m$, элемент которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый работник обязан работать в } j\text{-ый день} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый работник не обязан работать в } j\text{-ый день.} \end{cases}$$

Очевидно, что должны быть выполнены условия корректности задачи:

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow r_{ij} = 1 \quad (i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq s_j \quad (j \in \overline{1, m}). \quad (3)$$

Необходимо построить матрицу X назначения работников по дням, элемент которой:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый работник назначен работать в } j\text{-ый день} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый работник не назначен работать в } j\text{-ый день.} \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия:

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow r_{ij} = 1 \quad (i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, m}), \quad (4)$$

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ij} = 1 \quad (i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, m}), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = s_j \quad (j \in \overline{1, m}). \quad (6)$$

Потребуем, чтобы матрица X , удовлетворяющая условиям (4)-(6), минимизировала функционал $f(X)$ среднеквадратичного числа работ (обоснование выбора функционала равномерности см. в [1]):

$$f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(X) - \bar{k})^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

где

$$k_i(X) = \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad (i \in \overline{1, n}) \quad - \quad (8)$$

число работ, выполняемых каждым работником, а

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(X) -$$

среднее число работ.

Таким образом, задачу о равномерном назначении работ сформулируем следующим образом:

Заданы вектор S числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника на каждый день и матрица A обязательных назначений, удовлетворяющие условиям (1)-(3). Требуется построить матрицу X , удовлетворяющую условиям (4)-(6) и минимизирующую функционал (7).

Решение этой задачи назовем *равномерным* назначением работ.

1.2. Постановка Al -задачи

Для исследования свойств задачи о равномерном назначении работ и построения алгоритма ее решения сформулируем следующую (вспомогательную) задачу о максимальных назначениях при ограничении на число работ каждого работника:

Заданы вектор S максимального числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника, удовлетворяющая (1), и матрица A обязательных назначений, удовлетворяющая (2)-(3). Требуется построить матрицу назначений X , удовлетворяющую условиям (4)-(5), следующим ограничениям:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq s_j \quad (j \in \overline{1, m}), \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq \max\left\{\sum_{j=1}^m a_{ij}, l\right\} \quad (l > 0) \quad (10)$$

и которая максимизирует число выполненных работ:

$$\varphi(X) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \rightarrow \max. \quad (11)$$

Такую задачу будем называть Al -задачей, где $l=1,2,\dots$ - ограничение условия (10).

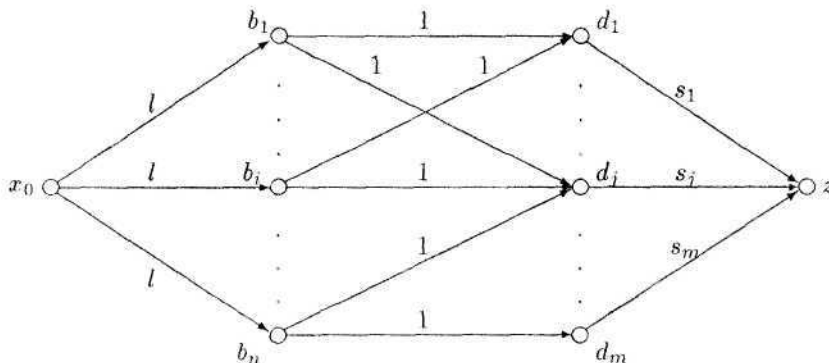


Рис. 1

Al -задача может быть сведена к задаче о наибольшем потоке (см., например, [4]) следующим образом. Построим транспортную (рис. 1) сеть, для которой:

- из источника x_0 идет n дуг пропускной способности l к вершинам $b_1, b_2, \dots, b_n$, соответствующих работникам;
- из вершин $d_1, d_2, \dots, d_m$, соответствующих дням, в сток z идут дуги пропускной способности $s_1, s_2, \dots, s_m$;
- из вершины b_i в вершину d_j идет дуга пропускной способности 1 тогда и только тогда, когда элемент r_{ij} матрицы возможностей R равен 1.

Если величину потока из b_i в d_j обозначить через x_{ij} , то решение задачи о наибольшем потоке и будет решением AI -задачи. При этом может быть использован алгоритм Форда-Фалкерсона (см. [4]) решения задачи о наибольшем потоке. Алгоритм Форда-Фалкерсона включает в себя задание начального потока (в AI -задаче этому соответствует задание любой матрицы назначений X , удовлетворяющей условию (4)) и увеличение потока при помощи построения цепочки улучшения. В исследуемой AI -задаче ей соответствует цепочка элементов матрицы X

$$x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_2} \dots x_{i_q j_{q-1}} x_{i_q j_q}, \quad (12)$$

не проходящая через элементы, соответствующие элементам $a_{ij} = 1$, и для которой выполнены условия:

$$k_{i_1}(X) < l, \quad (13)$$

$$x_{i_t j_{t-1}} = 1 \quad (t \in \overline{2, q}), \quad (14)$$

$$x_{i_t j_t} = 0 \quad (t \in \overline{1, q}), \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij_t} = s_{j_t} \quad (t < q), \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i j_q} < s_{j_q}. \quad (17)$$

Преобразование матрицы назначений $X \rightarrow Y$ определяется следующим образом:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = i_t \text{ и } j = j_{t-1} \quad (t \in \overline{2, q}) \\ 1, & \text{если } i = i_t \text{ и } j = j_t \quad (t \in \overline{1, q}) \\ x_{ij}, & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (18)$$

При этом выполняются следующие соотношения для числа единиц в строках:

$$k_{i_1}(Y) = k_{i_1}(X) + 1; \quad k_i(Y) = k_i(X) \quad (i \neq i_1)$$

и в столбцах

$$\sum_{i=1}^n y_{i j_q} = \sum_{i=1}^n x_{i j_q} + 1; \quad \sum_{i=1}^n y_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (j \neq j_q).$$

Этими свойствами преобразования мы воспользуемся при доказательстве характеристического свойства решений задачи о равномерном назначении работ. Для его формулировки введем определение AI -срезки матрицы X .

Определение: AI -срезкой матрицы X назовем любую матрицу, полученную следующим образом:

- а) содержит все единичные (равные 1) элементы матрицы A ;
- б) в каждой i -ой строке матрицы X , содержащей элементов равных 1 более $\max\{\sum_{j=1}^m a_{ij}, l\}$, оставлены равными 1 ровно $\max\{\sum_{j=1}^m a_{ij}, l\}$ элементов (любых), а остальные обнулены;
- в) все остальные строки матрицы X оставлены без изменения.

Лемма 1. Пусть Y - AI -срезка матрицы X , и пусть

$$k_i(Y) < \max\{l, \sum_{j=1}^m a_{ij}\}.$$

Тогда

$$\max\{l, \sum_{j=1}^m a_{ij}\} = l.$$

Доказательство. Предположим противное: выполнено условие леммы, но

$$\max\{l, \sum_{j=1}^m a_{ij}\} = \sum_{j=1}^m a_{ij} > l.$$

По определению AI -срезки $\sum_{j=1}^m a_{ij} \leq k_i(Y)$. Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \leq k_i(Y) < \max\{l, \sum_{j=1}^m a_{ij}\} = \sum_{j=1}^m a_{ij}.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

1.3. Характеристическое свойство решения задачи о равномерном назначении работ

Теорема 1. Матрица X является равномерным назначением работ тогда и только тогда, когда любая ее AI -срезка является решением AI -задачи.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица Z - решение задачи. Тогда для любой ее AI -срезки выполняются условия (4), (5), (9), (10), то есть любая AI -срезка является матрицей назначений AI -задачи. Остается показать, что AI -срезка матрицы Z максимизирует значение функционала (11).

Предположим противное: существует матрица X , которая является AI -срезкой матрицы Z , такая, что число ее ненулевых элементов не максимально. Тогда для нее можно построить цепочку элементов (12) с выполнением условий (13)-(17). Построим матрицу Y , используя преобразование (18). Далее мы покажем, как построить преобразование матрицы Y в матрицу W , которая является матрицей назначения (то есть для нее выполняются условия (4)-(6)) и для которой количество единиц в любой строке, кроме двух строк (с номерами i_1 и некоторым p), такое же, как и для матрицы Z , а для выделенных строк выполняются условия:

$$k_{i_1}(W) = k_{i_1}(Z) + 1 \leq \max\{l, \sum_{j=1}^m a_{i_1j}\} = l, \quad (19)$$

$$k_p(W) = k_p(Z) - 1 \geq \max\{l, \sum_{j=1}^m a_{pj}\} \geq l. \quad (20)$$

Так как $k_p(Z) - k_{i_1}(Z) > 1$, то

$$\begin{aligned} f(W) - f(Z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(W) - \bar{k})^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Z) - \bar{k})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^2(W) - \bar{k}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^2(Z) + \bar{k}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i^2(W) - k_i^2(Z)) = \\ &= \frac{1}{n} (k_{i_1}^2(W) + k_p^2(W) - k_{i_1}^2(Z) - k_p^2(Z)) = \end{aligned}$$

(в силу (19), (20))

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}(k_{i_1}^2(Z) + 2k_{i_1}(Z) + 1 + k_p^2(Z) - 2k_p(Z) + 1 - k_{i_1}^2(Z) - k_p^2(Z)) = \\
&= \frac{2}{n}(k_{i_1}(Z) - k_p(Z) + 1) < \frac{2}{n}(-1 + 1) = 0
\end{aligned}$$

Таким образом мы получили, что $f(W) < f(Z)$, и, следовательно, Z не минимизирует функционал f , что противоречит предположению о равномерном назначении.

Для построения матрицы W образуем из матрицы Y матрицу V , восстановив все единицы, замененные на нули при получении Al -срезки, то есть

$$v_{ij} = \begin{cases} y_{ij}, & \text{если } x_{ij} = 1 \text{ или } z_{ij} = 0 \\ z_{ij}, & \text{если } x_{ij} = 0 \text{ и } z_{ij} = 1. \end{cases}$$

Далее мы рассмотрим 3 случая:

- 1) $q = 1$;
- 2) $q > 1$ и $z_{iqjq} = 1$;
- 3) $q > 1$ и $z_{iqjq} = 0$.

1 случай: $q = 1$. В этом случае количество единиц в столбце j_1 для матрицы V превысит s_{j_1}

$$\sum_{i=1}^n v_{ij_1} = s_{j_1} + 1,$$

поскольку в строке i_1 нет восстанавливаемых элементов ($z_{i_1j_1} = 1$) и элемент $v_{i_1j_1}$ будет как раз лишней единицей. Так как до восстановления

$$\sum_{i=1}^n y_{ij_1} \leq s_{j_1}$$

(это следует из (17)-(18)), то при восстановлении найдется строка p , для которой $x_{pj_1} = 0$ и $z_{pj_1} = 1$. образуем матрицу W , заменив элемент v_{pj_1} на 0, то есть

$$w_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & \text{если } i \neq p \text{ или } j \neq j_1 \\ 0, & \text{если } i = p \text{ и } j = j_1. \end{cases}$$

2 случай: $q > 1$ и $z_{iqjq} = 1$. Заметим, что в случаях 2 и 3 не относятся к восстанавливаемым элементы v_{i,j_t} ($t \in \overline{1, q-1}$), поскольку количество единиц матрицы X в столбцах j_t ($t < q$) равно s_{j_t} , а если бы при получении матрицы X элемент z_{i,j_t} ($t < q$) был заменен на 0, то количество единиц в столбце j_t матрицы X стало бы меньше s_{j_t} , что противоречит (16). Поэтому при восстановлении единицы в строках i_t ($t \in \overline{2, q-1}$) количество единиц не изменится, то есть

$$k_{i_t}(W) = k_{i_t}(Z) \quad (t \in \overline{2, q-1}).$$

После восстановления количество единиц в столбце j_q равно s_{j_q} , а в строке i_q уменьшится, так как $v_{iqj_{q-1}} = 0$, а $z_{iqj_{q-1}} = 1$. Поэтому для этого случая можно взять $W = V$ и $p = q$.

3 случай: $q > 1$ и $z_{iqjq} = 0$. После восстановления количество единиц в столбце j_q увеличится на 1 (станет больше s_{j_q}). Следовательно, найдется строка с номером p такая, что элемент v_{pj_q} восстанавливается (то есть $x_{pj_q} = 0$ и $z_{pj_q} = 1$). образуем матрицу W , заменив элемент v_{pj_q} на 0, то есть

$$w_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & \text{если } i \neq p \text{ или } j \neq j_q \\ 0, & \text{если } i = p \text{ и } j = j_q. \end{cases}$$

Итак, во всех случаях построено требовавшееся преобразование к матрице W . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть матрица назначений X удовлетворяет свойству оптимальности ее Al -срезов для соответствующих Al -задач, а матрица Z является решением задачи о равномерном назначении работ.

Обозначим через $n_i(Y)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) число строк матрицы Y из 0 и 1, содержащих ровно i единиц. Тогда

$$f(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (k_j(Y) - \bar{k})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_{\max}(Y)} n_i(Y) \cdot (i - \bar{k})^2,$$

где

$$k_{\max}(Y) = \max_{j \in \overline{1, n}} k_j(Y).$$

Для доказательства достаточно показать, что

$$n_i(X) = n_i(Z) \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (21)$$

так как в этом случае

$$k_{\max}(X) = k_{\max}(Z) \quad (22)$$

и из формулы (21) будет следовать, что $f(X) = f(Z)$, что и требуется.

Обозначим через $p_l(X)$ количество единиц Al -срезки матрицы X . Из доказанного условия необходимости следует $p_l(X) = p_l(Z)$. Поскольку значения $p_l(X)$ не убывают при увеличении l , то найдется значение $l = l_{\max}$, для которого $p_l(X) = \sum_{j=1}^m s_j$. Отсюда следует, что

$$k_{\max}(X) = l_{\max}, \quad k_{\max}(Z) = l_{\max},$$

что доказывает справедливость равенства (22). Поскольку при $l = 2, 3, \dots$ $A(l-1)$ -срезка Al -срезки матрицы X является $A(l-1)$ -срезкой матрицы X , то справедливы равенства

$$\sum_{i=0}^{l-1} n_i(X) + (p_l(X) - p_{l-1}(X)) = n \quad (l = 2, 3, \dots, l_{\max}).$$

Добавляя очевидные равенства:

$$\sum_{i=1}^{l_{\max}} n_i(X) = n, \\ n_0(X) + p_1(X) = n,$$

получим систему линейных уравнений относительно $n_i(X)$ ($i = 0, \dots, l_{\max}$):

$$\begin{cases} n_0(X) = n - p_1(X) \\ \sum_{i=1}^{l-1} n_i(X) = n - (p_l(X) - p_{l-1}(X)) & (l = 2, 3, \dots, l_{\max}) \\ \sum_{i=1}^{l_{\max}} n_i(X) = n \end{cases}$$

Поскольку матрица системы треугольная с диагональю из единиц, то система имеет единственное решение. Это доказывает инвариантность значений $n_i(X)$ относительно выбора матрицы X и, следовательно, справедливость равенств (21). Теорема доказана.

1.4. Алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ

Из доказанной теоремы вытекает следующий алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ:

1°. Полагаем $l = 1$ и $X = 0$ (нулевая матрица).

2°. Решаем Al -задачу (алгоритм Форда-Фалкерсона), полагая в качестве начального потока матрицу X , полученную на предыдущем шаге, и получая в качестве решения новую матрицу X , удовлетворяющую условиям (4) - (6).

3°. Если $\varphi(X) = \sum_{j=1}^m s_j$, то задача решена — конец алгоритма, иначе выполняем шаг 4°.

4°. Увеличиваем l на 1 и переходим к шагу 2°.

Доказательство. Заметим, что алгоритм увеличения потока (Форда-Фалкерсона) построением цепочки улучшения не уменьшает количество единиц матрицы, определяющей поток, в любой ее строке. Поэтому A_p -срезы ($p = 1, \dots, l-1$) матрицы-решения Al -задачи при решении таким методом будут решениями соответствующих A_p -задач. Таким образом в результате применения алгоритма получается матрица X , удовлетворяющая характеристическому свойству, и по теореме 1 она является решением задачи о равномерном назначении работ, что и требовалось доказать.

2. Задача о равномерном назначении работ относительно вектора распределения

2.1. Постановка задачи

Заданы вектор S числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника на каждый день, удовлетворяющая условию (1), и вектор

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_n) \quad (h_i \geq 0, i \in \overline{1, n})$$

желательного числа работ для каждого работника. Требуется построить матрицу X назначения работ, удовлетворяющую условиям (4), (6) и минимизирующую функционал

$$f^+(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(X) - h_i)^2 \rightarrow \min, \quad (23)$$

где $k_i(X)$ - число назначаемых работ i -му работнику (определяется равенствами (8)).

Заметим, что при $h_i = \bar{k}$ ($i \in \overline{1, n}$) определенная таким образом задача превращается в частный случай рассмотренной в разделе 1 задачи. Назовем задачу из раздела 1 задачей равномерного назначения с матрицей обязательных назначений (РНМО), а определенную выше задачей равномерного назначения относительно вектора (РНОВ). Покажем эквивалентность этих задач.

2.2. Эквивалентность задач РНОВ и РНМО

Теорема 2. Пусть задача РНМО определена заданием вектора числа работ S , матрицей возможностей R и матрицей обязательных назначений A , а задача РНОВ определяется заданием вектора числа работ S^+ , матрицей возможностей R^+ и вектором желательного числа работ H для таких же значений параметров n и m . Пусть ограничения обеих задач связаны следующими условиями:

1. $R^+ = R - A$,
2. $s_j^+ = s_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (j \in \overline{1, m})$,
3. $h_i = \max_{j \in \overline{1, n}} \sum_{j=1}^m a_{ij} - \sum_{j=1}^m a_{ij} \quad (i \in \overline{1, n})$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1°. Если X^+ - решение задачи РНОВ, то $X = X^+ + A$ - решение задачи РНМО.
- 2°. Если X - решение задачи РНМО, то $X^+ = X - A$ - решение задачи РНОВ.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_i(A) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}, \\ k_{\max} &= \max_{i \in \overline{1, n}} \sum_{j=1}^m a_{ij}, \\ h_{\max} &= \max_{i \in \overline{1, n}} h_i. \end{aligned}$$

Пусть матрицы Y и Y^+ удовлетворяют условиям (4) и (6) соответствующих задач РНМО и РНОВ, связанных условиями теоремы, а также отношению $Y = Y^+ + A$. Тогда

$$\begin{aligned}
f(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{max} + k_{max} - \bar{k})^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{max})^2 + 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_{max})(k_{max} - \bar{k}) + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_{max} - \bar{k})^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) + k_i(A) - k_{max})^2 - (k_{max} - \bar{k})^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) - h_i)^2 - (k_{max} - \bar{k})^2 = \\
&= f^+(Y^+) - (k_{max} - \bar{k})^2,
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
f(Y^+) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y^+) - h_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - k_i(A) - h_i)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k} + \bar{k} - k_i(A) - h_i)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})^2 + 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})(\bar{k} - k_i(A) - h_i) + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{k} - k_i(A) - h_i)^2 = \\
&= f(Y) + 2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i(Y) - \bar{k})(\bar{k} - h_{max}) + (h_{max} - \bar{k})^2 = \\
&= f(Y) + (h_{max} - \bar{k})^2
\end{aligned}$$

Из этого следует, что $f(Y)$ и $f^+(Y^+)$ различаются константой, которая не зависит от выбора Y или Y^+ , а потому из минимальности $f(X)$ следует минимальность $f^+(X^+)$ и наоборот. Теорема доказана.

2.3. Сведение задачи РНОВ к задаче РНМО

Теорема 2 дает возможность свести одну задачу к другой.

1. Пусть мы имеем задачу РНМО. Положим

$$\begin{aligned}
h_i &= k_{max} - k_i(A) \quad (i \in \overline{1, n}), \\
R^+ &= R - A, \\
s_j^+ &= s_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (j \in \overline{1, m})
\end{aligned}$$

и образуем задачу РНОВ с матрицей возможностей R^+ , вектором числа работ на каждый день $S^+ = (s_1^+, \dots, s_m^+)$ и вектором желательного числа работ $H = (h_1, \dots, h_m)$. Поскольку ограничения этих задач удовлетворяют условиям теоремы 2, то по решению X^+ задачи РНОВ строим решение $X = X^+ + A$ задачи РНМО.

2. Пусть мы имеем задачу РНОВ с матрицей возможностей R^+ и вектором числа работ на каждый день S^+ . Расширим матрицу R^+ , добавив h_{max} нулевых столбцов, вектор S^+ , добавив h_{max} нулевых компонент, и число дней m увеличим на h_{max} дней. образуем матрицы A, R и вектор S задачи РНМО следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j > m - h_i \\ 0 & j \leq m - h_i \end{cases} \quad (i \in \overline{1, n}),$$

$$R = R^+ - A,$$

$$s_j = \begin{cases} s_j^+ & j \leq m - h_{\max} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} & j > m - h_{\max} \end{cases}.$$

Поскольку ограничения обеих задач удовлетворяют условиям теоремы 2, то по решению X задачи РНМО строим решение $X^+ = X - A$ задачи РНОВ. Отбросив $h_{\max}$ последних столбцов матрицы X^+ , получим решение исходной задачи.

3. Задача о равномерном назначении минимальной стоимости

Заданы вектор S числа работ на каждый день, матрица R возможностей каждого работника на каждый день, удовлетворяющая условию (1), и матрица C стоимостей выполнения работы каждым работником на каждый день (c_{ij} - стоимость работы i -го работника в j -ый день). Требуется среди матриц X назначения работ, удовлетворяющих условиям (4), (6) и минимизирующих функционал стоимости

$$\psi(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

выбрать матрицу, минимизирующую функционал равномерности (7).

Решение этой задачи будем называть *равномерным назначением минимальной стоимости* (является равномерным среди решений минимальной стоимости). Свойства назначения минимальной стоимости описываются следующей очевидной леммой.

Лемма 2. Для любого решения Y минимальной стоимости

$$\forall i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, m}: \quad c_{ij} < m_j \wedge r_{ij} = 1 \Rightarrow y_{ij} = 1, \quad c_{ij} > m_j \Rightarrow y_{ij} = 0,$$

где m_j - s_j -ый минимум в j -м столбце матрицы C (в упорядоченном по возрастанию списке значений j -го столбца на s_j -м месте стоит m_j).

Из леммы 2 вытекает, что при построении равномерного назначения минимальной стоимости следует определить матрицу A обязательных назначений следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & c_{ij} < m_j \wedge r_{ij} = 1 \\ 0, & c_{ij} \geq m_j. \end{cases} \quad (24)$$

Из (24) и определения m_j следует, что для матрицы A выполнены условия (2)-(3). Это позволяет сформулировать следующую теорему 3.

Теорема 3. Пусть вектор S , матрицы R и C определяют задачу о равномерном назначении минимальной стоимости и матрица A определяется формулой (24). Тогда вектор S и матрицы R и A определяют задачу о равномерном назначении, любое решение X которой является решением исходной задачи о равномерном назначении минимальной стоимости.

Доказательство. Пусть Y — любое назначение минимальной стоимости исходной задачи. Необходимо показать, что $\psi(X) = \psi(Y)$.

$$\begin{aligned} \psi(X) - \psi(Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} y_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{c_{ij} > m_j} c_{ij} x_{ij} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} y_{ij} - \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} y_{ij} \right) = \text{в силу (24)} \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{c_{ij} < m_j \wedge r_{ij} = 1} c_{ij} a_{ij} - \sum_{c_{ij} < m_j} c_{ij} y_{ij} + \sum_{c_{ij} = m_j} c_{ij} (x_{ij} - y_{ij}) \right) = \end{aligned}$$

в силу леммы 2

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^m m_j \sum_{c_{ij}=m_j} (x_{ij} - y_{ij}) = \\
 &= \sum_{j=1}^m m_j \left(\sum_{j=1}^m s_j - \sum_{j=1}^m s_j + \sum_{c_{ij}=m_j} x_{ij} - \sum_{c_{ij}=m_j} y_{ij} \right) = \\
 &= m_j \left(\sum_{c_{ij}<m_j} x_{ij} - \sum_{c_{ij}<m_j} y_{ij} \right) = 0
 \end{aligned}$$

в силу (24). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует простой алгоритм решения задачи о равномерном назначении работ минимальной стоимости:

1. По формуле (24) строим матрицу A обязательных назначений.
2. Решаем задачу о равномерном назначении работ.

Нетрудно обобщить эту задачу, добавив вектор H желательного числа работ и заменив критерий равномерности (7) на (23).

Литература

- [1] Рублев В.С. Задача о равномерном распределении работ /Ярославский госуниверситет. Ярославль, 1986. - Деп.ВИНИТИ №611-В87 26.01.87.
- [2] Рублев В.С. Задача о равномерном распределении работ //Тезисы международной конференции "Математические методы в исследовании операций". София, 1987. С.46.
- [3] Рублев В.С. Обобщения задачи о равномерном распределении работ //Тезисы докладов юбилейной научной конференции ЯрГУ. Ярославль, 1995. С.110-112.
- [4] Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование. М : Радио и связь, 1984.

Задача о минимальной стоимости равномерного назначения для двухкомпонентного плана

В.А. Кропанов

Ярославский государственный университет
e-mail: postmaster@prolek.yaroslavl.ru

В статье рассматривается случай решения задачи о минимальной стоимости равномерного назначения для двухкомпонентного плана. Вводится понятие плана назначения, определяются основные свойства этой задачи и на их основании строится алгоритм решения.

1. Введение

Задача о назначениях является классической задачей теории графов и дискретной математики. Она допускает различные обобщения, одно из них - задача о минимальной стоимости равномерного назначения (МСРН) рассматривается в этой статье. Вначале дается постановка задачи, вводятся основные обозначения и формулировки. Поскольку статья посвящена решению задачи МСРН для двухкомпонентного плана, то определение плана назначения и его основные свойства вынесены в отдельную часть. Кроме того, в этой части сформулирована и доказана теорема 2, позволяющая использовать для решения задачи МСРН план назначения наряду с матрицей назначения. В следующей части рассматривается непосредственно задача МСРН для двухкомпонентного плана. Вводятся определения цепей и циклов, формулируются свойства равномерного назначения относительно цепей и на их основании строится алгоритм решения задачи МСРН для двухкомпонентного плана.

2. Постановка задачи о минимальной стоимости равномерного назначения (МСРН)

В течение определенного периода из M дней N работников должны выполнить определенный объем работ, задаваемый вектором:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_M\},$$

где S_j - число работ на каждый день.

Возможности каждого работника на каждый день этого периода задаются матрицей R (из 0 и 1) размерности $N \times M$, элемент которой

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ый работник может работать в } j\text{-ый день} \\ 0 & \text{если } i\text{-ый работник не может работать в } j\text{-ый день.} \end{cases}$$

При этом должны быть выполнены условия корректности задачи:

$$\sum_{i=1}^N r_{ij} \geq S_j \quad (j \in 1, M). \quad (1)$$

Задаана матрица стоимостей C размерности $N \times M$, элемент которой c_{ij} - стоимость выполнения работы i -ым работником в j -ый день.

Необходимо построить матрицу назначений работников по дням X , элемент которой

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ый работник назначен работать в } j\text{-ый день} \\ 0 & \text{если } i\text{-ый работник не назначен работать в } j\text{-ый день.} \end{cases}$$

При этом матрица X должна удовлетворять следующим условиям:

$$x_{ij} \leq r_{ij} \quad (i \in 1, N; j \in 1, M), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = S_j \quad (j \in 1, M). \quad (3)$$

Потребуем, чтобы матрица X минимизировала функционал $f(X)$ среднеквадратичного числа работ (обоснование выбора функционала см.[1]) и функционал $\psi(X)$ стоимости назначенных работ.

$$\psi(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$f(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(X) - K)^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

где

$$K_i(X) = \sum_{j=1}^M x_{ij} \quad (i \in 1, N),$$

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i(X).$$

То есть среди всех матриц назначений, минимизирующих f , найти минимизирующую ψ .
Для краткости написания введем следующее определение:

Определение 1. Матрицу назначений X назовем матрицей равномерного назначения или равномерным назначением, если она минимизирует (5).

3. План равномерного назначения работ

Для рассмотрения свойств задачи о минимальной стоимости равномерного назначения для двухкомпонентного плана введем понятие плана назначения и сформулируем некоторые его свойства.

Определение 2. Назовем планом назначения работ $P(X)$, построенным на основе матрицы назначения X , следующую последовательность пар:

$$P(X) = \{(a_t, b_t) \mid t \in 1, l : \text{для } \forall t \in 1, l \text{ } \exists \text{ ровно } a_t \text{ строк таких, что } K_i(X) = b_t \text{ \& } \sum_{t=1}^l a_t = N \text{ \& } b_{t+1} > b_t\}.$$

Сформулируем несколько очевидных свойств плана назначения работ $P(X)$.

Свойство 1. Пусть $P(X)$ -план назначения на основе X , тогда для $\forall i \in 1, N \exists b_i (t \in 1, l)$ такое, что $K_i(X) = b_i$.

Свойство 2. Пусть X и Y - матрицы назначения, тогда если $P(X) = P(Y)$, то $f(X) = f(Y)$.

Из определения плана назначения следует, что

$$\sum_{t=1}^l a_t b_t = \sum_{j=1}^M S_j.$$

Из Свойства 1 следует, что формулу функционала равномерности $f(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(X) - K)^2$ можно переписать в терминах плана назначения $P(X)$ следующим образом:

$$f(X) = \sum_{t=1}^l a_t (b_t - K)^2$$

и эти записи эквивалентны.

Определение 3. План $P(X)$ будем называть планом равномерного назначения или равномерным планом, если X -матрица равномерного назначения.

Прежде чем представить основное свойство равномерного плана назначений, сформулируем вспомогательную задачу о максимальных назначениях.

Определение 4. Задача о максимальных назначениях при ограничении на число работ каждого работника называется L-задачей, где $L=1,2,3,\dots$ -ограничение на число работ каждого работника.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^M x_{ij} &\leq L \quad (i \in 1, N), \\ \sum_{i=1}^N x_{ij} &\leq S_j \quad (j \in 1, M). \end{aligned}$$

Определение 5. L-срезкой ($L=1,2,3,\dots$) матрицы X назовем матрицу, образованную из X следующим образом:

а). В каждом столбце матрицы X, содержащем более L элементов равных 1, оставляем равными 1 ровно L элементов (любых), остальные обнуляем.

б). Все остальные строки матрицы X оставлены без изменения (см.[1]).

Теорема 1 (характеристическое свойство решения задачи о равномерном назначении работ). Матрица назначений является решением задачи о равномерном назначении работ тогда и только тогда, когда любая ее L-срезка является решением L-задачи ($L=1,2,3,\dots$) (см. [1]).

Следующая теорема является основополагающей для использования плана назначения. Она позволяет применять равномерный план наравне с функционалом равномерности (5).

Теорема 2. Пусть X, Y-матрицы равномерного назначения ($X \neq Y$), тогда $P(X) = P(Y)$.

Доказательство проведем от противного.

Пусть существуют X, Y-матрицы равномерного назначения ($X \neq Y$) & $P(X) \neq P(Y)$

$$P(X) = \{(a_t, b_t) \mid t \in 1, d\}, \quad P(Y) = \{(a_s^*, b_s^*) \mid s \in 1, l\}.$$

Так как $P(X) \neq P(Y)$, то $\exists i \geq 0 : (a_d, b_d) = (a_l^*, b_l^*), (a_{d-1}, b_{d-1}) = (a_{l-1}^*, b_{l-1}^*), \dots, (a_{d-i+1}, b_{d-i+1}) = (a_{l-i+1}^*, b_{l-i+1}^*), (a_{d-i}, b_{d-i}) \neq (a_{l-i}^*, b_{l-i}^*)$.

Обозначим $p=d-i, q=l-i$.

Отсюда следуют равенства:

$$\sum_{t=p+1}^d a_t = \sum_{s=q+1}^l a_s^*; \quad (6)$$

$$\sum_{t=p+1}^d a_t b_t = \sum_{s=q+1}^l a_s^* b_s^*. \quad (7)$$

Так как $\sum_{t=1}^d a_t b_t = \sum_{s=1}^l a_s^* b_s^*$; то из равенства (7) следует

$$\sum_{t=1}^p a_t b_t = \sum_{s=1}^l a_s^* b_s^*. \quad (8)$$

Возможны 4 случая неравенства компонент плана:

- 1). $b_p < b_q^*$;
- 2). $b_p > b_q^*$;
- 3). $b_p = b_q^*$ & $a_p > a_q^*$;
- 4). $b_p = b_q^*$ & $a_p < a_q^*$;

1). Пусть $b_p < b_q^*$, тогда обозначим через g, номер такой что $b_p \geq b_g^*$ & $\forall s > g \Rightarrow b_p < b_s^*$;

Таким образом, выполнено следующее соотношение

$$b_g^* \leq b_p < b_s^*.$$

Обозначим через $X' - b_p$ -срезку матрицы X.

$Y' - b_p$ -срезку матрицы Y.

Так как X, Y -равномерные назначения, то по характеристическому свойству равномерного назначения следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N K_i(X') &= \sum_{i=1}^N K_i(Y'); \\ \sum_{i=1}^N K_i(X') - \sum_{i=1}^N K_i(Y') &= \left(\sum_{t=1}^p a_t b_t + \sum_{t=p+1}^d a_t b_p \right) - \left(\sum_{s=1}^g a_s^* b_s^* + \sum_{s=g+1}^q a_s^* b_p + \sum_{s=q+1}^l a_s^* b_p \right) =^{(6)} \\ &= \sum_{t=1}^p a_t b_t - \sum_{s=1}^g a_s^* b_s^* - \sum_{s=g+1}^q a_s^* b_p =^{(8)} = \sum_{s=1}^g a_s^* b_s^* - \sum_{s=1}^g a_s^* b_s^* - \sum_{s=g+1}^q a_s^* b_p = \sum_{s=g+1}^q a_s^* b_s^* - \sum_{s=g+1}^q a_s^* b_p > 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

2). Аналогично случаю 1).

3). Пусть $b_p = b_q^*$ & $a_p > a_q^*$.

Пусть $X' = (b_p - 1)$ -срезка матрицы X .

$Y' = (b_p - 1)$ -срезка матрицы Y .

Из характеристического свойства равномерного назначения следует, что

$$\sum_{i=1}^N K_i(X') = \sum_{i=1}^N K_i(Y').$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N K_i(X') - \sum_{i=1}^N K_i(Y') &= \sum_{t=1}^{p-1} a_t b_t + a_p(b_p - 1) + \sum_{t=p+1}^d a_t(b_p - 1) - \sum_{s=1}^{q-1} a_s^* b_s^* - a_q^*(b_q^* - 1) - \sum_{s=q+1}^l a_s^*(b_q^* - 1) =^{(6)} \\ &= \sum_{t=1}^{p-1} a_t b_t + a_p(b_p - 1) - \sum_{s=1}^{q-1} a_s^* b_s^* - a_q^*(b_q^* - 1) = \sum_{t=1}^p a_t b_t - a_p - \sum_{s=1}^q a_s^* b_s^* + a_q^* =^{(8)} = a_p - a_q^* > 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

4). Аналогично случаю 3).

Таким образом, во всех четырех случаях получили противоречие.

Теорема доказана.

Далее везде под планом назначения мы будем подразумевать план равномерного назначения, если иное не оговорено дополнительно.

4. Решение задачи МСРН для двухкомпонентного плана

Пусть план назначения имеет вид $P(X) = \{(a, b); (N - a, b + 1)\}$, будем называть такой план двухкомпонентным.

Тогда для любых строк X -матрицы равномерного назначения справедливо неравенство

$$\forall p, q \in 1, N \Rightarrow |K_p(X) - K_q(X)| \leq 1.$$

Далее везде считаем, что план равномерного назначения является двухкомпонентным.

Решение задачи МСРН заключается в построении цепей, уменьшающих стоимость назначения. Будет показано, что, изменения в матрице равномерного назначения, получаемые в результате применения цепей, уменьшающих стоимость, не влияют на равномерность назначения, и для любой матрицы равномерного назначения, не являющейся решением задачи МСРН, существует уменьшающая стоимость цепочка.

Определение 6. Назовем цепью в матрице назначений X последовательность

$\gamma = \{x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_1}, x_{i_2 j_2}, x_{i_3 j_2}, \dots, x_{i_{m-1} j_{m-1}}, x_{i_m j_{m-1}}\}$ такую, что выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} x_{i_t j_t} = 1 \ (t \in 1, m-1) \\ x_{i_t j_{t-1}} = 0 \ \& \ x_{i_{t-1} j_{t-1}} = 1 \ (t \in 2, m). \end{cases}$$

и не существует другой последовательности, содержащей данную.

Определение 7. Цепь назовем циклом, если $i_1 = i_m$.

Будем говорить, что к матрице назначений X применена цепь γ и $Y = \gamma X$, если

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 - x_{ij}, & \text{если } x_{ij} \in \gamma, \\ x_{ij}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Для матрицы Y выполняются условия:

$$\begin{cases} K_{i_1}(Y) = K_{i_1}(X) - 1 \\ K_{i_m}(Y) = K_{i_m}(X) + 1 \\ K_i(Y) = K_i(X) \text{ для } \forall i \neq i_1 \text{ \& } i \neq i_m \\ \sum_{i=1}^N y_{ij} = \sum_{i=1}^N x_{ij} = S_j \text{ (} j \in 1, M \text{)}. \end{cases} \quad (10)$$

Если γ -цикл, тогда $K_i(Y) = K_i(X)$ ($i \in 1, N$).

Лемма 1. Пусть X -матрица равномерного назначения, тогда $Y = \gamma X$ - матрица равномерного назначения $\Leftrightarrow K_{i_1}(X) = K_{i_m}(Y)$.

Доказательство. 1.Необходимость.

X, Y -матрицы равномерного назначения, тогда

$$\begin{aligned} 0 = f(X) - f(Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(X) - K)^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(Y) - K)^2 = \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(X) - K_{i_1}^2(Y) - K_{i_m}^2(Y)) = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + (K_{i_m}(Y) - 1)^2 - (K_{i_1}(X) - 1)^2 - K_{i_m}^2(Y)) = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(Y) - 2K_{i_m}(Y) + 1 - K_{i_1}^2(X) + 2K_{i_1}(X) - 1 - K_{i_m}^2(Y)) = \\ &= \frac{1}{N} (2K_{i_1}(X) - 2K_{i_m}(Y)). \end{aligned}$$

2. Достаточность.

По определению $K_i(Y) = K_i(X)$ ($i \in 1, N$), следовательно, $f(X)=f(Y)$, отсюда - Y -матрица равномерного назначения.

Достаточность и вся лемма доказаны.

В силу двухкомпонентности плана назначения и (10), условие леммы 1 $K_{i_1}(X) = K_{i_m}(Y)$ эквивалентно условию $K_{i_1}(X) > K_{i_m}(X)$. Если это условие выполнено, то применение такой цепи не изменяет равномерности назначения.

Определение 8. Обозначим через $\Delta(X)$ - множество непересекающихся цепей/ циклов матрицы равномерного назначения X .

Будем говорить, что $Y=\Delta X$, если

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 - x_{ij}, & \text{если } (x_{ij} \in \gamma) \text{ \& } (\gamma \in \Delta(X)), \\ x_{ij}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть X, Y - не совпадающие матрицы равномерного назначения, тогда существует $\Delta(X)$ такое, что $Y=\Delta X$.

Доказательство данной леммы представим в виде алгоритма.

Алгоритм нахождения $\Delta(X)$.

На входе: Матрицы равномерного назначения X, Y .

На выходе: $\Delta(X)$ такое, что $Y=\Delta X$.

0. Обнулить в матрицах X и Y совпадающие элементы;

1. **Выполнять Пока** $X \neq Y$

1.1. $t=1$, в матрице X выбрать строку $i_t : K_{i_t}(X) > K_{i_t}(Y)$, если такой строки не существует, то выбрать любую не нулевую строку.

1.2. Так как $K_{i_t}(X) \geq K_{i_t}(Y)$, следовательно, существует $x_{i_t j_t} = 1$ \& $y_{i_t j_t} = 0$;

1.3. Так как X, Y - равномерные назначения, следовательно, $\sum_{i=1}^N x_{ij_t} = \sum_{i=1}^N y_{ij_t} = S_{j_t}$, следовательно, существуют $x_{i_{t+1} j_t} = 0$ \& $y_{i_{t+1} j_t} = 1$;

1.3.1. **Если** $K_{i_{t+1}}(X) < K_{i_{t+1}}(Y)$, тогда цепь построена, добавить ее в $\Delta(X)$ и обнулить в матрицах X и Y все входящие в цепь компоненты.

1.3.2. **Иначе Если** $i_1 = i_t$, тогда цикл построен, добавить его в $\Delta(X)$ и обнулить в матрицах X и Y все

входящие в цикл компоненты. Перейти к п.1

1.3.3. Иначе увеличить t на единицу и перейти к п.2.

Алгоритм повторяем, пока матрицы X и Y не станут нулевыми, в итоге получим $\Delta(X)$ такую, что $Y = \Delta X$. Лемма доказана.

Очевидно, что любая строка может служить началом не более чем одной цепи, в противном случае для сохранения равномерности и двухкомпонентности плана назначения эта же строка должна служить окончанием другой цепи, а следовательно, их можно объединить в одну, что в свою очередь уже противоречит определению цепи.

Аналогично, любая строка может быть концом только одной цепи.

Лемма 3. Пусть X, Y - не совпадающие матрицы равномерного назначения. Тогда для любой $\gamma \in \Delta(X) : Y = \Delta X \Rightarrow \gamma X$ - матрица равномерного назначения.

Доказательство: Если γ -цикл, то Лемма очевидна. Пусть γ -цепь.

Предположим противное, пусть существует $\gamma \in \Delta(X) : f(\gamma X) > f(X) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(X) - f(\gamma X) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(X) - K)^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(\gamma X) - K)^2 = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(X) - K_{i_1}^2(\gamma X) - K_{i_m}^2(\gamma X)) = \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(X) - (K_{i_1}(X) - 1)^2 - (K_{i_m}(X) + 1)^2) = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(X) - K_{i_1}^2(X) + 2K_{i_1}(X) - 1 - K_{i_m}^2(X) - 2K_{i_m}(X) - 1) = \frac{1}{N} (2K_{i_1}(X) - 2K_{i_m}(X) - 2) < 0. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta^*(X) = \Delta(X)/\gamma$. $Y^* = \Delta^* X$. Из определения цепи γ и оптимальности X следует, что $K_{i_1}(X) = K_{i_1}(Y^*)$ и $K_{i_m}(X) = K_{i_m}(Y^*)$.

Очевидно, что $Y = \gamma Y^*$.

$$\begin{aligned} f(Y^*) - f(Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(Y^*) - K)^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_i(Y) - K)^2 = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(Y^*) + K_{i_m}^2(Y^*) - K_{i_1}^2(Y) - K_{i_m}^2(Y)) = \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(Y^*) + K_{i_m}^2(Y^*) - (K_{i_1}(Y^*) - 1)^2 - (K_{i_m}(Y^*) + 1)^2) = \\ &= \frac{1}{N} (K_{i_1}^2(X) + K_{i_m}^2(X) - K_{i_1}^2(X) + 2K_{i_1}(X) - 1 - K_{i_m}^2(X) - 2K_{i_m}(X) - 1) = \frac{1}{N} (2K_{i_1}(X) - 2K_{i_m}(X) - 2) < 0. \end{aligned}$$

Нам удалось построить матрицу назначений Y^* такую, что $f(Y^*) < f(Y)$, что противоречит условию оптимальности матрицы Y .

Следовательно, γX - матрица равномерного назначения.

Лемма доказана.

Лемма 2 и Лемма 3 утверждают, что любые две различные матрицы равномерного назначения могут быть сведены друг к другу посредством применения цепей. Нам осталось показать, что если одна из матриц является решением МСРН, то существует цепь уменьшающая стоимость. Это утверждение представим в виде Теоремы 3.

Определение 9. Стоимость цепи/цикла γ назовем функцию

$$\psi(\gamma) = \sum_{t=2}^m c_{i_t j_{t-1}} - c_{i_{t-1} j_{t-1}}.$$

Теорема 3. Пусть X - матрица равномерного назначения, Y - решение МСРН, такие, что $\psi(X) > \psi(Y)$, тогда для любой цепи/цикла $\gamma \in \Delta(X) : Y = \Delta X \Rightarrow \psi(\gamma) \leq 0$, причем хотя бы для одной цепи/цикла $\psi(\gamma) < 0$.

Доказательство: Предположим противное, пусть существует $\gamma \in \Delta(X) : \psi(\gamma) > 0$.

Тогда положим $\Delta^*(X) = \Delta(X)/\gamma$, $Y^* = \Delta^*(X)$.

$f(Y) = f(Y^*)$ в силу Леммы 3.

$\psi(Y) - \psi(Y^*) = \psi(\gamma) > 0$.

Что противоречит условию минимальности стоимости матрицы назначений Y .

Теорема доказана.

Из доказанных утверждений следует, что мы можем постепенно улучшать стоимость матрицы назначений через построение цепи/цикла отрицательной стоимости. Существование такой цепи/цикла следует

из Теоремы 3 и Леммы 2. Строя такие цепи, мы получим матрицу, для которой не существует цепи/цикла отрицательной стоимости. Следовательно, это и будет решение задачи МСРН для двухкомпонентного плана.

На основании всех вышеизложенных утверждений можно построить алгоритм решения задачи МСРН для двухкомпонентного плана.

На входе: Матрица возможностей R , вектор работ S , матрица стоимостей C , произвольное равномерное назначение X , такое что $P(X)$ - двухкомпонентный.

На выходе: X - решение задачи МСРН.

Пока существует цикл $\gamma(\tau, \pi) : \psi(\gamma) < 0$ или цепь $\gamma(\tau, \pi) : K_\tau(X) > K_\pi(X) \ \& \ \psi(\gamma) < 0$

1. Осуществить преобразование (9), после чего $X := Y$.

5. Заключение

Решение задачи о минимальной стоимости равномерного назначения для двухкомпонентного плана автор считает основополагающим для решения задачи МСРН с произвольным планом равномерного назначения, поскольку существует предположение о возможности декомпозиции задачи МСРН с произвольным планом на несколько задач с двухкомпонентным планом решения.

Автор выражает глубокую признательность Рублеву В.С. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

- [1] Рублев В.С. Задача о равномерном распределении работ / Ярославский госуниверситет, Ярославль, 1986. Деп.ВИНИТИ №611-В87 26.01.87.

УДК 541.1+612.82

Самоорганизация полносвязной сети импульсных нейронов

Н.С. Лагутина

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Описана модель импульсного нейрона, учитывающая свойства рефрактерности биологической нервной клетки. Рассмотрена полносвязная сеть из нейронов, объединенных в три синхронно функционирующих множества. Аналитически получены формулы для временных рассогласований между спайками нейронов. Изучаемые сети импульсных нейронов могут быть использованы для долговременного хранения периодических последовательностей в системах, решающих задачи идентификации, классификации или прогноза.

1. Введение

В основе моделей нейронных сетей лежат представления о принципах обработки информации мозгом. Кодирование информации может быть рассмотрено как динамический процесс, связанный с образованием ансамблей когерентно работающих нейронов. Таким образом, кодирование информации осуществляется в виде волн нейронной активности. Поэтому один из возможных подходов учитывает согласование работы нейронов как по пространству, так и по времени. Одно и то же воздействие в зависимости от состояния нейрона может привести или не привести к генерации импульса. Этот подход можно назвать волновым.

Все модели нейронов в той или иной степени основываются на принципах работы биологических нервных клеток. Нервная клетка (нейрон) состоит из центральной части – тела и древовидного отростка, аксона. Нейрон ограничен мембраной. Состояние нервной клетки характеризуется разностью потенциалов между внутренней и внешней поверхностью мембраны тела нейрона (мембранным потенциалом). Если потенциал достигает некоторого порогового уровня, то нейрон генерирует кратковременный высокоамплитудный импульс (спайк), обусловленный ионными токами, проходящими через активные каналы мембраны. Рожденный нейроном спайк распространяется по аксону и его разветвлениям. Последние образуют с другими нейронами контакты — синапсы. При поступлении сигнала по аксону к синапсу в нем освобождаются химические вещества (медиаторы), которые вызывают возбуждение или торможение в нейроне-приемнике.

На некотором промежутке времени после своего спайка нейрон абсолютно невосприимчив к внешнему воздействию. Этот временной промежуток называется периодом рефрактерности. В данной работе рассматривается модифицированная модель нейрона [1], [2], учитывающая эту особенность, исследуется полносвязная сеть из трех множеств таких нейронов. Устанавливается, что существует колебательный режим, в котором последовательно циклически происходит генерация импульсов нейронами первого, второго и третьего множеств. Аналогичные идеи рассматриваются в работе [5] применительно к сетям нейроподобных элементов, схема функционирования которых имитирует импульсные нейроны.

Подобные сети являются гибкими и удобными системами, позволяющими хранить разнообразные периодические последовательности, что может быть использовано, например, в системах, осуществляющих идентификацию или частичное сопоставление периодических последовательностей, при настройке адаптивных систем, решающих задачи классификации или прогноза и т. п.

2. Модель нейрона, основанная на уравнении с запаздыванием

Рассмотрим модель нейрона, учитывающую описанные свойства биологических клеток мозга. В качестве основы возьмем модель генерации спайков, предложенную в работах [1], [2]. Она основана на анализе натриевого и калиевого токов, проходящих через активные каналы мембраны. Учитывается экспериментальный факт запаздывания калиевого тока по отношению к натриевому. Величина задержки принята за единицу времени. Для мембранного потенциала $u(t) > 0$ предлагается следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1))] u. \quad (1)$$

Здесь $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ — положительные достаточно гладкие функции, характеризующие состояние натриевых и калиевых каналов, с помощью которых происходит перенос ионов через мембрану. Будем считать, что $f_{Na}(u) \rightarrow 0$ и $f_K(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$. По смыслу задачи параметр, определяющий скорость протекания электрических процессов, $\lambda \gg 1$. Пусть также выполнено условие:

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0. \quad (2)$$

Пусть спайк начинается с того момента, когда $u(t)$ пересекает единичное значение с положительной скоростью и заканчивается, когда $u(t)$ пересекает единичное значение с отрицательной скоростью. Будем считать, что спайк произошёл в нулевой момент времени. Моменты окончания данного и начала следующего спайков обозначим соответственно t_1 и t_2 . В работах [3] и [4] проведено подробное исследование динамики мембранного потенциала нейрона, описываемой уравнением (1), и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Для $u(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства:

$$u(t) = \exp \lambda \alpha_1 (t + o(1)), \quad t \in [\delta, 1 - \delta], \quad (3)$$

$$u(t) = \exp \lambda (\alpha_1 - (t - 1) + o(1)), \quad t \in [1 + \delta, T_1 - \delta], \quad (4)$$

$$u(t) = \exp [-\lambda \alpha_2 (t - T_1 + o(1))], \quad t \in [T_1 + \delta, T_1 + 1 - \delta], \quad (5)$$

$$u(t) = \exp \lambda \alpha (t - T_2 + o(1)), \quad t \in [T_1 + 1 + \delta, t_2], \quad (6)$$

где

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1, \quad \alpha_2 = f_{Na}(0) + 1, \quad (7)$$

$$T_1 = 1 + \alpha_1, \quad T_2 = T_1 + \alpha_2 / \alpha + 1, \quad (8)$$

$\delta > 0$ — произвольно фиксированное, малое число, $o(1)$ — слагаемые, стремящиеся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно относительно указанных в каждом конкретном случае значений t , а величины t_1 и t_2 удовлетворяют соотношениям:

$$t_1 = T_1 + o(1), \quad t_2 = T_2 + o(1). \quad (9)$$

Чтобы описать динамику нейрона, находящегося под синаптическим влиянием другого такого же нейрона, в уравнение (1) следует добавить слагаемые, моделирующие синаптическое воздействие. Пусть $v(t)$ — мембранный потенциал воздействующего нейрона. В отличие от [3] и [4] будем считать, что медиатор присутствует на соответствующих синапсах не только в течение спайка, но и некоторое время после него. Пусть время жизни медиатора составляет $(2 - \varepsilon)T_1$, $0 < \varepsilon < 0.5$. Тогда можно записать функцию ψ , являющуюся индикатором наличия медиатора, следующим образом:

$$\psi(v) = 1 - \theta(1 - v(t))\theta(1 - v(t - (1 - \varepsilon)T_1)), \quad (10)$$

где θ — функция Хевисайта. Введем также функцию $H(u)$, обеспечивающую наличие периода рефрактерности у нейрона, находящегося под воздействием:

$$H(u) = \theta(1 - u(t))\theta(1 - u(t - (1 - \varepsilon)T_1))\theta(1 - u(t - 2(1 - \varepsilon)T_1)). \quad (11)$$

Функционал $H(u)$ равен нулю во время спайка и в течение времени $2(1 - \varepsilon)T_1$ после него. Продолжительность рефрактерного периода, включая время спайка, составляет $T_R = (3 - 2\varepsilon)T_1$, $T_R < T_2$, где T_2 задается формулой (8).

Нейрон испытывает воздействие другого нейрона только при одновременном выполнении трёх условий: он вышел из состояния рефрактерности; на соответствующих синапсах выделился медиатор; спайк воздействующего нейрона начался в тот момент, когда рассматриваемый нейрон не находился в рефрактерном состоянии. На основании этих условий слагаемое, моделирующее синаптическое воздействие, будет выглядеть как произведение нескольких множителей.

Первое условие обеспечивается функционалом $H(t)$, второе — $\psi(t)$. Третье условие наиболее сложное, так как в нём должны учитываться обе функции. Оно выполняется только в том случае, когда $\psi(t)$ принимает значение 1 через некоторое время после $H(t)$. Следовательно, выражение $H(t) - \psi(t)$ должно быть

больше 0 на промежутке Δt . Это требование можно записать с помощью интеграла разности $H(t) - \psi(t)$ на отрезке, длина которого равна времени жизни медиатора. Таким образом, уравнение, описывающее динамику изменения мембранного потенциала, будет выглядеть так :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & \lambda [-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1))] u(t) + \\ & + \left[\alpha g \cdot H(u(t)) \cdot \psi(v(t)) \cdot \theta \left(\int_{t-(2-\varepsilon)T_1}^t (H(u(t)) - \psi(v(t))) dt + \delta \right) \right] u(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $0 < \delta < 0.5$, а αg (α вычисляется по формуле (2)) - множитель, определяющий вклад соответствующего синапса в динамику мембранного потенциала. Число g называют синаптическим весом. Если $g > 0$, то речь идет о возбуждающем синапсе, если $g < 0$ - о тормозном.

Аналогично, если нейрон находится под воздействием m других нейронов :

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \lambda [-1 - f_{Na}(u) + f_K(u(t-1))] u + \\ & + \left[\alpha \sum_{k=1}^m g_k \cdot H(u) \cdot \psi(v_k) \cdot \theta \left(\int_{t-(2-\varepsilon)T_1}^t (H(u) - \psi(v_k)) dt + \delta \right) \right] u(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где g_k — вес, а $v_k(t)$ — мембранный потенциал, соответствующие k -му нейрону.

Следует отметить два существенных отличия предлагаемой модели от рассматриваемой в [3] и [4]. Во-первых, увеличивается время жизни медиатора до $(2 - \varepsilon)T_1$, во-вторых, учитывается особенность выделения медиатора в то время, когда нейрон находится в рефрактерном состоянии. Это приводит к новым эффектам в организации колебаний нейронных систем.

3. Самоорганизация полносвязной сети в кольцо из трех множеств синхронно функционирующих нейронов

Рассмотрим полносвязную однородную сеть нейронов, т.е. будем считать, что каждый элемент имеет доступ ко всем остальным нейронам сети, а все синаптические веса одинаковы и равны q . Представим такую сеть в виде объединения трех непустых попарно непересекающихся множеств X_1, X_2, X_3 , число элементов в которых m_1, m_2, m_3 соответственно. Будем говорить, что нейроны множества функционируют синхронно, если они генерируют импульсы одновременно. Определим условия, при которых последовательно и в цикле происходит синхронная генерация импульсов нейронами первого, второго, третьего, снова первого и т.д. множеств.

Теорема. *Существует устойчивый режим работы сети, при котором нейроны, принадлежащие каждому из множеств, функционируют синхронно и генерация импульсов элементами множеств X_1, X_2, X_3 осуществляется последовательно и циклически. При этом временные рассогласования между спайками нейронов, принадлежащих третьему и первому, первому и второму, второму и третьему множествам, равны величинам ξ_1, ξ_2, ξ_3 с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$):*

$$\xi_1 = \frac{T_2}{(m_3(q + m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_3^{-1}))}, \quad (14)$$

$$\xi_2 = \frac{T_2}{(m_1(q + m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_3^{-1}))}, \quad (15)$$

$$\xi_3 = \frac{T_2}{(m_2(q + m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_3^{-1}))}, \quad (16)$$

если m_1, m_2, m_3 таковы, что

$$\xi_i < T_1, \quad \sum_{j=1}^3 \xi_j - \xi_i > T_R, \quad i = 1, 2, 3.$$

Одним из основных моментов доказательства теоремы является выбор начальных условий. Пусть $t_{k,j}^i$ — момент начала i -го спайка j -го нейрона, принадлежащего k -ому множеству ($i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, m_k; k = 1, 2, 3$). Зададим для нейронной сети априорно моменты начала спайков так, чтобы спайки элементов множества X_2 следовали за спайками элементов из множества X_1 :

$$0 \leq t_{1,1}^1 \leq t_{1,2}^1 \leq \dots \leq t_{1,m_1}^1 < t_{2,1}^1 \leq t_{2,2}^1 \leq \dots \leq t_{2,m_2}^1.$$

Будем считать, что пока не закончились спайки нейронов из множества X_1 , элементы множества X_3 находятся в рефрактерном состоянии. Пусть к началу спайков нейронов из множества X_2 элементы из множества X_3 становятся восприимчивы к воздействию, а нейроны множества X_1 еще рефрактерны. Однако будем предполагать, что к моментам начала спайков элементов множества X_3 нейроны из X_1 вышли из состояния рефрактерности, т.е. $t_{3,1}^1 > t_{1,m_1}^1 + T_R$. Будем считать, что нейроны из множества X_3 сгенерировали импульсы в моменты $t_{3,1}^1 \leq t_{3,2}^1 \leq \dots \leq t_{3,m_3}^1$, где $t_{3,1}^1 > t_{2,m_2}^1$.

Описанный выбор начальных условий позволяет проанализировать динамику нейронной системы на втором такте прохождения волны, который открывается в момент $t_{1,1}^2$ спайком первого элемента множества X_1 . Введем обозначения для временных рассогласований на начальном такте волны. Положим $\xi_{k,j}^1 = t_{k,j}^1 - t_{k,j-1}^1$ ($k = 1, 2, 3$) — рассогласования между спайками j -го и $(j-1)$ -го нейрона внутри множеств. Пусть $\xi_{k,1}^1 = t_{k,1}^1 - t_{k-1,m_{k-1}}^1$ ($k = 2, 3$) — рассогласования между началом спайков первого элемента k -го множества и последнего элемента $(k-1)$ -го множества. Обозначим через $\xi_{i,j}^2$ аналогичные величины на втором такте прохождения волны. Спайк первого элемента множества X_1 (начало второго такта прохождения волны) относительно спайка последнего элемента множества X_3 запаздывает на величину $\xi_{1,1}^2 = t_{1,1}^2 - t_{3,m_3}^1$.

Лемма 1. Справедлива формула с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \rightarrow \infty$):

$$\xi_{i,j}^2 = \frac{\xi_{i,j}^1}{1 + (m_{i-1} + j - 1)q}, \quad (17)$$

где $i = 1, 2, 3, j = 2, \dots, m_i, m_0 = m_3$.

Поясним идею доказательства леммы. На втором такте прохождения волны нейроны множества X_1 находятся под воздействием спайков нейронов множества X_3 . Пусть $t_{3,m_3}^1 < t_{1,1}^2 \leq t_{1,2}^2 \leq \dots \leq t_{1,m_1}^2$, $t_{3,1}^1 + T_R > t_{1,m_1}^2$. Вычислим время начала прохождения волны $t_{1,1}^2$. К моменту $t_{3,1}^1$ генерации спайка первым нейроном третьего множества первый элемент из X_1 вышел из состояния рефрактерности и на промежутке $[t_{3,1}^1, t_{3,2}^1]$ подвергается воздействию одного нейрона, таким образом, его динамика описывается следующим уравнением:

$$\dot{u}(t) = \lambda[-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1)) + \alpha q]u(t). \quad (18)$$

До момента времени $t_{3,1}^1$ мембранный потенциал изменялся согласно формуле (6). Поэтому, с учётом начального условия $u(t_{3,1}^1) = e^{-\lambda\alpha(T_2 - t_{3,1}^1)}$, решение уравнения (18) будет выглядеть следующим образом:

$$u(t) = e^{-\lambda\alpha(T_2 - t - q(t - t_{3,1}^1))}. \quad (19)$$

На отрезке времени $[t_{3,2}^1, t_{3,3}^1]$ (с момента генерации импульса вторым нейроном из множества X_3), на рассматриваемый нейрон влияют уже два других нейрона и соответствующее уравнение приобретает вид:

$$\dot{u}(t) = \lambda[-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1)) + 2\alpha q]u(t). \quad (20)$$

Аналогичным образом выписываются уравнения динамики нейрона на отрезке $[t_{3,3}^1, t_{1,1}^2]$. Последнее уравнение, соответствующее интервалу $[t_{3,m_3}^1, t_{1,1}^2]$, имеет следующий вид:

$$\dot{u}(t) = \lambda[-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1)) + m_3\alpha q]u(t), \quad (21)$$

Интегрируя последовательно эти уравнения и учитывая, что значение мембранного потенциала в момент начала генерации спайка равно единице, для $t_{1,1}^2$ получим:

$$t_{1,1}^2 = t_{3,m_3}^1 + \frac{T_2 - t_{3,m_3}^1 - q \sum_{k=1}^{m_3-1} k(t_{3,k+1}^1 - t_{3,k}^1)}{1 + qm_3}. \quad (22)$$

Для нахождения момента времени $t_{1,2}^2$ — начала спайка второго нейрона из множества X_1 , нужно учесть, что для этого элемента к воздействию импульсов, приходящих из множества X_3 , добавляется импульс первого нейрона из множества X_1 . В результате получим:

$$t_{1,2}^2 = t_{1,1}^2 + \frac{T_2 - t_{1,1}^2 + t_{1,2}^1 - q \sum_{k=1}^{m_3-1} (k-1)(t_{3,k+1}^1 - t_{3,k}^1)}{1 + qm_3}. \quad (23)$$

Это выражение преобразуется с учетом (22). В результате для $\xi_{1,2}^2 = t_{1,2}^2 - t_{1,1}^2$ справедлива формула (17). Аналогично получаем соотношение для $\xi_{1,k}^2$, $k = 3, \dots, m_1$. Заметим, что такие же рассуждения можно провести для нейронов из множеств X_2 и X_3 .

Из леммы 1 вытекает, что спайки нейронов внутри множества с течением времени (с ростом номера такта) синхронизируются и в пределе $\xi_{i,j} = 0$ для $j \geq 2$. Таким образом, доказано утверждение теоремы о синхронизации.

Лемма 2. Пусть $\xi_{i,j} = 0$ для $j \geq 2$. Тогда для величин $\xi_{1,1}^2$, $\xi_{k,1}^1$, где $i = 1, 2, 3$; $k = 2, 3$ (временных рассогласований между началами спайков нейронов соседних множеств), при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$(1 + qm_3)\xi_{1,1}^2 + \xi_{2,1}^1 + \xi_{3,1}^1 = T_2, \quad (24)$$

$$\xi_{1,1}^2 + (1 + qm_2)\xi_{2,1}^2 + \xi_{3,1}^1 = T_2, \quad (25)$$

$$\xi_{1,1}^2 + \xi_{2,1}^2 + (1 + m_1q)\xi_{3,1}^2 = T_2. \quad (26)$$

Вычисления, подобные приведенным при доказательстве леммы 2, показывают:

$$t_{2,1}^2 = t_{1,m_1}^2 + \frac{T_2 - (t_{1,1}^2 + t_{1,m_1}^2 + t_{2,1}^1) - q \sum_{k=1}^{m_1-1} k(t_{1,k+1}^1 - t_{1,k}^1)}{1 + qm_1}, \quad (27)$$

$$t_{2,j}^2 = t_{2,j-1}^2 + \frac{t_{2,j}^1 - t_{2,j-1}^1}{1 + (m_1 + j - 1)q}, \quad (28)$$

$$t_{3,1}^2 = t_{2,m_2}^2 + \frac{T_2 - (t_{1,1}^2 + t_{2,m_2}^2 - t_{3,1}^1) - q \sum_{k=1}^{m_2-1} k(t_{2,k+1}^1 - t_{2,k}^1)}{1 + qm_2}, \quad (29)$$

$$t_{3,l}^2 = t_{3,l-1}^2 + \frac{t_{3,l}^1 - t_{3,l-1}^1}{1 + (m_2 + l - 1)q}, \quad (30)$$

$j = 2, \dots, m_2, \quad l = 2, \dots, m_3.$

Формулы (27)–(30) приобретут более наглядный вид, если использовать обозначения для временных рассогласований между спайками. В результате получим:

$$\xi_{1,1}^2(1 + m_3q) = \left(T_2 - \sum_{r=2}^{m_1} \xi_{1,r}^1 - \sum_{s=1}^{m_2} \xi_{2,s}^1 - \sum_{t=1}^{m_3} \xi_{3,t}^1 - q \sum_{i=2}^{m_1} (i-1)\xi_{1,i}^1 \right), \quad (31)$$

$$\xi_{2,1}^2(1 + m_1q) = \left(T_2 - \sum_{r=2}^{m_2} \xi_{2,r}^1 - \sum_{s=1}^{m_3} \xi_{3,s}^1 - \sum_{t=1}^{m_1} \xi_{1,t}^1 - q \sum_{i=2}^{m_1} (i-1)\xi_{1,i}^1 \right), \quad (32)$$

$$\xi_{3,1}^2(1 + m_2q) = \left(T_2 - \sum_{r=2}^{m_3} \xi_{3,r}^1 - \sum_{s=1}^{m_1} \xi_{1,s}^2 - \sum_{t=1}^{m_2} \xi_{2,t}^2 - q \sum_{i=2}^{m_2} (i-1)\xi_{2,i}^2 \right), \quad (33)$$

$$\xi_{1,j}^2(1 + (m_3 + j - 1)q) = \xi_{1,j}^1, \quad j = 2, \dots, m_1, \quad (34)$$

$$\xi_{2,j}^2(1 + (m_1 + j - 1)q) = \xi_{2,j}^1, \quad j = 2, \dots, m_2, \quad (35)$$

$$\xi_{3,j}^2(1 + (m_2 + j - 1)q) = \xi_{3,j}^1, \quad j = 2, \dots, m_3. \quad (36)$$

Полагая $\xi_{k,j}^2 = \xi_{k,j}^1 = 0$ для $j \geq 2$, получим формулы (24)–(26). Эти формулы описывают итерационный процесс. По значениям $\xi_{2,1}^1, \xi_{3,1}^1$ последовательно вычисляются $\xi_{1,1}^2, \xi_{2,1}^2, \xi_{3,1}^2$. После замены $\xi_{i,1}^1$ на $\xi_{i,1}^2$ ($i = 2, 3$) можно продолжить вычисления. Процесс сходится, поскольку итерационные соотношения представляют собой метод Зейделя для решения системы линейных уравнений с положительно определенной

и симметрической матрицей. Компоненты его предельной точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) заданы формулами (14) — (16).

Таким образом, в предлагаемой статье рассмотрена основанная на уравнении с запаздыванием модель нейрона, генерирующего кратковременные, высоко амплитудные импульсы. Предложена новая модель взаимодействия нейронов. Показано, что однородная полносвязная сеть может организовываться в кольцо множеств, синхронно функционирующих нейронов. Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Генерацию импульсов нейронами некоторого множества можно рассмотреть как активацию черно-белого изображения. Тогда сеть может бесконечно долго хранить последовательность трех визуальных образов и её можно рассматривать как модель хранения информации в динамическом виде.

Литература

- [1] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Об одной модели функционирования нейронной сети // Модел. динам. попул., Н.Новгород, 1990. С. 70 - 78.
- [2] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование, 1990. Т.2, №11. С. 64 - 76.
- [3] Кащенко С.А., Майоров В.В. Исследование дифференциально-разностных уравнений, моделирующих импульсную активность нейрона // Математическое моделирование, 1993. Т.5, №12. С. 13 - 25.
- [4] Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Волновые образования в кольцевых нейронных системах // Математическое моделирование, 1997. Т. 9. №3. С. 29 - 39.
- [5] Шабаршина Г.В. Волновые структуры в полносвязной однородной сети нейронных клеточных автоматов возбудительного типа // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1997. В. 4. С. 3 - 11.

Сети W-нейронов в задаче хранения и воспроизведения периодических последовательностей бинарных векторов¹

В.В. Майоров, Г.В. Шабаршина
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

1. Введение

В основе моделей нейронных сетей лежат представления о принципах обработки информации мозгом. Импульсный код, как показал Э. Эдриан [1], есть способ передачи сенсорной информации. Модели нейронных сетей базируются на синаптической теории, основоположниками которой являются Д. Хебб и Дж. Экклс [2], [3]. Главный постулат теории состоит в том, что реакция нейронов на последовательности поступающих импульсов зависит от эффективности синаптических входов. Точки зрения о представлении информации в мозге и соответствующие математические модели условно можно разделить на два класса: частотные и фазово-частотные. Первая предполагает, что состояние нейрона характеризуется частотой импульсации. Состояние ассоциации нейронов отражает распределение частот импульсации элементов. Фазовые отношения не учитываются. Изменение состояния возможно только как результат изменения воздействия. Направление можно назвать детекторным. Его основы заложены в классических работах У. Маккаллока, В. Питтса, Д. Хебба [4], [2]. Дальнейшее развитие связано с исследованиями Дж. Экклса [3], Ф. Розенблата [5], М. Минского [6], В.Л. Дунина-Барковского [7], В. Маунткласа [8], А.А. Фролова [9], [10], [11], Г.И. Шульгиной [12], [13]. В рамках детекторного подхода проводятся исследования по моделям сетей из операционных усилителей [14], [15], [16], [17]. На входе каждого элемента суммируются с весами выходные сигналы других элементов. В зависимости от суммарного входного сигнала операционный усилитель формирует выходной сигнал. В процессе обучения (запоминания) в соответствующем фазовом пространстве формируется набор устойчивых состояний равновесия, которые и хранят информацию. В режиме воспроизведения под действием внешнего сигнала сеть попадает в бассейн притяжения одного из них. Таким образом, детекторные сети статичны, как и информация, хранимая в них.

Второй, фазово-частотный подход к хранению информации в мозге основан на возможности согласования работы нейронов не только в пространстве, но и во времени. По мнению Н.П. Бехтеревой [18], кодирование информации является динамическим процессом, связанным с возникновением и разрушением ансамблей когерентно работающих нейронов. Тем самым кодирование информации сопровождается образованием волн нейронной активности. Подход можно назвать волновым. Волновой подход моделируют сети с нестационарным поведением. Их можно разделить на два класса. В первом случае элементы сети не обладают собственной авторитмичностью, но вся система может функционировать в колебательном режиме. Примером такой сети является сеть Винера, которая служит для описания процесса распространения возбуждения по сердечной мышце. Во втором случае рассматриваются нестационарные сети, состоящие из нейронных осцилляторов (автоколебательных элементов). Работы [19], [20], [21], [22] посвящены представлению информации в фазово-частотном виде на моделях таких сетей. Распределение фаз и амплитуд колебаний можно интерпретировать как код образа [23], [24]. Обычно рассматривают осцилляторы, близкие к гармоническим [25]. Соотнося последнее допущение с биологическими данными, отметим важные обстоятельства. Во-первых, колебания, близкие к гармоническим, не типичны для нервной системы. В нормальном состоянии нейроны – элементы нервной системы генерируют кратковременные импульсы – спайки. Посредством передачи импульсов осуществляется связь между нейронами. Во-вторых, заметим, что биологический нейрон во время генерации спайка и на некотором промежутке времени после спайка не способен (или почти не способен) воспринимать воздействие. Тем самым процесс взаимодействия неоднороден во времени. В моделях, основанных на близких к гармоническим осцилляторах, предполагается "однородность" во времени взаимодействия нейронных осцилляторов. Отметим, что явление невосприимчивости учитывается в [24], [26], [27] (естественно, не в рамках гармонического приближения). В этой связи важное значение с точки зрения адекватности математических моделей

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00214)

биологическим данным приобретают модели, основанные на осцилляторных элементах, далеких от гармонических.

Систематическое описание типов таких элементов и обзор некоторых результатов по организации колебаний в соответствующих сетях приведены в работах [28], [29]. Автоволновые процессы в автоволновых средах рассматриваются и сопровождаются подробной библиографией в [30].

В работе [31] предложена и исследована модель нейронной сети, в которой ее состояние описывается пространственным распределением плотностей случайных бинарных потоков, генерируемых нейронами. На входах каждого нейрона потоки по определенному правилу смешиваются со случайными потоками, исполняющими роль синаптических весов. В зависимости от суммарного входного потока формируется выходной поток нейрона.

Моделям нестационарных сетей посвящены работы [32], [33]. В них элементами сетей являются нейроны со стохастической динамикой. Показано, что данные сети выгодно отличаются от классических в плане борьбы с ложными образами (незапланированными состояниями).

В работах [34], [35], предложено уравнение с запаздыванием для осцилляторного нейронного элемента, колебания которого весьма далеки от гармонических. В цикле публикаций показано, что уравнение допускает возможность не только компьютерного, но и аналитического исследования с помощью асимптотических методов.

Второй класс сетей с нестационарным поведением образуют сети, элементы которых не обладают собственной авторитмичностью, но вся система может функционировать в колебательном режиме. Примером такой сети является сеть Винера [27], которая служит для описания процесса распространения возбуждения по сердечной мышце. В исследованиях [12], [13] развивается модель нейронной системы со стационарным поведением, для которой, однако, показано, что периодическое воздействие на общий вход ассоциативной сети - части системы - является неотъемлемым условием запоминания и воспроизведения информации.

В работах [36], [37] предложена конструкция, названная сетью W - нейронов, которая может запоминать и воспроизводить последовательность бинарных векторов. Данная работа посвящена обзору результатов исследований по W - нейронам.

2. Аксиоматическое описание W-нейрона

В любой дискретный момент времени t W - нейрон находится в одном из трех состояний. Для описания состояния W - нейрона введем величину $s(t)$. Значение $s(t) = 0$ соответствует состоянию ожидания (покоя), $s(t) = 1$ - состоянию возбуждения, при $s(t) = -1$ нейрон находится в состоянии рефрактерности - невосприимчивости к внешнему воздействию. Состояние возбуждения длится один такт. Пусть в момент времени t W-нейрон возбужден, т.е. $s(t) = 1$. Тогда в следующие $r_0 \geq 1$ тактов W-нейрон находится в рефрактерном состоянии: $s(t+i) = -1$ ($i = 1, \dots, r_0$). В момент времени $t+r_0+1$ он обязательно переходит в состояние ожидания, т.е. $s(t+r_0+1) = 0$.

В каждый момент времени t W - нейрон формирует выходной сигнал $x(t) = \delta_0(s(t) - 1)$, где $\delta_0(v)$ - импульсная функция: $\delta_0(0) = 1$ и $\delta_0(v) = 0$ при $v \neq 0$. Тем самым выходной сигнал отличен от нуля и равен единице только в состоянии возбуждения.

W - нейрон имеет синаптические входы двух типов: суммирующие и безусловно тормозящие. Если в момент времени t W - нейрон находится в состоянии ожидания и на один из безусловно тормозящих синапсов поступает сигнал, то в следующий момент времени элемент оказывается в состоянии рефрактерности: $s(t+1) = -1$ и остается в нем r_0 тактов: $s(t+i) = -1$ для $i = 1, \dots, r_0$. Для описания влияния суммирующих синаптических входов (пусть N - их число) определим для W - нейрона величину $u(t)$, которую назовем мембранным потенциалом. Пусть $x_i(t)$ - сигнал (равен либо нулю, либо единице), поступающий в момент времени t на i - ый синапс. Тогда положим

$$u(t) = q\delta_0(s(t-1))u(t-1) + \left[\sum_{i=1}^N w_i x_i(t) \right] \delta_0(s(t)), \quad (1)$$

где параметр $0 \leq q < 1$. Числа w_i в (1) назовем синаптическими весами. Введем число u_0 , которое назовем пороговым значением мембранного потенциала. Если в момент времени t значение $u(t) \geq u_0$, то в следующий момент времени $s(t+1) = 1$, т.е. W- нейрон переходит в возбужденное состояние и формирует выходной сигнал $x(t+1) = 1$. Удобно записать: $s(t+1) = \theta(u(t) - u_0)$, где $\theta(v)$ - функция Хевисайта, т.е. $\theta(v) = 0$ при $v < 0$ и $\theta(v) = 1$ при $v \geq 0$.

Поясним особенности суммирования входных сигналов. Пусть в момент времени $t = -1$ величина $s(-1) = -1$ т.е. W - нейрон находится в рефрактерном состоянии, а в момент времени $t = 0$ значение $s(0) = 0$ и W - нейрон переходит в состояние ожидания. Начиная с нулевого момента времени на суммирующие синапсы последовательно поступают сигналы: в момент времени $t = k$ ($k = 1, \dots, N - 1$) приходит единичный сигнал на k -тый синапс. Пусть до момента времени $t = N - 1$ W - нейрон не переходит в возбужденное состояние. Тогда из (1) следует, что значение мембранного потенциала

$$u(N - 1) = \sum_{k=1}^N q^{N-k} w_k.$$

Таким образом, синаптические сигналы суммируются, но вклад каждого из них в мембранный потенциал с течением времени уменьшается.

Отметим, что при $q = 0$ в состоянии ожидания W - нейрон реагирует на синаптическое воздействие - формирует выходной сигнал, в точности так же, как и нейрон Маккаллока - Питтса.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Если в формуле (1) опустить множитель $\delta_0(s(t-1))$, то мембранный потенциал W - нейрона не будет "сбрасываться" после перехода в состояние возбуждения. В величину мембранного потенциала будет вносить вклад его значение в момент времени, предшествующий состоянию возбуждения. На самом деле, это очень важное замечание, опирающееся на биологические данные. Значение мембранного потенциала в момент времени, предвещающий состояние возбуждения, может существенно влиять на время следующего возбуждения. В частности, W - нейрон может учащенно генерировать единичные выходные сигналы (пачку импульсов).

Сеть из W - нейронов функционирует в одном из колебательных режимов, а также имеет состояние равновесия, в котором все W - нейроны находятся в состоянии ожидания.

Ниже рассматриваются сети, состоящие из нейронных модулей (ассоциаций). Каждый из них состоит из N элементов, которые связаны между собой абсолютно тормозящими синапсами. В результате такого взаимодействия после возбуждения любого W - нейрона модуля все его элементы на следующем такте переходят в состояние рефрактерности. Связи между W - нейронами разных модулей осуществляются с помощью суммирующих синапсов.

Опишем интересующие нас колебательные режимы. В начальный момент времени часть W - нейронов одного из модулей переходит в возбужденное состояние и, следовательно, генерирует единичные выходные сигналы. В следующий момент времени единичные выходные сигналы генерируют W - нейроны другого модуля. Последовательно ненулевые выходные сигналы формируют все остальные модули. Процесс назовем тактом прохождения волны возбуждения. Следующий такт прохождения волны начинается генерацией единичных выходных сигналов частью нейронов исходного модуля. Это множество не обязательно совпадает с множеством W - нейронов, возбужденных на первом такте. На втором такте волна возбуждения проходит все модули в той же последовательности, что и на первом. Однако, в возбужденное состояние переходят, вообще говоря, другие, нежели на первом такте, W - нейроны. В каждом модуле множества возбужденных на разных тактах W - нейронов могут пересекаться. После ряда тактов прохождения волны возбуждения в исходном модуле генерируют единичные выходные сигналы W - нейроны, формировавшие эти сигналы на первом такте. В дальнейшем процесс периодически повторяется.

Ниже будет показано, что веса суммирующих синапсов можно выбрать так, чтобы на любом такте в каждом модуле в возбужденном состоянии оказались заранее заданные W - нейроны. Напомним, что выбор синаптических весов называется обучением сети. Возможность провести нужное обучение основана на одном простом свойстве однослойного персептрона.

3. Возможность обучения однослойного персептрона

Рассмотрим однослойный персептрон - совокупность нейронов Маккаллока - Питтса, имеющих общие входы. Пусть $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ - вектор входных сигналов, где $x_i(t)$ могут принимать либо нулевое, либо единичное значение. Такие векторы назовем бинарными. Их множество обозначим через B^N . Пусть $(w_{k,1}, \dots, w_{k,N})$ - вектор синаптических весов k -ого нейрона Маккаллока - Питтса. Выходной сигнал k -ого нейрона есть

$$y_k(t+1) = \theta\left(\sum_{i=1}^N w_{k,i} x_i - b_k\right),$$

где числа b_k называются пороговыми значениями. Персептрон формирует выходной вектор $Y(t+1) = (y_1(t+1), \dots, y_l(t+1))$, где l - число нейронов.

Введем стандартные обозначения: матрицу W , в строках которой расположены векторы синаптических весов (ее называют синаптической) и пороговый вектор $b = (b_1, \dots, b_l)$. Далее, для вектора $Z = (z_1, \dots, z_l)$ положим: $\theta(Z) = (\theta(z_1), \dots, \theta(z_l))$. Тогда выходной вектор $Y(t+1) = \theta(WX(t) - b)$.

Рассмотрим произвольный набор $X_1, \dots, X_\gamma \in B^N$ ($\gamma \leq N$) линейно независимых (общего положения) входных векторов. Пусть $Y_1, \dots, Y_\gamma \in B^l$ - произвольный набор выходных векторов. Известно следующее свойство персептрона (см., например, [38]). Синаптическую матрицу W и пороговый вектор b можно выбрать так, что на входные векторы X_i персептрон будет отвечать выходными векторами Y_i , т.е. $Y_i = \theta(WX_i - b)$, а нулевому входному вектору соответствует нулевой выходной вектор. При этом компоненты вектора b будут положительны.

Тем самым можно заранее планировать выходные векторы для заданных входных векторов (обучать персептрон). Выбор синаптических весов и пороговых значений осуществляется конструктивно в соответствии с определенными правилами, которые называются правилами обучения персептрона [7], [9], [38].

Рассмотрим здесь алгоритм обучения нейрона Маккаллока - Питтса, основанный на ортогонализации входных векторов. Пусть $X_1, \dots, X_m, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_l$ ($m+l \leq n$) линейно независимы. Нейрон Маккаллока

Питтса должен формировать единичный выходной сигнал для векторов $X_1, \dots, X_m$ и нулевой - для векторов $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_l$. С геометрической точки зрения это означает, что гиперплоскость $(w, X) - b = 0$ разделяет данные множества векторов.

Сформируем последовательность векторов

$$X_1 - X_m, \dots, X_{m-1} - X_m, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_l, X_m,$$

(они линейно независимы). Используя алгоритм Шмидта, по данной последовательности построим ортогональную последовательность. Пусть w - последний вектор, полученный в процессе ортогонализации. По построению $(w, X_i - X_m) = 0$ для $i = 1, 2, \dots, m-1$, $(w, \overline{X}_i) = 0$ для $i = 1, 2, \dots, l$. Из алгоритма Шмидта вытекает важное свойство: $(w, X_m) = \|w\|^2 > 0$.

Пусть $b \in (0, \|w\|^2)$. Гиперплоскость $(w, X) - b = 0$ разделяет векторы $X_1, \dots, X_m$ и $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_l$. Действительно, $(w, X_i) - b = (w, X_m) > 0$, $(w, \overline{X}_i) - b = -b < 0$. Тем самым w есть искомый синаптический вектор, а b - пороговое значение интересующего нас нейрона Маккаллока - Питтса.

4. Планирование колебательных режимов заранее заданной структуры в сетях W - нейронов

Рассмотрим сеть, состоящую из p модулей, каждый из которых содержит N W - нейронов. Напомним, что внутри модулей все W - нейроны связаны абсолютно тормозящими синапсами. Произвольно пронумеруем модули. Также пронумеруем W - нейроны внутри каждого модуля. Пусть $S_k(t)$, $U_k(t)$ и $X_k(t)$ ($k = 1, \dots, p$)

соответственно векторы состояний, мембранных потенциалов и векторы выходных сигналов k -ого модуля в момент времени t . Обозначим через $W_{k,j}$ матрицу, в текущей i ($i = 1, \dots, N$) - ой строке которой расположен вектор, состоящий из синаптических весов воздействия W - нейронов j -ого модуля на i -ый W - нейрон k -ого модуля. В соответствии с формулой (1) для мембранных потенциалов получаем:

$$U_k(t) = q \operatorname{diag}(\delta_0(S_k(t-1)))U_k(t-1) + \operatorname{diag}(\delta_0(S_k(t))) \sum_{j \neq k} W_{k,j} X_j(t), \quad (2)$$

где импульсная $\delta_0(*)$ - функция берется по координатам, $\operatorname{diag}(V)$ - диагональная матрица с вектором V на диагонали. Вектор выходных сигналов k -ого модуля в момент времени $t+1$ есть

$$X_k(t+1) = \theta(U_k(t) - U_*), \quad (3)$$

где U_* - вектор, составленный из пороговых значений мембранных потенциалов. Ниже будем считать, что пороговые значения для всех W - нейронов одинаково фиксированы и равны $u_0 > 0$.

Мы хотим показать, что веса суммирующих синапсов можно выбрать так, чтобы на любом такте прохождения волны возбуждения по сети в каждом модуле ненулевые выходные сигналы генерировали заранее заданные W - нейроны.

Рассмотрим наборы бинарных векторов $X_1^i, X_2^i, \dots, X_p^i \in B^N$ ($i = 1, \dots, m; m \leq N$). Будем считать, что векторы каждого из наборов X_k^i линейно независимы (общность положения).

Пусть продолжительность рефрактерного состояния W - нейронов $r_0 = p - 2$.

Утверждение 1. Синаптические матрицы $W_{k,k-1}$ ($k = 2, \dots, p$) и $W_{1,p}$ можно выбрать так, что существует периодический режим функционирования сети W - нейронов, в котором в последовательные моменты времени генерируются выходные сигналы:

$$X_1^1, X_2^1, \dots, X_p^1, X_1^2, \dots, X_p^2, \dots, X_1^m, \dots, X_p^m, X_1^1, \dots \quad (4)$$

В каждый момент времени ненулевой выходной вектор формируется только одним модулем. Векторы X_k^j ($j = 1, \dots, m$) генерируются k - ым модулем. Режим существует независимо от выбора матриц синаптических весов $W_{k,j}$ ($j \neq k - 1$) для $k = 1, \dots, p$ и $W_{1,j}$ ($j \neq p$).

Доказательство утверждения проведем в два этапа. Во-первых, покажем, как можно выбрать синаптические матрицы $W_{k,k-1}$ ($k = 2, \dots, p$) и $W_{1,p}$, во-вторых, объясним, как проводится инициализация колебательного режима.

Временно заменим W - нейроны на нейроны Маккаллока - Питтса. Синаптические матрицы $W_{k,k-1}$ ($k = 2, \dots, p$) выберем по правилам обучения однослойного персептрона так, чтобы на входные векторы X_{k-1}^i ($i = 1, \dots, m$) (формируются $k - 1$ - ым модулем) нейроны k - ого модуля ($k = 2, \dots, p$) отвечали выходным вектором X_k^i ($i = 1, \dots, m$), т.е.

$$X_k^i = \theta(W_{k,k-1}X_{k-1}^i - U_*). \quad (5)$$

В свою очередь, матрица $W_{1,p}$ выбирается так, чтобы для входных векторов X_p^i ($i = 1, \dots, m$) векторами выходных сигналов первого модуля служили соответственно векторы X_1^{i+1} ($i = 1, \dots, m - 1$), а для вектора X_p^m - вектор X_1^1 . В силу общности положения можно произвести соответствующий выбор синаптических матриц. Снова вернемся к сети из W - нейронов.

Снабдим каждый W - нейрон внешним входом. Если в момент времени t нейрон находится в состоянии ожидания ($s(t) = 0$), то внешний сигнал $x_{\text{он}}(t) = -1$ (абсолютно тормозящий) переводит его в следующий момент времени в состояние рефрактерности, которое продлится r_0 тактов. В свою очередь, сигнал $x_{\text{он}}(t) = 1$ (возбуждающий) переводит W - нейрон в следующий момент времени на один такт в возбужденное состояние (генерируется единичный выходной сигнал). Внешний нулевой сигнал не оказывает действия на нейрон.

Пусть в нулевой момент времени все W - нейроны находятся в состоянии ожидания. Используя внешние входы, последовательно в моменты времени $t = k$ ($k = 1, \dots, p$) подадим на нейроны k - ого модуля абсолютно тормозящие сигналы. В момент времени $t = p$ нейроны первого модуля уже выйдут из рефрактерного состояния. В этот момент времени через внешние входы подадим на его элементы сигнал X_1^1 . В результате $X_1(p+1) = X_1^1$, т.е. в момент времени $t = p+1$, вектор будет выходным для первого модуля.

В момент времени $t = p+1$ W - нейроны второго модуля находятся в состоянии ожидания, а модулей с номерами $3, \dots, p$ - в рефрактерном состоянии. Согласно (2) вектор мембранных потенциалов второго модуля $U_2(p+1) = W_{2,1}X_1^1$. Из (3) следует, что вектор выходных сигналов второго модуля $X_2(p+2) = \theta(W_{2,1}X_1^1 - U_*)$. В соответствие с (5) получаем $X_2(p+2) = X_2^1$.

Обратим внимание, что при $t = p+2$ все W - нейроны первого модуля находятся в рефрактерном состоянии. Для одних - это естественное состояние после возбуждения, другие подверглись тормозному воздействию со стороны первых. В момент времени $t = p+2$ в состоянии ожидания находятся W - нейроны только третьего модуля. Повторяя для него предыдущие рассуждения, убеждаемся, что вектор выходных сигналов $X_3(p+3) = X_3^1$.

Ясно, что построения можно продолжить. Важно, что в любой момент времени один модуль формирует ненулевой вектор выходных сигналов, W - нейроны следующего по номеру модуля (за N - ым следует первый модуль) находятся в состоянии ожидания. Элементы остальных модулей пребывают в рефрактерном состоянии. В момент времени $t = p+1+mr$ выходной вектор первого модуля $X_1(p+1+mr) = X_1^1$. С этого момента процесс периодически повторяется.

Сделаем ряд важных замечаний.

Замечание 1.

Для инициализации колебательного режима можно использовать любой модуль. Переведем последовательно, начиная с k - ого модуля, W - нейроны в рефрактерное состояние. Установим в момент времени $t = p+1$ выходной вектор k - ого модуля $X_k(p+1) = X_k^j$ ($j = 1, \dots, m$). В результате сеть будет формировать ту же самую периодическую последовательность (4) выходных векторов (со сдвинутой нумерацией). Процесс установки начального значения выходного вектора назовем внесением "зародыша".

Замечание 2.

Матрицу синаптических весов $W_{1,p}$ воздействия W - нейронов p -ого модуля на элементы первого модуля можно выбрать так, чтобы выходным вектором первого модуля для входного сигнала X_p^j ($j = 1, \dots, m$), поступающего от p -ого модуля, был вектор X_1^j . В последовательные моменты времени $t = k$ ($k = 1, \dots, p$) переведем W - нейроны модулей с номерами k в рефрактерное состояние. В момент времени $t = p + 1$ установим выходной вектор первого модуля $X_1(p+1) = X_p^j$ ($j = 1, \dots, m$) (внесем зародыш X_p^j). Тогда сеть будет периодически воспроизводить "однообходную" последовательность выходных векторов $X_1^j, \dots, X_p^j, X_1^j, \dots$. В любой момент времени генерирует ненулевой выходной вектор только один модуль, при этом вектор X_k^j ($k = 1, \dots, p$) формируется k -ым модулем. Распорядившись матрицей $W_{1,p}$, можно объединить две или несколько "однообходных" последовательностей в одну.

Замечание 3.

Рассмотрим любой путь обхода модулей, который не имеет с первоначальным путем общих ориентированных звеньев (например, в порядке убывания номеров). Выбранные ранее матрицы синаптических весов менять не будем. Совершенно аналогично предыдущему можно распорядиться синаптическими матрицами по направлению обхода так, чтобы сеть могла формировать дополнительно одну или несколько новых заранее заданных периодических последовательностей выходных векторов. Способ инициализации соответствующих колебательных режимов идентичен описанному выше. Достаточно перевести модули в порядке, соответствующем направлению обхода, в рефрактерное состояние и внести в первый по обходу модуль "зародыш" последовательности.

5. Использование способности W - нейронов суммировать входные сигналы по времени

Выше делалось предположение о линейной независимости выходных векторов каждого модуля. При хранении слов - последовательностей символов некоторого алфавита, общность положения нарушается. В слове могут быть одинаковые символы. При воспроизведении "повторов" можно использовать различные варианты одного и того же символа. Сети W - нейронов предоставляют другие возможности, связанные с особенностями суммирования входных сигналов по времени.

Мы хотим показать существование периодического режима работы сети W - нейронов, в котором сеть воспроизводит описанную выше последовательность (4). Здесь некоторые из векторов X_j^i (j -фиксировано) могут быть равными между собой.

Для простоты изложения ограничимся частным случаем. Пусть продолжительность рефрактерного периода $r_0 = p - 3$. Тогда можно выбрать матрицы $W_{k,k-1}$, $W_{k,k-2}$ синаптических весов (провести обучение) так, чтобы последовательностью выходных сигналов сети служила (4).

Для доказательства снова заменим W - нейроны k -ого модуля нейронами Маккаллока - Питтца и рассмотрим однослойный персептрон, синаптические входы которого разобьем на два множества. Для одного множества входов синаптической служит матрица $W_{k,k-1}$, а для другого - матрица $qW_{k,k-2}$. Входные векторы обозначим соответственно через X_{k-1} и X_{k-2} . Выходной вектор персептрона есть $X_k = \theta(W_{k,k-1}X_{k-1} + qW_{k,k-2}X_{k-2} - U_*)$. Здесь все координаты вектора U_* равны некоторому $u_0 > 0$.

Ниже векторы X_k^j - элементы последовательности (4).

Сделаем ряд предположений относительно возможности обучения однослойного персептрона. Их можно сформулировать следующим образом:

Предположение 1.

Для $k = 3, \dots, p$ разрешима задача об обучении персептрона:

$$\theta(W_{k,k-2}X_{k-2}^j - U_*) = 0,$$

$$\theta(W_{k,k-1}X_{k-1}^j + qW_{k,k-2}X_{k-2}^j - U_*) = X_k^j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Предположение 2.

Персептрон с номером $k = 1$ можно обучить следующим образом:

$$\theta(W_{1,p-1}X_{p-1}^j - U_*) = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$\theta(W_{1,p}X_p^j + qW_{1,p-1}X_{p-1}^j - U_*) = X_1^{j+1} \quad (j = 1, \dots, m-1),$$

$$\theta(W_{1,p}X_p^m + qW_{1,p-1}X_{p-1}^m - U_*) = X_1^1.$$

Предположение 3.

Для персептрона с номером $k = 2$ разрешима задача об обучении:

$$\theta(W_{2,p}X_p^j - U_*) = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$\theta(W_{2,1}X_1^{j+1} + qW_{2,p}X_p^j - U_*) = X_2^{j+1} \quad (j = 1, \dots, m-1),$$

$$\theta(W_{2,1}X_1^1 + qW_{2,p}X_p^m - U_*) = X_2^1.$$

Сделанные предположения очевидно будут выполнены, если векторы X_j^i ($i = 1, \dots, m$) при фиксированном $j = 1, \dots, p$ линейно независимы. В этом случае можно считать, что $W_{k,k-2} = 0$ для $k = 3, \dots, p$, а также $W_{1,p-1} = 0$ и $W_{2,p} = 0$. Однако напомним, что нас интересует ситуация, когда некоторые из векторов X_j^i (j -фиксировано) равны между собой.

Пусть $Z \subset B^N$ - некоторый набор линейно независимых бинарных векторов (алфавит). Будем считать, что $X_j^i \in Z$. Для выполнения предположения 1 достаточно потребовать, чтобы при фиксированном $j = 2, \dots, p$ среди пар векторов X_j^i, X_{j-1}^i ($i = 1, \dots, m$) нет одинаковых. Для доказательства заметим следующее. Во-первых, легко показать, что векторы $(X_j^i, X_{j-1}^i) \in R^{2N}$ ($i = 1, \dots, m$) при фиксированном $j = 2, \dots, p$ линейно независимы. Во-вторых, пусть I_{j-1} множество таких индексов i , что векторы X_{j-1}^i ($i \in I_{j-1}$) исчерпывают все множество Z и среди них нет равных между собой. Тогда векторы $(X_j^i, X_{j-1}^i) \in R^{2N}$ ($i = 1, \dots, m$) и $(X_{j-1}^i, 0) \in R^{2N}$ ($i \in I_{j-1}$) при фиксированном $j = 2, \dots, p$ линейно независимы. Остается сослаться на возможность обучения персептрона.

Совершенно аналогично формулируются достаточные условия, при которых выполнены предположения 2 и 3.

Пусть выполнены предположения 1 — 3 и синаптические матрицы $W_{k,k-1}$ и $W_{k,k-2}$ определены. Вернемся к сети из W -нейронов. Справедливо утверждение, аналогичное сформулированному в предыдущем пункте. Существует периодический колебательный режим, в котором модули генерируют последовательность выходных сигналов (4). В любой момент времени формирует ненулевые сигналы только один из модулей, и векторы X_k^i являются выходными для k -ого модуля.

Инициализацию колебательного режима можно провести почти аналогично тому, как описано в предыдущем пункте. Пусть в нулевой момент времени все нейроны находятся в состоянии ожидания. В последовательные моменты времени $t = k$ ($k = 1, \dots, p$), используя внешние входы, переведем W -нейроны модулей с номерами k в рефрактерное состояние. В момент времени $t = p$ через внешние входы подействуем на элементы первого модуля так, чтобы при $t = p + 1$ его выходным вектором был вектор $X_1(p+1) = X_1^1$. Также, действуя через внешние входы в момент времени $t = p + 1$, переведем выходы W -нейронов второго модуля в состояние $X_2(p+2) = X_2^1$. Тем самым "зародышем" последовательности в данном случае являются два первых вектора последовательности.

После инициализации сеть будет функционировать в запланированном колебательном режиме. Поясним сказанное. В момент времени $t = p + 1$ нейроны третьего модуля только что вышли из рефрактерного состояния. Они принимают сигналы от первого модуля ($X_1(p+1) = X_1^1$). Вектор мембранных потенциалов третьего модуля есть $U_3(p+2) = W_{3,1}X_1^1$. Для выходного вектора третьего модуля в соответствии с выбором матрицы $W_{3,1}$ (предположение 3) получаем значение: $X_3(p+2) = \theta(W_{3,1}X_1^1 - U_*) = 0$. В следующий момент времени $t = p + 2$ нейроны третьего модуля принимают сигналы $X_2(p+2) = X_2^1$ от W -нейронов второго модуля. Согласно формуле (2) для мембранных потенциалов получаем: $U_3(p+2) = qW_{3,1}X_1^1 + W_{3,2}X_2^1$. В силу выбора синаптических матриц $X_3(p+3) = \theta(qW_{3,1}X_1^1 + W_{3,2}X_2^1 - U_*) = X_3^1$ (предположение 3). Данные рассуждения можно повторить для всех последующих модулей.

Остаются в силе все сделанные в предыдущем пункте замечания. В частности, для хранения последовательностей можно использовать другие пути обхода модулей (например, в порядке, обратном первоначальному). Распорядившись соответствующими синаптическими матрицами, можно, не меняя предыдущих записей, осуществить запись новых последовательностей. Используя любой путь проведения возбуждения, можно вместо одной длинной хранить несколько коротких последовательностей.

Полученные результаты легко обобщаются на случай $r_0 = p - s$, $p - 1 \geq s \geq 2$. Для существования описанного выше устойчивого периодического режима функционирования сети нужно распорядиться синаптическими матрицами $W_{k,k-1}, W_{k,k-2}, \dots, W_{k,k-s+1}$.

6. Организация режима пачечной волновой активности в сетях W-нейронов

Как уже отмечалось при описании W - нейрона, если в формуле (1) опустить сомножитель $\delta_0(s(t-1))$, то мембранный потенциал W - нейрона не будет "сбрасываться" после перехода в состояние возбуждения. Пусть в некоторый момент времени мембранный потенциал нейрона становится больше порогового значения, и элемент генерирует единичный выходной сигнал. На следующий такт W - нейрон переходит в рефрактерное состояние, т.е. нейрон становится невосприимчивым к внешнему воздействию. Однако значение мембранного потенциала остается больше порогового и нейрон генерирует еще один импульс. Таким образом, W - нейрон будет учащенно генерировать единичные выходные сигналы — пачку импульсов. Выбирая силу синаптических связей для одиночного нейрона, можно управлять длиной пачки (количеством импульсов в пачке). Обозначим длину пачки через γ .

Способность W - нейрона к пачечной активности в случае $\gamma = 2$ была использована в [37] для решения задачи хранения и воспроизведения последовательности бинарных векторов пространства R^{2^N} .

Для генерации импульса W - нейроном в течение ровно двух последовательных тактов t и $t+1$ необходимо и достаточно, чтобы значение мембранного потенциала удовлетворяло неравенству:

$$q^{-1}u_0 < u(t) < q^{-2}u_0, \quad (6)$$

где u_0 — пороговое значение мембранного потенциала.

Пусть W - нейрон в момент времени t_0+1 перешел в рефрактерное состояние. Переход мог быть вызван либо генерацией импульса на предыдущем такте, либо поступлением ненулевого сигнала на абсолютно тормозящий синапс в момент времени t_0 . Пусть после выхода нейрона из рефрактерного состояния на его синапсы поступают ненулевые входные сигналы. Тогда значение мембранного потенциала

$$u(t_0 + r_0 + 1) = u(t_0)q^{r_0+1} + \sum_{i=1}^N w_i x_i(t_0 + r_0 + 1).$$

Учитывая, что W - нейрон мог не генерировать импульс в момент времени t_0 , $\min(u(t_0)q^{r_0+1}) = 0$. Поэтому значение мембранного потенциала удовлетворяет неравенству $u(t_0 + r_0 + 1) \geq \sum_{i=1}^N w_i x_i(t_0 + r_0 + 1)$. Если же в моменты времени t_0 и t_0+1 W - нейрон генерировал импульсы, то, в силу (6), получим ограничение на значения мембранного потенциала сверху: $u(t_0 + r_0 + 1) < u_0 q^{r_0+1} + \sum_{i=1}^N w_i x_i(t_0 + r_0 + 1)$. Условие двойной генерации импульса W - нейроном в моменты времени $t_0 + r_0 + 2$ и $t_0 + r_0 + 3$ требует выполнения неравенств:

$$q^{-1}u_0 < \sum_{i=1}^N w_i x_i(t_0 + r_0 + 1), \quad (7)$$

$$q^{r_0-1}u_0 + \sum_{i=1}^N w_i x_i(t_0 + r_0 + 1) < q^{-2}u_0. \quad (8)$$

Напомним, что при обучении персептрона (см. пункт 3) значение $\sum_{i=1}^N w_i x_i = \text{const} = M > 0$ для всех $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, для которых $\sum_{i=1}^N w_i x_i > u_0$. Для всех X таких, что $\sum_{i=1}^N w_i x_i < u_0$, значение $\sum_{i=1}^N w_i x_i = 0$. Используя неравенства (7), (8), получаем, что пороговое значение мембранного потенциала следует выбрать удовлетворяющим неравенству:

$$\frac{Mq^2}{1 - q^{r_0+1}} < u_0 < Mq. \quad (9)$$

Неравенство (9) требует определенных ограничений на коэффициент затухания мембранного потенциала q :

$$\frac{q}{1 - q^{r_0+1}} < 1. \quad (10)$$

Нормируя синаптические веса, можно считать, что константа M удовлетворяет неравенству

$$\frac{Mq^2}{1 - q^{r_0+1}} < 1 < Mq. \quad (11)$$

В силу (9) можно положить $u_0 = 1$.

Опишем интересующий нас колебательный режим. Пусть в нулевой момент времени часть W - нейронов одного из модулей переходит в возбужденное состояние и генерирует единичные выходные сигналы. В следующий момент времени наблюдаются ненулевые выходные сигналы у нейронов другого модуля и вторичная импульсация у нейронов первого модуля. Эти сигналы индуцируют генерацию импульсов элементами третьего модуля. Волна возбуждения последовательно обходит все модули. Следующий такт прохождения волны возбуждения по сети открывается генерацией единичных выходных сигналов частью нейронов исходного модуля (не совпадающей с множеством нейронов, возбужденных на первом такте). После ряда тактов прохождения волны в возбужденное состояние перейдут те нейроны первого и второго модулей, с которых начинался процесс распространения волны. В дальнейшем процесс периодически повторяется. В каждый момент времени в возбужденном состоянии оказываются элементы двух модулей.

Пусть продолжительность рефрактерного состояния W - нейронов равна $p - 2$. Обсудим вопрос об обучении сети, т.е. о выборе синаптических весов. Рассмотрим наборы бинарных векторов $X_1^i, X_2^i, \dots, X_p^i$ ($i = 1, \dots, m$; $m \leq 2N + 1$). Будем считать, что векторы $(X_{k-1}^i, X_k^i) \in R^{2N}$ линейно независимы. Синаптические матрицы $W_{k,k-2}, W_{k,k-1}$ ($k = 3, \dots, p$) выберем по правилам обучения однослойного персептрона так, чтобы на входные векторы X_{k-2}^i, X_{k-1}^i ($i = 1, \dots, m$) (формируются $k - 2$ -ым и $k - 1$ -ым модулем соответственно) нейроны k -ого модуля отвечали выходным вектором X_k^i , т.е.

$$X_k^i = \theta(W_{k,k-2}X_{k-2}^i + W_{k,k-1}X_{k-1}^i - U_0).$$

Координаты вектора пороговых значений U_0 для всех нейронов сети полагаем равными единице.

Матрицы $W_{1,p-1}, W_{1,p}$ выберем так, чтобы для векторов X_{p-1}^i, X_p^i выходными векторами первого модуля служили векторы X_1^{i+1} ($i = 1, \dots, m - 1$), а для векторов X_{p-1}^m, X_p^m - вектор X_1^1 . Для нейронов второго модуля выбираются матрицы $W_{2,p}, W_{2,1}$, так что

$$X_2^{i+1} = \theta(W_{2,p}X_p^i + W_{2,1}X_1^{i+1} - U_0),$$

$$X_2^1 = \theta(W_{2,p}X_p^m + W_{2,1}X_1^1 - U_0).$$

Матрицы синаптических весов выбираются с учетом неравенства (9), дабы обеспечить генерацию импульсов нейроном в течение двух последовательных тактов.

Утверждение 2. При указанном выборе синаптических весов (если продолжительность рефрактерного состояния $r_0 = p - 2$) существует периодический режим функционирования сети, в котором в последовательные моменты времени генерируются выходные сигналы:

$$(X_1^1, X_2^1), (X_2^1, X_3^1), \dots, (X_{p-1}^1, X_1^2), (X_1^2, X_2^2), \dots, (X_{p-1}^2, X_1^3), \dots,$$

$$(X_1^m, X_2^m), \dots, (X_{p-1}^m, X_1^1), (X_1^1, X_2^1), \dots$$

Пары векторов (X_{k-1}^i, X_k^i) ($i = 1, \dots, m$) формируются $k - 1$ -ым и k -ым модулями соответственно.

Поясним, как провести инициализацию колебательного режима. Будем считать, что сигнал $x_{\text{вн}}(t) = 1$, поданный на внешний вход, переводит W - нейрон в следующий момент времени в возбужденное состояние и, что очень существенно, устанавливает значение мембранного потенциала $u(t+1)$ в диапазоне (6). Пусть в нулевой момент времени все W - нейроны находятся в состоянии ожидания. Используя внешние входы, последовательно в моменты времени $t = k$ ($k = 1, \dots, p$) подадим на нейроны k -ого модуля абсолютно тормозящие сигналы. В момент времени $t = p$ через внешние входы подействуем на элементы первого модуля так, чтобы при $t = p + 1$ его выходным вектором был вектор $X_1(p + 1) = X_1^1$. Также, действуя через внешние входы в момент времени $t = p + 1$, переведем выходы W - нейронов второго модуля в состояние $X_2(p + 2) = X_2^1$.

После инициализации сеть будет функционировать в запланированном колебательном режиме. Поясним сказанное. В момент времени $t = p + 2$ нейроны третьего модуля перешли в состояние ожидания и оказались под воздействием вторичных импульсов элементов первого модуля и импульсов нейронов второго модуля. Согласно выбору матриц синаптических весов следует, что вектор выходных сигналов третьего модуля $X_3(p + 3) = X_3^1$.

Ясно, что построения можно продолжить. Важно, что в любой момент времени ненулевые векторы выходных сигналов формируют W - нейроны k и $k + 1$ модулей (за p -ым следует первый модуль), $k + 2$ модуль находится в состоянии ожидания. Элементы остальных модулей пребывают в рефрактерном состоянии. В момент времени $t = p + 1 + mp$ выходной вектор первого модуля $X_1(p + 1 + mp) = X_1^1$. С этого момента процесс периодически повторяется.

Рассмотрим обобщение задачи. Пусть значение мембранного потенциала W-нейрона в момент времени t удовлетворяет неравенству:

$$q^{-(k-1)}u_0 < u(t) < q^{-k}u_0,$$

где u_0 — пороговое значение мембранного потенциала. Тогда нейрон генерирует, начиная с момента t , пачку импульсов длины $\gamma = k$.

Пусть выполнено неравенство (10). Используя данное обстоятельство, можно доказать следующее. Пусть векторы X_j^i ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$) таковы, что kN -мерные векторы $(X_{j-k}^i, X_{j-k+1}^i, \dots, X_j^i)$ линейно независимы.

Утверждение 3.

Синаптические матрицы $W_{j,j-1}, W_{j,j-2}, \dots, W_{j,j-k}$, ($j = 1, \dots, p$) можно выбрать так, что существует периодический режим работы сети, в котором в последовательные моменты времени генерируются выходные сигналы:

$$(X_1^1, X_2^1, X_3^1, \dots, X_k^1); (X_2^1, X_3^1, \dots, X_k^1, X_{k+1}^1); \dots (X_{p-k+1}^1, \dots, X_p^1, X_1^2); \\ \dots (X_1^m, X_2^m, X_3^m, \dots, X_k^m); (X_{p-k+1}^m, \dots, X_p^m, X_1^1); \dots$$

Векторы $(X_{j-k}^i, X_{j-k+1}^i, \dots, X_j^i)$ формируются $j-k, \dots, j-1, j$ -модулями соответственно. Отметим, что верны сделанные выше замечания 1—3.

7. Заключение

При конструировании формальных нейронов далеко не всегда привлекаются биологические данные. Однако они оказываются весьма полезными. Рассмотренные в настоящей работе W-нейроны, как и нервные клетки, могут находиться в состоянии возбуждения, рефрактерности и состоянии покоя. Это позволило естественным образом ввести понятие мембранного потенциала (для биологического нейрона мембранный потенциал является важнейшей характеристикой). В результате оказалось, что W-нейроны могут суммировать входные сигналы по времени, что также присуще нервным клеткам. Свойство рефрактерности позволило проанализировать структуру ряда колебательных режимов в сетях с модульной организацией. С рефрактерностью связано главное свойство рассмотренных сетей. Они состоят из элементов, не обладающих автоколебательными свойствами, но функционируют в колебательных режимах.

Очевидно, что исследование сетей W-нейронов является перспективной тематикой. Сети представляют значительное разнообразие различных колебательных режимов, а следовательно, имеют большие возможности в качестве носителей информации.

Литература

- [1] Adrian E.D. Electrical activity of the nervous system // Arch. Neurol. and Psychiatr. 1934. V. 34, N 6. P. 1125 -1136.
- [2] Hebb D.O. The organization of behaviour: neuropsychological theory. N.Y.: J. Wiley and Sons, 1949. 335p.
- [3] Экклс Дж. Физиология синапсов. М.: Мир, 1966. 395с.
- [4] McCulloch W.A., Pitts W. A logical calculus of ideas immanents in nervous activity // Bull. Math. Biophys., 1943. N 5. P.115 -133.
- [5] Розенблат Ф. Принципы нейродинамики. М.: Мир, 1965. 480с.
- [6] Минский М., Пейперт С. Перцептроны. М.: Мир, 1971. 264с.
- [7] Дунин -Барковский В.Л. Информационные процессы в нейронных структурах. М. : Наука, 1978. 166с.
- [8] Маунткэсл В., Эдельмен Д. Разумный мозг. М.: Мир, 1981. 135с.
- [9] Фролов А.А., Муравьев И.П. Нейронные модели ассоциативной памяти. М.: Наука, 1987. 160с.

- [10] Фролов А.А., Муравьев И.П. Информационные характеристики нейронных сетей. М.: Наука, 1988. 156 с.
- [11] Фролов А.А. Структура и функции обучающихся нейронных сетей // Нейрокомпьютер как основа мыслящих ЭВМ. М.: Наука, 1993. С. 92 -110.
- [12] Шульгина Г.И., Понамарев В.Н., Резцова И.Р., Фролов А.А. Влияние фоновой активности сети из возбудительных нейроподобных элементов на проведение по ней возбуждения // ЖВНД, 1988. Т. 38, С. 715 -724.
- [13] Шульгина Г.И. Исследование роли ритмической активности в процессах фиксации и воспроизведения информации на модели из нейроподобных элементов //ДАН СССР, 1990. Т. 312, N 5. С. 1275-1279.
- [14] Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1982. V. 79, N 8. P. 2554 - 2558.
- [15] Hopfield J.J. Neurons with gradual response have collective computational properties like those of two-state Neurons //Ibid. 1984. V. 81, P. 3088 - 3092.
- [16] Chua L., Yang L. Cellular neural networks: Theory // IEEE Transactions on circuits and systems, 1988. V. 35, N 10. P. 1257 - 1272.
- [17] Chua L. O., Yang L. Cellular neural networks: Applications // IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988. V. 35, P. 1273.
- [18] Бехтерева Н.П. Здоровый и больной мозг человека. М.: Наука, 1980. 208 с.
- [19] Li Z., Hopfield J.J. Modelling the olfactory bulb and its neural oscillatory processing //Biol. Cybern., 1989. V. 61, P. 379-392.
- [20] Ohsusa M., Yamaguchi Y., Shimuzi H. Entrainment among coupled van der Pol Oscillations by an external oscillation //Biol. Cybern., 1989. V. 51, P. 325-333.
- [21] Omata S., Yamaguchi Y., Shimuzi H. Entrainment among coupled limit cycle oscillator with frustration //Physica D, 1988. V. 31, P. 397- 408.
- [22] Yamaguchi Y., Shimuzi H. The theory of self-synchronization in the presence of native frequency distribution and external noises //Physica D, 1984. P. 212-226.
- [23] Kryukov V.I. Short-term memory as a metastable state. V. Neurolocator, a model of attention //Cybernetics systems'88, 1988. P. 999-1006. Kluwer Academic Publisher.
- [24] Malsbyrg C., Schneider W. A neural cocktail-party processor //Biol. Cybern., 1986. V. 54, P. 29-40.
- [25] Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Казанович Я.Б. и др. Осцилляторные нейронные сети. Математические результаты и приложения // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, N 1. С. 3 -43.
- [26] Крюков В.И., Борисюк Г.Н. и др. Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге //Пуццино, 1986. 112 с.
- [27] Винер Н., Розенблют А. // Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1961. Вып.3. С. 3-56.
- [28] Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сельверстон А. и др. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФМН, 1996. Т. 166, N 4. С. 363-389.
- [29] Рабинович М.И. Хаос и нейродинамика // Известия ВУЗов. Радиофизика, 1996. Т. XXXIX, N 6. С. 757-168.
- [30] Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А. От динамики популяционных волн, формируемых живыми клетками к нейроинформатике // УФН, 1994. Т. 164, N 10. С. 1041-1071.
- [31] Тимофеев Е.А. Моделирование нейрона, передающего информацию плотностью потока импульсов // Автоматика и телемеханика. 1997. N 3. С. 190-199.

- [32] Ижикевич Е.М., Малинецкий Г.Г. Модель нейронной сети с хаотическим поведением // Преп. Ин. прикл. матем. им. Келдыша РАН N 17, М., 1993. 32 с.
- [33] Ижикевич Е.М., Малинецкий Г.Г. О возможной роли хаоса в нейросистемах // Докл. АН России. 1992. Т. 326, N 4. С. 626 - 632.
- [34] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Об одной модели функционирования нейронной сети // Модел. динам. попул. Н.Новгород, 1990. С. 70 - 78.
- [35] Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование, 1990. Т. 2, N 11. С. 64 -76.
- [36] Майоров В.В., Шабаршина Г.В. Сообщение о сетях W - нейронов // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1997. В. 4. С. 37 - 50.
- [37] Майоров В.В., Шабаршина Г.В. Простейшие режимы пачечной волновой активности в сетях W - нейронов // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1999. Т. 6, N 1. С. 36 - 39.
- [38] Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. М.: Мир, 1992.
- [39] Дмитриев А.С. Хаос и обработка информации в нелинейных, динамических системах // РЭ. 1993. Т. 38, N 1. С. 1-7.

Клеточная нейронная сеть в задаче фильтрации двумерного сигнала¹

А. К. Карлин, А. А. Короткин, Н. А. Стрелков
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Приводится математическая модель клеточной нейронной сети для реализации экспоненциального сглаживающего фильтра двумерного сигнала. Предлагаемая сеть в стационарном состоянии реализует свертку сигнала с заданным ядром.

1. Введение

Линейная фильтрация двумерного сигнала $X_{m,n}$ сводится к вычислению свертки

$$Y_{m,n} = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} w_{k,l} X_{m-k,n-l}, \quad (1)$$

где $w_{k,l}$ – ядро свертки (импульсная реакция фильтра), $Y_{m,n}$ – отфильтрованное изображение (выход фильтра).

Замечание. Поскольку в реальных задачах значения $X_{m,n}$ заданы в конечном диапазоне индексов $m, n = 1, \dots, N$, в дальнейшем для корректности формулы (1) будем формально считать, что сигнал определен при всех $m, n = 0, \pm 1, \dots$ и $X_{m,n} = 0$ при $(m, n) \notin \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$.

Решение на практике задачи фильтрации сводится к нахождению подходящего ядра $w_{k,l}$ свертки; для изображений ядро подбирается, как правило, эвристически. Если ядро $w_{k,l}$ отлично от нуля в ограниченной области $-r \leq k \leq r, -r \leq l \leq r$, где r невелико ($r = 1, 2$), говорят об апертурной, или локальной, фильтрации, при этом свертка вычисляется непосредственно

$$Y_{m,n} = \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r w_{k,l} X_{m-k,n-l}.$$

Примеры матриц $W = [w_{k,l}]_{k,l=-1}^1$ для различных задач фильтрации (сглаживание шума, выделение контуров изображения) приведены в [1].

В данной работе будет рассматриваться экспоненциально сглаживающий фильтр, т.е. свертка с ядром

$$w_{k,l} = q^{|k|+|l|}, \quad \text{где } 0 < q < 1.$$

Важным вопросом является реализация свертки с заданным ядром. Для этого можно использовать БПФ, однако вычислительные затраты при этом достаточно велики. В работе [2] было предложено (в качестве примера) использовать для фильтрации изображений клеточную нейронную сеть (CNN – Cellular Neural Network) на аналоговых элементах с клоновой матрицей синаптических весов. Недостатками данного подхода являются следующие. Один такт работы такой сети эквивалентен апертурной (локальной) фильтрации по окну размера 3×3 , т.е. фактически реализует свертку вида

$$Y_{m,n} = \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 w_{k,l} X_{m-k,n-l}.$$

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00214 и 98-01-00216) и программы "Университеты России. Фундаментальные исследования".

Последующие такты соответствуют повторной обработке тем же самым фильтром. Поэтому приемлемый результат получается лишь в начале переходного процесса (≤ 20 тактов), о чем говорят примеры, приведенные там же. В стационарном же состоянии сети (при $t \rightarrow \infty$) результат практически не зависит от обрабатываемого изображения и представляет сплошной "серый" фон. Кроме того, при подаче на сеть нового изображения необходимо обнулить состояния всех нейронов.

Следует отметить, что к настоящему времени опубликовано много работ, посвященных фильтрации изображений нейронными сетями, в том числе и клеточными (см., например, [3]–[4]). Однако почти все результаты носят скорее эвристический характер – строгое обоснование сходимости к *стационарному состоянию нейросети, являющемуся результатом фильтрации*, отсутствует.

Ниже предлагается подход, свободный от указанных недостатков. Идея его заключается в следующем. Сначала строится разностное уравнение с постоянными коэффициентами, решением которого является требуемая свертка сигнала. Далее предлагается аппаратная реализация разностного уравнения, представляющая собой CNN. Эволюция сети приводит ее в стационарное состояние, которое совпадает с решением соответствующего разностного уравнения.

2. Построение разностного уравнения

Пусть L – 9-точечный разностный оператор с постоянными коэффициентами $a_{k,l}$, $k, l = 0, \pm 1$, действующий следующим образом:

$$Lz_{p,s} = \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 a_{k,l} z_{p+k, s+l}. \quad (2)$$

Несложные вычисления показывают, что в классе операторов вида (2) существует и единственен оператор, для которого ядро свертки $w_{p,s} = q^{|k|+|l|}$ является фундаментальным решением уравнения с этим оператором, т.е. выполняется условие

$$Lw_{p,s} = \delta_p^0 \delta_s^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } p = s, \\ 0, & \text{если } p \neq s. \end{cases} \quad (3)$$

Этот единственный оператор определяется следующим набором коэффициентов

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{(1+q^2)^2}{(1-q^2)^2}, \\ a_{1,0} &= a_{-1,0} = a_{0,1} = a_{0,-1} = -\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}, \\ a_{1,1} &= a_{-1,1} = a_{1,-1} = a_{-1,-1} = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Справедливость (4) сразу следует из того, что

$$q^{|p+1|} + q^{|p-1|} = (q + 1/q)q^{|p|}$$

для любого целого $p \neq 0$, откуда

$$\frac{1}{q - 1/q} \{q^{|p+1|} + q^{|p-1|} - (q + 1/q)q^{|p|}\} = \delta_p^0$$

для всех целых p .

Следствием (1) и (4) является равенство

$$LY_{p,s} = X_{p,s}. \quad (5)$$

Конечно, для корректности (5) следует предполагать, что $Y_{p,s} = 0$ для всех достаточно больших p и s . Можно строить итерационные методы решения уравнения (5), простейший (а в данном случае и единственно разумный) из которых имеет следующий вид. Выбирается начальное приближение $Y^0 = [y_{p,s}^0]$ и для $t = 0, 1, 2, \dots$ каждое следующее приближение находится из соотношений

$$Y_{p,s}^{t+1} = Y_{p,s}^t - \gamma (LY_{p,s}^t - X_{p,s}), \quad (6)$$

где γ – некоторый итерационный параметр.

Известно, что для итерационных процессов подобного типа оптимальным (в определенном смысле) является следующий выбор этого параметра [5]:

$$\gamma = \frac{2}{M_\lambda + m_\lambda},$$

где m_λ , M_λ – соответственно нижняя и верхняя оценки собственных чисел оператора $\mathbf{L}$.

При таком выборе итерационный процесс (6) сходится для любого начального приближения Y^0 , причем гарантируется следующая оценка скорости сходимости:

$$\|Y - Y^0\| \leq C\rho^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

где C не зависит от t , а $\rho \in (0, 1)$ имеет вид $\rho = (M_\lambda - m_\lambda)(M_\lambda + m_\lambda)^{-1}$.

Анализ спектральных свойств оператора $\mathbf{L}$, приведенный в Приложении, позволяет получить следующие оценки его собственных чисел:

$$m_\lambda = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2, \quad M_\lambda = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2.$$

Следовательно, итерационный параметр имеет значение

$$\gamma = \frac{2}{\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2 + \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2} = \frac{(1-q^2)^2}{1+6q^2+q^4}.$$

С учетом вида коэффициентов оператора $\mathbf{L}$ итерационный процесс (6) при оптимальном выборе параметра γ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_{p,s}^{t+1} = & \frac{q}{1+6q^2+q^4} [4qY_{p,s}^t + (1+q^2)(Y_{p+1,s}^t + Y_{p-1,s}^t + Y_{p,s+1}^t + Y_{p,s-1}^t) \\ & - q(Y_{p+1,s+1}^t + Y_{p+1,s-1}^t + Y_{p-1,s+1}^t + Y_{p-1,s-1}^t)] + \frac{1+2q^2+q^4}{1+6q^2+q^4} X_{p,s}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Реализация свертки клеточной нейронной сетью

Рекуррентные соотношения (7) можно рассматривать как уравнения эволюции некоторой динамической системы. Естественно в качестве такой системы взять клеточную нейронную сеть (CNN) на адаптивных сумматорах. Каждая клетка CNN связана синаптической связью со своими соседями (8 клеток) и сама с собой. Кроме синаптических связей каждая клетка имеет одну сенсорную связь с постоянным во времени внешним сигналом (рис. 1). Матрица синаптических весов клеток является клоновой, т.е. одинаковой для всех клеток.

Эволюция CNN при синхронном переключении клеток описывается следующей системой:

$$Y_{p,s}(t+1) = \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 a_{k,l} Y_{p+k,s+l}(t) + b_{p,s} U_{p,s}, \quad (8)$$

где

$Y_{p,s}$ – выходной сигнал (p, s) -й клетки в момент времени t ;

$a_{k,l}$ – элемент клоновой матрицы (размера 3×3) синаптических весов клетки;

$b_{p,s}$ – сенсорный вес (p, s) -й клетки;

$U_{p,s}$ – внешний сигнал, поступающий на клетку (p, s) .

Выберем клоновую матрицу A синаптических весов и сенсорный вес клетки следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_0 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{4q^2}{1+6q^2+q^4}, \quad a_1 = \frac{q^2}{1+6q^2+q^4}, \quad a_2 = \frac{(1+q^2)q}{1+6q^2+q^4};$$

$$b_{p,s} = \frac{(1+q^2)^2}{1+6q^2+q^4}$$

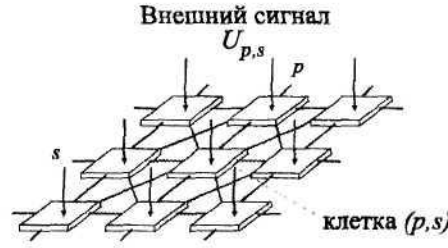


Рис. 1. Структура CNN

Пусть в качестве внешнего (сенсорного) воздействия на клетки сети подается обрабатываемый сигнал, т.е. $U_{p,s} = X_{p,s}$. В этом случае динамика сети при любом начальном состоянии $Y(0)$ полностью совпадает с итерационным процессом (7), который сходится, как показано выше, со скоростью геометрической прогрессии. Таким образом, в стационарном состоянии выход сети дает отфильтрованное изображение в виде свертки (1) с экспоненциальным ядром.

Замечание. Часто ядро свертки выбирается в виде $w_{k,l} = w_0 q^{|k|+|l|}$, где $w_0 = (1-q)^2(1+q)^{-2}$ – нормирующий множитель, определяемый из условия $\sum w_{k,l} = 1$. Требуемая при этом модификация коэффициентов разностного оператора $\mathbf{L}$ и, соответственно, синаптических и сенсорных весов сети не вызывает трудностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Оценка спектра оператора $\mathbf{L}$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{L} = L_1 L_2$, где одномерные разностные операторы L_1 и L_2 определяются равенствами

$$\begin{aligned} L_1 z_{p,s} &= \frac{1+q^2}{1-q^2} z_{p,s} - \frac{q}{1-q^2} (z_{p+1,s} + z_{p-1,s}), \\ L_2 z_{p,s} &= \frac{1+q^2}{1-q^2} z_{p,s} - \frac{q}{1-q^2} (z_{p,s+1} + z_{p,s-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Можно показать, что L_1 и L_2 перестановочны (и поэтому имеют общую систему собственных векторов), каждый из них симметричен, а если $0 < q < 1$, как в рассматриваемом случае, то и положительно определен.

Пусть $N \geq 1$ и

$$\Omega = \{(p, s) : 1 \leq p, s \leq N-1\}$$

– множество точек с целочисленными координатами, принадлежащих открытому квадрату $(0, N) \times (0, N)$,

$$\Gamma = \{(0, s) : 0 \leq s \leq N\} \cup \{(N, s) : 0 \leq s \leq N\} \cup \{(p, 0) : 0 \leq p \leq N\} \cup \{(p, N) : 0 \leq p \leq N\}$$

целочисленные точки, принадлежащие границе квадрата $[0, N] \times [0, N]$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Для заданных $\{X_{p,s}\}_{(p,s) \in \Omega}$ требуется найти такой набор $\{Y_{p,s}\}_{(p,s) \in \bar{\Omega}}$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{L}Y_{p,s} &= X_{p,s}, & (p, s) \in \Omega, \\ Y_{p,s} &= 0, & (p, s) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}Y_{p,s} &= \frac{1}{(1-q^2)^2} \left\{ (1+q^2)^2 Y_{p,s} - q(1+q^2) [Y_{p+1,s}^n + Y_{p-1,s}^n + Y_{p,s+1}^n + Y_{p,s-1}^n] + \right. \\ &\quad \left. + q^2 [Y_{p+1,s+1}^n + Y_{p+1,s-1}^n + Y_{p-1,s+1}^n + Y_{p-1,s-1}^n] \right\} \end{aligned}$$

По сути дела, (10) – линейная алгебраическая система, в которой $(N+1)^2$ уравнений и столько же неизвестных. Матрица этой системы разрежена и имеет специфическую структуру, что позволяет применять для решения системы (10) методы, использующие эту специфику.

Пусть H – пространство сеточных функций, определенных в узлах множества $\bar{\Omega}$ и равных нулю в точках множества Γ . Понятно, что $\dim H = (N-1)^2$ (эта размерность совпадает с количеством узлов, принадлежащих множеству Ω). Для любых $z, v \in H$ пусть

$$(z, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{p,s=1}^{N-1} z_{p,s} v_{p,s}$$

– скалярное произведение в H .

Если $L_i : H \rightarrow H$, $i = 1, 2$ – линейные операторы, определяемые равенствами

$$L_1 z_{p,s} = \begin{cases} \frac{1+q^2}{1-q^2} z_{p,s} - \frac{q}{1-q^2} (z_{p+1,s} + z_{p-1,s}), & \text{если } (p,s) \in \Omega, \\ 0, & \text{если } (p,s) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$L_2 z_{p,s} = \begin{cases} \frac{1+q^2}{1-q^2} z_{p,s} - \frac{q}{1-q^2} (z_{p,s+1} + z_{p,s-1}), & \text{если } (p,s) \in \Omega, \\ 0, & \text{если } (p,s) \in \Gamma, \end{cases}$$

а $L = L_1 L_2$, то система (10) может трактоваться как операторное уравнение

$$LY = X$$

в пространстве H .

Поскольку операторы L_1 и L_2 отличаются друг от друга лишь направлением, вдоль которого они действуют, имеет смысл поступить следующим образом.

Пусть H_1 – пространство сеточных функций одной переменной, определенных в узлах $0, 1, \dots, N-1, N$ и равных нулю в крайних точках 0 и N . Тогда $\dim H_1 = N-1$. Для любых $z, v \in H_1$ пусть

$$(z, v)_1 = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N-1} z_p v_p$$

– скалярное произведение в H_1 .

Пусть $B : H_1 \rightarrow H_1$ – линейный оператор, определяемый равенством

$$Bz_p = \begin{cases} \frac{1+q^2}{1-q^2} z_p - \frac{q}{1-q^2} (z_{p+1} + z_{p-1}), & \text{если } 1 \leq p \leq N-1, \\ 0, & \text{если } p = 0 \text{ или } p = N. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что система $\{\varphi_p^{(s)}\}_{s=1}^{N-1}$, где

$$\varphi_p^{(s)} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi s p}{N}, \quad p = 0, \dots, N, \quad s = 1, \dots, N-1$$

образует ортонормированный в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_1$ базис пространства H_1 , состоящий из собственных элементов оператора B , причем соответствующие собственные значения имеют вид

$$\lambda_s = \frac{(1-q)^2 + 4q \sin^2 \frac{\pi s}{2N}}{1-q^2}, \quad s = 1, \dots, N-1.$$

Действительно, если $p, s = 1, \dots, N-1$, то

$$\begin{aligned} B\varphi_p^{(s)} &= \frac{1}{1-q^2} \left\{ (1+q^2)\varphi_p^{(s)} - q(\varphi_{p+1}^{(s)} + \varphi_{p-1}^{(s)}) \right\} = \\ &= \frac{1}{1-q^2} \left\{ (1+q^2)\varphi_p^{(s)} - q\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi s(p+1)}{N} + \sin \frac{\pi s(p-1)}{N} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{1-q^2} \left\{ (1+q^2)\varphi_p^{(s)} - 2q\sqrt{2} \sin \frac{\pi s p}{N} \cos \frac{\pi s}{N} \right\} = \\ &= \frac{1+q^2 - 2q \cos \frac{\pi s}{N}}{1-q^2} \varphi_p^{(s)} = \frac{(1-q)^2 + 2q(1 - \cos \frac{\pi s}{N})}{1-q^2} \varphi_p^{(s)} = \lambda_s \varphi_p^{(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\sin^2 X$ возрастает на $(0, \pi/2)$, то

$$\frac{(1-q)^2 + 4q \sin^2 \frac{\pi}{2N}}{1-q^2} = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-2} < \lambda_{N-1} = \frac{(1-q)^2 + 4q \cos^2 \frac{\pi}{2N}}{1-q^2},$$

откуда следует, что

$$\lambda_s \in \left(\frac{1-q}{1+q}, \frac{1+q}{1-q} \right), \quad s = 1, \dots, N-1.$$

Ортонормированность системы $\{\varphi^{(s)}\}_{s=1}^{N-1}$ также проверяется без труда.

Только что описанные спектральные свойства оператора B дают возможность описать спектры операторов L_1 , L_2 и $L = L_1 L_2$. В частности, ортонормированный в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ базис пространства H , состоящий из собственных элементов оператора L , образует система

$$\{\varphi^{(s,m)}\}_{s,m=1}^{N-1},$$

где

$$\varphi_{p,k}^{(s,m)} = 2 \sin \frac{\pi s p}{N} \sin \frac{\pi m k}{N}, \quad p, k = 0, \dots, N, \quad s, m = 1, \dots, N-1,$$

причем соответствующие собственные значения имеют вид

$$\lambda_{s,m} = \frac{[(1-q)^2 + 4q \sin^2 \frac{\pi s}{2N}][(1-q)^2 + 4q \sin^2 \frac{\pi m}{2N}]}{(1-q^2)^2}, \quad s, m = 1, \dots, N-1.$$

Минимальное и максимальное собственные числа оператора L имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \lambda_{1,1} = \left(\frac{(1-q)^2 + 4q \sin^2 \frac{\pi}{2N}}{1-q^2} \right)^2 > \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2, \\ \lambda_{\max} &= \lambda_{N-1,N-1} = \left(\frac{(1-q)^2 + 4q \cos^2 \frac{\pi}{2N}}{1-q^2} \right)^2 < \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, спектр оператора L лежит в не зависящем от N интервале (m_λ, M_λ) :

$$\lambda_{s,m} \in (m_\lambda, M_\lambda) = \left(\left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2, \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^2 \right), \quad s, m = 1, \dots, N-1.$$

Литература

- [1] Яншин В., Калинин Г. Обработка изображений на языке СИ для IBM PC. Алгоритмы и программы. М.: Мир, 1994.
- [2] Chua L., Yang L. Cellular Neural Networks: Applications//IEEE Transactions on circuits and systems. Vol. 35. No 10, October 1988. P.1274-1294.
- [3] Айзенберг И.Н. Некоторые алгоритмы обработки изображений и их реализация на нейросетях//Компьютерная оптика, 1997. Вып. 17. С.135-143.
- [4] Shi B. E. Spatio-temporal Image Filtering with Cellular Neural Networks//Ph.D. Thesis. University of California at Berkeley. 1994 (www.ee.ust.hk/~eebert/thesis.html).
- [5] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.

УДК 517.9

Высокомодовый параметрический резонанс

А.Д. Пендюр

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

Открытие явления параметрического резонанса связывают с именами Матье, Хилла и других. В монографии [1] этот интересный феномен распространен на уравнения гиперболического типа с малым параметром. Ниже наличие малого параметра не предполагается - показывается, что высокомодовый параметрический резонанс может быть без этого ограничения.

1. Объектом нашего исследования является классическое телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \sin \omega t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

дополненное нулевыми граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (2)$$

Здесь затухание $\alpha > 0$, частота $\omega > 0$, знак β - произвольный. При заданных условиях ставим задачу о неустойчивости решений краевой задачи (1), (2), предполагая параметры β и ω достаточно большими, что отличает наше исследование от содержащихся в [1] материалов, где α и β считались малыми.

Используя метод Фурье, приходим к счетному числу обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + (k^2 + \beta \cos \omega t)z = 0, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots$

Наша цель - показать, что при подходящем большом $k = k_0$ и $\beta = \beta_0 k_0$, $\omega = 2k_0 + \gamma$, где β_0 и γ по порядку равны единице.

2. Выполняя в (3) нормировку времени

$$\left(k_0 + \frac{\gamma}{2}\right)t = \tau,$$

приходим к уравнениям

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{\left(k_0 + \frac{\gamma}{2}\right)}\dot{z} + \frac{1}{\left(k_0 + \frac{\gamma}{2}\right)^2}(k^2 + \beta_0 k_0 \cos 2\tau)z = 0. \quad (4)$$

Пусть

$$k = k_0 + p_0 = k_0 + \frac{\gamma}{2} + p_0 - \frac{\gamma}{2}, \quad (5)$$

где натуральное число p_0 по порядку равно единице. Положим

$$\mu = \frac{1}{k_0 + \frac{\gamma}{2}}. \quad (6)$$

Используя обозначения (6) и (5), перенишем уравнение (4):

$$\ddot{z} + \alpha \mu \dot{z} + (1 + 2c_0 \mu + \beta_0 \mu \cos 2\tau)z = 0, \quad (7)$$

где $c_0 = p_0 - \frac{\gamma}{2}$, а слагаемые порядка μ^2 опущены.

Отметим, что в силу (6) при большом k_0 величина $\mu > 0$ мала. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть

$$\beta_0^2 > 4\alpha^2(4 + c_0^2). \quad (8)$$

Тогда найдется такое μ_0 , что при $0 < \mu < \mu_0$ уравнение (7) имеет экспоненциально растущее решение.

Доказательство получается путем использования подходящего принципа усреднения или путем применения развитой в [2] техники.

3. Итак, показано, что в краевой задаче (1), (2) возможен высокомодовый параметрический резонанс, если подходящим образом увеличить ω и β . Из формулы (5) и неравенства (8) вытекает, что резонанс возможен сразу на нескольких модах, количество которых зависит от величины c_0^2 .

Литература

- [1] Фомин В.Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
- [2] Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.

УДК 517.9

Аттракторы простейшей модели задачи хищник - хищник - жертва

А.Г. Перетрухин

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

e-mail : valalex@uniyar.ac.ru

Данный вопрос изучается в предположении, что жертва сильно плодовита, а неконкурирующие хищники имеют одинаковые биологические характеристики.

1. Напомним некоторые свойства известного уравнения Хатчинсона

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t-1)]N, \quad (1)$$

являющегося базовым в математической экологии [1]. Предположим, что велик параметр λ . Тогда наименьшее значение релаксационного цикла уравнения (1), являющегося его единичным аттрактором, равно [1]

$$\underline{N} = \exp(-\exp \lambda + O(\lambda)). \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что при больших λ плотность популяции жертвы падает до чрезмерно малых значений. В статье [2] рассмотрена задача хищник-жертва и выделены такие биологические характеристики хищника, при которых становится меньше единицы коэффициент при $\exp \lambda$. Ниже аналогичный вопрос решается, когда имеются два хищника, обладающих определенными свойствами симметрии.

2. Итак, объект нашего исследования - система дифференциально-разностных уравнений [2]

$$\dot{N}_1 = \frac{\lambda}{1+a} \left[1 + a \left(1 - \frac{N_2 + N_3}{2} \right) - N_1(t-1) \right] N_1, \quad (3)$$

$$\dot{N}_2 = r[N_1 - N_2(t-h)]N_2, \quad \dot{N}_3 = r[N_1 - N_3(t-h)]N_3, \quad (4)$$

где λ велико, а остальные параметры - некоторые положительные константы.

Сначала остановимся на связи между системой (3), (4) и рассмотренной в [3].

Пусть в (4) $N_3 \equiv 0$. Выполняя в оставшейся двумерной системе нормирующие замены

$$N_1 \rightarrow \frac{1+a}{1+\frac{a}{2}} N_1, \quad N_2 \rightarrow \frac{1+a}{1+\frac{a}{2}} N_2,$$

преобразуем ее к стандартной форме

$$\dot{N}_1 = \frac{\lambda}{1+a_0} [1 + a_0(1 - N_2) - N_1(t-1)] N_1, \quad (5)$$

$$\dot{N}_2 = r_0[N_1 - N_2(t-h)]N_2, \quad (6)$$

где

$$a_0 = \frac{a}{2}, \quad r_0 = \frac{1+a}{1+\frac{a}{2}} r. \quad (7)$$

В [2] показано, что аттракторы системы (5), (6) связаны с одномерным отображением

$$z \rightarrow 1 + K_0 z \ln z,$$

рассмотренном на единичном интервале $0 < z < 1$, если только

$$1 < K_0 = \frac{r_0 h (1 + a_0)}{a_0} < e. \quad (8)$$

При этом после очередного подъема плотности жертвы происходит ее падение до величины, по порядку равной

$$\exp[-(1 - z + a_0 K_0 z \ln z) \exp \lambda]. \quad (9)$$

Отметим, что переменная z связана с предшествующей всплеску плотности жертвы малостью плотности хищника.

Из сказанного выше и из [1] следует, что динамика системы (3), (4) связана с двумерным отображением в единичном квадрате:

$$z_1 \rightarrow 1 + K_0 z_1 \ln z_1, \quad z_2 \rightarrow 1 + z_2 - z_1, \quad (10)$$

если $z_1 > z_2$, и симметричным отображением

$$z_1 \rightarrow 1 + z_1 - z_2, \quad z_2 \rightarrow 1 + K_0 z_2 \ln z_2, \quad (11)$$

если $z_2 > z_1$.

Из (9) следует, что нас должна интересовать следующая числовая характеристика

$$\underline{n}_1 = \max(1 - z + a_0 K_0 z \ln z), \quad (12)$$

где максимум берется по $z = z_1$, если $z_1 > z_2$, и по $z = z_2$, если $z_2 > z_1$. Разумеется, предполагается, что данные z_1 и z_2 – компоненты аттрактора отображения (10), (11).

Отметим, что формула (12) совпадает (с точностью до обозначений) с приведенной в [3]. Как и в [3], будем интересоваться такими характеристиками хищников, при которых

$$\underline{n}_1 < 1, \quad (13)$$

т.е. за счет хищников уменьшаются осцилляции плотности жертвы. Область, задаваемую неравенством (13), будем строить в плоскости (K_0, a_0) . На рис. 1 показана кривая $\underline{n}_1 = 1$, ниже которой выполняется неравенство (13). Для сопоставления пунктирной линией показана аналогичная кривая, построенная в [3] для системы (5), (6).

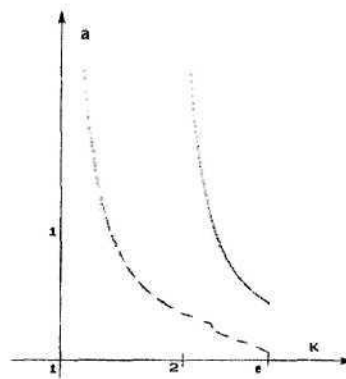


Рис. 1.

Данный рисунок убеждает нас, что два предельно идеализированных хищника лучше одного.

3. Теперь об аттракторах отображения (10), (11). При условии (8) хищники поочередно реагируют на каждый всплеск плотности жертвы. Однако в отличие от случая, рассмотренного в [3], динамика много богаче (см. рис. 2).

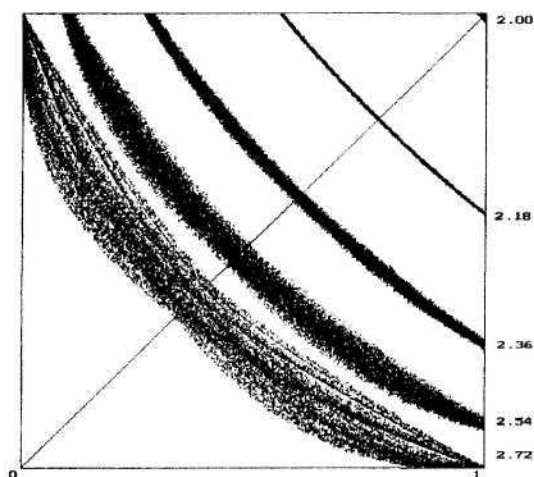


Рис. 2.

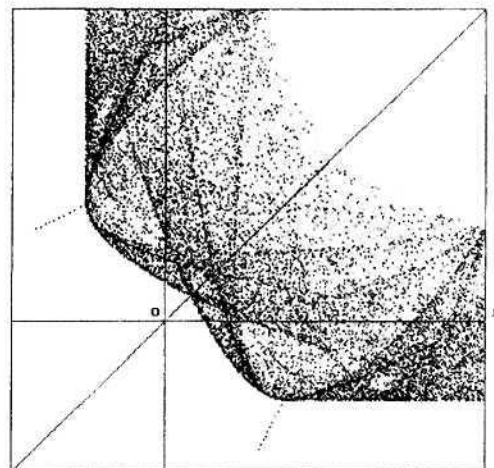


Рис. 3.

При $1 < K_0 < 2$ аттрактор располагается в окрестности точки $(1, 1)$ единичного квадрата, показанного на рис. 2. При дальнейшем увеличении K_0 точки странного аттрактора заполняют некоторые полосы (на рис. 2 у каждого такого слоя стоит величина K_0).

Отдельно остановимся на случае $K_0 > \epsilon$. При этом условии по-прежнему можно пользоваться отображением (10), (11), если только $K_0 < K_* = 3.93200 \dots$. При $\epsilon < K_0 < 3.4$ аттрактор структурно подобен показанному на рис. 2. Для примера на рис. 3 он показан при $K_0 = 3.4$.

При $3.4 < K_0 < K_*$ динамика становится периодичной (на рис. 3 каждой паре точек, расположенных во втором и третьем октантах и упорядоченных указанным способом, соответствует свое значение K_0).

Отметим еще одно интересное наблюдение. Ограничимся точками отображения (10), (11), расположенными ниже биссектрисы первого координатного угла. Тогда в каждой точке произведение мультипликаторов вычисляется по формуле

$$K_0^2(1 + \ln z_1)(1 + \ln(1 + z_2 + z_1)). \quad (14)$$

Как оказывается, модуль усредненных величин (14) больше единицы.

Литература

- [1] Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221-246.
- [2] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. М.: Наука, 1993. (Тр. МИРАН. Т. 199).
- [3] Колесов Ю. С., Перетрухин А. Г., Смирнов А. В. Динамика взаимодействия хищника со своей сильно плодовитой жертвой // Модел. и анализ информ. систем. Ярославль, 1999. Т. 6, №2. С. 34-38.

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Инвариантные относительно сдвигов и поворотов функции на изображениях, построенных на основе треугольной решетки¹

П. Г. Парфенов

Ярославский государственный университет

150 000, Ярославль, Советская, 14

В работе вводится и изучается класс функций на изображениях, построенных на основе треугольной решетки. Довольно простые требования инвариантности этих функций относительно естественных преобразований треугольной решетки позволяют, тем не менее, получить представление такого рода функций в виде сумм, что дает широкие возможности для параллельной обработки.

В настоящей статье рассматривается один подход к распознаванию изображений, заключающийся в построении функций, принимающих различные значения на различных изображениях. Такой подход вполне уместен для конкретных наборов изображений, каковыми, например, являются изолированные алфавитно-цифровые символы. Такого рода задача решалась для изображений, построенных на основе прямоугольной решетки, например, в работах [1, 2, 3, 4, 7]. Особенностью настоящей заметки является изучение указанного выше подхода в применении к изображениям, построенным на основе треугольной решетки, к этой тематике относятся работы автора [5, 8]. Под изображением, построенным на основе треугольной решетки, понимается изображение, для которого аналогами пикселей являются треугольные элементы некоторой треугольной решетки (Рис. 1), через a_{ij} будем обозначать как сам этот элемент, так и значение его цветности. Изображение, естественным образом, можно представить в виде матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$, у которой элементы могут принимать значения либо 0, либо 1, то есть черно-белое изображение. Кроме этого, каждому такому изображению можно сопоставить подмножество $A = \cup \{K_{ij} : a_{ij} = 1, a_{ij} \in A\}$ пространства R^2 , где K_{ij} - соответствующие замкнутые треугольники пространства R^2 . Это соответствие будем обозначать через $\tilde{A} = h(A)$. Тогда если $\tilde{\varphi}$ - функция на множестве подмножеств $\tilde{A} \subseteq R^2$, то определим функцию φ на множестве изображений A , полагая $\varphi(A) = \tilde{\varphi}(\tilde{A})$. Будем говорить, что A и B имеют полноценное пересечение, если $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$, где $A \cap B = \min(a_{ij}, b_{ij})$. Выделим класс PT_2 функций φ на изображениях A , обладающих следующими свойствами:

СВОЙСТВО 1. Функция φ инвариантна относительно сдвигов, то есть если изображение A' получено из изображения A'' с помощью некоторого сдвига треугольной решетки, не выводящего изображения за пределы соответствующего окна, то $\varphi(A') = \varphi(A'')$.

СВОЙСТВО 2. Для любых двух изображений A и B с полноценным пересечением выполнено условие аддитивности: $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$, где $A \cup B = \max(a_{ij}, b_{ij})$.

Теперь выведем понятие фрагмента T изображения, построенного на основе треугольной решетки, которое является ключевым в нашем подходе. Фрагментом будем называть любую совокупность элементов изображения следующих видов (Рис. 1):

1. $T = \{a_{ij-1}, a_{ij}, a_{ij+1}, a_{i+1j}\}$, причем при i нечетном, j - четное, а при i четном, j - нечетное.
2. $T = \{a_{k-1l}, a_{kl}, a_{kl-1}, a_{kl+1}\}$, причем при k нечетном, l - нечетное, а при k четном, l - четное.
3. $T = \{a_{pq-1}, a_{pq}, a_{pq+1}, a_{p+1q-1}, a_{p+1q}, a_{p+1q+1}\}$, причем при p нечетном, q - нечетное, а при p четном, q - четное.

Легко видеть, что существует всего 96 различных типов такого рода фрагментов, их можно некоторым образом упорядочить T_i , $i = \overline{0, 95}$. Разобьем эти типы фрагментов на классы эквивалентности T'_i , $i = \overline{0, 20}$, где в каждом классе содержатся фрагменты, полученные друг из друга поворотами, кратными $\frac{\pi}{3}$, и отражениями треугольной решетки относительно горизонтальной оси. Под символикой $T \subseteq A$ будем понимать, что T является фрагментом изображения A . Естественно рассматривать изображения, удовлетворяющие условию "окаймления": $a_{i1} = a_{i2} = a_{im-1} = a_{im} = a_{1j} = a_{nj} = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Будем говорить, что изображение A порождено фрагментом T , если на элементах фрагмента T изображение совпадает с ним, а для всех остальных элементов значение цветности равно 0.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-00309) и федеральной программы "Интеграция"

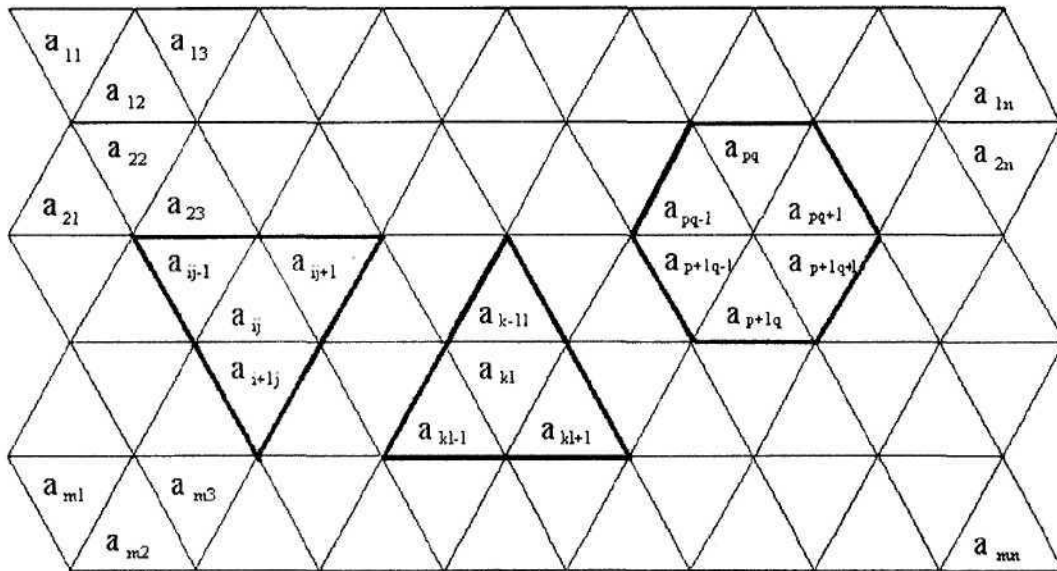


Рис. 1.

Теорема 1. Для всякой функции $\varphi \in PT_2$ существует функция F , определенная на фрагментах T , такая, что для любого изображения A , построенного на основе треугольной решетки, верна формула

$$\varphi(A) = \sum_{T \subseteq A} F(T).$$

Верен также аналог этой Теоремы 1 для фрагментов T' .

Теорема 2. Для всякой функции $\varphi \in PT_2$, обладающей дополнительно свойством инвариантности относительно поворотов на углы кратные $\frac{\pi}{3}$, а также свойством инвариантности для отражений относительно горизонтальной оси, существует функция F , определенная на фрагментах T' , такая, что для любого изображения A , построенного на основе треугольной решетки, верна формула

$$\varphi(A) = \sum_{T' \subseteq A} F(T').$$

Символика $F(T')$ обозначает, что на всех элементах соответствующего класса эквивалентности T' функция F принимает одно и то же значение. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть $\varphi \in PT_2$ и пусть дана система линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{95} \alpha_{ij} F(T_j) = \varphi(A_i), i = \overline{0, 95}, \quad (1)$$

где α_{ij} - число фрагментов T_j , содержащихся в изображении A_i , порожденном треугольным фрагментом T_i . Тогда эта система имеет решение $F(T_j)$, $j = \overline{0, 95}$.

Доказательство Леммы проводится прямым применением метода Гаусса. Аналогичная лемма верна и для системы подмножеств T' .

Введем понятие полос на изображении A , построенном на основе треугольной решетки. Всего их три типа:

- 1°. $I_i = \{a_{ij} : j = \overline{1, m}\}$, $i = \overline{1, n}$. Это горизонтальные полосы из треугольных пикселей на изображении.
- 2°. $J_{ij} = \{a_{i+kj+k}, a_{i+kj+k+1} : k \in \mathbb{Z}; a_{i+kj+k}, a_{i+kj+k+1} \in A\}$. Это полосы из треугольных пикселей, полученные из полос 1-го типа поворотом на угол $\frac{2\pi}{3}$ против часовой стрелки.
- 3°. $P_{ij} = \{a_{i+kj-k}, a_{i+kj-k+1} : k \in \mathbb{Z}; a_{i+kj-k}, a_{i+kj-k+1} \in A\}$. Это полосы из треугольных пикселей, полученные из полос 1-го типа поворотом на угол $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке.

Шириной $d_1(A)$ изображения A будем называть величину

$$d_1(A) = 1 + \max\{|i_1 - i_2| : a_{i_1 j} = a_{i_2 k} = 1\},$$

то есть число полос первого типа, которыми можно заполнить все пространство начиная с самого верхнего единичного элемента изображения A до самого нижнего, включая его самого. Аналогичным образом, в применении к полосам 2-го типа, введем понятие ширины $d_2(A)$ изображения A , а в применении к полосам 3-го типа введем ширину $d_3(A)$ изображения A .

Диаметром изображения A будем называть число

$$d(A) = \max\{d_1(A), d_2(A), d_3(A)\}.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство будем вести индукцией по диаметру изображения. Лемма, доказанная выше, дает базис индукции, так как это, в точности, формулировка Теоремы 1 для изображений диаметра $d \leq 2$. Пусть для всех изображений $d \leq l$ утверждение Теоремы 1 верно, и пусть дано изображение A , такое, что $d(A) = l + 1$, тогда по крайней мере одна из величин $d_1(A)$, $d_2(A)$, $d_3(A)$ принимает значение $l + 1$. Пусть, для определенности, $d_1(A) = l + 1$, а так как $l + 1 \geq 3$, то найдется полоса I первого типа, такая, что выше и ниже этой полосы найдутся пиксели изображения A цветности 1. Образует два новых изображения B и C , где изображение B совпадает с изображением A выше полосы I и на ней самой, а ниже полосы I значение цветности всех пикселей полагается равным 0, аналогично, изображение C совпадает с изображением A ниже полосы I и на ней самой, а выше полосы I значение цветности всех пикселей полагается равным 0. Тогда $d_1(B) \leq l$, $d_1(C) \leq l$, $d_1(B \cap C) \leq l$, $A = B \cup C$, $B \cap C \subseteq I$, и, следовательно, пересечение изображений B и C полноценно. Если $d(B) = l + 1$ или $d(C) = l + 1$, то эти изображения также можно разбить аналогичным образом с помощью полос 2-го и 3-го типов, и понизить диаметры соответствующих множеств до значения $\leq l$, то есть для них верно утверждение Теоремы 1, тогда

$$\varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(B \cap C).$$

Отсюда, по предположению индукции, верно

$$\varphi(A) = \sum_{T \subseteq B} F(T) + \sum_{T \subseteq C} F(T) - \sum_{T \subseteq B \cap C} F(T),$$

а в силу взаимной компенсации значений функции F на фрагментах, "задевающих" изображение B и $B \cap C$ снизу, и аналогичной компенсации для фрагментов, "задевающих" изображения C и $B \cap C$ сверху, имеем

$$\varphi(A) = \sum_{T \subseteq A} F(T).$$

Теорема 1 доказана. Аналогично доказывается Теорема 2.

Литература

- [1] Waard W.P. de. An optimised distance method for character recognition //Pattern Recogn. Lett. 1995, 16, N5. P.499-506
- [2] Wong Wai-Hong, Sin Wan-Chi, Lam Kin-Man. Generation of moment invariants and their uses for characters recognitions //Pattern Recogn. Lett. 1995, 16, N2. P.115-123
- [3] Kovacs-V.Zs.M. A novel architecture for high quality hand-printed character recognition //Pattern Recogn. 1995, 28, N11. P.1685-1692.
- [4] Proceedings of the 13th IAPR International Conference on Pattern Recognition, Vienna, Aug. 25-29, 1996, Vol. 3. Track C.: Applications and Robotic Systems. -Los Alamitos.(Calif.)ets.: IEEE Compat.Soc.Press, 1996. 1008 p.
- [5] Парфенов П.Г., Завьялова Л.М. Об эйлеровой характеристике изображений, построенных на основе гексагональной и треугольной решеток //Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1994. Вып.2. С.84-91.

- [6] Парфенов П.Г., Завьялова Л.М. Об одном классе аддитивных функций на изображениях //Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1996. Вып.3. С.40-45.
- [7] Парфенов П.Г., Завьялова Л.М. Об одном подходе к распознаванию изображений букв //Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль 1997. Вып.4. С.40-45.
- [8] Парфенов П.Г., Сагиров Т.А. О распознавании алфавитно-цифровых символов, построенных на основе треугольной решетки //Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1999. Т.6, №2. С.43-45.